

KNOTEN UND VOLLRINGE.¹

Von

HORST SCHUBERT

in HEIDELBERG.

Inhalt:

	Seite
Einleitung	132
<i>Kapitel I: Vollringe in der 3-Sphäre.</i>	
§ 1. Semilineare Abbildungen	135
§ 2. Deformation von Wegen auf einem Torus	139
§ 3. Vollringe	146
§ 4. Ein Satz von Alexander	151
§ 5. Knoten	155
§ 6. Seelen und Breitenkreise eines Vollringes in der \mathbb{S}^3	157
§ 7. Unverknötete Vollringe	163
§ 8. Deformation über Vollringe	165
§ 9. Die Ordnung eines Vollringes in bezug auf eine Knotenlinie	169
§ 10. Semilineare Äquivalenz von Vollringen in der \mathbb{S}^3	177
§ 11. Treue Abbildungen von Vollringen in der \mathbb{S}^3	184
<i>Kapitel II: Begleitknoten.</i>	
§ 12. Über das Geschlecht von Knotenlinien in Vollringen	186
§ 13. Begleitknoten	192
§ 14. Begleitknoten der Ordnung 1	197
§ 15. Vollringe, die bezüglich einer Knotenlinie nebengeordnet sind	199
§ 16. Zerlegung eines Vollringes durch einen Kreisring	206
§ 17. Kreisringe, die das Komplement eines Vollringes in der \mathbb{S}^3 zerlegen	213
§ 18. Knotenlinien, die gleichzeitig in mehreren Vollringen liegen	216
<i>Kapitel III: Anwendungen.</i>	
§ 19. Begleitknoten von Produktknoten	227
§ 20. Begleitknoten von Schlingknoten	232

¹ Als Habilitationsschrift von der naturw.-mathem. Fakultät der Universität Heidelberg angenommen.

§ 21. Schlauchknoten	245
§ 22. Schlauchzöpfe	253
§ 23. Knoten, die sich als Schlauchzöpfe darstellen lassen	260
§ 24. Knoten, die sich als verallgemeinerte Schlauchzöpfe darstellen lassen	276
Literatur.....	286

Einleitung.

Alle im folgenden vorkommenden Komplexe sollen in euklidische Simplexe zerlegbar sein. Unter der 3-Sphäre \mathbb{S}^3 verstehen wir den Rand eines euklidischen 4-Simplexes. Eine Knotenlinie ist ein orientierter, geschlossener, doppelpunktfreier Streckenzug in der \mathbb{S}^3 . Wird von der Orientierung abgesehen, so sprechen wir von einer nicht-orientierten Knotenlinie. Eine Klasse von Knotenlinien, die sich durch orientierungserhaltende, semilineare Abbildungen der \mathbb{S}^3 auf sich (§ 1) ineinander überführen lassen, heisst Knoten (§ 5). Ein nicht-orientierter Knoten ist entsprechend als Klasse nicht-orientierter Knotenlinien definiert. Als Kreis wird derjenige Knoten bezeichnet, der durch den orientierten Rand eines 2-Simplexes repräsentiert wird.

In der Knotentheorie haben einige Verfahren Interesse gefunden, die es gestatten, aus einem oder mehreren gegebenen Knoten neue „kompliziertere“ Knoten abzuleiten: Schlauchknoten [4]¹, Schlingknoten [12], Produktknoten [9]. Die dabei zur Konstruktion benutzten Knoten wird man als „einfacher“ ansehen als die abgeleiteten. Es erhebt sich die Frage, wie dieses „Einfacher-Sein“ zu erfassen ist und ob nicht auch anderen Knoten, die nicht durch die angegebenen Verfahren erhalten werden können, „einfachere“ Knoten zugeordnet werden können. Diese Frage ist der Anlass zur vorliegenden Untersuchung und soll mit dem Begriff des Begleitknotens eines Knotens beantwortet werden (§ 13).

Wir betrachten dazu in der 3-Sphäre für einen gegebenen Knoten κ eine Knotenlinie k , welche κ darstellt, und einen Vollring \mathfrak{B} , der k im Inneren enthält und die folgenden Bedingungen erfüllt:

1) k ist nicht im Inneren einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten,

2) k ist nicht „Seele“ von \mathfrak{B} (§ 6),

3) \mathfrak{B} ist verknotet, d.h. durch die Seelen von \mathfrak{B} wird nicht der Kreis dargestellt.

Wenn nun k auf \mathfrak{B} nicht nullhomolog ist, betrachten wir eine Seele a von \mathfrak{B} und orientieren sie so, dass k auf \mathfrak{B} zu einem positiven Vielfachen von a homolog ist. Falls k auf \mathfrak{B} nullhomolog ist, betrachten wir eine nicht-orientierte Seele a von \mathfrak{B} . Durch a wird ein Knoten bzw. nicht-orientierter Knoten λ dargestellt, den wir als (orientierten bzw. nicht-orientierten) Begleitknoten von κ bezeichnen.

¹ Die Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Falls k nicht-orientiert ist und den nicht-orientierten Knoten κ darstellt, definieren wir entsprechend nicht-orientierte Begleitknoten von κ . Einen Begleitknoten λ eines Knotens bzw. nicht-orientierten Knotens κ fassen wir als „einfacher“ verknotet als κ auf, und wir nennen einen Knoten einfach, wenn er keinen Begleitknoten besitzt.

Diese Definitionen erweisen sich dadurch als sinnvoll, dass jeder Knoten von seinen Begleitknoten verschieden ist und dass die Eigenschaft, Begleitknoten zu sein, transitiv ist: Ist μ Begleitknoten von λ und λ Begleitknoten von κ , so ist μ Begleitknoten von κ (§ 13). Drückt man die Eigenschaft von λ , Begleitknoten von κ zu sein, durch $\lambda < \kappa$ aus, so erhält man in der Menge aller Knoten und nicht-orientierten Knoten eine (schwache) Anordnung, für welche die einfachen Knoten minimale Elemente sind. Beispiele einfacher Knoten sind der Kreis, die Torusknoten (Schlauchknoten mit dem Kreis als Träger) und diejenigen Schlingknoten, deren Diagonalknoten der Kreis ist (§ 20, § 21). Durch die Begleitknoten wird auch der Begriff des „Einfacher-Seins“ erfasst, von dem wir oben ausgegangen sind: Schlauchknoten besitzen ihren „Träger“ als Begleitknoten, wenn dieser kein Kreis ist, Schlingknoten besitzen ihren „Diagonalknoten“ als nicht-orientierten Begleitknoten, wenn er kein Kreis ist, und für einen Produktknoten sind alle vom Kreis verschiedenen Faktoren Begleitknoten. Die Ausnahmerolle, die der Kreis hierbei spielt, rührt daher, dass wir oben durch die Bedingung 3) den Kreis als Begleitknoten ausgeschlossen haben. Die Gründe hierfür sind einerseits methodischer Art, da in den folgenden Untersuchungen unverknotete Vollringe eine Ausnahmestellung einnehmen werden, und andererseits die Tatsache, dass sonst jeder Knoten den Kreis als Begleitknoten besäße.

Im einzelnen werden wir für Produkt- bzw. Schling- bzw. Schlauchknoten folgendes zeigen:

Ein Begleitknoten eines *Produktknotens* κ ist Faktor von κ oder Begleitknoten eines Primfaktors von κ . Darüber hinaus ergibt sich ein neuer Beweis (vgl. [9]) für die Eindeutigkeit der Zerlegung eines Produktknotens in Primknoten (§ 19).

Jeder vom Kreis verschiedene *Schlingknoten* besitzt das Geschlecht 1 und ist daher Primknoten. Ein Schlingknoten mit einem vom Kreis verschiedenen Diagonalknoten besitzt diesen als einzigen maximalen Begleitknoten: Jeder weitere Begleitknoten ist Begleitknoten des Diagonalknotens. Die Schlingknoten (nach Definition nicht-orientierte Knoten) werden bei Orientierung symmetrische Knoten, d.h. man erhält durch beide möglichen Orientierungen denselben Knoten (§ 20)¹.

Schlauchknoten mit einem vom Kreis verschiedenen Träger besitzen diesen als einzigen maximalen Begleitknoten. Träger, Umlauf- und Verschlingungszahl bilden ein vollständiges Invariantensystem für die Schlauchknoten, wenn für den Kreis als Träger Umlauf- und

¹ Zur Klassifikation der Schlingknoten vgl. H. SEIFERT [12].

Verschlingungszahl so normiert werden, dass die Umlaufzahl kleiner als der Betrag der Verschlingungszahl ist¹. Schlauchknoten sind Primknoten. Das Geschlecht eines Schlauchknotens lässt sich aus dem seines Trägers berechnen (§ 21).

Wir werden die Schlauchknoten noch verallgemeinern zu Knoten, die sich durch „*Schlauchzöpfe*“ (§ 22) darstellen lassen und zu Knoten, die sich durch „*verallgemeinerte Schlauchzöpfe*“ darstellen lassen. Die ersten besitzen einen einzigen maximalen Begleitknoten (§ 23), die zweiten besitzen unter ihren orientierten Begleitknoten einen einzigen maximalen (§ 24). In beiden Fällen erhält man Primknoten. Ein Knoten kann sich auf mehrere Weisen als Schlauchzopf bzw. verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lassen, es lässt sich jedoch ein vollständiger Überblick über alle diese Darstellungen erhalten.

Um zu diesen Resultaten gelangen zu können, werden wir zunächst die erforderlichen Hilfsmittel bereitstellen. In Kapitel I wird die Einbettung von Vollringen in die 3-Sphäre \mathbb{S}^3 untersucht. Im Mittelpunkt steht der Satz von Alexander [2], dass jeder (simpliciale) Torus in der \mathbb{S}^3 mindestens einen Vollring berandet, wofür ein Beweis in § 4 wiedergegeben wird. Der Satz von Alexander wird ergänzt durch den Satz, dass das Komplement eines Vollringes \mathfrak{B} in der \mathbb{S}^3 genau dann ein Vollring ist, wenn \mathfrak{B} unverknotet ist (§ 7). In § 10 wird gezeigt, dass sich zwei Vollringe in der \mathbb{S}^3 genau dann durch eine orientierungserhaltende semilineare Selbstabbildung der \mathbb{S}^3 ineinander überführen lassen, wenn ihre Seelen denselben nicht-orientierten Knoten darstellen.

In Kapitel II werden Begleitknoten eingeführt und die für die Anwendungen spezifischen Hilfsmittel entwickelt. In § 9 wurden bereits eine Homologie- und eine Isotopie-Invariante für die Einbettung einer Knotenlinie in einen Vollring eingeführt. In § 15 und § 18 werden gleichzeitig mehrere Vollringe betrachtet, welche dieselbe Knotenlinie im Inneren enthalten. § 16 und § 17 enthalten hierbei benötigte Hilfsbetrachtungen über die Zerlegung eines Vollringes bzw. seines Komplements durch einen Kreisring. Die Untersuchungen in Kapitel I und II wurden, wo ihnen selbständiges Interesse beigemessen wurde, über das für Kapitel III unbedingt Erforderliche ausgedehnt.

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch unveröffentlichte Untersuchungen von H. Seifert über Schlauchknoten. § 7 Satz 1, § 16 Satz 1, § 17 Satz 1, die hierbei benutzte Faserung der \mathbb{S}^3 und § 21 Satz 5 gehen darauf zurück.

¹ Dieses Resultat stammt von H. SEIFERT [14].

KAPITEL I.

Vollringe in der 3-Sphäre.

§ 1. Semilineare Abbildungen.

Wir werden in weitgehendem Masse semilineare Abbildungen benutzen, die von Graeub [6] behandelt worden sind, und stellen die wesentlichsten Resultate hier zusammen.

Zunächst treffen wir folgende Vereinbarungen: Unter einem *Komplex* verstehen wir stets eine Punktmenge in einem euklidischen n -dimensionalen Raum, die sich in *endlich* viele euklidische Simplexe zerlegen lässt. Wenn wir von Wegen, Flächen, Kugeln und Vollringen sprechen, so sind stets solche Komplexe gemeint. Die *3-Sphäre* \mathfrak{S}^3 nehmen wir stets als Rand eines euklidischen 4-Simplexes an. Es hat demnach einen Sinn, von euklidischen Simplexen in der \mathfrak{S}^3 zu sprechen. Als *simpliciale* Zerlegungen werden nur solche in euklidische Simplexe zugelassen.

Eine *topologische Abbildung* φ eines Komplexes K auf einen Komplex K' heisst *semilinear*, wenn es eine simpliciale Zerlegung von K gibt, deren Simplexe durch φ affin abgebildet werden. Statt semilineare Abbildung sagen wir auch kurz *s-Abbildung*. Bei *s-Abbildungen* der \mathfrak{S}^3 auf sich soll es sich stets um *orientierungserhaltende* Abbildungen handeln.

Die *s-Abbildungen* der \mathfrak{S}^3 auf sich bilden eine Gruppe. Dies beruht darauf, dass es zu zwei simplicialen Zerlegungen (in euklidische Simplexe) eines Komplexes stets eine gemeinsame Unterteilung gibt. Aus gleichem Grunde gilt: Ist σ eine *s-Abbildung* des Komplexes K auf den Komplex K' , τ eine solche von K' auf K'' , so ist $\tau\sigma$ eine *s-Abbildung* von K auf K'' .

Satz 1: *Zwei homöomorphe Flächen lassen sich semilinear aufeinander abbilden ([6] S. 5).*

Insbesondere gilt:

a) Seien e_1 und e_2 zwei Elementarflächenstücke. Eine *s-Abbildung* des Randes von e_1 auf den Rand von e_2 lässt sich zu einer *s-Abbildung* von e_1 auf e_2 erweitern.

b) Seien r_1 und r_2 zwei Kreisringe. Eine *s-Abbildung* des einen Randes von r_1 auf einen Rand von r_2 lässt sich zu einer *s-Abbildung* von r_1 auf r_2 erweitern. Unter einem Kreisring ist dabei eine (orientierbare) Fläche mit zwei Rändern und der Charakteristik null zu verstehen.

Satz 2: *Ein Elementarflächenstück in der \mathfrak{S}^3 lässt sich durch eine s-Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich in ein 2-Simplex überführen. ([6] S. 16).*

Satz 3: \mathfrak{S}^3 sei eine 2-Sphäre, welche durch einen Rückkehrschnitt s in zwei Elementarflächenstücke e_1 und e_2 zerlegt wird. Haben dann s' , e_1' und e_2' entsprechende Bedeutung für

eine 2-Sphäre $'\mathbb{S}^2$, so gibt es eine s -Abbildung von \mathbb{S}^2 auf $'\mathbb{S}^2$, welche s, e_1, e_2 auf s', e'_1, e'_2 abbildet ([6] S. 7).

Satz 4: Sind die beiden Komplexe K und K' im euklidischen Raum R^n ineinander überführbar durch eine orientierungserhaltende s -Abbildung φ des R^n auf sich und liegen beide im Inneren des Simplexes \mathbb{C}^n , so gibt es eine s -Abbildung des R^n auf sich, welche auf K mit φ übereinstimmt und ausserhalb \mathbb{C}^n die Identität ist ([6], S. 13).

Satz 5: Es sei \mathbb{S}^3 der Rand, \mathbb{C}^3 eine dreidimensionale Seite eines 4-Simplexes, A ein nicht zu \mathbb{C}^3 gehöriger Punkt von \mathbb{S}^3 und $\mathcal{M} \subset \mathbb{S}^3$ eine Punktmenge, die fremd zu einer Umgebung von A ist. Dann gibt es eine s -Abbildung von \mathbb{S}^3 auf sich, sodass \mathbb{C}^3 ähnlich auf ein 3-Simplex in seinem Inneren abgebildet wird und dass das Bild von \mathcal{M} im Inneren von \mathbb{C}^3 liegt ([6] S. 14).

Auf den Sätzen 4 und 5 beruht es, dass man für die Frage, ob sich in der \mathbb{S}^3 zwei Komplexe K und K' , von denen keiner die gesamte \mathbb{S}^3 ausmacht, durch s -Abbildungen der \mathbb{S}^3 auf sich ineinander überführen lassen, Untersuchungen im 3-dimensionalen euklidischen Raum R^3 zu Hilfe nehmen kann. Wegen Satz 5 lässt sich zunächst annehmen, dass K und K' im Inneren desselben¹ 3-Simplexes \mathbb{C}^3 der \mathbb{S}^3 liegen. Dann kann \mathbb{C}^3 als 3-Simplex im R^3 aufgefasst werden, wobei K und K' als Komplexe im R^3 anzusehen sind. Lässt sich nun K durch eine orientierungserhaltende s -Abbildung φ des R^3 auf sich in K' überführen, so kann φ nach Satz 4 so gewählt werden, dass φ auf dem Rande von \mathbb{C}^3 die Identität ist. Fasst man \mathbb{C}^3 wieder als 3-Simplex der \mathbb{S}^3 auf, so lässt sich die durch φ gegebene s -Abbildung von \mathbb{C}^3 auf sich zu einer s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich erweitern, indem man festsetzt, dass sie auf dem Komplement von \mathbb{C}^3 bezüglich der \mathbb{S}^3 die Identität sein soll.

Es sei K ein (endlicher) simplizialer Komplex im R^n . Unter einer *simplizialen Deformation* von K verstehen wir eine Schar von simplizialen Abbildungen ψ_t ($0 \leq t \leq 1$) von K in den R^n , welche die Bedingungen erfüllt:

1. ψ_0 ist die Identität.
2. ψ_t ist auf dem topologischen Produkt des Komplexes K mit der Strecke $0 \leq t \leq 1$ stetig. Ist die Abbildung für jedes t topologisch (also semilinear), so heisst die Deformation *isotop simplizial*.

Sind A_i die Ecken der simplizialen Zerlegung von K , so ist die Abbildung ψ_t durch die Bilder $\psi_t(A_i)$ der Ecken A_i vollständig bestimmt. Statt von einer simplizialen Deformation sprechen wir daher auch von einer *Verschiebung der Ecken* von K .

Satz 6: Für jeden (endlichen) simplizialen Komplex K im R^n existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$

¹ Gegebenenfalls ist eine geeignete Permutation der 3-Simplexe, welche \mathbb{C}^3 als Rand eines 4-Simplexes ausmachen, zu Hilfe zu nehmen.

derart, dass jede Verschiebung der Ecken von K um weniger als ε eine isotope simpliziale Deformation ist ([6] S. 10).

Satz 7: *Entstehen die simplizialen Komplexe K_0 und K_1 in R^n auseinander durch die isotope simpliziale Deformation ψ_t ($0 \leq t \leq 1$), so existiert eine orientierungserhaltende s -Abbildung des R^n auf sich, welche K_0 in K_1 überführt und auf K_0 mit ψ_1 übereinstimmt ([6] S. 8).*

Die Definition der isotopen simplizialen Deformation überträgt sich ohne weiteres auf einen simplizialen Komplex K , der im Inneren eines 3-Simplexes \mathbb{C}^3 der \mathbb{S}^3 liegt, wenn man die Forderung hinzunimmt, dass jede Ecke von K während der Deformation im Inneren von \mathbb{C}^3 verbleibt. Nach dem oben Bemerkten übertragen sich die Sätze 6 und 7 auf diese Deformationen. Wir werden hiervon insbesondere in folgender Weise Gebrauch zu machen haben:

Seien \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zwei geschlossene Flächen in der \mathbb{S}^3 . Wegen Satz 5 kann angenommen werden, dass beide im Inneren eines 3-Simplexes \mathbb{C}^3 der \mathbb{S}^3 liegen. Durch eine isotope simpliziale Deformation der simplizial zerlegten Fläche \mathfrak{F}_2 lässt sich dann erreichen, dass der Durchschnitt von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 , falls er nicht leer ist, nur aus endlich vielen doppelungsfreien, geschlossenen Schnittkurven besteht, die sich untereinander nicht treffen.¹

Unter einer *Kugel* wollen wir stets das semilineare Bild eines 3-Simplexes verstehen.

Satz 8: *Seien \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zwei Kugeln. Eine s -Abbildung des Randes von \mathfrak{R}_1 auf den Rand von \mathfrak{R}_2 lässt sich zu einer s -Abbildung von \mathfrak{R}_1 auf \mathfrak{R}_2 erweitern.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass sich für ein 3-Simplex \mathbb{C}^3 eine s -Abbildung φ des Randes von \mathbb{C}^3 auf sich zu einer s -Abbildung von \mathbb{C}^3 auf sich erweitern lässt: Man halte etwa den Schwerpunkt M von \mathbb{C}^3 fest und bilde die von M nach den Randpunkten von \mathbb{C}^3 führenden Strecken entsprechend φ affin aufeinander ab (vgl. [6] S. 5).

Satz 9: (Alexander) *Eine 2-Sphäre zerlegt die \mathbb{S}^3 in zwei Kugeln* ([6] S. 25).

Satz 10: *Zu zwei Kugeln in der \mathbb{S}^3 existiert eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, welche die eine Kugel auf die andere abbildet* ([6] S. 25).

Anmerkung: Die s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich kann so gewählt werden, dass ein vorgegebenes Elementarflächenstück auf dem Rande der einen Kugel ein vorgegebenes Elementarflächenstück auf dem Rande der anderen Kugel als Bild hat. Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 3, 8, 9.

Satz 11: *Es seien e_1 und e_2 zwei Elementarflächenstücke in der \mathbb{S}^3 , deren Durchschnitt aus dem gemeinsamen Rande s besteht. \mathfrak{M} sei ein Komplex, dessen Durchschnitt mit $e_1 + e_2$ aus s besteht und der zum Inneren einer der beiden von $e_1 + e_2$ in der \mathbb{S}^3 berandeten Kugeln*

¹ Vgl. hierzu [9] S. 26.

fremd ist. Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die e_2 in e_1 überführt und auf \mathfrak{M} die Identität ist ([6] S. 12).

Satz 11 beruht darauf, dass man die von e_1 und e_2 berandete Kugel \mathfrak{R} , deren Inneres zu \mathfrak{M} fremd ist, nach Satz 10 durch eine s -Abbildung φ der \mathfrak{E}^3 auf sich so in ein 3-Simplex überführen kann, dass e_1 in eine 2-dimensionale Seite und e_2 in die übrigen drei 2-dimensionalen Seiten dieses 3-Simplexes übergehen. Wegen Satz 5 kann dabei angenommen werden, dass $\varphi(\mathfrak{M})$ und $\varphi(\mathfrak{R})$ im Inneren eines 3-Simplexes der \mathfrak{E}^3 liegen. Der von $\varphi(\mathfrak{M})$ und $\varphi(e_2)$ gebildete Komplex gestattet dann nach simplizialer Zerlegung eine isotope simpliziale Deformation, die auf $\varphi(\mathfrak{M})$ die Identität ist und $\varphi(e_2)$ über $\varphi(\mathfrak{R})$ hinweg in $\varphi(e_1)$ deformiert. Das Deformationsergebnis kann nach Satz 7 durch eine s -Abbildung χ der \mathfrak{E}^3 auf sich selbst erhalten werden. Die Abbildung $\varphi^{-1}\chi\varphi$ hat dann die in Satz 11 angegebenen Eigenschaften.

Der hier auftretende Sachverhalt, dass eine isotope simpliziale Deformation eines Komplexes in der \mathfrak{E}^3 mit einer s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich transformiert wird, wird öfters auftreten. Wir vereinbaren daher:

Sei K ein (endlicher) Komplex in der \mathfrak{E}^3 . Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, verstehen wir unter einer *Deformation* von K eine stetige Abbildung $\Phi_t(K)$ des topologischen Produktes von K mit der Strecke $0 \leq t \leq n$, welche der Bedingung genügt:

Für jedes Intervall $i \leq t \leq i+1$ ($i=0,1,\dots,n-1$) existiert eine s -Abbildung φ_i der \mathfrak{E}^3 auf sich, für welche $\varphi_i \Phi_t$ für $i \leq t \leq i+1$ und eine geeignete simpliziale Zerlegung von $\varphi_i \Phi_i(K)$ eine isotope simpliziale Deformation von $\varphi_i \Phi_i(K)$ darstellt.

Nach Satz 7 lässt sich das Resultat der Deformation durch eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich erhalten: Es existiert eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die K in $\Phi_n(K)$ überführt.

Wir werden häufig folgende Anwendung zu machen haben:

Es seien \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 zwei Flächen in der \mathfrak{E}^3 , die sich in einer doppelungsfreien, geschlossenen Schnittkurve s durchsetzen. s berande auf \mathfrak{F}_1 ein Elementarflächenstück e_1 , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{F}_2 nur aus s bestehe. Auf \mathfrak{F}_2 berande s ein Elementarflächenstück e_2 . Die von e_1 und e_2 gebildete 2-Sphäre berandet dann in der \mathfrak{E}^3 eine Kugel \mathfrak{R} , deren Durchschnitt mit \mathfrak{F}_2 nur aus e_2 besteht.¹

Nach Satz 11 lässt sich \mathfrak{F}_2 so deformieren, dass e_2 in e_1 übergeht und $\mathfrak{F}_2 - e_2$ fest bleibt. Durch eine anschliessende Deformation, die $\mathfrak{F}_2 - e_2$ ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von s festhält, lässt sich erreichen, dass der Durchschnitt von \mathfrak{F}_2 mit einer hinreichend kleinen simplizialen Umgebung von e_1 bezüglich \mathfrak{F}_1 leer ist, oder auch, dass er nur noch aus einzelnen Punkten oder Stücken von s besteht, ohne dass sich der Durchschnitt von $\mathfrak{F}_2 - e_2$ mit \mathfrak{F}_1 ändert.

¹ Dies folgt daraus, dass e_1 mit \mathfrak{F}_2 nur den Rand s gemein hat.

Diese letzte Deformation bezeichnen wir als *Abheben*. Dass sie möglich ist, erkennt man ohne weiteres, wenn man durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich eine hinreichend kleine simpliziale Umgebung von e_1 bezüglich \mathfrak{F}_1 , die noch ein Elementarflächenstück ausmacht, in ein 2-Simplex überführt und die Abbildung so wählt, dass \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{F}_2 in das Innere eines 3-Simplexes der \mathfrak{S}^3 zu liegen kommen (Sätze 2, 5 und 6).

Weitere Resultate, die nicht wiederholt benutzt werden, bringen wir an gegebener Stelle, Sätze, die sich auf Knoten beziehen, sind in § 5 zusammengestellt.

§ 2. Deformation von Wegen auf einem Torus.

Unter einem *Torus* verstehen wir eine orientierbare, geschlossene Fläche der Charakteristik null. Wie Graeub [6] bemerkt hat, überträgt sich der Beweis des Fundamentalsatzes¹ der Flächentopologie mit geringfügigen Änderungen bei Beschränkung auf semilineare Abbildungen (und Flächen, die euklidische Komplexe sind). Ein Torus \mathfrak{T} kann danach aufgefasst werden als Bild eines Rechteckes g der euklidischen Ebene, seines Fundamentalpolygons, bezüglich einer Abbildung σ mit folgenden Eigenschaften:

- 1) Die Simplexe einer geeigneten simplizialen Zerlegung von g werden durch σ affin abgebildet.
- 2) Werden diejenigen Randpunkte von g , die auseinander durch Translation in Richtung einer Seite von g entstehen, identifiziert, so induziert σ eine topologische Abbildung auf \mathfrak{T} .
- 3) Die Bilder der Seiten von g machen ein vorgegebenes Paar konjugierter Rückkehrschnitte auf \mathfrak{T} aus.²

Ist r ein Kreisring in der euklidischen Ebene, der dadurch entsteht, dass man aus einem gleichseitigen Dreieck ein kleineres, konzentrisch ähnlich gelegenes herausnimmt, so kann \mathfrak{T} auch aufgefasst werden als Bild von r bezüglich einer Abbildung τ mit den Eigenschaften:

- 1') Die Simplexe einer geeigneten simplizialen Zerlegung von r werden durch τ affin abgebildet.
- 2') Werden diejenigen Randpunkte von r , die auf demselben Halbstrahl vom Mittelpunkt des Kreisrings aus liegen, identifiziert, so induziert τ eine topologische Abbildung auf \mathfrak{T} .
- 3') Das Bild der Ränder von r ist ein vorgegebener Rückkehrschnitt s von \mathfrak{T} , der auf \mathfrak{T} nicht nullhomolog ist.

¹ SEIFERT-THRELFALL, Lehrbuch der Topologie, Leipzig u. Berlin 1934, S. 130 ff.

² Man beachte, dass auch von Rückkehrschnitten verlangt wird, dass sie sich in euklidische Simplexe zerlegen lassen.

Bei Benutzung dieser zweiten Darstellung von \mathfrak{T} sagen wir auch, dass wir \mathfrak{T} längs s aufgeschnitten haben. Die Möglichkeit dieser Darstellung ergibt sich ohne weiteres aus der ersten unter Zuhilfenahme der Tatsache, dass sich der Beweis des Fundamentalsatzes der Flächentopologie auf semilineare Abbildungen überträgt, und des Hilfssatzes:

Hilfssatz 1: *Es sei r ein Kreisring mit den Rändern s_1 und s_2 . Eine orientierungserhaltende s -Abbildung von s_1 auf sich kann zu einer s -Abbildung von r auf sich erweitert werden, die auf s_2 die Identität ist.*

Beweis: Nach § 1 Satz 1 b kann angenommen werden, dass r die oben beschriebene Gestalt hat und dass s_1 der innere Rand von r ist. Eine orientierungserhaltende s -Abbildung φ von s_1 auf sich lässt sich nun zu einer orientierungserhaltenden s -Abbildung der euklidischen Ebene auf sich erweitern, zunächst etwa dadurch, dass man die vom Mittelpunkt des Kreisringes ausgehenden Halbstrahlen entsprechend φ permutiert und gleichzeitig affin so aufeinander abbildet, dass der auf s_1 liegende Punkt eines Halbstrahles in einen solchen übergeht. Da sich aber s_1 in ein 2-Simplex einschließen lässt, das zu s_2 fremd ist, gibt es nach § 1 Satz 4 eine s -Abbildung der euklidischen Ebene auf sich, die auf s_1 mit φ übereinstimmt und auf s_2 die Identität ist, woraus der Hilfssatz folgt.

Unter einem *einfachen Weg* verstehen wir im folgenden stets einen orientierten, doppel-punktfreien, geschlossenen Streckenzug. Wir wollen die kombinatorischen Isotopieklassen von einfachen Wegen auf einem Torus \mathfrak{T} untersuchen.

Unter einer *kombinatorischen Deformation* eines orientierten Streckenzuges k auf einem Komplex \mathfrak{R} verstehen wir folgende Operation: Es sei s der Rand eines 2-Simplexes e , welches auf \mathfrak{R} liegt und dessen Durchschnitt mit k entweder aus einer Seite oder aus 2 Seiten besteht. s werde so orientiert, dass s und k auf ihrem Durchschnitt verschiedene Orientierungen induzieren. Wird dann k durch $k' = k + s$ ersetzt¹, so sagen wir, es sei k über e kombinatorisch in k' deformiert.

Zwei orientierte Streckenzüge k und k' heißen *kombinatorisch isotop* auf \mathfrak{R} , wenn sie sich durch endlich viele kombinatorische Deformationen auf \mathfrak{R} ineinander überführen lassen. Es gilt

Hilfssatz 2: *Der Rand eines Elementarflächenstückes e werde durch zwei Punkte P und Q in zwei Wege u und v zerlegt, die beide von P nach Q orientiert seien. Dann sind u und v kombinatorisch isotop auf e , und es können bei der Deformation P und Q festgehalten werden.*

Ein Beweis dieses Hilfssatzes findet sich bei Graeub ([6] S. 33). Wir beweisen nun:

Satz 1: *Auf einem Torus \mathfrak{T} bilden die einfachen Wege, die auf \mathfrak{T} nullhomolog sind,*

¹ Bei der Addition ist die Orientierung zu beachten. Der Durchschnitt von s und k hebt sich weg.

zwei kombinatorische Isotopieklassen, welche repräsentiert werden durch den Rand eines 2-Simplexes auf \mathfrak{X} in beiden möglichen Orientierungen.

Beweis: Es sei s ein einfacher Weg auf \mathfrak{X} , der auf \mathfrak{X} nullhomolog ist. s berandet dann auf \mathfrak{X} ein Elementarflächenstück f . e sei ein vorgegebenes 2-Simplex auf \mathfrak{X} . Wir zerlegen \mathfrak{X} simplizial so, dass s und der Rand von e simplizial sind. f werde so orientiert (durch kohärente Orientierung der 2-Simplexe), dass die Orientierung von s diejenige ist, die von f auf s durch die Randbildung induziert wird. Die Orientierung von f lässt sich zu einer Orientierung von \mathfrak{X} ergänzen, wodurch auch e orientiert wird. Der Rand von e erhalte die von e induzierte Orientierung.

Falls nun f in der gewählten simplizialen Zerlegung nicht nur aus einem 2-Simplex besteht, so gibt es auf f ein solches, etwa f' , dessen Durchschnitt mit dem Rande s von f entweder aus genau einer Seite oder genau zwei Seiten besteht¹. Das abgeschlossene Komplement von f' bezüglich f ist dann ein Elementarflächenstück, und aus Hilfssatz 2 folgt, dass sich s auf f kombinatorisch isotop in den orientierten Rand von f' deformieren lässt. Die gleiche Schlussweise kann auf den Rand von e angewendet werden, falls e in der gewählten Zerlegung von \mathfrak{X} aus mehr als einem 2-Simplex besteht.

Wir können also weiterhin annehmen, dass e und f 2-Simplexe einer simplizialen Zerlegung von \mathfrak{X} sind und die oben festgelegte Orientierung besitzen. Falls nicht bereits e und f zusammenfallen, lassen sich nun f und e durch eine endliche Folge von 2-Simplexen der Zerlegung von \mathfrak{X} , etwa $f = e_0, e_1, \dots, e_n = e$, so verbinden, dass e_i und e_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n - 1$) genau eine Kante gemein haben. Der orientierte Rand von e_i (in induzierter Orientierung) lässt sich kombinatorisch in den von e_{i+1} deformieren, nämlich durch zwei kombinatorische Deformationen zunächst der Rand von e_i über e_{i+1} in den Rand von $e_i + e_{i+1}$ und danach über e_i in den Rand von e_{i+1} . Damit ergibt sich, dass die Ränder von f und e in der festgelegten Orientierung kombinatorisch isotop auf \mathfrak{X} sind.

Zum vollständigen Beweise des Satzes ist nur noch zu zeigen, dass der orientierte Rand s eines 2-Simplexes e auf \mathfrak{X} nicht zu dem entgegengesetzt orientierten kombinatorisch isotop ist. Dies folgt daraus, dass s bei kombinatorisch isotoper Deformation stets Rand eines Elementarflächenstückes bleibt und seine Orientierung als Rand behält. Da \mathfrak{X} orientierbar ist, könnte s nur dann kombinatorisch isotop in sein entgegengesetzt Orientiertes deformiert werden, wenn \mathfrak{X} durch s in zwei Elementarflächenstücke zerlegt würde, was nicht zutrifft.

Hilfssatz 3: *Es seien s_1 und s_2 zwei einfache Wege auf einem Torus \mathfrak{X} und s_1 nicht nullhomolog auf \mathfrak{X} . Dann lässt sich s_2 kombinatorisch isotop auf \mathfrak{X} so deformieren, dass sich*

¹ GRAEUB [6] S. 15.

s_1 und s_2 nur in so vielen Punkten treffen, wie der Betrag der algebraischen Schnittzahl von s_2 mit s_1 angibt.

Beweis: Durch kombinatorisch isotope Deformation von s_2 lässt sich zunächst erreichen, dass der Durchschnitt von s_1 und s_2 nur aus (endlich vielen) Punkten besteht, in denen s_1 von s_2 überkreuzt wird. Man erhält dann die *algebraische Schnittzahl* von s_2 mit s_1 , wenn man einen solchen Punkt mit der Vielfachheit $+1$ zählt, wenn in ihm s_2 vom linken zum rechten Ufer von s_1 übertritt, mit der Vielfachheit -1 im entgegengesetzten Falle. Die algebraische Schnittzahl ist eine Invariante der Homologieklassen von s_1 und s_2 .

Sei nun die Anzahl der Schnittpunkte von s_1 und s_2 grösser als der Betrag der algebraischen Schnittzahl. Dann können nicht alle Schnittpunkte dieselbe algebraische Vielfachheit besitzen, und bei Durchlaufen von s_2 muss es zwei aufeinanderfolgende geben, etwa P und Q , in denen s_1 von s_2 in verschiedenen Richtungen überkreuzt wird. Das von P nach Q führende Stück von s_2 nennen wir v .

Um den Sachverhalt besser überblicken zu können, benutzen wir die oben angegebene Darstellung von \mathfrak{X} durch einen Kreisring r und eine Abbildung τ mit den Eigenschaften 1', 2', 3'. Es kann dabei angenommen werden, dass s_1 Bild der Ränder von r bezüglich τ ist, da s_1 nicht nullhomolog auf \mathfrak{X} ist (Fig. 1 a). v ist dann Bild eines Weges auf r , den wir wieder mit v bezeichnen, der auf einem Rande von r entspringt und auf demselben Rande endet und keine weiteren Punkte mit dem Rande von r gemein hat. Dies folgt daraus, dass s_1 von s_2 in P und Q in verschiedenen Richtungen überkreuzt wird und auf v kein weiterer Schnittpunkt von s_1 und s_2 liegt. P und Q schneiden daher aus s_1 einen Bogen u aus, der zusammen mit v auf \mathfrak{X} ein Elementarflächenstück e berandet.

Falls auf e ausser dem Randbogen v kein weiterer Bogen von s_2 liegt, kann man v nach Hilfssatz 2 kombinatorisch isotop über e in u deformieren, wodurch gleichzeitig s_2 kombinatorisch isotop deformiert wird, und danach lässt sich durch weitere kombinatorisch isotope Deformation erreichen, dass s_2 zu u punktfremd wird, wobei die Schnittpunkte P und Q verschwinden, ohne dass neue entstehen (Fig. 1 a, b, c).

Sollten auf e noch von v verschiedene Bögen von s_2 liegen, so schneidet jeder von ihnen aus e ein Elementarflächenstück aus, und es gibt unter diesen ein solches, das keinen

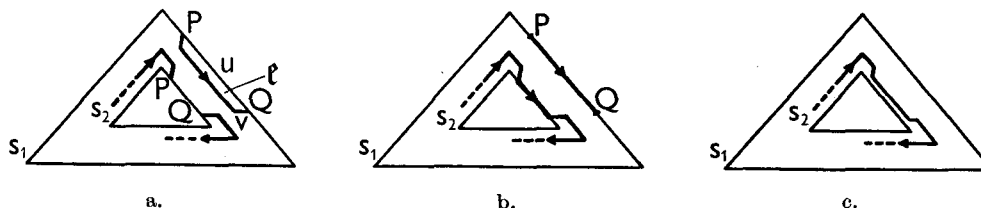


Fig. 1.

weiteren Bogen von s_2 enthält. Auf dessen auf s_2 liegenden Randbogen kann die beschriebene Deformation zunächst angewendet werden, wobei ebenfalls zwei Schnittpunkte von s_1 und s_2 verschwinden.

Das angegebene Verfahren kann so lange fortgesetzt werden, bis die Anzahl der Schnittpunkte von s_1 und s_2 gleich dem Betrag der algebraischen Schnittzahl ist.

Hilfssatz 4: *Ist r ein Kreisring mit den gleichsinnig orientierten Rändern s_1 und s_2 , so ist s_2 auf r kombinatorisch isotop zu s_1 .*

Dieser Hilfssatz ergibt sich ohne weiteres aus Hilfssatz 2, wenn man r durch zwei

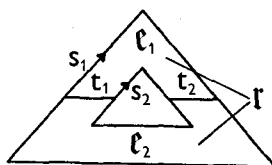


Fig. 2.

Querschnitte t_1 und t_2 in zwei Elementarflächenstücke e_1 und e_2 zerlegt (Fig. 2): Man kann s_2 zunächst über e_1 und danach über e_2 kombinatorisch isotop deformieren, wodurch s_2 in s_1 übergeht.

Satz 2: *Zwei einfache Wege s_1, s_2 auf einem Torus \mathfrak{T} , die nicht nullhomolog sind, sind genau dann kombinatorisch isotop, wenn sie homolog sind.*

Beweis: Seien s_1 und s_2 einfache Wege auf \mathfrak{T} , die zueinander homolog aber nicht nullhomolog sind. Nach Hilfssatz 3 kann angenommen werden, dass sich s_1 und s_2 nicht treffen, da die algebraische Schnittzahl zweier einfacher Wege derselben Homologiekategorie null ist. Dann wird \mathfrak{T} durch s_1 und s_2 in zwei Kreisringe r_1 und r_2 zerlegt, wie man unmittelbar erkennt, wenn man \mathfrak{T} längs s_1 zu einem Kreisring aufschneidet. s_1 und s_2 sind gleichsinnig orientierte Ränder von r_1 , da andernfalls s_1 und s_2 nullhomolog wären. Nach Hilfssatz 4 lässt sich s_2 durch kombinatorisch isotope Deformation über r_1 in s_1 überführen. Da die Homologie von s_1 und s_2 für die kombinatorische Isotopie offenbar notwendig ist, ist der Satz bewiesen.

Der Zusammenhang zwischen kombinatorischer Isotopie und s -Abbildungen wird hergestellt durch

Satz 3: *Es sei \mathfrak{T} ein im R^3 gelegener Torus, s_1, s_2 seien zwei einfache Wege auf \mathfrak{T} , die auf \mathfrak{T} kombinatorisch isotop sind. Dann existiert eine s -Abbildung des R^3 auf sich, die \mathfrak{T} so auf sich abbildet, dass s_2 in s_1 übergeht, und die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{T} die Identität ist.*

Beweis: Es kann angenommen werden, dass s_1 aus s_2 durch eine einzige kombinatorische Deformation über ein 2-Simplex e auf \mathfrak{X} entsteht. In einer hinreichend feinen simplizialen Zerlegung von \mathfrak{X} besitzt e eine simpliziale Umgebung auf \mathfrak{X} , die ein Elementarflächenstück f ausmacht. Durch eine s -Abbildung φ des R^3 auf sich lässt sich erreichen, dass f in ein 2-Simplex f' übergeht. Seien A, B, C die Ecken dieses 2-Simplexes. Es lassen sich nun zwei Punkte D und E auf verschiedenen Seiten von f' und beliebig nahe an f' so wählen, dass $\varphi(\mathfrak{X})$ mit jeder Verbindungsstrecke von D bzw. E mit einem Randpunkt von f' nur diesen Randpunkt gemein hat. Man erhält damit eine Doppelpyramide mit den Ecken A, B, C, D, E (Fig. 3), die eine Kugel \mathfrak{K} berandet, deren Durchschnitt mit $\varphi(\mathfrak{X})$ nur aus f' besteht.

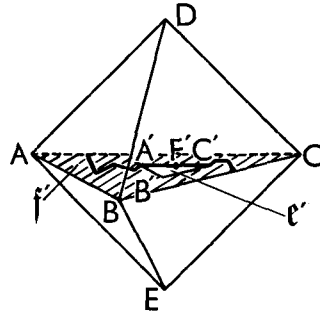


Fig. 3.

Das Bild von e bezüglich φ ist ein Elementarflächenstück auf f' . Durch eine s -Abbildung ψ' von f' auf sich, die auf dem Rande von f' die Identität ist, kann $\varphi(e)$ in ein 2-Simplex e' auf f' übergeführt werden (§ 1 Satz 1, a, b), und es lässt sich ψ' zu einer s -Abbildung ψ'' von \mathfrak{K} auf sich erweitern, welche auf dem Rande von \mathfrak{K} die Identität ist, indem man die Projektionsstrahlen von D und E nach den Punkten von f' unter gleichzeitiger affiner Abbildung entsprechend ψ' permutiert. ψ'' wird zu einer s -Abbildung ψ des R^3 auf sich erweitert, wenn man festsetzt, dass ψ ausserhalb \mathfrak{K} die Identität sein soll.

Das 2-Simplex e' , in welches e übergeführt ist, habe die Ecken A', B', C' . Auf f' liegt ein Streckenzug von $s'_2 = \psi\varphi(s_2)$, der über e' zu deformieren ist. Es kann angenommen werden, dass ψ so beschaffen ist, dass die Kante $A'C'$ von e' in die Kanten $A'B', B'C'$ zu deformieren ist. Dies kann nun auch durch eine isotope simpliziale Deformation desjenigen Komplexes erreicht werden, der von dem Rand von f' und den auf f' liegenden Bögen von s'_2 gebildet wird, indem man ihn simplizial so zerlegt, dass A' und C' als Ecken auftreten und auf $A'C'$ eine einzige weitere Ecke F' liegt, und danach F' unter Festhalten aller übrigen Ecken von s'_2 nach B' verschiebt. Das Deformationsergebnis lässt sich aber auch nach § 1 Satz 7 erhalten durch eine s -Abbildung der durch f' bestimmten Ebene auf sich, die auf dem Rande von f' die Identität ist. Die damit auf f' induzierte Abbildung

lässt sich wie oben zu einer s -Abbildung χ des R^3 auf sich erweitern, welche ausserhalb \mathfrak{Q} die Identität ist. Die Abbildung $\varphi^{-1}\psi^{-1}\chi\psi\varphi$ liefert die Behauptung des Satzes.

Anmerkung 1: Der Satz gilt nach den Erörterungen in § 1 auch, wenn \mathfrak{I} in der \mathfrak{E}^3 statt im R^3 liegt.

Anmerkung 2: Aus Satz 3 folgt insbesondere, dass ein einfacher Weg s_2 auf einem Torus \mathfrak{I} in einen kombinatorisch isotopen s_1 stets durch eine s -Abbildung von \mathfrak{I} auf sich übergeführt werden kann.

Anmerkung 3: Auf die gleiche Weise ergibt sich: Es sei \mathfrak{F} eine geschlossene oder berandete Fläche in der \mathfrak{E}^3 , und es seien s_1, s_2 zwei einfache Wege auf \mathfrak{F} , die auf \mathfrak{F} kombinatorisch isotop sind. Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die s_1 in s_2 überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{F} die Identität ist. Wenn sich s_1 auf \mathfrak{F} kombinatorisch isotop so in s_2 deformieren lässt, dass dabei s_1 stets punktfremd zum Rande von \mathfrak{F} bleibt, so lässt sich die s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich so wählen, dass \mathfrak{F} auf sich abgebildet wird.

Unter einem *System von n Parallelkurven* auf einem Torus \mathfrak{I} verstehen wir im folgenden n einfache Wege auf \mathfrak{I} , die sich gegenseitig nicht treffen und zueinander homolog aber nicht nullhomolog sind.

Satz 4: *Auf einem Torus \mathfrak{I} in der \mathfrak{E}^3 seien zwei Systeme von n Parallelkurven gegeben, die von den einfachen Wegen s_1, s_2, \dots, s_n bzw. t_1, t_2, \dots, t_n gebildet werden. Die Wege beider Systeme mögen derselben Homologiekategorie angehören. Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die \mathfrak{I} auf sich abbildet, ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{I} die Identität ist und das zweite System von Parallelkurven in das erste überführt (d.h. t_i in s_i bei geeigneter Numerierung).*

Beweis: Nach den Sätzen 2 und 3 kann angenommen werden, dass bereits t_1 mit s_1 zusammenfällt. Durch Aufschneiden längs s_1 entsteht aus \mathfrak{I} ein Kreisring \mathfrak{r} , der durch s_2, s_3, \dots, s_n in n Kreisringe $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n$ zerlegt wird. Die Numerierung sei nun so vorgenommen, dass \mathfrak{r}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von s_i und s_{i+1} ($i + 1 \bmod n$) berandet wird. Ebenso wird \mathfrak{r} durch t_1, t_2, \dots, t_n in n Kreisringe $\mathfrak{r}'_1, \mathfrak{r}'_2, \dots, \mathfrak{r}'_n$ zerlegt, wobei \mathfrak{r}'_i von t_i und t_{i+1} berandet werde.

Es kann t_2 auf \mathfrak{r} kombinatorisch isotop so deformiert werden, dass s_2 von t_2 nicht mehr getroffen wird. Dies ist auf die gleiche Weise auszuführen wie im Beweise von Hilfssatz 3. Es bleibt nämlich bei den dort angegebenen Deformationen t_2 stets punktfremd zu $t_1 = s_1$, da t_2 und s_2 zu $t_1 = s_1$ disjunkt sind und ein von Bögen auf t_2 und s_2 berandetes Elementarflächenstück nicht s_1 enthalten kann, da sonst s_1 nullhomolog wäre gegen die Voraussetzung.

Nachdem sich t_2 und s_2 nicht mehr treffen, wird \mathfrak{I} von t_2 und s_2 in zwei Kreisringe

zerlegt, von denen einer $t_1 = s_1$ nicht enthält. Über diesen kann t_2 in s_2 kombinatorisch isotop deformiert werden nach Hilfssatz 4.

Da die kombinatorischen Deformationen von t_2 in s_2 stets über Elementarflächenstücke erfolgen, die $t_1 = s_1$ nicht treffen, ergibt sich aus der Schlussweise des Beweises von Satz 3 und der Anmerkung 1 zu Satz 3, dass t_2 in s_2 übergeführt werden kann durch eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, die \mathfrak{X} auf sich abbildet und die auf s_1 und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{X} die Identität ist.

Nummehr liegen s_3, \dots, s_n und t_3, \dots, t_n auf einem von $t_2 = s_2$ und $t_1 = s_1$ auf \mathfrak{X} berandeten Kreisring. Mit entsprechender Schlussweise wie für t_2 zeigt man, dass t_3 in s_3 so übergeführt werden kann, dass s_1 und s_2 ungeändert bleiben. Aus der Art der Numerierung von s_1, s_2, \dots, s_n und t_1, t_2, \dots, t_n ergibt sich, dass dieses Verfahren fortgesetzt werden kann, bis t_n in s_n übergeführt ist.

Anmerkung: Die Abbildung kann offenbar so gewählt werden, dass ein vorgegebener der Wege t_1, t_2, \dots, t_n in einen vorgegebenen der Wege s_1, s_2, \dots, s_n übergeht: Die Numerierung kann so vorgenommen werden, dass t_1 und s_1 diese vorgegebenen Wege sind.

§ 3. Vollringe.

Im R^4 liege ein 2-Simplex e und in einer zu e orthogonalen Ebene der Rand s eines 2-Simplexes. Das topologische Produkt von e und s bildet dann einen (euklidischen) Komplex. Wir könnten einen Vollring durch die Eigenschaft definieren, semilineares Bild dieses Komplexes zu sein. Es ist für unsere Zwecke jedoch vorteilhaft, eine andere, gleichwertige Definition zu Grunde zu legen. Die Gleichwertigkeit wird sich ohne weiteres aus der Anmerkung zu Hilfssatz 1 ergeben.

Es sei \mathfrak{B} ein gerades Prisma im R^3 , dessen Bodenfläche e_1 und Dachfläche e_2 reguläre n -seitige Polygone sind. Ein Komplex \mathfrak{B} heisst *Vollring*, wenn es eine Abbildung σ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} gibt mit den Eigenschaften:

- 1) Die Simplexe einer geeigneten simplizialen Zerlegung von \mathfrak{B} werden durch σ affin abgebildet.
- 2) Identifiziert man übereinanderliegende Punkte von e_1 und e_2 , so induziert σ eine topologische Abbildung.

Die spezielle Wahl des Prismas \mathfrak{B} ist dabei unwesentlich. Ist \mathfrak{B}' ein zweites solches Prisma, dessen Bodenfläche e'_1 und Dachfläche e'_2 etwa m -seitige reguläre Polygone sind, so gibt es offenbar eine s -Abbildung χ von \mathfrak{B}' auf \mathfrak{B} , die e'_1 in e_1 und übereinanderliegende Punkte von e'_1 und e'_2 in solche von e_1 und e_2 überführt. Besitzt dann die Abbildung σ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} die Eigenschaften 1) 2), so hat die Abbildung $\sigma' = \sigma\chi$ von \mathfrak{B}' auf \mathfrak{B} die entsprechenden Eigenschaften und umgekehrt.

Wir werden noch von einer anderen Darstellungsmöglichkeit eines Vollringes Gebrauch zu machen haben, nämlich durch eine Abbildung τ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} mit den Eigenschaften

1') Die Simplexe einer geeigneten simplizialen Zerlegung von \mathfrak{P} werden durch τ affin abgebildet.

2') Identifiziert man jeden Punkt P von e_1 mit demjenigen von e_2 , der aus P durch Translation längs der Achse von \mathfrak{P} und gleichzeitige Drehung um $\frac{2\pi\delta}{\gamma}$ (γ, δ ganz) entsteht, so induziert τ eine topologische Abbildung.

Die Möglichkeit dieser Darstellung von \mathfrak{B} ergibt sich folgendermassen: Nach § 1 Satz 1 a und § 2 Hilfssatz 1 gibt es eine s -Abbildung des Randes von \mathfrak{P} auf sich, welche e_1 punktweise festlässt und e_2 um $\frac{2\pi\delta}{\gamma}$ dreht, und nach § 1 Satz 8 kann diese Abbildung zu einer s -Abbildung χ von \mathfrak{P} auf sich erweitert werden. Besitzt dann die Abbildung σ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} die Eigenschaften 1) 2), so ist $\tau = \sigma\chi^{-1}$ eine Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} mit den Eigenschaften 1') 2') und umgekehrt.

Das semilineare Bild eines Vollringes ist wieder ein Vollring. Ist φ eine semilineare Abbildung des Vollringes \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} und sind σ, τ Abbildungen von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} mit den Eigenschaften 1) 2) bzw. 1') 2'), so sind $\varphi\sigma$ und $\varphi\tau$ Abbildungen von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} mit den entsprechenden Eigenschaften.

Sind umgekehrt \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' zwei Vollringe, so existiert eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}' , wie man durch Vermittlung von \mathfrak{P} erkennt, wenn man beide Vollringe mit Hilfe desselben Prismas \mathfrak{P} darstellt.

Ist \mathfrak{B} ein Vollring im R^3 (offenbar existieren solche), so bewirkt eine s -Abbildung des R^3 auf sich, welche den Rand \mathfrak{T} von \mathfrak{B} in sich überführt, eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich. Dies beruht darauf, dass der R^3 von \mathfrak{T} zerlegt wird und \mathfrak{B} das Innere von \mathfrak{T} ausmacht.

Sei wieder σ eine Abbildung des Prismas \mathfrak{P} auf den Vollring \mathfrak{B} mit den Eigenschaften 1) 2). Der Rand von \mathfrak{B} (d.i. das Bild des Mantels von \mathfrak{P}) ist ein Torus \mathfrak{T} . Durch σ wird der Rand der Bodenfläche e_1 von \mathfrak{P} auf einen einfachen Weg auf \mathfrak{T} abgebildet. Dieser Weg bestimmt in seinen beiden möglichen Orientierungen zwei Homologieklassen auf \mathfrak{T} , die auf \mathfrak{T} nicht nullhomolog, wohl aber nullhomolog auf \mathfrak{B} sind. Die einfachen Wege dieser beiden Homologieklassen nennen wir *Meridiane* von \mathfrak{B} . Die Meridiane von \mathfrak{B} sind die einzigen einfachen Wege auf \mathfrak{T} , die nullhomolog auf \mathfrak{B} , nicht aber auf \mathfrak{T} sind.

Beweis: Sei c ein einfacher Weg auf \mathfrak{T} . Das orientierte Bild t einer (geraden und zu e_1 senkrechten) Mantellinie von \mathfrak{P} bezüglich σ ist Erzeugende der 1-dimensionalen Homologiegruppe von \mathfrak{B} , wie aus Eigenschaft 2) von σ folgt. m sei das orientierte Bild des Randes

von e_1 bezüglich σ . Nun bilden m und t eine 1-dimensionale Homologiebasis von \mathfrak{L} . Also gilt auf \mathfrak{L} eine Homologie

$$c \sim \beta m + \alpha t \quad (\alpha, \beta \text{ ganz}).$$

Ist nun $c \sim 0$ auf \mathfrak{B} , so muss $\alpha = 0$ sein. Das besagt aber, dass die algebraische Schnittzahl von c mit m gleich null ist. Nach § 2 Hilfssatz 3 kann daher angenommen werden, dass m von c nicht getroffen wird. Ist nun $e \neq 0$ auf \mathfrak{L} , so muss wegen der Doppelpunktfreiheit von c gelten $\beta = \pm 1$, wie man erkennt, wenn man \mathfrak{L} längs m zu einem Kreisring aufschneidet.

Jeder Meridian von \mathfrak{B} ist Rand eines Elementarflächenstückes, das auf \mathfrak{B} liegt und mit \mathfrak{L} nur seinen Rand gemein hat. Für das Bild des Randes von e_1 ist dies unmittelbar zu sehen (nämlich durch das Bild von e_1). Für einen beliebigen Meridian folgt dies aus § 2 Satz 2 und 3, da \mathfrak{B} stets als semilineares Bild eines Vollringes im R^3 aufgefasst werden kann. Wir bezeichnen ein solches Elementarflächenstück als *Meridianfläche* von \mathfrak{B} .

Hilfssatz 1: *Es seien $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ zwei Kugeln in der \mathfrak{S}^3 , deren Durchschnitt aus zwei disjunkten Elementarflächenstücken e, \mathfrak{f} besteht. Dann ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2$ ein Vollring \mathfrak{B} , und es sind e und \mathfrak{f} Meridianflächen von \mathfrak{B} .*

Beweis: Seien \mathfrak{S}_1^2 der Rand von \mathfrak{K}_1 , \mathfrak{S}_2^2 der Rand von \mathfrak{K}_2 . Zunächst stellt man fest, dass e und \mathfrak{f} sowohl auf \mathfrak{S}_1^2 wie auf \mathfrak{S}_2^2 liegen, da andernfalls \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 ein 3-Simplex gemein haben müssten.

Sei nun \mathfrak{P}_1 ein gerades Prisma im R^3 , dessen Bodenfläche e_1 und Dachfläche \mathfrak{f}' reguläre Dreiecke sind. \mathfrak{P}_2 sei ein zweites solches Prisma, das \mathfrak{f}' zur Bodenfläche und die Dachfläche e_2 hat.

Nun lässt sich zunächst \mathfrak{K}_1 auf \mathfrak{P}_1 durch eine s -Abbildung σ_1 so abbilden, dass e in e_1 und \mathfrak{f} in \mathfrak{f}' übergeht. Dies kann beispielsweise so geschehen, dass man zunächst e semilinear auf e_1 abbildet, danach den Kreisring r , der das abgeschlossene Komplement von $e \cup \mathfrak{f}$ bezüglich \mathfrak{S}_1^2 ausmacht, auf den Mantel von \mathfrak{P}_1 und zwar so, dass diese s -Abbildung von r auf dem Rande von e mit der Abbildung von e auf e_1 übereinstimmt (§ 1 Satz 1 a, b), und schliesslich \mathfrak{f} auf \mathfrak{f}' semilinear so abbildet, dass diese Abbildung auf dem Rande von \mathfrak{f} mit derjenigen übereinstimmt, die von der Abbildung von r induziert wird. Damit erhält man eine s -Abbildung von \mathfrak{S}_1^2 auf den Rand von \mathfrak{P}_1 , die sich nach § 1 Satz 8 zu einer s -Abbildung von \mathfrak{K}_1 auf \mathfrak{P}_1 erweitern lässt. Auf diese Weise sieht man auch, dass eine s -Abbildung σ_2' von \mathfrak{K}_2 auf \mathfrak{P}_2 existiert, die auf \mathfrak{f} mit σ_1 übereinstimmt und e in e_2 überführt.

Bezeichne ω die s -Abbildung von e_1 auf e_2 , die man erhält, wenn man e_1 parallel zu sich nach e_2 verschiebt. Dann ist $\psi = \omega \sigma_1 \sigma_2'^{-1}$ eine orientierungserhaltende s -Abbildung von e_2 auf sich. Dies folgt daraus, dass bei kohärenter Orientierung der 3-Simplexe einer simpli-

zialen Zerlegung der \mathbb{S}^3 , in der $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, e$ und f simplizial sind, auf e und f durch \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 entgegengesetzte Orientierungen induziert werden, da andernfalls \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 ein 3-Simplex gemein haben müssten. Nach § 2 Hilfssatz 1 und § 1 Satz 8 existiert eine s -Abbildung χ von \mathbb{P}_2 auf sich, die auf e_2 mit ψ übereinstimmt und auf f' die Identität ist. Sei $\sigma_2 = \chi\sigma'_2$. Nun ergeben σ_1^{-1} und σ_2^{-1} eine Abbildung σ des Prismas $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \cup \mathbb{P}_2$ auf $\mathbb{B} = \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2$ mit den Eigenschaften 1) 2). \mathbb{B} ist also ein Vollring, und e und f sind offenbar Meridianflächen von \mathbb{B} .

Anmerkung: Für die Gültigkeit des Hilfssatzes ist die Einbettung von $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ in die \mathbb{S}^3 unwesentlich, wenn gefordert wird, dass sich \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 so orientieren lassen, dass auf e und f von $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ entgegengesetzte Orientierungen induziert werden.

Hilfssatz 2: *Es sei \mathcal{L} ein Torus in der \mathbb{S}^3 , e ein Elementarflächenstück, dessen Rand s auf \mathcal{L} liegt und das sonst keinen Punkt mit \mathcal{L} gemein hat. Ferner sei s nicht nullhomolog auf \mathcal{L} . Dann berandet \mathcal{L} in der \mathbb{S}^3 einen Vollring \mathbb{B} , für welchen e Meridianfläche ist.*

Beweis: Sei t ein einfacher Weg auf \mathcal{L} , der zu s homolog ist und s nicht trifft. Durch s und t wird \mathcal{L} in zwei Kreisringe r_1 und r_2 zerlegt, da s nicht nullhomolog ist. r_1 bildet zusammen mit e ein von t berandetes Elementarflächenstück g . Es kann angenommen werden, dass g ein 2-Simplex ist und dass \mathcal{L} und e im Inneren eines 3-Simplexes der \mathbb{S}^3 liegen, da sich dies durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich erreichen lässt. Von g lassen sich „obere“ und „untere“ Seiten so unterscheiden, dass der Kreisring r_2 in s an der unteren

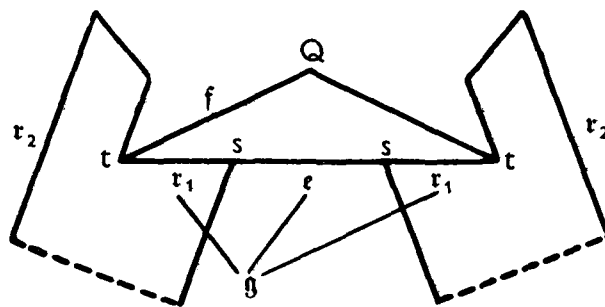


Fig. 4 (Schnitt).

Seite von g anstößt (Fig. 4). Projiziert man t von einem Punkte Q aus, der hinreichend wenig „über der oberen Seite von g “ liegt, so erhält man als Projektionskegel ein Elementarflächenstück f , das r_2 , und damit \mathcal{L} , nur in seinem Rande t trifft. Nun bilden e, r_1 und f zusammen eine 2-Sphäre \mathbb{S}_1^2 , welche die \mathbb{S}^3 in zwei Kugeln zerlegt (§ 1 Satz 9). Eine dieser beiden Kugeln, sie heiße \mathbb{R}_1 , enthält keinen Punkt von r_2 im Inneren, da r_2 mit \mathbb{S}_1^2 nur die Ränder s und t gemein hat. Von e, r_2 und f wird eine 2-Sphäre \mathbb{S}_2^2 gebildet, welche eine Kugel \mathbb{R}_2 berandet, die im Inneren keinen Punkt von \mathbb{R}_1 enthält, da \mathbb{S}_1^2 und \mathbb{S}_2^2 sich nicht

durchsetzen sondern nur in e und f berühren. Damit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt, und es folgt die Behauptung, da $\mathfrak{B} = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ von $r_1 \cup r_2$, also von \mathfrak{T} , berandet wird.

Anmerkung: Aus dem Beweis folgt noch: Wird der Vollring \mathfrak{B} als Bild des Prismas \mathfrak{P} bezüglich einer Abbildung σ mit den Eigenschaften 1) 2) dargestellt, so kann von σ noch gefordert werden, dass das Bild von Boden- und Dachfläche des Prismas eine vorgegebene Meridianfläche e von \mathfrak{B} ausmacht. (Die Einbettung von \mathfrak{B} in die \mathfrak{S}^3 ist dabei unwesentlich, da jeder Vollring als semilineares Bild eines Vollringes in der \mathfrak{S}^3 aufgefasst werden kann). Für die Darstellung von \mathfrak{B} durch \mathfrak{P} und die Abbildung σ sagen wir dann auch, dass wir \mathfrak{B} längs e aufgeschnitten haben.

Hilfssatz 3: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , e und f seien zwei disjunkte Meridianflächen von \mathfrak{B} , ebenso e' und f' . Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die e' auf e , f' auf f und \mathfrak{B} auf sich abbildet und die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist.*

Beweis: Wegen § 2 Satz 4 kann man annehmen, dass e und e' den gemeinsamen Rand m_1 , f und f' den gemeinsamen Rand m_2 besitzen. m_1 und m_2 zerlegen den Rand \mathfrak{T} von \mathfrak{B} in zwei Kreise r_1 und r_2 .

\mathfrak{B} wird durch e und f in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt, die von e, r_1, f bzw. f, r_2, e berandet werden. e' und f' zerlegen \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{R}'_1 und \mathfrak{R}'_2 , die von e', r_1, f' bzw. f', r_2, e' berandet werden. Nun lässt sich e' semilinear so auf e abbilden, dass der Rand m_1 punktweise festbleibt (§ 1 Satz 1 a). Entsprechend kann f' semilinear auf f abgebildet werden. Nimmt man die identische Abbildung für r_1 und r_2 hinzu, so erhält man auf diese Weise eine s -Abbildung des Randes von \mathfrak{R}'_1 auf den Rand von \mathfrak{R}_1 und eine s -Abbildung des Randes von \mathfrak{R}'_2 auf den Rand von \mathfrak{R}_2 . Diese Abbildungen können zu s -Abbildungen von \mathfrak{R}'_1 auf \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}'_2 auf \mathfrak{R}_2 erweitert werden, wodurch man eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich erhält, die auf \mathfrak{T} die Identität ist und daher zu einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich erweitert werden kann, die ausserhalb \mathfrak{B} die Identität ist.

Hilfssatz 4: *Der Torus \mathfrak{T} sei der Rand des Vollringes \mathfrak{B} . Eine s -Abbildung φ von \mathfrak{T} auf sich, die Meridiane von \mathfrak{B} in Meridiane überführt, lässt sich zu einer s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich erweitern.*

Beweis: Es seien e_1 und e_2 zwei disjunkte Meridianflächen¹ von \mathfrak{B} mit den Rändern m_1 bzw. m_2 . Durch m_1 und m_2 wird \mathfrak{T} in zwei Kreise r_1, r_2 zerlegt, und durch e_1 und e_2 wird \mathfrak{B} in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt, die von e_1, r_1, e_2 bzw. e_2, r_2, e_1 berandet werden.

¹ Dass zwei solche Meridianflächen existieren, erkennt man ohne weiteres, wenn man \mathfrak{B} durch ein Prisma darstellt.

Nach Voraussetzung sind $m'_1 = \varphi(m_1)$ und $m'_2 = \varphi(m_2)$ Meridiane von \mathfrak{B} , welche \mathfrak{L} in zwei Kreisringe $r'_1 = \varphi(r_1)$ und $r'_2 = \varphi(r_2)$ zerlegen.

Es seien nun e'_1 und e'_2 zwei disjunkte Meridianflächen von \mathfrak{B} , die m'_1 bzw. m'_2 zum Rande haben. Dass zwei solche Meridianflächen existieren, ergibt sich vermöge e_1 und e_2 aus § 2 Satz 4, da \mathfrak{B} ohne Einschränkung der Allgemeinheit als Vollring in der \mathfrak{S}^3 angenommen werden kann. Durch e'_1 und e'_2 wird \mathfrak{B} in zwei Kugeln $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2$ zerlegt, die von e'_1, r'_1, e'_2 bzw. e'_2, r'_2, e'_1 berandet werden. Die durch φ gegebenen s -Abbildungen von m_1 bzw. m_2 auf m'_1 bzw. m'_2 können nach § 1 Satz 1 a zu s -Abbildungen von e_1 bzw. e_2 auf e'_1 bzw. e'_2 erweitert werden, die wir ebenfalls mit φ bezeichnen. Dann sind durch φ für \mathfrak{R}'_1 bzw. \mathfrak{R}'_2 s -Abbildungen des Randes auf den Rand von \mathfrak{R}'_1 bzw. \mathfrak{R}'_2 definiert, die nach § 1 Satz 8 zu s -Abbildungen von \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 auf \mathfrak{R}'_1 bzw. \mathfrak{R}'_2 erweitert werden können. Damit ergibt sich die Behauptung.

§ 4. Ein Satz von Alexander.

Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des Satzes von Alexander [2], dass in der 3-Sphäre \mathfrak{S}^3 jeder (simpliciale) Torus mindestens einen Vollring berandet.

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es für die Gültigkeit des Satzes wesentlich ist, dass der Torus eine Zerlegung in euklidische Simplexe besitzt.

Wir werden den Alexanderschen Beweis unter Anlehnung an Graeub [6] ausführen. Der Beweis läuft darauf hinaus, dass eine Meridianfläche des Vollringes aufgesucht wird, worauf § 3 Hilfssatz 2 angewendet werden kann. Dabei machen wir Gebrauch von den Erörterungen in § 1. Wir können annehmen, dass der Torus im Inneren eines 3-Simplexes \mathfrak{C}^3 der \mathfrak{S}^3 liegt, und können dann \mathfrak{C}^3 auch als 3-Simplex im R^3 auffassen und s -Abbildungen des R^3 auf sich benutzen.

Es sei \mathfrak{F} eine geschlossene Fläche im R^3 . Wir nennen mit Graeub [6] eine Schar paralleler Ebenen (E) des R^3 *zulässig in bezug auf einen Punkt P* von \mathfrak{F} , wenn der Durchschnitt der durch P gehenden Scharebene E mit dem Aussenrand s eines Simplexsternes, der den Mittelpunkt P besitzt und eine Umgebung von P bezüglich \mathfrak{F} ausmacht, nur aus endlich vielen Punkten besteht, in welchen E von s durchsetzt wird. Die Anzahl $2k$ dieser Schnittpunkte ist stets gerade, und es heisst $k - 1$ die *Ordnung* von P bezüglich der Schar (E). Die Schar paralleler Ebenen (E) des R^3 heisst *zulässig in bezug auf \mathfrak{F}* , wenn sie zulässig in bezug auf jeden Punkt von \mathfrak{F} ist. Man erhält eine in bezug auf \mathfrak{F} zulässige Ebenenschar beispielsweise dadurch, dass man \mathfrak{F} simplicial zerlegt und die Schar (E) so bestimmt, dass ihre Ebenen zu keiner der Geraden parallel sind, die durch 2 Ecken der Zerlegung gehen. Da eine simpliciale Zerlegung von \mathfrak{F} stets nur endlich viele Ecken aufweist, lässt sich eine solche Schar stets finden.

Wir zitieren von Graeub [6]:

Hilfssatz 1: *Ist eine Schar paralleler Ebenen (E) im R^3 zulässig in bezug auf die geschlossene Fläche \mathfrak{F} und bilden die Ebenen einer zweiten Schar (F) mit denen von (E) einen genügend kleinen Winkel, so ist (F) ebenfalls zulässig in bezug auf \mathfrak{F} , und die Ordnung jedes Punktes P von \mathfrak{F} ist in bezug auf (F) dieselbe wie in bezug auf (E) ([6] S. 21).*

Hilfssatz 2: *Es sei die Schar paralleler Ebenen (E) des R^3 zulässig in bezug auf die geschlossene Fläche \mathfrak{F} . Eine s -Abbildung φ des R^3 auf sich, die jede Ebene von (E) auf sich abbildet, führt \mathfrak{F} in eine Fläche \mathfrak{F}' über, für welche (E) ebenfalls zulässig ist, und Punkte von \mathfrak{F} und \mathfrak{F}' , die sich bezüglich φ entsprechen, haben dieselbe Ordnung in bezug auf (E) ([6] S. 21).*

Ferner gilt: Ist (E) zulässig in bezug auf \mathfrak{F} , so sind die Punkte von \mathfrak{F} , deren Ordnung in bezug auf (E) nicht null ist (also -1 oder grösser als null), Ecken jeder simplizialen Zerlegung von \mathfrak{F} . Wegen Hilfssatz 1 kann stets angenommen werden, dass jede Scharebene höchstens einen solchen Punkt enthält. Wir wollen diejenigen Punkte von \mathfrak{F} , deren Ordnung bezüglich (E) positiv ist, als *Ausnahmeecken* von \mathfrak{F} bezüglich (E) bezeichnen. Wir stellen zunächst fest:

Satz 1: *Ist die Schar paralleler Ebenen (E) des R^3 zulässig in bezug auf die geschlossene Fläche \mathfrak{F} und besitzt \mathfrak{F} keine Ausnahmeecke bezüglich (E) , so ist \mathfrak{F} eine 2-Sphäre.*

Beweis: Wir betrachten eine simpliziale Zerlegung von \mathfrak{F} und diejenigen Ebenen von (E) , die durch die Ecken dieser Zerlegung gehen. Dies sind endlich viele, etwa E_1, E_2, \dots, E_k , wobei die Numerierung im Sinne wachsender „Höhe“ bezüglich einer zu (E) orthogonalen Achse erfolge.

Der Durchschnitt von E_1 mit \mathfrak{F} besteht aus einem isolierten Punkt P_1 , da andernfalls noch eine tiefere Ecke von \mathfrak{F} auftreten müsste, was der Numerierung der Ebenen E_i widerspricht. Verschiebt man E_1 parallel nach E_2 , so erhält man dort eine Schnittlinie s_2 von E_2 mit dem Simplexstern, der von denjenigen Simplexen der Zerlegung von \mathfrak{F} gebildet wird, die P_1 zur Ecke haben. E_2 wird in s_2 von \mathfrak{F} durchsetzt, da jeder Punkt von s_2 die Ordnung null in bezug auf (E) hat. Verschiebt man E_2 parallel nach E_3 , so erhält man in E_3 eine Schnittlinie s_3 von E_3 mit \mathfrak{F} , die zusammen mit s_2 auf \mathfrak{F} einen Kreisring berandet, da zwischen E_2 und E_3 keine Ecke von \mathfrak{F} liegt. s_3 kann keine weitere etwaige Schnittlinie von \mathfrak{F} und E_3 treffen, da sonst eine Ausnahmeecke auf s_3 läge, und es wird E_3 von \mathfrak{F} längs s_3 durchsetzt, da (E) zulässig in bezug auf \mathfrak{F} ist. Wie von s_2 auf s_3 kann man jetzt weiter-schliessen, bis man schliesslich zu einer Schnittlinie s_r von E_r mit \mathfrak{F} gelangt, welche bei Parallelverschiebung von E_r nach E_{r+1} in einen einzigen Punkt P_{r+1} von E_{r+1} zusammenschumpft. Dies muss spätestens für E_{k-1} eintreten, da über E_{k-1} nur noch eine einzige

Ecke der Zerlegung von \mathfrak{F} liegt (nämlich in E_k), und ist tatsächlich erst dann der Fall. Man bemerkt nämlich jetzt, dass durch s_2, s_3, \dots, s_r aus \mathfrak{F} zwei Elementarflächenstücke (auf denen P_1 bzw. P_{r+1} liegen) und $r - 2$ Kreisringe ausgeschnitten werden, die sich bereits zu einer geschlossenen Fläche zusammensetzen, also ganz \mathfrak{F} ausmachen müssen. Die Eulersche Charakteristik ergibt sich nun als -2 , d.h. \mathfrak{F} ist eine 2-Sphäre.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Alexanderschen Satzes zu. Dabei nehmen wir an, dass der Torus im Inneren eines 3-Simplexes der \mathfrak{S}^3 liegt. Für spätere Anwendungen verschärfen wir die zu beweisende Aussage in folgender Form:

Satz 2: Sei \mathfrak{S}^3 der Rand eines 4-Simplexes im R^4 , der mit einer Hyperebene R^3 des R^4 ein 3-Simplex \mathfrak{S}^3 gemein habe. \mathfrak{T} sei ein Torus in \mathfrak{S}^3 , (E) eine Schar paralleler Ebenen in R^3 , die zulässig in bezug auf \mathfrak{T} ist und bei welcher jede Scharebene \mathfrak{T} in höchstens einem Punkte trifft, dessen Ordnung bezüglich (E) ungleich null ist. Dann gibt es eine Scharebene durch eine Ausnahmeecke von \mathfrak{T} , die \mathfrak{T} in einem Meridian eines von \mathfrak{T} in \mathfrak{S}^3 berandeten Vollringes schneidet.

Beweis: Nach Satz 1 besitzt \mathfrak{T} Ausnahmeecken bezüglich (E) . Sei P eine solche, $k - 1 > 0$ die Ordnung von P und E die Scharebene durch P . Da ausser P alle Punkte des Durchschnittes von \mathfrak{T} und E die Ordnung null haben, muss dieser Durchschnitt aus k doppelungsfreien, geschlossenen Schnittlinien bestehen, die nur den Punkt P gemein haben, und möglicherweise noch endlich vielen, etwa r , geschlossenen, doppelungsfreien Schnittlinien, die sich untereinander und die k ersten nicht treffen. Jede dieser $k + r$ Schnittlinien berandet auf E ein Elementarflächenstück, und es gibt unter ihnen eine „innerste“ s , d. h. eine solche, die auf E ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. Es sind nun zwei Fälle denkbar:

Fall 1: s ist nullhomolog auf \mathfrak{T} , d.h. \mathfrak{T} wird durch s zerlegt.

Fall 2: s ist nicht nullhomolog auf \mathfrak{T} , zerlegt also \mathfrak{T} nicht.

Wenn wir auf Fall 2 gelangen, so folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar aus § 3 Hilfssatz 2, wenn \mathfrak{S}^3 als 3-Simplex der \mathfrak{S}^3 aufgefasst wird. Es muss also nur noch der Fall 1 diskutiert werden.

Sei s nullhomolog auf \mathfrak{T} . Auf E berandet s das Elementarflächenstück e , das offenbar in \mathfrak{S}^3 liegt. Durch eine orientierungserhaltende s -Abbildung ψ_0 von E auf sich führen wir e in ein 2-Simplex e' über. ψ_0 soll so gewählt werden, dass P Fixpunkt ist und, falls P auf s liegt, ausserdem Ecke von e' ist.¹ ψ_0 wird zu einer s -Abbildung ψ von R^3 auf sich erweitert, die jede Ebene von (E) in sich überführt und die zu E senkrechten Geraden permutiert. \mathfrak{T} geht durch ψ in einen Torus \mathfrak{T}' über. Durch eine Ähnlichkeitsabbildung χ des R^3 auf

¹ Eine solche s -Abbildung existiert nach GRAEB [6], S. 7.

sich lässt sich noch erreichen, dass \mathfrak{X}' und e' in \mathbb{C}^3 liegen. Nach § 1 Satz 4 existiert eine s -Abbildung φ des R^3 auf sich, die ausserhalb \mathbb{C}^3 die Identität ist und auf \mathfrak{X} und e mit $\chi\psi$ übereinstimmt, und es induziert φ eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich.

Wegen Hilfssatz 2 hat jeder Punkt Q von \mathfrak{X} in bezug auf (E) dieselbe Ordnung wie sein Bildpunkt $\varphi(Q)$ auf \mathfrak{X}' . Darüber hinaus bemerken wir: Die Schnittlinien von \mathfrak{X} mit einer Scharebene entsprechen umkehrbar eindeutig solchen von \mathfrak{X}' mit einer Scharebene. Ist die Schnittlinie t' von \mathfrak{X}' mit einer Scharebene Meridian eines von \mathfrak{X}' in der \mathbb{S}^3 berandeten Vollringes, so ist die ihr entsprechende Schnittlinie t auf \mathfrak{X} Meridian eines von \mathfrak{X} in der \mathbb{S}^3 berandeten Vollringes.

Wir betrachten nun \mathfrak{X}' und e' . Da $\varphi(s)$ nullhomolog auf \mathfrak{X}' ist, wird \mathfrak{X}' durch $\varphi(s)$ in eine gelochte Ringfläche g' und ein Elementarflächenstück f' zerlegt. f' bildet zusammen mit e' eine 2-Sphäre, welche die \mathbb{S}^3 in 2 Kugeln zerlegt. Eine dieser beiden Kugeln, sie heisse \mathfrak{R} , enthält keinen Punkt von g' im Inneren, da f' und e' von g' nur in $\varphi(s)$ getroffen werden (e sollte keine weitere Schnittlinie von \mathfrak{X} und E enthalten). Nach § 1 Satz 11 lässt sich nun durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich erreichen, dass \mathfrak{X}' in den von e' und g' gebildeten Torus \mathfrak{X}'' übergeführt wird, wobei g' punktweise festbleibt. \mathfrak{X}'' liegt wieder in \mathbb{C}^3 .

Die Ebenenschar (E) ist jetzt nicht mehr zulässig in bezug auf \mathfrak{X}'' . Da e' konvex ist, kann man aber dadurch, dass man die Scharebene E um einen hinreichend kleinen Winkel dreht und zwar um eine in E liegende Achse durch P , die e' höchstens in P trifft, eine Schar (E) erhalten, in bezug auf welche die von P verschiedenen Punkte von e' die Ordnung null, die von P verschiedenen Punkte von g' dieselbe Ordnung wie in bezug auf (E) haben und bei welcher \mathfrak{X}'' von der durch P gehenden Scharebene E nur noch in $k+r-1$ Schnittlinien getroffen wird.¹

Statt die Ebenenschar zu ändern, drehen wir \mathfrak{X}'' um die bezeichnete Achse und zwar so wenig, dass \mathfrak{X}'' noch im Inneren von \mathbb{C}^3 verbleibt. Eine Schnittlinie von \mathfrak{X}'' mit einer Scharebene E_Q durch die Ausnahmeecke Q geht dabei in eine auf \mathfrak{X}'' homologe über. Die Drehung von \mathfrak{X}'' kann nach § 1 Satz 4 durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich bewirkt werden, die ausserhalb \mathbb{C}^3 die Identität ist.

Das Verfahren lässt sich nun auf eine neue innerste Schnittlinie von \mathfrak{X}'' mit der durch P gehenden Scharebene anwenden, wenn für diese wieder Fall 1 eintritt, und entsprechend ist fortzufahren. Wenn nie Fall 2 eintritt, ist P nach höchstens $k+r-1$ Schritten nicht mehr Ausnahmeecke, da dann nur noch eine Schnittlinie vorhanden ist. Es kann dann das Verfahren für eine andere Ausnahmeecke wiederholt werden, bis schliesslich einmal der Fall 2 eintritt. Tatsächlich muss dies geschehen, da sonst \mathfrak{X} in eine Fläche übergeführt

¹ Vgl. hierzu GRAEBUB [6] S. 23, 24.

werden könnte, die bezüglich einer zulässigen Ebenenschar keine Ausnahmeecke besitzt, was nach Satz 1 unmöglich ist. Wenn Fall 2 eintritt, erhält man auf dem aus \mathfrak{T} entstandenen Torus für einen von diesem Torus in der \mathfrak{E}^3 berandeten Vollring einen Meridian, der in einer Scharebene durch eine Ausnahmeecke dieses Torus liegt. Wie sich aus dem Vorangehenden ergibt, entspricht diesem Meridian auf \mathfrak{T} ein solcher mit entsprechenden Eigenschaften.

§ 5. Knoten.

Unter einer *Knotenlinie* in der \mathfrak{E}^3 verstehen wir einen einfachen Weg, also einen orientierten, doppelpunktfreien, geschlossenen Streckenzug. Zwei Knotenlinien heissen *äquivalent*, wenn es eine (orientierungserhaltende) s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich gibt, welche die eine in die andere überführt. Wie Graeub [6] gezeigt hat, sind zwei Knotenlinien genau dann äquivalent, wenn sie kombinatorisch isotop sind. Eine Äquivalenzklasse von Knotenlinien heisst *Knoten*. Der Knoten, der von dem Rand eines orientierten 2-Simplexes repräsentiert wird¹, heisst *Kreis*. Eine Knotenlinie repräsentiert genau dann den Kreis, wenn es ein Elementarflächenstück² gibt, dessen Rand sie ist [9]. Eine solche Knotenlinie nennen wir *Kreislinie* oder sagen auch, dass sie unverknotet sei. Die folgenden Zitate entnehmen wir [9]:

Es sei \mathfrak{K} eine Kugel in der \mathfrak{E}^3 . Unter einer *Sehne* u von \mathfrak{K} verstehen wir einen doppelpunktfreien, orientierten Streckenzug, der von einem Punkte P des Randes von \mathfrak{K} durch das Innere von \mathfrak{K} zu einem von P verschiedenen Punkte Q des Randes von \mathfrak{K} führt, ohne den Rand von \mathfrak{K} sonst zu treffen. Zieht man auf dem Rande von \mathfrak{K} einen doppelpunktfreien Weg w von Q nach P , so bilden u und w zusammen eine Knotenlinie. Wir sagen, dass die *Sehne* u in \mathfrak{K} den durch diese Knotenlinie dargestellten *Knoten erzeugt*. Dieser Knoten ist unabhängig von der Wahl von w . Zu jedem Knoten existiert eine Kugel \mathfrak{K} mit Sehne u , sodass u in \mathfrak{K} diesen Knoten erzeugt. Eine Sehne u der Kugel \mathfrak{K} heisse *unverknotet*, wenn sie in \mathfrak{K} den Kreis erzeugt, andernfalls *verknotet*.

Hilfssatz 1: *Es seien \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 zwei Kugeln in der \mathfrak{E}^3 mit den Sehnen u_1 bzw. u_2 . Es existiert eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die \mathfrak{K}_1 so auf \mathfrak{K}_2 abbildet, dass u_1 in u_2 übergeht, genau dann, wenn u_1 in \mathfrak{K}_1 denselben Knoten erzeugt wie u_2 in \mathfrak{K}_2 . In diesem Fall kann die s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich so gewählt werden, dass ein vorgegebener Verbindungsweg der Sehnenendpunkte auf dem Rande von \mathfrak{K}_1 in einen vorgegebenen solchen Verbindungsweg auf dem Rande von \mathfrak{K}_2 übergeführt wird ([9] S. 11).*

¹ Die Ränder irgend zweier orientierter 2-Simplexe in der \mathfrak{E}^3 sind äquivalent.

² Es ist zu beachten, dass wir keine Flächen mit Singularitäten zugelassen haben.

Hilfssatz 2: *Erzeugen in einer Kugel \mathbb{R} zwei Sehnen u_1 und u_2 mit gemeinsamem Anfangspunkt und gemeinsamem Endpunkt denselben Knoten, so existiert eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, die u_1 in u_2 überführt und ausserhalb \mathbb{R} die Identität ist ([9] S. 15).*

Es sei k eine Knotenlinie in der \mathbb{S}^3 , die den Knoten κ repräsentiert, und \mathbb{S}^2 eine 2-Sphäre, die von k in genau zwei Punkten getroffen und dort durchsetzt wird. Nach § 1 Satz 9 zerlegt \mathbb{S}^2 die \mathbb{S}^3 in 2 Kugeln \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 , und k bildet in \mathbb{R}_1 bzw. \mathbb{R}_2 je eine Sehne u_1 bzw. u_2 . Ist κ_i ($i = 1, 2$) der Knoten, der von u_i in \mathbb{R}_i erzeugt wird, so heisst κ das Produkt von κ_1 und κ_2 . Zu je zwei vorgegebenen Knoten existiert genau ein Knoten, der ihr Produkt ist.

Die Produktbildung ist assoziativ und kommutativ. Der Kreis spielt die Rolle des Einselementes:

Satz 1: *Ist in einem Produkt von zwei Knoten ein Faktor der Kreis, so ist der Produktknoten gleich dem anderen Faktor und umgekehrt ([9] S. 28).*

Satz 2: *Das Geschlecht eines Produktknotens ist gleich der Summe der Geschlechter seiner Faktoren¹ ([9] S. 24).*

Satz 3: *Der Kreis ist der einzige Knoten vom Geschlecht null ([9] S. 16).*

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt, dass sich der Kreis nur als Produkt von Kreisen darstellen lässt.

Nach Satz 1 lässt sich jeder Knoten darstellen als Produkt von sich selbst mit dem Kreis. Ein Knoten, der auf keine andere Weise als Produkt zweier Knoten darstellbar ist und der selbst kein Kreis ist, heisst *Primknoten*.

Satz 4: *Jeder Knoten vom Geschlecht 1 ist Primknoten ([9] S. 29).*

Satz 5: *Jeder Produktknoten ist Produkt von (endlich vielen) Primknoten² ([9] S. 29).*

Eine Faktorzerlegung eines Produktknotens lässt sich auf folgende Weise darstellen:

Hilfssatz 3: *Es sei κ das Produkt der Knoten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, und es sei k ein Repräsentant von κ . Dann gibt es n paarweise punktfremde Kugeln $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \dots, \mathbb{R}_n$ derart, dass k in jeder Kugel \mathbb{R}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) genau eine Sehne u_i bildet und dass u_i in \mathbb{R}_i den Knoten λ_i erzeugt. Man erhält aus k eine Kreislinie, wenn man jede Sehne u_i durch einen geeignet orientierten Verbindungsweg ihrer Endpunkte auf dem Rande von \mathbb{R}_i ersetzt ([9] S. 30).*

Umgekehrt gilt:

¹ Sei k eine Knotenlinie. Das kleinste Geschlecht aller orientierbaren (singularitätenfreien) Flächen, die k zum (einzigen) Rand haben, ist das Geschlecht des von k dargestellten Knotens.

² Das schärfere Resultat von [9], dass sich jeder Produktknoten nur auf eine Weise als Produkt von Primknoten darstellen lässt, wird sich in § 19 erneut ergeben.

Hilfssatz 4: Es sei k eine Knotenlinie. $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ seien paarweise punktfremde Kugeln derart, dass k in jeder Kugel \mathfrak{R}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) genau eine Sehne u_i bildet. Die Sehne u_i erzeuge in \mathfrak{R}_i den Knoten λ_i . Die Knotenlinie k' entstehe dadurch, dass man in jeder Kugel \mathfrak{R}_i die Sehne u_i durch eine unverknotete Sehne ersetzt. Der von k dargestellte Knoten ist dann das Produkt aus den Knoten λ_i und dem Knoten, der von k' dargestellt wird ([9] S. 32)¹

Hilfssatz 5: In einer Kugel \mathfrak{R} erzeuge eine Sehne u den Knoten κ , der das Produkt der Knoten κ_1 und κ_2 ist. Dann lässt sich \mathfrak{R} durch ein Elementarflächenstück e , das von u in genau einem Punkte getroffen und dort durchsetzt wird, so in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegen, dass das in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 liegende Stück von u als Sehne von \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 den Knoten κ_1 bzw. κ_2 erzeugt ([9] S. 20).

Umgekehrt gilt:

Hilfssatz 6: Eine Kugel \mathfrak{R} , in der eine Sehne u den Knoten κ erzeugt, werde von einem Elementarflächenstück e , das von u in genau einem Punkte getroffen und dort durchsetzt wird, in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegt. Das in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 liegende Stück von u möge in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 den Knoten κ_1 bzw. κ_2 erzeugen. Dann ist κ das Produkt der Knoten κ_1 und κ_2 ([9] S. 22).

Die Knotenlinie k sei Repräsentant des Knotens κ . Durch Umorientierung von k entsteht ein Repräsentant eines Knotens κ' , der von κ nicht verschieden zu sein braucht. Das Paar (κ, κ') nennen wir einen *nicht-orientierten Knoten*, die Knoten κ und κ' bezeichnen wir als *orientierte Komponenten* von (κ, κ') . Die Knotenlinie k soll nach Weglassen der Orientierung *nicht-orientierte Knotenlinie* und Repräsentant des nicht-orientierten Knotens heißen. Zwei nicht-orientierte Knotenlinien stellen genau dann denselben nicht-orientierten Knoten dar, wenn es eine (orientierungserhaltende) s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, welche die eine in die andere überführt. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden wir Knoten bzw. Knotenlinien gelegentlich auch als orientierte Knoten bzw. Knotenlinien bezeichnen.

Wenn für einen nicht-orientierten Knoten (κ, κ') gilt $\kappa = \kappa'$, so heisst der Knoten κ *symmetrisch*. Ein Knoten κ heisst *amphicheiral*, wenn es zu einem Repräsentanten k von κ eine orientierungsumkehrende s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, welche k auf sich mit Erhaltung der Orientierung abbildet. Wir werden in § 21 feststellen, dass Torusknoten symmetrisch, nicht aber amphicheiral sind. Der Kreis ist symmetrisch und amphicheiral.

§ 6. Seelen und Breitenkreise eines Vollringes in der \mathfrak{S}^3 .

Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 . \mathfrak{B} werde durch zwei disjunkte Meridianflächen e , f in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegt. Auf e und f werde je ein mittlerer Punkt P bzw. Q

¹ In [9] ist auf S. 32 eine etwas andere Aussage bewiesen. Der dort gegebene Beweis überträgt sich jedoch wegen Satz 1 fast wörtlich auf die hier gegebene Aussage.

gewählt, und es werde P mit Q in \mathfrak{R}_1 durch eine unverknotete Sehne a_1 , Q mit P in \mathfrak{R}_2 durch eine unverknotete Sehne a_2 verbunden. a_1 und a_2 setzen sich zu einer Knotenlinie a zusammen, die *orientierte Seele* von \mathfrak{B} heisse. Durch Umkehrung der Orientierung von a erhält man ebenfalls eine orientierte Seele von \mathfrak{B} . Dies beruht darauf, dass die unverknoteten Sehnen a_1, a_2 von \mathfrak{R}_1 bezw. \mathfrak{R}_2 bei Umkehrung ihrer Orientierung wieder unverknotete Sehnen sind, da eine Kreislinie bei Umkehrung ihrer Orientierung wieder eine Kreislinie darstellt. Sieht man von der Orientierung von a ab, so heisse a *Seele* von \mathfrak{B} .

Durch die angegebene Konstruktion lassen sich verschiedene Seelen von \mathfrak{B} erhalten. Es stellen jedoch alle Seelen denselben nicht-orientierten Knoten dar. Genauer gilt:

Hilfssatz 1: *Es seien a und a' zwei Seelen des Vollringes \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 . Es gibt eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die a in a' überführt und auf dem Komplement von \mathfrak{B} die Identität ist.*

Beweis: $e, f, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, P, Q, a_1$ und a_2 mögen die oben angegebene Bedeutung für a haben, $e', f', \mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, P', Q', a'_1$ und a'_2 die entsprechende Bedeutung für a' . \mathfrak{I} sei der Rand von \mathfrak{B} .

Die Ränder von e und f sind Meridiane von \mathfrak{B} und bilden bei geeigneter Orientierung ein System von 2 Parallelkurven auf \mathfrak{I} . Gleiches gilt für die Ränder von e' und f' . Nach § 2 Satz 4 gibt es eine s -Abbildung φ der \mathfrak{E}^3 auf sich, die \mathfrak{I} auf sich abbildet, den Rand von e bezw. f in den Rand von e' bezw. f' und die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{I} die Identität ist. φ bildet \mathfrak{B} auf sich ab und kann insbesondere so gewählt werden, dass a punktweise festbleibt. Durch φ geht \mathfrak{R}_1 bezw. \mathfrak{R}_2 in eine Kugel $\varphi(\mathfrak{R}_1)$ bezw. $\varphi(\mathfrak{R}_2)$ über, und es ist a_1 Sehne von $\varphi(\mathfrak{R}_1)$, a_2 Sehne von $\varphi(\mathfrak{R}_2)$. a_1 ist unverknotet in $\varphi(\mathfrak{R}_1)$ nach § 5 Hilfssatz 1, ebenso ist a_2 unverknotet in $\varphi(\mathfrak{R}_2)$. Wir können also unter Benutzung der ursprünglichen Bezeichnungen im Weiteren annehmen, dass der Rand von e bezw. f mit dem Rand von e' bezw. f' zusammenfällt.

Durch die Ränder von e und f wird \mathfrak{I} in zwei Kreisringe r_1, r_2 zerlegt, wobei r_1 auf dem Rande von \mathfrak{R}'_1 , r_2 auf dem Rande von \mathfrak{R}'_2 liege. r_1 liegt entweder auf dem Rande von \mathfrak{R}_1 oder auf dem Rande von \mathfrak{R}_2 . Falls r_1 auf dem Rande von \mathfrak{R}_1 liegt, behalten wir die Bezeichnungen bei. Falls r_1 auf dem Rande von \mathfrak{R}_2 liegt (und damit r_2 auf dem Rande von \mathfrak{R}_1), vertauschen wir die Bezeichnungen von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 und von a_1 und a_2 , wobei wir diese Sehnen gleichzeitig umorientieren. Wie oben bemerkt wurde, bleiben diese Sehnen dabei unverknotet, und a bleibt als nicht-orientierte Knotenlinie erhalten. r_1 liegt nun auf dem Rande von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}'_1 , r_2 auf dem Rande von \mathfrak{R}_2 und \mathfrak{R}'_2 .

Wir bilden nun e durch eine s -Abbildung ψ auf e' ab und zwar so, dass ψ auf dem gemeinsamen Rande von e und e' die Identität ist und dass der mittlere Punkt P von e in den mittleren Punkt P' von e' übergeht. Dass eine solche Abbildung existiert, erkennt

man ohne weiteres, wenn man e' in ein 2-Simplex überführt. Entsprechend definieren wir eine s -Abbildung ψ von f auf f' , die auf dem Rande von f die Identität ist und Q in Q' überführt. Auf \mathfrak{L} definieren wir ψ durch die Identität. Damit ist für den Rand von \mathfrak{K}_1 bzw. von \mathfrak{K}_2 eine s -Abbildung ψ auf den Rand von \mathfrak{K}'_1 bzw. \mathfrak{K}'_2 definiert. Nach § 1 Satz 8 können diese s -Abbildungen zu s -Abbildungen ψ von \mathfrak{K}_1 auf \mathfrak{K}'_1 bzw. von \mathfrak{K}_2 auf \mathfrak{K}'_2 erweitert werden. Dabei geht a_1 in eine unverknotete Sehne von \mathfrak{K}'_1 über, die von P' nach Q' führt, ebenso wie a'_1 , aus a_2 entsteht eine unverknotete Sehne von \mathfrak{K}'_2 , die von Q' nach P' führt wie a'_2 . Nach § 5 Hilfssatz 2 kann ψ auf \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 so definiert werden, dass a_1 in a'_1 und a_2 in a'_2 übergeht. Damit ist eine s -Abbildung ψ von \mathfrak{B} auf sich definiert, welche a in a' überführt und auf dem Rande von \mathfrak{B} die Identität ist. Definiert man ψ im Komplement von \mathfrak{B} noch durch die Identität, so erhält man eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich mit den gewünschten Eigenschaften.

Wir stellen nun \mathfrak{B} wie in § 3 als Bild eines Prismas \mathfrak{P} bezüglich einer Abbildung σ mit den dort angegebenen Eigenschaften 1), 2) dar. Dabei kann angenommen werden, dass \mathfrak{P} in einem 3-Simplex der \mathfrak{E}^3 liegt. Es hat dann Sinn, von einer Sehne von \mathfrak{P} zu sprechen.

Hilfssatz 2: *Der Vollring \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 sei längs einer Meridianfläche e zu einem Prisma \mathfrak{P} aufgeschnitten. Die zugehörige Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} sei σ . Ist u eine unverknotete Sehne von \mathfrak{P} , die einen Punkt der Dachfläche von \mathfrak{P} mit dem darunter liegenden Punkt der Bodenfläche verbindet, so ist $\sigma(u)$ orientierte Seele von \mathfrak{B} .*

Beweis: Es sei e_1 die Dachfläche, e_2 die Bodenfläche von \mathfrak{P} . Die Sehne u von \mathfrak{P} verbinde den Punkt P_1 von e_1 mit dem Punkte P_2 von e_2 . Dabei ist $\sigma(P_1) = \sigma(P_2)$. Neben u betrachten wir eine Sehne u' , die geradlinig von P_1 nach P_2 führt. Offenbar ist u' unverknotet in \mathfrak{P} . Nach § 5 Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung χ von \mathfrak{P} auf sich, welche u' in u überführt und auf dem Rande von \mathfrak{P} die Identität ist. Nun wird \mathfrak{B} nicht nur durch \mathfrak{P} und σ sondern auch durch \mathfrak{P} und die Abbildung $\sigma' = \sigma\chi$ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} dargestellt. Es ist zu zeigen, dass $\sigma'(u') = \sigma(u)$ eine orientierte Seele von \mathfrak{B} ist.

Es sei t' eine gerade Mantellinie von \mathfrak{P} , die parallel zu u' ist. Verbindet man die Endpunkte von u' und t' in der Dachfläche e_1 und in der Bodenfläche e_2 von \mathfrak{P} geradlinig, so erhält man einen rechteckigen Streckenzug, der ein ebenes Elementarflächenstück g' auf \mathfrak{P} berandet (Fig. 5). Durch ein Elementarflächenstück f' , das parallel zu e_1 ist, wird \mathfrak{P} in zwei Kugeln $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2$ und g' in zwei Elementarflächenstücke g'_1, g'_2 zerlegt, wobei g'_1 in \mathfrak{K}'_1 liege. Durch die Abbildung σ' gehen e_1 und e_2 in die Meridianfläche e und f' in eine Meridianfläche f von \mathfrak{B} über. e und f zerlegen \mathfrak{B} in zwei Kugeln $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$, die Bilder von $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2$ sind. Durch das in \mathfrak{K}_1 bzw. \mathfrak{K}_2 liegende Stück von $\sigma'(u')$ erhält man eine Sehne von \mathfrak{K}_1 bzw. \mathfrak{K}_2 , die unverknotet ist, wie durch das Bild von g'_1 bzw. g'_2 in Evidenz gesetzt wird (§ 5 Satz 3). $\sigma'(u') = \sigma(u)$ ist also eine orientierte Seele von \mathfrak{B} .

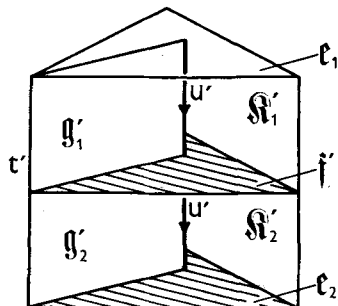


Fig. 5.

Wir merken noch an, dass g' durch σ' in einen Kreisring g übergeführt wird, der auf \mathfrak{B} liegt und dessen Ränder die Bilder von u' und t' sind.

Hilfssatz 3: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathbb{E}^3 , a eine Seele, \mathfrak{L} der Rand von \mathfrak{B} . Ferner sei c ein einfacher Weg auf \mathfrak{L} , dessen algebraische Schnittzahl mit den Meridianen von $\mathfrak{B} \pm 1$ sei. Bei geeigneter Orientierung von a ist c auf \mathfrak{B} kombinatorisch isotop zu a , und es stellen c und a denselben Knoten dar.*

Beweis: Wir benutzen die angegebene Darstellung von \mathfrak{B} als Bild des Prismas \mathfrak{P} bezüglich der Abbildung σ' . Das orientierte Bild des Randes der Bodenfläche e_2 von \mathfrak{P} ist ein Meridian m von \mathfrak{B} , das orientierte Bild der Mantellinie t' von \mathfrak{P} ein zu m konjugierter Rückkehrschnitt t , und es besteht auf \mathfrak{L} eine Homologie

$$c \sim \beta m + \alpha t \quad (\alpha, \beta \text{ ganz}).$$

Es kann angenommen werden, dass $\beta = 0$ und $\alpha = 1$ ist. Zunächst ist $\alpha = \pm 1$, wie sich durch Übergang zu den algebraischen Schnittzahlen ergibt, und die Orientierung von t kann so festgelegt werden, dass $\alpha = +1$ ist. Sollte β nicht null sein, so führe man eine semilineare Abbildung ω von \mathfrak{B} auf sich aus, welche e_2 festlässt und die Dachfläche e_1 von \mathfrak{B} um ein solches Vielfaches von 2π dreht ($\pm 2\pi\beta$), dass das geeignet orientierte Bild der Mantellinie t' von \mathfrak{P} bezüglich $\sigma'\omega$ ein zu c homologer einfacher Weg auf \mathfrak{L} ist. Statt $\sigma'\omega$ ist dann wieder σ' zu schreiben.

Ferner kann angenommen werden, dass die Sehne u' von \mathfrak{P} durch σ' in die gegebene Seele a von \mathfrak{B} übergeführt wird, denn wegen Hilfssatz 1 kann man andernfalls σ' noch mit einer s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich zusammensetzen, die auf \mathfrak{L} die Identität ist und $\sigma'(u')$ in a überführt.

Nun ist c homolog zu t auf \mathfrak{L} , also zu t kombinatorisch isotop auf \mathfrak{L} nach § 2 Satz 2, und bei geeigneter Orientierung von a sind a und t kombinatorisch isotop auf \mathfrak{B} , wie sich mit Hilfe des Kreisringes $\sigma'(g')$ aus § 2 Hilfssatz 4 ergibt. Damit erhält man die Behauptung, da kombinatorisch isotope Knotenlinien äquivalent sind.

Sei \mathfrak{B} wieder ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 mit dem Rande \mathfrak{I} . Ein einfacher Weg auf \mathfrak{I} , der im abgeschlossenen Komplement von \mathfrak{B} (also in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$) nullhomolog ist, ohne auf \mathfrak{I} nullhomolog zu sein, heiße *Breitenkreis* von \mathfrak{B} . Die Breitenkreise von \mathfrak{B} bilden auf \mathfrak{I} zwei Homologieklassen, die auseinander durch Umorientierung entstehen.

Die Existenz von Breitenkreisen ergibt sich daraus, dass ein Meridian m von \mathfrak{B} Erzeugende der 1-dimensionalen Homologiegruppe von $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ ist. Ein zu m konjugierter Rückkehrschnitt b auf \mathfrak{I} ist daher in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ homolog einem Vielfachen von m . Insbesondere kann b so gewählt werden, dass b in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ nullhomolog ist. b ist also Breitenkreis von \mathfrak{B} . Nach Wahl von b bilden m und b eine eindimensionale Homologiebasis auf \mathfrak{I} .

Ist nun c ein beliebiger einfacher Weg auf \mathfrak{I} , der nullhomolog in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ nicht aber auf \mathfrak{I} ist, so besteht auf \mathfrak{I} eine Homologie

$$c \sim \beta m + \alpha b \quad (\alpha, \beta \text{ ganz}).$$

Hierin ist $\beta = 0$, wie sich durch Übergang zu den Verschlingungszahlen mit einer orientierten Seele a von \mathfrak{B} ergibt. Es haben nämlich c und b mit a die Verschlingungszahl null, da sie in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ nullhomolog sind, und die Verschlingungszahl von a mit m ist ± 1 . Wegen $\beta = 0$ ist die algebraische Schnittzahl von c mit b auf \mathfrak{I} gleich null. Es kann daher nach § 2 Hilfssatz 3 angenommen werden, dass c und b disjunkt sind. Dann ist aber $c \sim \pm b$ (also $\alpha = \pm 1$), wie aus der Doppelpunktfreiheit von c folgt, wenn man \mathfrak{I} längs b zu einem Kreisring aufschneidet. Die Breitenkreise von \mathfrak{B} liegen also in den beiden Homologieklassen von \mathfrak{I} , die durch $\pm b$ bestimmt sind.

Wir bemerken: Ein Breitenkreis von \mathfrak{B} bildet zusammen mit einem Meridian eine 1-dimensionale Homologiebasis auf \mathfrak{I} . Auf \mathfrak{I} ist die algebraische Schnittzahl eines Breitenkreises mit einem Meridian gleich ± 1 , und aus Hilfssatz 3 folgt insbesondere, dass ein Breitenkreis von \mathfrak{B} zu einer geeignet orientierten Seele von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} kombinatorisch isotop ist.

Ferner ist ein Breitenkreis b von \mathfrak{B} Erzeugende der 1-dimensionalen Homologiegruppe von \mathfrak{B} : Jeder 1-Zyklus ist auf \mathfrak{B} homolog zu einem 1-Zyklus auf \mathfrak{I} und damit auf \mathfrak{B} homolog zu einem Vielfachen von b , da die Meridiane von \mathfrak{B} nullhomolog auf \mathfrak{B} sind. Daraus folgt auch, dass jede orientierte Seele von \mathfrak{B} Erzeugende der 1-dimensionalen Homologiegruppe von \mathfrak{B} ist.

Die Definition der orientierten Seelen eines Vollringes gestattet folgende Umkehrung:

Hilfssatz 4: *Es sei a eine orientierte Seele des Vollringes \mathfrak{B} in der \mathfrak{S}^3 . \mathfrak{B} werde durch zwei disjunkte Meridianflächen e_1 und e_2 , die von a in nur je einem Punkte getroffen werden,*

in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt. Dann bildet a in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine Sehne a_1 bzw. a_2 , und es ist a_1 unverknotet in \mathfrak{R}_1 , a_2 unverknotet in \mathfrak{R}_2 .

Wir beweisen zunächst den

Hilfssatz 5: *Es sei k eine Knotenlinie im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} , die auf \mathfrak{B} zu der orientierten Seele a von \mathfrak{B} homolog ist. \mathfrak{B} werde durch zwei disjunkte Meridianflächen e_1 und e_2 , die von k in nur je einem Punkte getroffen werden, in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ zerlegt. Dann bildet k in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine Sehne k_1 bzw. k_2 , und der von k dargestellte Knoten κ ist das Produkt aus dem von a dargestellten Knoten λ und den von k_1 und k_2 in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 erzeugten Knoten κ_1, κ_2 ; also $\kappa = \kappa_1 \kappa_2 \lambda$.*

Beweis: e_1 und e_2 werden in dem Punkte, den sie mit k gemein haben, durchsetzt. Andernfalls läge k entweder ganz auf \mathfrak{R}_1 oder ganz auf \mathfrak{R}_2 und wäre daher nullhomolog auf \mathfrak{B} , was unmöglich ist, da k auf \mathfrak{B} homolog zu der Erzeugenden a der 1-dimensionalen Homologiegruppe von \mathfrak{B} ist. k bildet also in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine Sehne k_1 bzw. k_2 .

Nach § 5 lässt sich κ_1 als Produkt von sich selbst mit dem Kreise darstellen, und nach § 5 Hilfssatz 5 lässt sich \mathfrak{R}_1 durch ein Elementarflächenstück \mathfrak{f} , das von k_1 in genau einem Punkte getroffen und dort durchsetzt wird, so in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_{11}, \mathfrak{R}_{12}$ zerlegen, dass das in \mathfrak{R}_{11} liegende Stück k_{11} von k_1 in \mathfrak{R}_{11} den Knoten κ_1 und das in \mathfrak{R}_{12} liegende Stück k_{12} von k_1 in \mathfrak{R}_{12} den Kreis erzeugt.

Durch den Rand von \mathfrak{R}_{11} wird die \mathfrak{S}^3 zerlegt in die Kugel \mathfrak{R}_{11} und eine Kugel $\overline{\mathfrak{R}_{11}}$. k_{11} ist Sehne von \mathfrak{R}_{11} , $k_{12} + k_2$ Sehne von $\overline{\mathfrak{R}_{11}}$, und der von k dargestellte Knoten κ ist das Produkt des von k_{11} in \mathfrak{R}_{11} erzeugten Knotens κ_1 mit dem von $k_{12} + k_2$ in $\overline{\mathfrak{R}_{11}}$ erzeugten Knoten, den wir mit μ bezeichnen: $\kappa = \kappa_1 \mu$.

Wir ersetzen nun k_{11} durch eine unverknotete Sehne k'_{11} von \mathfrak{R}_{11} , die denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt wie k_{11} besitzt. Wir erhalten damit eine Sehne $k'_1 = k'_{11} + k_{12}$ von \mathfrak{R}_1 , die nach § 5 Hilfssatz 6 in \mathfrak{R}_1 unverknotet ist. Aus k entsteht eine Knotenlinie $k' = k'_{11} + k_{12} + k_2 = k'_1 + k_2$, die auf \mathfrak{B} zu k homolog ist. Diese stellt das Produkt aus dem von $k_{12} + k_2$ in $\overline{\mathfrak{R}_{11}}$ erzeugten Knoten μ und dem von k'_{11} in \mathfrak{R}_{11} erzeugten Kreis dar, also den Knoten μ .

Der Rand von \mathfrak{R}_2 zerlegt die \mathfrak{S}^3 in die Kugel \mathfrak{R}_2 und eine Kugel $\overline{\mathfrak{R}_2}$. Durch k' und den Rand von \mathfrak{R}_2 wird μ dargestellt als das Produkt des von k_2 in \mathfrak{R}_2 erzeugten Knotens κ_2 mit dem von k'_1 in $\overline{\mathfrak{R}_2}$ erzeugten Knoten, den wir mit ν bezeichnen: $\mu = \kappa_2 \nu$.

Wir ersetzen nun k_2 durch eine unverknotete Sehne k'_2 von \mathfrak{R}_2 , wodurch aus k' eine Knotenlinie $k'' = k'_1 + k'_2$ entsteht, die auf \mathfrak{B} homolog zu k' und damit homolog zu k ist. k'' stellt einen Knoten dar, der das Produkt des von k'_2 in \mathfrak{R}_2 erzeugten Kreises mit dem von k'_1 in $\overline{\mathfrak{R}_2}$ erzeugten Knoten ν ist. k'' stellt also den Knoten ν dar, und es ist $\kappa = \kappa_1 \kappa_2 \nu$.

Nun ist aber k'' eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , da k'' in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine unverknotete Sehne bildet, nämlich k'_1 bzw. k'_2 . Nach Hilfssatz 1 gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die k'' auf die Seele a von \mathfrak{B} abbildet und ausserhalb \mathfrak{B} die Identität ist. Dabei geht die Orientierung von k'' in die von a über, weil k'' auf \mathfrak{B} zu k und damit zu a homolog ist und weil die Abbildung jeden 1-Zyklus auf \mathfrak{B} in einen homologen überführt, da sie auf dem Rande von \mathfrak{B} die Identität ist. Es ist also $\nu = \lambda$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Wir wenden uns nun dem Beweise von Hilfssatz 4 zu. Wendet man Hilfssatz 5 auf a an, so erhält man: Der von a dargestellte Knoten $\kappa = \lambda$ ist das Produkt von sich selbst mit den Knoten κ_1, κ_2 , die von a_1 bzw. a_2 in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 erzeugt werden. Nach § 5 Satz 1 ist $\kappa_1 \kappa_2$ der Kreis. Dann sind aber auch κ_1 und κ_2 Kreise, da der Kreis nur als Produkt von Kreisen dargestellt werden kann. Es ist also a_1 unverknotet in \mathfrak{R}_1 , a_2 unverknotet in \mathfrak{R}_2 .

§ 7. Unverknotete Vollringe.

Wir nennen einen Vollring \mathfrak{B} in der \mathfrak{S}^3 *unverknotet*, wenn durch eine orientierte Seele von \mathfrak{B} der Kreis dargestellt wird. Andernfalls heisst \mathfrak{B} *verknotet*. Für einen unverknoteten Vollring in der \mathfrak{S}^3 stellt jede orientierte Seele den Kreis dar. Dies folgt aus § 6 Hilfssatz 1 und der Tatsache, dass der Kreis symmetrisch ist. Wir wollen mit den Sätzen 1 und 2 zwei Kriterien dafür aufstellen, dass ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 unverknotet ist.

Hilfssatz 1: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 mit dem Rande \mathfrak{L} . \mathfrak{C} sei ein Elementarflächenstück, dessen Rand im Inneren von \mathfrak{B} liegt und dessen Durchschnitt mit \mathfrak{L} aus doppel-punktfreien, paarweise punktfremden Schnittlinien besteht. \mathfrak{C} lässt sich bei festgehaltenem Rand so deformieren, dass der Durchschnitt von \mathfrak{L} und \mathfrak{C} keine auf \mathfrak{L} nullhomologe Schnittlinie enthält.*

Beweis: Wir betrachten die Schnittlinien von \mathfrak{C} und \mathfrak{L} , die auf \mathfrak{L} nullhomolog sind. Jede berandet auf \mathfrak{L} ein Elementarflächenstück, und es gibt unter ihnen eine solche, etwa s , die auf \mathfrak{L} ein Elementarflächenstück f berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s berandet auf \mathfrak{C} ein Elementarflächenstück e , und es bilden e und f zusammen eine 2-Sphäre \mathfrak{S}^2 , welche die \mathfrak{S}^3 nach § 1 Satz 9 in zwei Kugeln zerlegt. Da \mathfrak{S}^2 den Rand von \mathfrak{C} nicht trifft, enthält eine dieser Kugeln den Rand von \mathfrak{C} . Die andere der beiden Kugeln sei \mathfrak{R} . Wie in § 1 ausgeführt (Satz 11) kann man \mathfrak{C} dadurch deformieren, dass man e über \mathfrak{R} deformiert und anschliessend so von f abhebt, dass die Schnittlinie s verschwindet und keine neuen Schnittlinien von \mathfrak{C} und \mathfrak{L} entstehen. Das Abheben kann zudem so vorgenommen werden, dass der Rand von \mathfrak{C} festbleibt. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Schnittlinien von \mathfrak{C} und \mathfrak{L} beseitigen, die nullhomolog auf \mathfrak{L} sind.

Satz 1: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathbb{S}^3 . Im Inneren von \mathfrak{B} liege eine Kreislinie k so, dass k nicht bereits in einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten ist. Dann ist \mathfrak{B} unverknotet.*

Beweis: Da k eine Kreislinie ist, gibt es nach § 5 ein Elementarflächenstück \mathfrak{C} , das von k berandet wird. Nach den Erörterungen von § 1 kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{C} mit dem Rande \mathfrak{L} von \mathfrak{B} entweder leer ist oder nur aus doppel-punktfreien, paarweise punktfremden Schnittlinien besteht, und wegen Hilfssatz 1 kann angenommen werden, dass von diesen Schnittlinien keine nullhomolog auf \mathfrak{L} ist.

Der Durchschnitt von \mathfrak{C} und \mathfrak{L} kann nicht leer sein. Andernfalls läge \mathfrak{C} im Inneren von \mathfrak{B} , da dies für den Rand k der Fall ist, und eine genügend kleine simpliziale Umgebung von \mathfrak{C} würde eine Kugel ausmachen, die in \mathfrak{B} liegt und k enthält, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Von den verbliebenen Schnittlinien berandet jede auf \mathfrak{C} ein Elementarflächenstück. Wir betrachten eine solche, s , die auf \mathfrak{C} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. e muss entweder auf \mathfrak{B} oder auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$ liegen. Läge e auf \mathfrak{B} , so wäre s nullhomolog auf \mathfrak{B} , und da s nicht nullhomolog auf \mathfrak{L} ist, müsste s Meridian von \mathfrak{B} sein. Dann wäre e Meridianfläche von \mathfrak{B} . Dies ist aber unmöglich, denn es liesse sich sonst \mathfrak{B} durch eine Meridianfläche f , die zu e hinreichend benachbart ist und e nicht trifft, in zwei Kugeln zerlegen, von denen eine k enthalten müsste, da k von e nicht getroffen wird und auch nicht von f , wenn f hinreichend nahe an e gewählt wird. Man erhielte damit einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Es muss also e auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$ liegen. s ist nun eine Kreislinie auf \mathfrak{L} , die nullhomolog auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$ nicht aber auf \mathfrak{L} ist, wie sich aus der Berandung von e ergibt. Die Kreislinie s ist also Breitenkreis von \mathfrak{B} , und nach § 6 Hilfssatz 3 stellt s denselben Knoten dar wie eine geeignet orientierte Seele von \mathfrak{B} . \mathfrak{B} ist also unverknotet.

Hilfssatz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein verknoteter Vollring in der \mathbb{S}^3 . Eine Kreislinie s auf dem Rande \mathfrak{L} von \mathfrak{B} ist entweder nullhomolog auf \mathfrak{L} oder Meridian von \mathfrak{B} .*

Beweis: Es muss nur gezeigt werden, dass s nullhomolog auf \mathfrak{B} ist. Wäre dies aber nicht der Fall, so könnten wir s kombinatorisch ins Innere von \mathfrak{B} deformieren (dass dies möglich ist, erkennt man an einer Darstellung von \mathfrak{B} durch ein Prisma \mathfrak{P} unmittelbar), wodurch wir eine Kreislinie im Inneren von \mathfrak{B} erhielten, die nicht in einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten sein kann, da sie auf \mathfrak{B} nicht nullhomolog ist. Satz 1 ergibt dann unmittelbar einen Widerspruch zur Voraussetzung, dass \mathfrak{B} verknotet ist.

Satz 2: *Das abgeschlossene Komplement eines Vollringes \mathfrak{B} in der \mathbb{S}^3 ist genau dann ein Vollring, wenn \mathfrak{B} unverknotet ist.*

Beweis: Sei zunächst \mathfrak{B} unverknotet. Eine orientierte Seele a von \mathfrak{B} ist dann unverknotet und Rand eines Elementarflächenstückes \mathfrak{C} . Es kann wegen Hilfssatz 1 angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{C} und dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} entweder leer ist oder nur aus doppelungsfreien, paarweise punktfremden Schnittlinien besteht, die auf \mathfrak{T} nicht nullhomolog sind. Der Durchschnitt von \mathfrak{C} und \mathfrak{T} kann nicht leer sein, da sonst a auf \mathfrak{B} nullhomolog sein müsste. Wir betrachten auf \mathfrak{C} eine Schnittlinie s , die auf \mathfrak{C} ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e berandet. e kann nicht auf \mathfrak{B} liegen, denn es wäre sonst e Meridianfläche von \mathfrak{B} und müsste daher von a geschnitten werden. e liegt also auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$. Da s nicht nullhomolog auf \mathfrak{T} ist, folgt aus § 3 Hilfssatz 2, dass $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ ein Vollring ist, für welchen e Meridianfläche ist.

Es möge nun umgekehrt $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ ein Vollring \mathfrak{W} sein. Ein Meridian von \mathfrak{W} ist dann eine Kreislinie auf \mathfrak{T} , die Breitenkreis für \mathfrak{B} ist. \mathfrak{B} ist unverknotet, da ein Breitenkreis nach § 6 Hilfssatz 3 denselben Knoten darstellt wie eine geeignet orientierte Seele von \mathfrak{B} .

§ 8. Deformation über Vollringe.

Wir haben in § 1 ausgeführt, dass sich der Durchschnitt zweier Flächen in der \mathfrak{S}^3 möglicherweise dadurch vereinfachen lässt, dass man ein Elementarflächenstück auf der einen Fläche über eine Kugel hinweg deformiert. Nunmehr sind wir in der Lage zu zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen ein Kreisring über einen Vollring hinweg deformiert werden kann:

Satz: *Es seien r_1 und r_2 zwei Kreisringe in der \mathfrak{S}^3 , deren Durchschnitt aus den gemeinsamen Rändern s_1 und s_2 bestehe. Der von r_1 und r_2 gebildete Torus \mathfrak{T} berande einen Vollring \mathfrak{B} , und es seien s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} homolog zu einer orientierten Seele von \mathfrak{B} . Ferner sei \mathfrak{M} ein Komplex, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{B} aus s_1 und s_2 bestehe. Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die r_2 in r_1 überführt und auf \mathfrak{M} die Identität ist.*

Wir sagen auch, dass sich r_2 bei festem \mathfrak{M} über \mathfrak{B} in r_1 deformieren lässt. Tatsächlich handelt es sich dabei um eine Deformation im Sinne von § 1.

Beweis: Da s_1 und s_2 auf \mathfrak{T} liegen und doppelungsfrei sind, ist die Aussage, dass s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} homolog zu einer orientierten Seele sind, gleichbedeutend damit, dass s_1 und s_2 auf \mathfrak{T} die algebraische Schnittzahl 1 mit einem Meridian von \mathfrak{B} haben.

Wir zerlegen \mathfrak{B} durch zwei Meridianflächen e, f in zwei Kugeln. Der Rand von e bzw. f ist ein Meridian m_1 bzw. m_2 von \mathfrak{B} . Es können e und f so gewählt werden, dass m_1 und m_2 von s_1 und s_2 nur in je einem Punkte getroffen werden. Sind nämlich e und f zunächst beliebig gewählt, so gibt es, da die algebraische Schnittzahl von s_1, s_2 mit den Meridianen von \mathfrak{B} gleich ± 1 ist, jedenfalls ein System von 2 Parallelkurven t_1, t_2 auf \mathfrak{T}

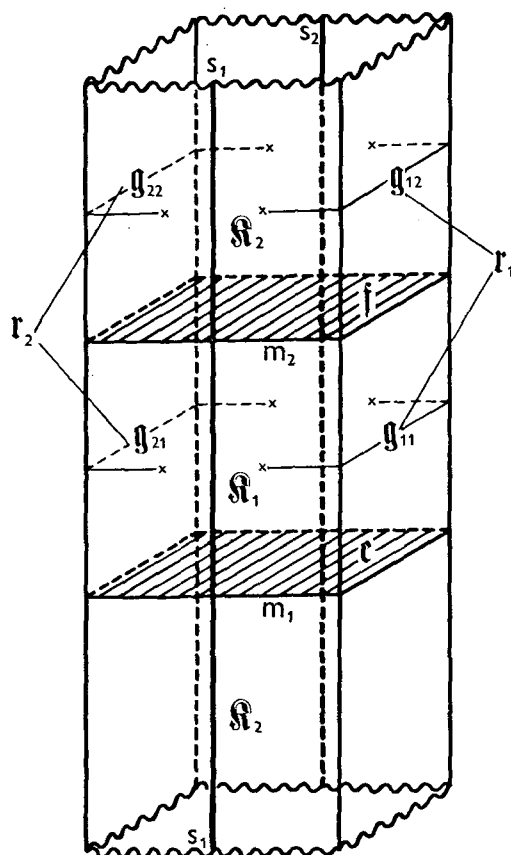


Fig. 6.

(vgl. § 2) derart, dass die Ränder von e und f von t_1 und t_2 in nur je einem Punkte getroffen werden und dass t_1, t_2 zu s_1, s_2 (bei geeigneter Orientierung) auf \mathfrak{X} homolog sind. Nach § 2 Satz 4 lässt sich das Kurvenpaar t_1, t_2 durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich so in das Kurvenpaar s_1, s_2 überführen, dass \mathfrak{X} in sich übergeht und \mathfrak{B} auf sich abgebildet wird. Aus den zunächst willkürlich gewählten Meridianflächen e, f entstehen dabei solche mit der gewünschten Eigenschaft.

Durch m_1, m_2 wird \mathfrak{X} in zwei Kreisringe $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ zerlegt, und es zerlegen e und f den Vollring \mathfrak{B} in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, die von e, \mathfrak{s}_1, f bzw. f, \mathfrak{s}_2, e berandet werden (Fig. 6). Die Kreisringe r_1, r_2 , in welche \mathfrak{X} durch s_1 und s_2 zerlegt ist, werden durch m_1 und m_2 in je zwei Elementarflächenstücke g_{11}, g_{12} bzw. g_{21}, g_{22} zerlegt, wobei g_{11} und g_{21} auf \mathfrak{s}_1 , g_{12} und g_{22} auf \mathfrak{s}_2 liegen mögen.

Nach § 1 Satz 11 und den anschließenden Erörterungen lässt sich der aus r_2 und \mathfrak{M} bestehende Komplex zunächst dadurch deformieren, dass man g_{21} über \mathfrak{R}_1 in das Elementar-

flächenstück $e + g_{11} + f$ deformiert und g_{22} und \mathfrak{M} festhält. Danach kann man den aus \mathfrak{M} , g_{11} , e , f und g_{22} bestehenden Komplex deformieren, indem man das Elementarflächenstück $e + g_{22} + f$ über \mathfrak{R}_2 in g_{12} deformiert und g_{11} und \mathfrak{M} festhält. Insgesamt ist damit der aus \mathfrak{M} und r_2 bestehende Komplex in den aus \mathfrak{M} und r_1 bestehenden bei festem \mathfrak{M} deformiert.

Anmerkung 1: Die im Satz bezeichnete s -Abbildung kann so gewählt werden, dass sie auf dem Komplement einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist, da man stets annehmen kann, dass dieses Komplement auf \mathfrak{M} liegt.

Anmerkung 2: Der Satz gestattet folgende Anwendung:

Es seien $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ zwei Flächen in der \mathfrak{E}^3 , die sich in zwei Schnittlinien s_1 und s_2 durchsetzen. s_1 und s_2 mögen auf \mathfrak{F}_1 einen Kreisring r_1 beranden, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{F}_2 nur aus s_1 und s_2 bestehe. Auf \mathfrak{F}_2 werde von s_1 und s_2 ein Kreisring r_2 berandet. r_1 und r_2 bilden zusammen den Torus \mathfrak{T} , der einen Vollring \mathfrak{B} berandet. Wir wollen annehmen, dass der Durchschnitt von \mathfrak{B} mit \mathfrak{F}_2 nur aus r_2 , von \mathfrak{B} mit einer hinreichend kleinen Umgebung von r_1 bezüglich \mathfrak{F}_1 nur aus r_1 besteht, dass also $\mathfrak{F}_1 - r_1$ und $\mathfrak{F}_2 - r_2$ in s_1 und s_2 an \mathfrak{B} von aussen anstossen, und dass s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} zu einer (geeignet orientierten) Seele von \mathfrak{B} homolog sind.

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der Satz anwenden, also \mathfrak{F}_2 in die Fläche $\mathfrak{F}_2 - r_2 + r_1$ deformieren. Anschliessend lässt sich noch durch Abheben, d.h. eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von r_1 die Identität ist, erreichen, dass der Durchschnitt der deformierten Fläche \mathfrak{F}_2 mit r_1 entweder überhaupt leer ist oder nur noch aus einzelnen Punkten oder Stücken von s_1 oder s_2 besteht, ohne dass sich der Durchschnitt von $\mathfrak{F}_2 - r_2$ mit \mathfrak{F}_1 ändert.

Dass dieses Abheben von r_1 möglich ist, erkennt man, wenn man etwa zunächst ein Elementarflächenstück auf \mathfrak{F}_1 , das eine Umgebung von g_{11} bezüglich \mathfrak{F}_1 ausmacht, in ein 2-Simplex überführt und das Abheben von g_{11} so ausführt, dass die beiden Randstücke, die g_{11} mit g_{12} gemein hat, festbleiben. Anschliessend lässt sich entsprechend das Abheben von g_{12} ausführen.

Eine weitere Anwendung des obigen Satzes ist der folgende:

Hilfssatz 1: *Es seien \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zwei Kugeln in der \mathfrak{E}^3 mit den Rändern \mathfrak{E}_1^2 bzw. \mathfrak{E}_2^2 . \mathfrak{R}_2 liege auf \mathfrak{R}_1 , und der Durchschnitt von \mathfrak{E}_1^2 und \mathfrak{E}_2^2 bestehe aus zwei disjunkten Elementarflächenstücken e, f . Ferner sei u eine Sehne von \mathfrak{R}_2 , die von einem Punkte auf e zu einem Punkte auf f führt, sodass also u auch Sehne von \mathfrak{R}_1 ist.*

Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_2 bezüglich \mathfrak{R}_1 ist genau dann ein Vollring, wenn u in \mathfrak{R}_1 und in \mathfrak{R}_2 denselben Knoten erzeugt. Falls das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_2

bezüglich \mathfrak{R}_1 ein Vollring ist, so ist dieser unverknotet, und die Ränder von e und f sind Breitenkreise dieses Vollringes.

Beweis: Seien s bzw. t die Ränder von e bzw. f . Durch s und t wird \mathfrak{E}_1^2 in die beiden Elementarflächenstücke e , f und einen Kreisring r_1 zerlegt. Entsprechend wird \mathfrak{E}_2^2 in e , f und einen Kreisring r_2 zerlegt. r_1 und r_2 bilden zusammen einen Torus \mathfrak{T} (Fig. 7). Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_1 bezüglich der \mathfrak{E}^3 ist eine Kugel $\overline{\mathfrak{R}}_1$. Der Durchschnitt von \mathfrak{R}_2 und $\overline{\mathfrak{R}}_1$ besteht aus e und f . Nach § 3 Hilfssatz 1 sind e und f Meridianflächen eines von \mathfrak{T} in der \mathfrak{E}^3 berandeten Vollringes \mathfrak{B} , der von \mathfrak{R}_2 und $\overline{\mathfrak{R}}_1$ gebildet wird. Das abgeschlossene Komplement \mathfrak{A} von \mathfrak{R}_2 bezüglich \mathfrak{R}_1 ist zugleich das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} bezüglich der \mathfrak{E}^3 .

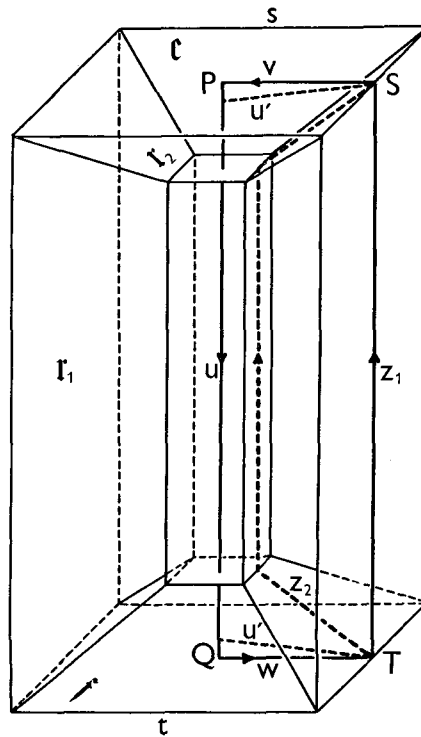


Fig. 7.

Ist nun \mathfrak{A} ein Vollring, so ist \mathfrak{A} (und auch \mathfrak{B}) nach § 7 Satz 2 unverknotet, und es sind s und t als Meridiane von \mathfrak{B} Breitenkreise von \mathfrak{A} . Nach dem obigen Satz lässt sich r_2 über \mathfrak{A} in r_1 deformieren, und es gibt eine s -Abbildung φ der \mathfrak{E}^3 auf sich, die r_2 in r_1 überführt und die auf e , f und u die Identität ist. φ bildet \mathfrak{R}_2 so auf \mathfrak{R}_1 ab, dass u festbleibt. Nach § 5 Hilfssatz 1 erzeugt u in \mathfrak{R}_2 und in \mathfrak{R}_1 denselben Knoten.

Es möge nun umgekehrt u in \mathfrak{R}_1 und in \mathfrak{R}_2 denselben Knoten erzeugen. Es ist zu zeigen, dass \mathfrak{A} ein Vollring ist. Wegen § 7 Satz 2 ist dies gleichwertig damit, dass \mathfrak{B} unverknotet ist.

Wir können annehmen, dass \mathfrak{R}_1 im Inneren eines 3-Simplexes der \mathfrak{S}^3 liegt und ein (euklidischer) Würfel ist, der e und f zu gegenüberliegenden Seiten hat. P sei der Anfangspunkt von u auf e , Q der Endpunkt von u auf f . Auf s bzw. t wählen wir je einen Punkt S bzw. T . P und S werden geradlinig durch die von S nach P orientierte Strecke v auf e verbunden, Q und T durch die von Q nach T orientierte Strecke w auf f . Auf r_1 verbinden wir T mit S durch einen von T nach S orientierten Weg z_1 , der mit s bzw. t nur den Punkt S bzw. T gemein hat. Entsprechend wählen wir den Weg z_2 auf r_2 . Nun bilden uwz_1v und uwz_2v Knotenlinien, welche den von u in \mathfrak{R}_1 bzw. \mathfrak{R}_2 erzeugten Knoten, also denselben Knoten κ , darstellen. Durch isotope simpliziale Deformation des von S nach T führenden Weges vuw kann man eine Sehne u' von \mathfrak{R}_2 erhalten, für welche S der Anfangspunkt, T der Endpunkt ist. Dabei entstehen Knotenlinien $u'z_1$ und $u'z_2$, die noch denselben Knoten κ darstellen. Nun wird κ durch $u'z_1$ und die 2-Sphäre \mathfrak{S}_2^2 als Produktknoten dargestellt und zwar als Produkt von 2 Faktoren, die von $u'z_2$ bzw. $z_1z_2^{-1}$ repräsentiert werden. Da $u'z_2$ ebenfalls den Knoten κ darstellt, ist $z_1z_2^{-1}$ nach § 5 Satz 1 eine Kreislinie z . Auf \mathfrak{L} hat z mit dem Meridian s von \mathfrak{B} die algebraische Schnitzzahl ± 1 . Nach § 6 Hilfssatz 3 stellt z denselben Knoten dar wie eine geeignet orientierte Seele von \mathfrak{B} . \mathfrak{B} ist also unverknotet.

Der soeben betrachtete Sachverhalt wird besonders einfach, wenn u in \mathfrak{R}_1 unverknotet ist:

Hilfssatz 2: *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 sei u in \mathfrak{R}_1 unverknotet. Dann ist u auch in \mathfrak{R}_2 unverknotet.*

Beweis: Wir schliessen u zu einer Knotenlinie k durch eine unverknotete Sehne y der zu \mathfrak{R}_1 komplementären Kugel $\overline{\mathfrak{R}_1}$. Der von k repräsentierte Knoten κ wird durch \mathfrak{S}_1^2 als Produkt des von u in \mathfrak{R}_1 und des von y in $\overline{\mathfrak{R}_1}$ erzeugten Knotens, also als Produkt zweier Kreise, dargestellt. κ ist also der Kreis. Andererseits wird κ durch k und \mathfrak{S}_2^2 als Produkt des von u in \mathfrak{R}_2 und des von y in der zu \mathfrak{R}_2 (in der \mathfrak{S}^3) komplementären Kugel $\overline{\mathfrak{R}_2}$ erzeugten Knotens dargestellt. Beide Knoten müssen Kreise sein, da sich der Kreis nur als Produkt von Kreisen darstellen lässt. u ist also auch in \mathfrak{R}_2 unverknotet.

§ 9. Die Ordnung eines Vollringes in bezug auf eine Knotenlinie.

Wir betrachten einen Vollring \mathfrak{B} in der \mathfrak{S}^3 und eine Knotenlinie k , die auf \mathfrak{B} liegt. Da eine orientierte Seele von \mathfrak{B} erzeugendes Element der 1-dimensionalen Homologie-

gruppe von \mathfrak{B} ist, ist k auf \mathfrak{B} homolog zu dem Vielfachen einer solchen Seele. Den Betrag dieser Vielfachheit nennen wir die *Umlaufzahl* von k auf \mathfrak{B} . Ist k nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} , so bezeichnen wir eine Seele a von \mathfrak{B} , die so orientiert ist, dass k auf \mathfrak{B} zu einem positiven Vielfachen von a homolog ist, als *positiv orientiert bezüglich k* . Ist k eine nicht-orientierte Knotenlinie auf \mathfrak{B} , so bezeichnen wir die Umlaufzahl, die k bei Orientierung auf \mathfrak{B} erhält, auch als Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} . Es ist dabei offenbar gleichgültig, welche Orientierung von k benutzt wird.

Es sei nun k eine orientierte oder nicht-orientierte Knotenlinie, die auf einem Vollring \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 liegt. Wir betrachten solche Meridianflächen von \mathfrak{B} , die von k in allen Punkten, die sie mit k gemein haben, durchsetzt werden. Aus einer beliebigen Meridianfläche von \mathfrak{B} kann man eine solche durch eine beliebig kleine Deformation erhalten. Die kleinste der Schnittpunktzahlen von k mit einer solchen Meridianfläche von \mathfrak{B} heisse die *Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k* .

Hilfssatz 1: *Es sei k eine Knotenlinie auf einem Vollring \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 . Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist nicht kleiner als die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} . Die Differenz aus Ordnung und Umlaufzahl ist gerade. Liegt k auf dem Rande von \mathfrak{B} , so stimmen Ordnung und Umlaufzahl überein.*

Beweis: Die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} kann auch als algebraische Schnittzahl von k mit einer (geeignet) orientierten Meridianfläche von \mathfrak{B} aufgefasst werden, wobei die Wahl der Meridianfläche gleichgültig ist. Sei insbesondere m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die von k in nur so vielen Punkten getroffen wird, wie die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k angibt. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ergibt sich also, indem man die gemeinsamen Punkte von k und m alle mit der Vielfachheit $+1$ zählt, während sich die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} dadurch ergibt, dass man diesem Punkte die Vielfachheit $+1$ oder -1 zulegt, je nach der Richtung, in welcher m von k in diesen Punkten durchsetzt wird. Gleichzeitig ergibt sich, dass sich Ordnung und Umlaufzahl um eine gerade Zahl unterscheiden.

Es liege nun k auf dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} . m sei ein Meridian, b ein Breitenkreis von \mathfrak{B} . m und b bilden auf \mathfrak{T} eine eindimensionale Homologiebasis. Auf \mathfrak{T} gilt also eine Homologie

$$k \sim \beta m + \alpha b \quad (\alpha, \beta \text{ ganz}).$$

Es kann angenommen werden, dass b so orientiert ist, dass $\alpha \geq 0$ ist. Dann ist α die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} , denn auf \mathfrak{B} ist m nullhomolog und b Erzeugende der eindimensionalen Homologiegruppe von \mathfrak{B} . Die algebraische Schnittzahl von k mit m auf \mathfrak{T} ist $\pm \alpha$. Nach § 2 Hilfssatz 3 kann m so gewählt werden, dass k mit m nur α Punkte gemein hat. Eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die m zum Rand hat, trifft nun k in α Punkten. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist also höchstens gleich α , und sie muss α sein, da sie nach dem Obigen

nicht kleiner als die Umlaufzahl α von k auf \mathfrak{B} sein kann. Damit ergibt sich die letzte Behauptung des Hilfssatzes.

Folgerung aus Hilfssatz 1: Hat \mathfrak{B} die Ordnung 1 in bezug auf k , so hat k die Umlaufzahl 1 auf \mathfrak{B} .

Für das Folgende beschränken wir uns auf den Fall, dass k im Inneren von \mathfrak{B} liegt.

Satz 1: Die Knotenlinie k liege im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} . \mathfrak{B} hat in bezug auf k genau dann die Ordnung null, wenn k im Inneren einer Kugel liegt, die von \mathfrak{B} umfasst wird.

Beweis: Wenn \mathfrak{B} die Ordnung null in bezug auf k hat, so gibt es eine Meridianfläche e von \mathfrak{B} , die k nicht trifft. Eine Meridianfläche f von \mathfrak{B} , die hinreichend benachbart zu e ist und e nicht trifft, wird dann von k ebenfalls nicht getroffen. e und f zerlegen \mathfrak{B} in zwei Kugeln, wovon eine k im Inneren enthalten muss.

Es liege nun umgekehrt k in einer Kugel \mathfrak{R} , die von \mathfrak{B} umfasst wird. Man kann annehmen, dass \mathfrak{R} den Rand von \mathfrak{B} nicht trifft. Sollte dies nämlich nicht der Fall sein, so kann man \mathfrak{R} durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich in ein 3-Simplex überführen. Durch ähnliches Zusammenziehen dieses 3-Simplexes lässt sich dann eine Kugel erhalten, die im Inneren von \mathfrak{B} liegt und k noch im Inneren enthält. Sei nun m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} . Es kann angenommen werden, dass m den Rand \mathbb{S}^2 von \mathfrak{R} , falls überhaupt, nur in doppelpunktfreien, disjunkten Schnittlinien trifft. Die Schnittlinien lassen sich der Reihe nach beseitigen. Jede berandet nämlich auf m und auf \mathbb{S}^2 ein Elementarflächenstück. Wir betrachten zunächst eine solche, s , die auf \mathbb{S}^2 ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s berandet auf m ein Elementarflächenstück f . e und f bilden zusammen eine 2-Sphäre, welche eine Kugel berandet, die $m - f$ nicht enthält. Über diese kann nach § 1 f in e deformiert und anschliessend von e abgehoben werden, sodass die Schnittlinie s verschwindet und der Durchschnitt von $m - f$ mit \mathbb{S}^2 ungeändert bleibt. Auf diese Weise lassen sich alle Schnittlinien von m und \mathbb{S}^2 beseitigen. Man erhält damit eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} , die \mathfrak{R} und damit auch k nicht trifft, da der Rand von m im Äusseren von \mathfrak{R} liegt.

Satz 2: Der Vollring \mathfrak{B} enthalte die Knotenlinie k im Inneren und habe in bezug auf k die Ordnung 1. Dann ist k entweder orientierte Seele von \mathfrak{B} , oder der von k dargestellte Knoten ist Produkt eines vom Kreise verschiedenen Knotens mit demjenigen Knoten, der von einer bezüglich k positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} repräsentiert wird.

Beweis: Nach der Folgerung aus Hilfssatz 1 hat k auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl 1. Es hat demnach einen Sinn, von einer bezüglich k positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} zu sprechen.

Sei nun e eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in nur einem Punkte trifft. Es lässt sich zu e eine hinreichend benachbarte Meridianfläche f so wählen, dass f von e nicht getroffen

wird und von k nur in einem Punkte. Dass diese Wahl von \mathfrak{f} möglich ist, erkennt man ohne weiteres, wenn man \mathfrak{B} längs e aufschneidet und durch ein Prisma darstellt.

e und \mathfrak{f} zerlegen \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 , in denen k je eine Sehne k_1 bzw. k_2 bildet. Nach Definition der Seele und nach § 6 Hilfssatz 4 ist k genau dann Seele von \mathfrak{B} , wenn k_1 in \mathfrak{R}_1 und k_2 in \mathfrak{R}_2 unverknotet ist.

Es sei nun k nicht Seele von \mathfrak{B} . k stelle den Knoten \varkappa dar, eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} den Knoten λ . Ferner erzeuge k_1 in \mathfrak{R}_1 den Knoten \varkappa_1 , k_2 in \mathfrak{R}_2 den Knoten \varkappa_2 . Nach § 6 Hilfssatz 5 ist $\varkappa = \varkappa_1 \varkappa_2 \lambda$. Da k nicht Seele von \mathfrak{B} ist, so ist mindestens einer der Knoten \varkappa_1, \varkappa_2 kein Kreis, und es ist auch $\varkappa_1 \varkappa_2$ nicht der Kreis, da der Kreis nur als Produkt von Kreisen dargestellt werden kann. Damit ergibt sich die Behauptung.

Anmerkung: Satz 2 ist eine Ergänzung zu der Aussage von § 6 Hilfssatz 3, dass eine Knotenlinie auf dem Rande von \mathfrak{B} , in bezug auf welche \mathfrak{B} die Ordnung 1 hat, denselben Knoten darstellt wie eine gleichsinnig orientierte Seele von \mathfrak{B} .

Hilfssatz 2: *Es sei k eine Knotenlinie im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} . m_1, m_2, \dots, m_β seien Meridiane von \mathfrak{B} , die sich gegenseitig nicht treffen. Es existieren dann β Meridianflächen von \mathfrak{B} , die m_1 bzw. m_2, \dots, m_β als Rand haben, paarweise punktfremd sind und k in nur so vielen Punkten treffen, wie die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k angibt.*

Beweis: Sei zunächst e_1 eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in nur so vielen Punkten trifft, wie die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k angibt. Wenn man \mathfrak{B} längs e_1 aufschneidet und durch ein Prisma darstellt, erkennt man, dass in hinreichender Nähe von e_1 noch weitere Meridianflächen e_2, \dots, e_β gewählt werden können, die sich gegenseitig und e_1 nicht treffen und k nur in so vielen Punkten wie e_1 . Die Ränder von e_1, e_2, \dots, e_β bilden auf dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} ein System von β Parallelkurven (bei gleichsinniger Orientierung), die Meridiane von \mathfrak{B} sind. Nach § 2 Satz 4 gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die dieses System von Parallelkurven auf \mathfrak{T} in dasjenige überführt, das von den Meridianen m_1, m_2, \dots, m_β (bei geeigneter Orientierung) gebildet wird. Die Abbildung lässt sich so wählen, dass sie \mathfrak{T} in sich überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{T} die Identität ist. Da k im Inneren von \mathfrak{B} liegt, kann diese Umgebung von \mathfrak{T} so gewählt werden, dass sie k nicht trifft. Durch die Abbildung gehen dann e_1, e_2, \dots, e_β in Meridianflächen von \mathfrak{B} über, welche die geforderten Eigenschaften haben.

Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , der den Vollring \mathfrak{B} umfasst. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf eine Seele von \mathfrak{B} ist unabhängig von der Wahl der Seele, weil es nach § 6 Hilfssatz 1 zu je zwei Seelen von \mathfrak{B} eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, welche die eine Seele in die andere überführt und auf dem Komplement von \mathfrak{B} die Identität ist. Wir bezeichnen daher die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf eine Seele von \mathfrak{B} als *Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}* .

Entsprechend bezeichnen wir die Umlaufzahl einer Seele von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} als *Umlaufzahl* von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} .

Hilfssatz 3: *Der Vollring \mathfrak{B} enthalte den Vollring \mathfrak{B} im Inneren und habe in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung null. Dann gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die \mathfrak{B} nicht trifft.*

Beweis: Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, benutzen wir Resultate des folgenden § 10, die wir unabhängig von diesem Hilfssatz erhalten werden.

Es sei a eine Seele von \mathfrak{B} . Nach Definition der Ordnung gibt es eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} , die a nicht trifft. Nach § 10 Hilfssatz 1 gibt es einen Vollring \mathfrak{B}' , der a zur Seele hat und in einer beliebig kleinen Umgebung von a liegt. Insbesondere kann \mathfrak{B}' so gewählt werden, dass \mathfrak{B}' im Inneren von \mathfrak{B} liegt und dass \mathfrak{B}' von m nicht getroffen wird. Da \mathfrak{B}' im Inneren von \mathfrak{B} liegt und a zugleich Seele von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' ist, hat \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}' die Ordnung 1, und durch die Seelen von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' wird derselbe nicht-orientierte Knoten dargestellt. Nach § 10 Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung φ der \mathfrak{S}^3 auf sich, welche \mathfrak{B}' in \mathfrak{B} überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist. Da \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B} liegt, kann φ insbesondere so gewählt werden, dass φ im Komplement von \mathfrak{B} die Identität ist. $\varphi(m)$ ist dann eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die \mathfrak{B} nicht trifft.

Hilfssatz 4: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , der den Vollring \mathfrak{B} im Inneren enthalte. k sei eine Knotenlinie im Inneren von \mathfrak{B} und m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in γ Punkten trifft. Dann gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die den Rand von \mathfrak{B} nur in Meridianen von \mathfrak{B} und k in höchstens γ Punkten trifft.*

Beweis: Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m mit dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} nur aus doppelungsfreien Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Falls dies noch nicht der Fall ist, lässt sich dies durch eine Deformation von m erreichen, bei welcher der Rand von m und der Durchschnitt von m und k ungeändert bleiben.

Wir betrachten zunächst diejenigen Schnittlinien von \mathfrak{T} und m , die auf \mathfrak{T} nullhomolog sind, und zeigen, dass sie sich der Reihe nach beseitigen lassen, ohne dass sich die Schnittpunktzahl von m mit k erhöht. Sei s eine solche, die auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s berandet auf m ein Elementarflächenstück f . Wir ersetzen f durch e und erhalten damit eine Meridianfläche m' von \mathfrak{B} , die k in höchstens γ Punkten trifft, da e als Elementarflächenstück auf \mathfrak{T} zu k punktfremd ist. Nun wird m' dadurch deformiert, dass man e von \mathfrak{T} abhebt und zwar ins Äussere oder Innere von \mathfrak{B} , je nachdem ob $m - f$ in s im Äusseren oder Inneren von \mathfrak{B} an \mathfrak{T} anstösst. Das Abheben kann so geschehen, dass der Durchschnitt von m' mit k und der Durchschnitt von \mathfrak{T} mit $m - f$ ungeändert bleiben. Statt m' schreiben wir wieder m . Auf diese Weise lassen

sich der Reihe nach alle Schnittlinien von \mathfrak{I} und m beseitigen, die nullhomolog auf \mathfrak{I} sind.

Die verbleibenden Schnittlinien sind bei geeigneter Orientierung auf \mathfrak{I} homolog, da sie doppeltpunktfrei sind und sich gegenseitig nicht treffen, und zwar sind es entweder Meridiane oder Breitenkreise von \mathfrak{B} . Ist nämlich s eine innerste Schnittlinie auf m , d.h. eine solche, die auf m ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält, so ist s entweder nullhomolog auf \mathfrak{B} oder nullhomolog in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$. Da s nicht nullhomolog auf \mathfrak{I} ist, so ist s entweder Meridian oder Breitenkreis von \mathfrak{B} , wobei im zweiten Falle \mathfrak{B} unverknotet ist. Falls die Schnittlinien Meridiane von \mathfrak{B} sind, ist nichts mehr zu beweisen.

Es seien nun die Schnittlinien von m und \mathfrak{I} Breitenkreise von \mathfrak{B} . Dann gibt es auf \mathfrak{I} einen Breitenkreis b von \mathfrak{B} , der keine der Schnittlinien von m und \mathfrak{I} trifft. Ist nun a eine Seele von \mathfrak{B} , die hinreichend nahe an b liegt, so wird a ebenso wie b von m nicht getroffen. \mathfrak{B} hat also die Ordnung null in bezug auf \mathfrak{B} , und nach Hilfssatz 3 gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , welche \mathfrak{B} nicht trifft. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 5: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , der den Vollring \mathfrak{B} im Inneren enthalte und in bezug auf diesen die Ordnung γ habe. Jede Meridianfläche von \mathfrak{B} , die den Rand \mathfrak{I} von \mathfrak{B} nur in Meridianen von \mathfrak{B} schneidet, enthält mindestens γ Meridianflächen von \mathfrak{B} , und es gibt eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die \mathfrak{I} in nur γ Meridianen von \mathfrak{B} schneidet.*

Beweis: Der Fall $\gamma = 0$ kann ausgeschlossen werden, da dann die erste Behauptung trivial ist und sich die zweite Behauptung durch Hilfssatz 3 ergibt.

Sei nun $\gamma > 0$ und a eine Seele von \mathfrak{B} . m sei eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die \mathfrak{I} nur in Meridianen von \mathfrak{B} trifft und dort schneidet. Wir betrachten auf m diejenigen Schnittlinien, die auf m von keiner weiteren umfasst werden. Dies seien s_1, s_2, \dots, s_β . Jede Schnittlinie s_i ($i = 1, 2, \dots, \beta$) berandet auf m ein Elementarflächenstück e_i , und es liegt $m - e_1 - e_2 - \dots - e_\beta$ im Äusseren von \mathfrak{B} nach Bestimmung der s_i . Auf jedem e_i muss mindestens eine Meridianfläche von \mathfrak{B} liegen. Eine auf e_i innerste Schnittlinie von m und \mathfrak{I} (diese kann der Rand von e_i sein) berandet nämlich auf m ein Elementarflächenstück, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{I} nur aus seinem Rande besteht. Da dieser ein Meridian von \mathfrak{B} ist, muss das Elementarflächenstück Meridianfläche von \mathfrak{B} sein.

Die erste Behauptung ergibt sich, wenn noch gezeigt wird, dass $\beta \geq \gamma$ ist. Wir können nun wegen Hilfssatz 2 alle e_i gleichzeitig durch Meridianflächen f_i von \mathfrak{B} ersetzen, die sich gegenseitig nicht und a in je einem Punkte treffen. Dabei entsteht aus m eine Meridianfläche m' von \mathfrak{B} , die a in β Punkten trifft. Aus der Definition der Ordnung folgt $\beta \geq \gamma$.

Sei nun m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die a in nur γ Punkten trifft. Wegen Hilfssatz

4 (man ersetze dort k durch a) kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{T} und m nur aus Meridianen von \mathfrak{B} besteht. Es mögen s_i und e_i die Bedeutung wie oben haben. Da auf jedem e_i mindestens eine Meridianfläche von \mathfrak{B} liegen muss und a von jeder Meridianfläche von \mathfrak{B} getroffen wird, muss jetzt $\beta \leq \gamma$ und damit $\beta = \gamma$ sein. Ersetzen wir die e_i wie oben durch Meridianflächen f_i von \mathfrak{B} , so entsteht aus m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , welche die zweite Behauptung des Hilfssatzes erfüllt.

Satz 3: *Es sei k eine Knotenlinie im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} , der im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} enthalten sei. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist gleich dem Produkt der Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B} mit der Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k .*

Beweis: Sei γ die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k , γ_1 die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B} und γ_2 die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k . m sei eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , deren Schnittpunktzahl mit k gleich γ ist. Wegen Hilfssatz 4 kann angenommen werden, dass m den Rand \mathfrak{T} von \mathfrak{B} nur in Meridianen von \mathfrak{B} schneidet. Nach Hilfssatz 5 enthält m mindestens γ_1 Meridianflächen von \mathfrak{B} , und jede dieser Meridianflächen trifft k in mindestens γ_2 Punkten nach Definition der Ordnung. Daraus folgt

$$(1) \quad \gamma \cong \gamma_1 \gamma_2.$$

Sei nun m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die \mathfrak{T} in γ_1 Meridianen $s_1, s_2, \dots, s_{\gamma_1}$ schneidet. Wegen Hilfssatz 5 berandet s_i ($i = 1, 2, \dots, \gamma_1$) auf m eine Meridianfläche e_i von \mathfrak{B} . Nach Hilfssatz 2 kann man in die s_i gleichzeitig γ_1 Meridianflächen $f_1, f_2, \dots, f_{\gamma_1}$ von \mathfrak{B} einspannen, die sich gegenseitig nicht und k in je γ_2 Punkten treffen. Ersetzt man die e_i durch die f_i , so entsteht aus m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in $\gamma_1 \gamma_2$ Punkten trifft, woraus

$$(2) \quad \gamma \leq \gamma_1 \gamma_2$$

folgt. Aus (1) und (2) ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Satz 4: *Es sei k eine Knotenlinie, die von dem Vollring \mathfrak{B} umfasst werde. \mathfrak{B} sei ein Vollring, der \mathfrak{B} umfasst. Die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} ist gleich dem Produkt der Umlaufzahl von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} mit der Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} .*

Beweis: Es sei α die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} , α_1 die Umlaufzahl von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} und α_2 die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} . Dann ist k auf \mathfrak{B} homolog dem α_2 -fachen einer geeignet orientierten Seele a von \mathfrak{B} . Auf \mathfrak{B} ist a homolog dem α_1 -fachen einer geeignet orientierten Seele a' von \mathfrak{B} . Dann ist k auf \mathfrak{B} homolog dem $(\alpha_1 \alpha_2)$ -fachen von a' . Es ist also $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$.

Satz 5: *Es sei k eine Knotenlinie, die den Knoten κ darstellt. Die Ordnungen in bezug auf k derjenigen verknoteten Vollringe, die k im Inneren enthalten, sind beschränkt. Die Schranke hängt nur von κ ab.*

Anmerkung: Für die Gültigkeit des Satzes ist die Verknotung der betrachteten Vollringe wesentlich.

Beweis: Offenbar ist es gleichgültig, welcher Repräsentant k von \varkappa gewählt wird. Wir können wegen § 1 Satz 5 annehmen, dass k im Inneren eines 3-Simplexes \mathfrak{C}^3 der \mathfrak{C}^3 liegt. Für das Weitere sei k fest gewählt bis auf Änderungen, die k durch Ähnlichkeitsabbildungen von \mathfrak{C}^3 in sich erfährt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k im Inneren enthält. Wegen § 1 Satz 5 kann angenommen werden, dass der Rand \mathfrak{T} von \mathfrak{B} ebenfalls in \mathfrak{C}^3 liegt.

Wir fassen \mathfrak{C}^3 als 3-Simplex eines euklidischen Raumes R^3 auf. Es gibt dann im R^3 eine Schar paralleler Ebenen, die zulässig in bezug auf \mathfrak{T} ist (vgl. § 4) und die Eigenschaften hat, dass kein 1-Simplex von k parallel zu den Ebenen der Schar ist und dass jede Scharebene höchstens eine Ausnahmeecke von \mathfrak{T} enthält. Nach § 4 Satz 2 gibt es eine Scharebene E , die \mathfrak{T} in einem Meridian m eines Vollringes schneidet, der von \mathfrak{T} in der \mathfrak{C}^3 berandet wird. Wegen § 7 Satz 2 muss m Meridian von \mathfrak{B} sein, da \mathfrak{B} verknotet ist. m berandet auf E ein Elementarflächenstück e , auf dem noch Schnittlinien von \mathfrak{T} mit E liegen können. Da diese Schnittlinien unverknotet sind, sind sie wegen § 7 Hilfssatz 2 nullhomolog auf \mathfrak{T} oder Meridiane von \mathfrak{B} . Es kann angenommen werden, dass e ausser seinem Rand keinen Meridian von \mathfrak{B} enthält, da andernfalls e durch ein kleines Elementarflächenstück auf e ersetzt werden kann. Die Schnittlinien von \mathfrak{T} mit e sind geschlossen und doppelpunktfrei, sie haben mit dem Rande von e höchstens einen Punkt gemein, und nur in einem solchen Punkte können sich verschiedene Schnittlinien treffen. Dies folgt daraus, dass E höchstens eine Ausnahmeecke von \mathfrak{T} enthält.

Nach Wahl der Ebenenschar besteht der Durchschnitt von e und k aus Punkten $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$, in denen e von k durchsetzt wird, und möglicherweise noch weiteren Punkten Q_1, Q_2, \dots, Q_β , in denen e von k getroffen aber nicht durchsetzt wird. Wir werden zeigen, dass die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k höchstens gleich γ ist. Daraus folgt dann, dass diese Ordnung nicht grösser ist als die Anzahl der Punkte, in denen E von k durchsetzt wird. Als allein von k abhängige Schranke für die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k erhält man damit die maximale Anzahl von Schnittpunkten, die eine Ebene E , die zu keinem 1-Simplex von k parallel ist, mit k haben kann.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k höchstens gleich γ ist. Dies folgt aus

Hilfssatz 6: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring, der die Knotenlinie k im Inneren enthält. \mathfrak{T} sei der Rand und m ein Meridian von \mathfrak{B} . Ferner sei e ein Elementarflächenstück mit dem Rande m , dessen Durchschnitt mit k nur aus isolierten Punkten und dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T} ausser aus m aus doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig und m höchstens in einem Punkte R auf m treffen und die nullhomolog auf \mathfrak{T}*

sind. Dann gibt es eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} , die m zum Rande hat und k nur in solchen Punkten trifft, die Schnittpunkte von k mit e sind.

Beweis: Es seien $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$ wieder die Punkte, in denen e von k durchsetzt wird, Q_1, Q_2, \dots, Q_β die übrigen Punkte des Durchschnittes von e und k , in denen also e von k getroffen aber nicht durchsetzt wird.

Wir betrachten die Schnittlinien von e mit \mathfrak{T} . Da diese nullhomolog auf \mathfrak{T} sind, berandet jede von ihnen auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück, das den Meridian m nicht enthalten kann. Sei s eine innerste Schnittlinie auf \mathfrak{T} , die auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück f_1 berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. Auf e berandet s ein Elementarflächenstück f_2 . Wir ersetzen f_2 durch f_1 und deformieren das dabei aus e entstehende Elementarflächenstück noch dadurch, dass wir f_1 von \mathfrak{T} so abheben, dass die Schnittlinie s verschwindet und keine neuen Schnittlinien entstehen (vgl. § 1). Falls s mit m einen Punkt R gemein hat, ist R als einziger Punkt von f_1 nicht von \mathfrak{T} abzuheben. Nach den Erörterungen von § 1 kann das Abheben so vorgenommen werden. Da k im Inneren von \mathfrak{B} liegt, kann das Abheben zudem so vorgenommen werden, dass dabei keine neuen gemeinsamen Punkte von k und dem aus e entstehenden Elementarflächenstück auftreten.

Das aus e entstandene Elementarflächenstück bezeichnen wir wieder mit e . Es hat mit k höchstens die Punkte $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$ und Q_1, Q_2, \dots, Q_β gemein, wobei noch diejenigen dieser Punkte, die auf f_2 lagen, verschwunden sind. Solange noch Schnittlinien von e und \mathfrak{T} vorhanden sind, kann dieses Verfahren fortgesetzt werden. Man erhält schliesslich ein Elementarflächenstück m , das mit \mathfrak{T} nur den Rand m gemein hat und das von k höchstens in $P_1, P_2, \dots, P_\gamma$ durchsetzt wird. m ist Meridianfläche von \mathfrak{B} . Falls m mit k noch Punkte Q_1, Q_2, \dots, Q_β gemein hat (in denen also m von k nicht durchsetzt wird), so lässt sich noch durch eine Deformation von m erreichen, dass diese Punkte im Durchschnitt von m mit k verschwinden, ohne dass sich der übrige Durchschnitt von m mit k ändert.

§ 10. Semilineare Äquivalenz von Vollringen in der \mathfrak{S}^3 .

Zwei Vollringe $\mathfrak{U}, \mathfrak{B}$ in der \mathfrak{S}^3 heissen *gleich verknotet*, wenn die Seelen von \mathfrak{U} und \mathfrak{B} denselben nicht-orientierten Knoten darstellen. Wir wollen zeigen, dass es zu jedem nicht-orientierten Knoten κ einen Vollring in der \mathfrak{S}^3 gibt, durch dessen Seelen κ dargestellt wird, und dass es zu zwei Vollringen in der \mathfrak{S}^3 genau dann eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, welche den einen in den anderen überführt, wenn die beiden Vollringe gleich verknotet sind.

Hilfssatz 1: *Es sei k eine Knotenlinie. Es gibt einen Vollring \mathfrak{B} , der in einer beliebig kleinen Umgebung von k liegt und k als orientierte Seele besitzt.*

Beweis: Es kann angenommen werden, dass k im Inneren eines 3-Simplexes \mathbb{C}^3 der \mathbb{C}^3 liegt, und wir können \mathbb{C}^3 als 3-Simplex des \mathbb{R}^3 auffassen. Man erkennt nun leicht, dass eine geeignete simpliziale Umgebung von k einen Vollring mit den gewünschten Eigenschaften ausmacht. Man kann etwa so vorgehen:

Wir zerlegen k simplizial so, dass bei Durchlaufen von k keine zwei aufeinanderfolgenden 1-Simplexe in einer Geraden liegen. Die 1-Simplexe auf k umgeben wir nun der Reihe nach mit beiderseits abgeschnittenen Pyramidenstümpfen, deren Querschnitt sich im Sinne der Orientierung von k erweitert. An den Pyramidenstümpfen unterscheiden wir Dach- und Bodenfläche so, dass im Sinne der Orientierung von k die Dachfläche vor der Bodenfläche liegt. Die Dach- bzw. Bodenfläche soll dabei in einer Ebene E_i liegen, welche durch eine Ecke P_i des gerade betrachteten 1-Simplexes geht und welche die Eigenschaft hat, dass die in P_i zusammenstossenden 1-Simplexe von k mit E_i gleiche Winkel bilden. Die Pyramidenstümpfe können der Reihe nach so gewählt werden, dass der Durchschnitt von je zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden aus der Dachfläche des einen besteht, dass der Durchschnitt von zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden leer ist und dass der Rand von \mathbb{C}^3 von keinem Pyramidenstumpf getroffen wird. Dies ist möglich, da jedes 1-Simplex e^1 von k vom Rande von \mathbb{C}^3 und von den 1-Simplexen von k , die nicht an e^1 anstossen, einen positiven Abstand hat. Die Vereinigungsmenge dieser Pyramidenstümpfe macht dann einen Vollring \mathfrak{B} aus, der k zur Seele hat: Man kann in einem Pyramidenstumpf zwei ebene Meridianflächen von \mathfrak{B} finden, wodurch \mathfrak{B} in zwei Kugeln zerlegt wird, in denen k je eine unverknotete Sehne bildet. Offenbar können die Pyramidenstümpfe noch so gewählt werden, dass \mathfrak{B} in einer beliebig kleinen Umgebung von k liegt.

Hilfssatz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathbb{C}^3 , der im Inneren des Vollringes \mathfrak{B}^* enthalten sei. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* seien gleich verknotet, und es habe \mathfrak{B}^* die Ordnung 1 in bezug auf \mathfrak{B} . Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, die \mathfrak{B}^* in \mathfrak{B} überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung des abgeschlossenen Komplements von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}^* die Identität ist.*

Beweis: Es sei \mathfrak{I}^* der Rand von \mathfrak{B}^* , \mathfrak{I} der Rand von \mathfrak{B} . Da \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1 hat, gibt es nach § 9 Hilfssatz 5 eine Meridianfläche e^* von \mathfrak{B}^* , die \mathfrak{I} nur in einem Meridian von \mathfrak{B} trifft und dort schneidet. In hinreichender Nähe von e^* lässt sich eine zweite Meridianfläche f^* von \mathfrak{B}^* so wählen, dass f^* die gleiche Eigenschaft hat und e^* nicht trifft. Auf e^* und f^* liegt dann je eine Meridianfläche e bzw. f von \mathfrak{B} . Durch e^* und f^* wird \mathfrak{B}^* in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1^* , \mathfrak{R}_2^* zerlegt. \mathfrak{R}_i^* ($i = 1, 2$) wird berandet von e^* , f^* und einem Kreisring r_i^* auf \mathfrak{I}^* . Durch e und f wird \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 zerlegt, wobei \mathfrak{R}_i in \mathfrak{R}_i^* enthalten sei. Der Rand von \mathfrak{R}_i enthält einen Kreisring r_i , der auf

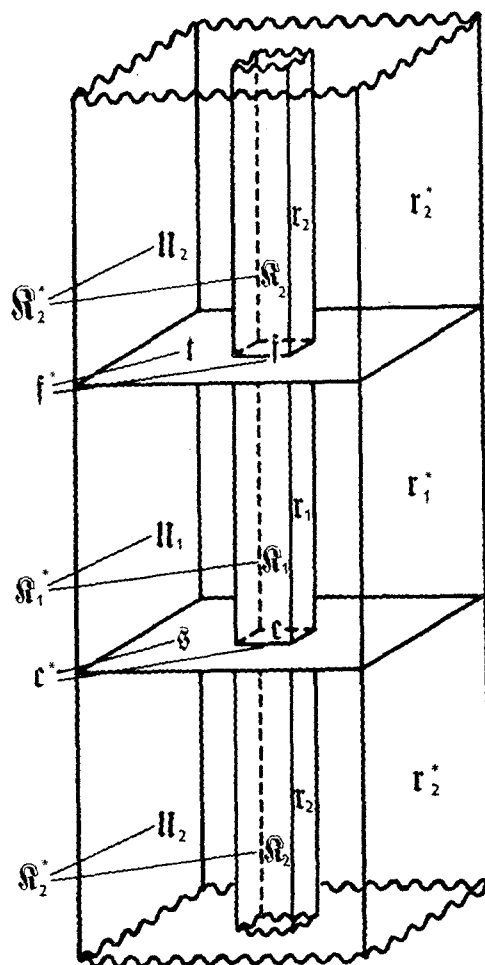


Fig. 8.

\mathfrak{T} liegt (Fig. 8). Es sei a eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , die in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine unverknotete Sehne a_1 bzw. a_2 bildet. a_i ist gleichzeitig Sehne von \mathfrak{R}_i^* . Da \mathfrak{B}^* in bezug auf a die Ordnung 1 hat und da \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet sind, ist a nach § 9 Satz 2 orientierte Seele von \mathfrak{B}^* , und nach § 6 Hilfssatz 4 ist a_i auch unverknotet in \mathfrak{R}_i^* .

Nach § 8 Hilfssatz 1 ist nun das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_i bezüglich \mathfrak{R}_i^* ein unverknoteter Vollring \mathfrak{U}_i , für welchen die Ränder von e und f Breitenkreise sind. \mathfrak{U}_i wird berandet von den Kreisringen \mathfrak{r}_i , \mathfrak{r}_i^* und je einem Kreisring \mathfrak{s} bzw. \mathfrak{t} auf e^* bzw. f^* , und alle Ränder dieser Kreisringe sind Breitenkreise von \mathfrak{U}_i . Man kann nun \mathfrak{T}^* nach § 8 dadurch deformieren, dass man zunächst den Kreisring \mathfrak{r}_1^* über \mathfrak{U}_1 in den Kreisring $\mathfrak{s} + \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{t}$ deformiert und dabei \mathfrak{r}_2^* festhält. Danach lässt sich bei festgehaltenem \mathfrak{r}_1 der

Kreisring $\mathfrak{s} + \mathfrak{r}_2^* + \mathfrak{t}$ über \mathfrak{U}_2 in \mathfrak{r}_2 deformieren. Dann ist \mathfrak{T}^* in \mathfrak{T} übergegangen. Nach Anmerkung 1 zum Satz von § 8 lassen sich die Resultate beider Deformationen durch s -Abbildungen der \mathfrak{S}^3 auf sich erhalten, die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{U}_1 bzw. \mathfrak{U}_2 die Identität sind. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Anmerkung: Wir haben diesen Hilfssatz zum Beweise von § 9 Hilfssatz 3 und damit für den Fall $\gamma = 0$ in § 9 Hilfssatz 5 benutzt. Dagegen haben wir im vorstehenden Beweise § 9 Hilfssatz 5 für den Fall $\gamma = 1$ benutzt, also von § 9 Hilfssatz 3 keinen Gebrauch gemacht.

Satz 1: *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* zwei gleich verknotete Vollringe in der \mathfrak{S}^3 . Die orientierten Seelen a bzw. a^* von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* seien so orientiert, dass sie denselben Knoten darstellen. Dann gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{B}^* in \mathfrak{B} und a^* in a überführt.*

Beweis: Durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich lässt sich zunächst erreichen, dass a und a^* zusammenfallen. Nach Hilfssatz 1 gibt es einen Vollring \mathfrak{B} , der a zur orientierten Seele hat und sowohl im Inneren von \mathfrak{B} wie im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Da a orientierte Seele von \mathfrak{B} , \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* ist, sind \mathfrak{B} , \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet, und es haben \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1. Wendet man nun Hilfssatz 2 einmal auf die beiden Vollringe \mathfrak{B}^* , \mathfrak{B} , das andere Mal auf die beiden Vollringe \mathfrak{B} , \mathfrak{B} an, so ergibt sich die Behauptung.

Da ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich offenbar in einen gleich verknoteten übergeht, folgt aus Hilfssatz 1 und Satz 1 insbesondere:

Satz 2: *Zu jedem nicht-orientierten Knoten κ gibt es einen Vollring in der \mathfrak{S}^3 , durch dessen Seelen κ dargestellt wird. Zu zwei Vollringen \mathfrak{U} , \mathfrak{B} in der \mathfrak{S}^3 gibt es genau dann eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{U} in \mathfrak{B} überführt, wenn \mathfrak{U} und \mathfrak{B} gleich verknotet sind.*

Satz 3: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 und χ eine orientierungserhaltende s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich, welche einen Breitenkreis von \mathfrak{B} in einen gleichsinnig orientierten überführt. χ lässt sich zu einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich erweitern, die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist.*

Beweis: Es sei \mathfrak{T} der Rand von \mathfrak{B} . b sei ein Breitenkreis von \mathfrak{B} , der durch χ in einen gleichsinnig orientierten, also in einen zu b auf \mathfrak{T} homologen, übergeführt wird. Durch χ geht jeder Breitenkreis von \mathfrak{B} in einen gleichsinnig orientierten über, denn ein beliebiger Breitenkreis von \mathfrak{B} ist auf \mathfrak{T} homolog zu $\pm b$ und eine Homologie auf \mathfrak{T} bleibt bei χ erhalten. Da Meridianflächen von \mathfrak{B} durch χ in Meridianflächen übergehen, führt χ jeden Meridian von \mathfrak{B} in einen Meridian über und zwar in einen gleichsinnig orientierten, weil χ orientierungserhaltend auf \mathfrak{T} ist und jeder Breitenkreis in einen gleichsinnig orientierten übergeführt wird. Daraus folgt, dass χ jeden 1-Zykel auf \mathfrak{T} in einen homologen überführt.

Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten. Zunächst wird die zu erweiternde

Abbildung spezialisiert. Danach wird ein Vollring \mathfrak{B}^* konstruiert, der \mathfrak{B} im Inneren enthält und in einer vorgegebenen, beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} liegt. Schliesslich wird die Abbildung so auf \mathfrak{B}^* erweitert, dass sie auf dem Rande von \mathfrak{B}^* die Identität ist, sodass sie im Komplement von \mathfrak{B}^* durch die Identität definiert werden kann.

I. Schritt: Spezialisierung der zu erweiternden Abbildung.

Es sei m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} . Nach § 3 Hilfssatz 3 gibt es eine s -Abbildung ψ der \mathfrak{S}^3 auf sich, welche die Meridianfläche $\chi(m)$ auf m und \mathfrak{B} auf sich abbildet und welche ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist. Auf \mathfrak{B} ist dann $\varphi = \psi\chi$ eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich, welche m auf sich abbildet. Wir werden zeigen, dass sich φ zu einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich erweitern lässt, die ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist. Bezeichnen wir diese Abbildung wieder mit φ , so hat die s -Abbildung $\psi^{-1}\varphi$ der \mathfrak{S}^3 auf sich die gewünschten Eigenschaften, denn auf \mathfrak{B} ist $\psi^{-1}\varphi = \psi^{-1}\psi\chi = \chi$.

Die Abbildung φ von \mathfrak{B} auf sich ist orientierungserhaltend, und sie führt jeden 1-Zykel auf \mathfrak{T} in einen auf \mathfrak{T} homologen über. Es hat nämlich χ diese Eigenschaften und auch ψ , da ψ (als s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich) ausserhalb einer Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist.

2. Schritt: Konstruktion eines Vollringes \mathfrak{B}^* , der \mathfrak{B} im Inneren enthält und in einer vorgegebenen Umgebung von \mathfrak{B} liegt.

Wir schneiden \mathfrak{B} längs m zu einem Prisma \mathfrak{P}^* auf, wobei angenommen werden kann, dass \mathfrak{P}^* im Inneren eines 3-Simplexes der \mathfrak{S}^3 liegt. σ^* sei die zugehörige Abbildung von \mathfrak{P}^* auf \mathfrak{B} . Zu \mathfrak{P}^* betrachten wir ein Prisma \mathfrak{P} , das dadurch entsteht, dass man \mathfrak{P}^* bei fester Achse ähnlich zusammenzieht (Fig. 9). \mathfrak{P} wird durch σ^* auf einen Vollring \mathfrak{B}' abgebildet, der im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Da die Achse von \mathfrak{P}^* durch σ^* in eine Seele sowohl von \mathfrak{B} als auch von \mathfrak{B}' übergeht (§ 6 Hilfssatz 2), sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' gleich verknotet, und es hat \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}' die Ordnung 1. Nach Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung ω der \mathfrak{S}^3 auf sich, welche \mathfrak{B}' auf \mathfrak{B} abbildet und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{B} die Identität ist. \mathfrak{B} geht durch ω in einen Vollring \mathfrak{B}^* über. Statt $\omega\sigma^*$ schreiben wir σ . Durch σ wird \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} und \mathfrak{P}^* auf einen Vollring \mathfrak{B}^* abgebildet, der \mathfrak{B} im Inneren enthält und in einer vorgegebenen Umgebung von \mathfrak{B} liegt.

Es sei m_1^* die Dachfläche, m_2^* die Bodenfläche von \mathfrak{P}^* , m_1 und m_2 sollen die entsprechende Bedeutung für \mathfrak{P} haben. Es ist nicht gesagt, dass m_1 und m_2 durch σ auf die Meridianfläche m von \mathfrak{B} abgebildet werden. Falls dies nicht der Fall ist, setzen wir σ mit einer

s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich zusammen, die $\sigma(m_1)$ auf m und \mathfrak{B} auf sich abbildet und die im Komplement von \mathfrak{B}^* die Identität ist. Eine solche Abbildung existiert nach § 3 Hilfssatz 3. Für die mit σ zusammengesetzte Abbildung schreiben wir wieder σ , sodass also σ jetzt m_1 und m_2 auf m abbildet.

3. Schritt: Erweiterung der Abbildung.

Wir wollen nun die Abbildung φ so auf \mathfrak{B}^* erweitern, dass sie auf dem Rande von \mathfrak{B}^* die Identität ist. Wird φ dann noch im Komplement von \mathfrak{B}^* durch die Identität definiert, so erhält man eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich mit den gewünschten Eigenschaften.

Da die Meridianfläche m von \mathfrak{B} durch φ auf sich abgebildet wird, induziert φ vermöge σ eine s -Abbildung $\bar{\varphi}$ von \mathfrak{B} auf sich: $\sigma\bar{\varphi} = \varphi\sigma$. $\bar{\varphi}$ bildet m_1 und m_2 auf sich ab und führt übereinanderliegende Punkte von m_1 und m_2 wieder in solche über. Auf dem Rande von m_1 ist $\bar{\varphi} = \sigma^{-1}\varphi\sigma$ orientierungserhaltend, da der Rand von m ein Meridian von \mathfrak{B} ist, der durch φ orientierungserhaltend auf sich abgebildet wird. Wir wollen $\bar{\varphi}$ so auf \mathfrak{B}^* fortsetzen, dass $\bar{\varphi}$ auf dem Mantel von \mathfrak{B}^* die Identität ist und dass übereinanderliegende Punkte von m_1^* und m_2^* wieder in solche übergehen. Dann überträgt sich $\bar{\varphi}$ vermöge σ in eine s -Abbildung von \mathfrak{B}^* auf sich, welche auf \mathfrak{B} mit φ übereinstimmt und auf dem Rande von \mathfrak{B}^* die Identität ist. Es ist also nur noch die Abbildung $\bar{\varphi}$ auf die angegebene Weise von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* zu erweitern.

Das abgeschlossene Komplement von m_i ($i = 1, 2$) bezüglich m_i^* ist ein Kreisring r_i . Sei t der Mantel von \mathfrak{B} , t^* der Mantel von \mathfrak{B}^* . Wir hatten angenommen, dass \mathfrak{B}^* in einem 3-Simplex der \mathbb{S}^3 liegt. Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} bezüglich \mathfrak{B}^* ist nach § 8 Hilfssatz 1 ein unverknoteter Vollring \mathfrak{U} , denn die von m_1 nach m_2 orientierte Achse von \mathfrak{B} ist eine Sehne von \mathfrak{B} und von \mathfrak{B}^* , die unverknotet in \mathfrak{B} und in \mathfrak{B}^* ist. Die Ränder von r_1 , r_2 , t und t^* sind Breitenkreise von \mathfrak{U} .

Wir definieren nun $\bar{\varphi}$ auf dem Rande von \mathfrak{U} . Auf t ist $\bar{\varphi}$ bereits definiert. Für den gemeinsamen Rand von t und r_1 , also den Rand von m_1 , ist $\bar{\varphi}$ eine orientierungserhaltende Abbildung, wie wir oben festgestellt haben. Nach § 2 Hilfssatz 1 kann $\bar{\varphi}$ so auf r_1 fortgesetzt werden, dass $\bar{\varphi}$ auf dem gemeinsamen Rande von r_1 und t^* die Identität ist. Auf r_2 definieren wir $\bar{\varphi}$ dadurch, dass wir r_2 parallel nach r_1 verschieben, die auf r_1 definierte Abbildung $\bar{\varphi}$ anwenden und danach die Translation rückgängig machen. Übereinanderliegende Punkte von r_1 und r_2 gehen also durch $\bar{\varphi}$ wieder in solche über. Auf t^* wird $\bar{\varphi}$ schliesslich durch die Identität definiert. Damit ist $\bar{\varphi}$ auf dem Rande von \mathfrak{U} definiert. Wir können $\bar{\varphi}$ nach § 3 Hilfssatz 4 zu einer s -Abbildung von \mathfrak{U} auf sich erweitern, wenn noch gezeigt wird, dass die Meridiane von \mathfrak{U} durch $\bar{\varphi}$ in Meridiane übergehen.

Wir konstruieren zunächst einen Meridian von \mathfrak{U} . Wir gehen aus von einer geraden

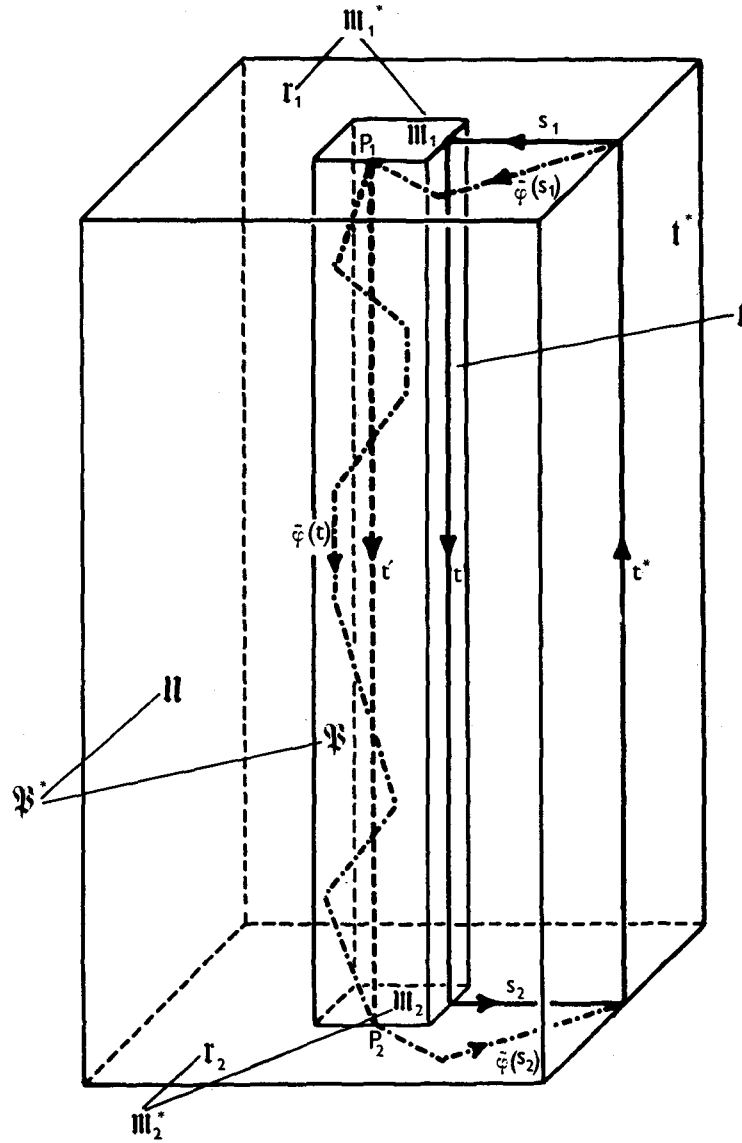


Fig. 9.

Mantellinie t von \mathfrak{B} , die von m_1 nach m_2 führt. s_2 sei ein Querschnitt von r_2 , der vom Endpunkt von t zu einem Punkte des gemeinsamen Randes von r_2 und t^* führt (Fig. 9). t^* sei eine zu t parallele Mantellinie von \mathfrak{B}^* , die vom Endpunkt von s_2 zum Rande von m_1^* führt, und es sei schliesslich s_1 ein zu s_2 paralleler Querschnitt von r_1 , der vom Endpunkt von t^* zum Anfangspunkt von t führt. $t s_2 t^* s_1$ ist nun ein Meridian m von \mathfrak{U} : Wenn man s_1

parallel zu sich in Richtung von t nach s_2 verschiebt, so überstreicht s_1 eine Meridianfläche von \mathbb{U} .

$\bar{\varphi}(t)$ ist ein Querschnitt von t , der von einem auf dem Rande von \mathfrak{M}_1 liegenden Punkte P_1 zu dem darunter liegenden Punkt P_2 von \mathfrak{M}_2 führt. Neben $\bar{\varphi}(t)$ betrachten wir die Mantellinie t' von \mathfrak{B} , die geradlinig von P_1 nach P_2 führt. Fassen wir $\bar{\varphi}(t)$ und t' als 1-Ketten auf, so sind $\bar{\varphi}(t)$ und t' homolog auf t , d. h. der 1-Zyklus $\bar{\varphi}(t) - t'$ ist nullhomolog auf t . Andernfalls wäre nämlich $\bar{\varphi}(t) - t'$ auf t homolog zu einem von null verschiedenen Vielfachen eines orientierten Randes des Kreisringes t . Da die Ränder von t durch σ auf einen Meridian von \mathfrak{B} abgebildet werden, hiesse das, dass die Differenz von $\sigma\bar{\varphi}(t)$ und $\sigma(t')$ auf dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} homolog zu einem Vielfachen eines Meridians ist. Dies ist aber unmöglich, denn es sind $\sigma(t)$ und $\sigma(t')$ offenbar homolog auf \mathfrak{T} und damit auch $\sigma\bar{\varphi}(t) = \varphi\sigma(t)$ und $\sigma(t')$, weil φ jeden 1-Zyklus auf \mathfrak{T} in einen homologen überführt. $\bar{\varphi}(t)$ und t' sind also homolog auf t . Damit sind $\bar{\varphi}(m) = \bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}(s_2) \bar{\varphi}(t^*) \bar{\varphi}(s_1) = \bar{\varphi}(t) \bar{\varphi}(s_2) t^* \bar{\varphi}(s_1)$ und $t' \bar{\varphi}(s_2) t^* \bar{\varphi}(s_1)$ homolog auf dem Rande von \mathbb{U} . Nun ist $t' \bar{\varphi}(s_2) t^* \bar{\varphi}(s_1)$ ein Meridian von \mathbb{U} , es überstreicht nämlich $\bar{\varphi}(s_1)$ eine Meridianfläche von \mathbb{U} mit diesem Rand, wenn man $\bar{\varphi}(s_1)$ längs t' in $\bar{\varphi}(s_2)$ parallel verschiebt. Es ist also auch $\bar{\varphi}(m)$ ein Meridian von \mathbb{U} . Die Abbildung $\bar{\varphi}$ des Randes von \mathbb{U} auf sich führt tatsächlich Meridiane von \mathbb{U} in Meridiane über. Der Satz ist damit bewiesen.

§ 11. Treue Abbildungen von Vollringen in der \mathfrak{S}^3 .

Es seien \mathbb{U} und \mathfrak{B} zwei Vollringe in der \mathfrak{S}^3 . Eine s -Abbildung von \mathbb{U} auf \mathfrak{B} heiße treu, wenn sie

- 1.) Breitenkreise von \mathbb{U} in Breitenkreise von \mathfrak{B} überführt,
- 2.) die von einer festen Orientierung der \mathfrak{S}^3 auf \mathbb{U} induzierte Orientierung so auf \mathfrak{B} überträgt, dass man die von der \mathfrak{S}^3 auf \mathfrak{B} induzierte Orientierung erhält.

Aus der Definition folgt unmittelbar: Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ Vollringe in der \mathfrak{S}^3 , τ_1 eine treue Abbildung von \mathfrak{B}_1 auf \mathfrak{B}_2 , τ_2 eine treue Abbildung von \mathfrak{B}_2 auf \mathfrak{B}_3 , so ist $\tau_2\tau_1$ eine treue Abbildung von \mathfrak{B}_1 auf \mathfrak{B}_3 . Ferner ist die inverse einer treuen Abbildung wieder treu. Ist φ eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, welche den Vollring \mathbb{U} auf den Vollring \mathfrak{B} abbildet, so induziert φ auf \mathbb{U} eine treue Abbildung von \mathbb{U} auf \mathfrak{B} , da wir nur orientierungserhaltende s -Abbildungen der \mathfrak{S}^3 auf sich zugelassen haben.

Satz 1: *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* Vollringe in der \mathfrak{S}^3 mit den orientierten Seelen a bzw. a^* . Dann gibt es eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* , die a in a^* überführt.*

Beweis: Wir schneiden \mathfrak{B} längs einer Meridianfläche zu einem Prisma \mathfrak{P} auf, das in einem 3-Simplex der \mathfrak{S}^3 liege. Dies kann so geschehen, dass die zugehörige Abbildung

σ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B} so beschaffen ist, dass sie die zur Achse von \mathfrak{B} parallelen Mantellinien von \mathfrak{B} in Breitenkreise von \mathfrak{B} überführt. Sollte dies nämlich zunächst noch nicht der Fall sein, so setze man σ mit einer s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich zusammen, welche die Bodenfläche festlässt und die Dachfläche um ein geeignetes Vielfaches von 2π dreht¹.

Es sei a' die Achse von \mathfrak{B} . Nach § 6 Hilfssatz 2 ist $\sigma(a')$ eine Seele von \mathfrak{B} , und nach § 6 Hilfssatz 1 gibt es eine s -Abbildung φ der \mathfrak{S}^3 auf sich, die $\sigma(a')$ in die (nicht-orientierte) Seele a von \mathfrak{B} überführt und die auf dem Komplement von \mathfrak{B} die Identität ist. Wir ersetzen σ durch $\varphi\sigma$ und schreiben dafür wieder σ , sodass jetzt a' durch σ in die Seele a übergeführt wird. Die Bilder der zu a' parallelen Mantellinien von \mathfrak{B} sind noch Breitenkreise von \mathfrak{B} , da φ auf dem Rande von \mathfrak{B} die Identität ist.

Wir orientieren nun a' so, dass a' von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führt. $\sigma(a')$ ist nun orientierte Seele von \mathfrak{B} . Falls a und $\sigma(a')$ verschiedene Orientierung haben, drehen wir \mathfrak{B} um π um eine zu a' senkrechte Drehachse durch den Mittelpunkt von a' und orientieren a' gleichzeitig um. Es haben sich nun Boden- und Dachfläche von \mathfrak{B} vertauscht, und a' führt wieder von der Dach- zur Bodenfläche. Es sei ω die Drehung von \mathfrak{B} . Wir ersetzen σ durch $\sigma\omega$ und schreiben dafür wieder σ . a und $\sigma(a')$ haben nun gleiche Orientierung.

Es sei nun eine feste Orientierung der \mathfrak{S}^3 ausgezeichnet. Durch sie wird eine Orientierung auf \mathfrak{B} und auf \mathfrak{B} induziert. Wir können annehmen, dass σ die auf \mathfrak{B} induzierte Orientierung in die auf \mathfrak{B} induzierte überträgt, da man andernfalls σ noch mit einer Spiegelung von \mathfrak{B} an einer Ebene durch a' und eine Ecke der Bodenfläche von \mathfrak{B} zusammensetzen kann.²

Entsprechend kann man \mathfrak{B}^* durch ein Prisma darstellen. Nach den Erörterungen von § 3 kann dazu dasselbe Prisma \mathfrak{B} wie für \mathfrak{B} verwandt werden, und wie für \mathfrak{B} kann man erreichen, dass die Darstellung so beschaffen ist, dass die zugehörige Abbildung σ^* von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* die orientierte Achse a' in die orientierte Seele a^* von \mathfrak{B}^* und die zu a' parallelen Mantellinien von \mathfrak{B} in Breitenkreise von \mathfrak{B}^* überführt und dass σ^* die auf \mathfrak{B} induzierte Orientierung in die auf \mathfrak{B}^* induzierte überträgt.

\mathfrak{B} , σ und σ^* vermitteln nun eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* , die a in a^* überführt und ausserdem treu ist, da sie Breitenkreise von \mathfrak{B} in solche von \mathfrak{B}^* überführt und die auf \mathfrak{B} induzierte Orientierung in diejenige von \mathfrak{B}^* überträgt.

Die Knotenlinie k sei im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} enthalten. Wird \mathfrak{B} semilinear auf einen Vollring \mathfrak{B}^* in der \mathfrak{S}^3 abgebildet, so geht k in eine Knotenlinie k^* im Inneren von \mathfrak{B}^* über. Die Umlaufzahl von k^* auf \mathfrak{B}^* ist offenbar dieselbe wie die von k auf \mathfrak{B} .

¹ vgl. § 3 und § 6 Beweis von Hilfssatz 3.

² Wir hatten für die benutzten Prismen vorausgesetzt (§ 3), dass ihre Bodenflächen reguläre Polygone sind.

Ebenso ist die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf k^* gleich der Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k . Ist insbesondere k eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , so ist k^* eine orientierte Seele von \mathfrak{B}^* . Wie sich nämlich aus dem Beweis von Satz 1 ergibt, können wir \mathfrak{B} so durch ein Prisma \mathfrak{P} und eine Abbildung σ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} darstellen, dass k das Bild der orientierten Achse a' von \mathfrak{P} ist. Ist nun τ die s -Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* , so wird \mathfrak{B}^* durch \mathfrak{P} und die Abbildung $\tau\sigma$ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B}^* dargestellt, wobei $k^* = \tau\sigma(a')$ ist. Nach § 6 Hilfssatz 2 ist k^* orientierte Seele von \mathfrak{B}^* .

Satz 2: *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* Vollringe in der \mathfrak{E}^3 . τ sei eine s -Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* , welche die orientierte Seele a von \mathfrak{B} auf die Knotenlinie a^* abbildet. τ lässt sich genau dann zu einer s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich erweitern, wenn τ treu ist und wenn a und a^* denselben Knoten darstellen.*

Beweis: Wenn sich τ zu einer s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich erweitern lässt, so induziert diese auf \mathfrak{B} eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* , und es entsteht a^* aus a durch eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, sodass a und a^* denselben Knoten darstellen.

Es möge nun umgekehrt τ treu sein, und es mögen a und a^* denselben Knoten darstellen. Wie oben bemerkt wurde, ist a^* orientierte Seele von \mathfrak{B}^* . Nach § 10 Satz 1 gibt es eine s -Abbildung φ der \mathfrak{E}^3 auf sich, welche \mathfrak{B}^* so auf \mathfrak{B} abbildet, dass a^* in a übergeht. Nun ist $\psi = \varphi\tau$ eine orientierungserhaltende s -Abbildung von \mathfrak{B} auf sich, welche a auf sich abbildet und jeden Breitenkreis von \mathfrak{B} , der auf \mathfrak{B} zu a homolog ist, in einen solchen Breitenkreis überführt. Nach § 10 Satz 3 lässt sich ψ zu einer s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich erweitern, die wir wieder mit ψ bezeichnen. Nun ist $\varphi^{-1}\psi$ eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die auf \mathfrak{B} die Abbildung $\varphi^{-1}\psi\tau = \tau$ induziert, womit sich die Behauptung ergibt.

KAPITEL II.

Begleitknoten.

§ 12. Über das Geschlecht von Knotenlinien in Vollringen.

Sei k eine Knotenlinie in der \mathfrak{E}^3 . Eine orientierbare (singularitätenfreie) Fläche \mathfrak{F} mit einem Rand heisst eingespannt in k , wenn k der Rand von \mathfrak{F} ist. Bekanntlich lassen sich in jede Knotenlinie orientierbare Flächen einspannen. Das kleinste Geschlecht aller dieser Flächen heisst das Geschlecht des von k repräsentierten Knotens.¹ Es ist von der Wahl der repräsentierenden Knotenlinie unabhängig. Die Knoten, deren Repräsentanten aus k durch Umorientierung oder Spiegelung entstehen, haben offenbar dasselbe Geschlecht wie der durch k dargestellte Knoten. Insbesondere haben die beiden orientierten Komponenten eines nicht-orientierten Knotens dasselbe Geschlecht, sodass wir es auch

¹ SEIFERT [11].

als Geschlecht des nicht-orientierten Knotens bezeichnen können. Unter dem Geschlecht eines Vollringes \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 verstehen wir das Geschlecht des nicht-orientierten Knotens, der durch die Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird.

Hilfssatz 1: *Es sei \mathfrak{B} ein verknöteter Vollring in der \mathfrak{E}^3 mit dem Rande \mathfrak{T} und k eine Knotenlinie im Inneren von \mathfrak{B} mit der Umlaufzahl α . Dann lässt sich in k eine Fläche von minimalem Geschlecht einspannen, deren Durchschnitt mit \mathfrak{T} aus α Breitenkreisen von \mathfrak{B} besteht.*

Beweis: Wir spannen in k eine Fläche \mathfrak{F} von minimalem Geschlecht ein. Nach den Erörterungen von § 1 kann das so geschehen, dass der Durchschnitt von \mathfrak{F} und \mathfrak{T} nur aus doppeltpunktfreien Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Wir werden \mathfrak{F} so abändern, dass sich die Behauptung ergibt.

Wir behandeln zunächst den Fall, dass k nicht bereits in einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten ist. Als erste betrachten wir diejenigen Schnittlinien, die nullhomolog auf \mathfrak{T} sind, und zeigen, dass sie sich beseitigen lassen.

Jede auf \mathfrak{T} nullhomologe Schnittlinie berandet auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück, und es gibt unter ihnen eine „innerste“ s , d.h. eine solche, die auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weiteren Schnittlinien enthält.

Wenn \mathfrak{F} durch s zerlegt wird, so zerfällt \mathfrak{F} durch s in eine Fläche \mathfrak{F}_1 mit den beiden Rändern s und k und eine Fläche \mathfrak{F}_2 mit dem Rande s . $\mathfrak{F}_1 + e$ ist dann eine Fläche, die in k eingespannt ist und deren Geschlecht jedenfalls nicht grösser als das von \mathfrak{F} ist. (Da es nach Voraussetzung über \mathfrak{F} nicht kleiner als das von \mathfrak{F} sein kann, muss übrigens \mathfrak{F}_2 ein Elementarflächenstück sein). $\mathfrak{F}_1 + e$ lässt sich dadurch deformieren, dass man e (als Flächenstück von $\mathfrak{F}_1 + e$) von \mathfrak{T} abhebt und zwar ins Innere oder Äussere von \mathfrak{B} , je nachdem ob \mathfrak{F}_1 in s an \mathfrak{T} im Inneren oder Äusseren von \mathfrak{B} anstösst. Die Deformation kann so geschehen, dass k punktweise festbleibt und dass sich der Durchschnitt von \mathfrak{F}_1 und \mathfrak{T} , abgesehen von s , nicht ändert (vgl. § 1). Die entstandene Fläche bezeichnen wir wieder mit \mathfrak{F} .

Der Fall, dass s die (ursprüngliche) Fläche \mathfrak{F} nicht zerlegt, kann nicht eintreten. Man könnte sonst nämlich \mathfrak{F} längs s aufschneiden und erhielte damit 2 Löcher in \mathfrak{F} . Dann könnte man zunächst eines dieser beiden Löcher durch e schliessen, etwa dasjenige, zu dem man gelangt, wenn man auf \mathfrak{F} im Inneren von \mathfrak{B} an s herangeht, und für die erhaltene Fläche danach e ins Innere von \mathfrak{B} abheben. Danach liesse sich das andere Loch durch e schliessen. Man erhielte damit eine in k eingespannte, orientierbare, singularitätenfreie Fläche, deren Geschlecht um 1 kleiner wäre als das von \mathfrak{F} im Widerspruch zur Voraussetzung über \mathfrak{F} . Die Schnittlinie s lässt sich also, wie oben beschrieben, zum Verschwinden bringen, und es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien von \mathfrak{F} und \mathfrak{T} beseitigen, die auf \mathfrak{T} nullhomolog sind.

Falls nun noch Schnittlinien vorhanden sind, orientieren wir zunächst \mathfrak{F} so, dass k durch Randbildung von \mathfrak{F} die gegebene Orientierung empfängt, danach wird den Schnittlinien von \mathfrak{F} und \mathfrak{L} die Orientierung erteilt, die sie durch Randbildung von den ausserhalb \mathfrak{B} liegenden Teilen von \mathfrak{F} erhalten. Da sich die Schnittlinien gegenseitig nicht treffen und nicht nullhomolog auf \mathfrak{L} sind, verteilen sie sich auf zwei Homologieklassen von \mathfrak{L} , die auseinander durch Umorientierung entstehen.

Gehören alle Schnittlinien zur gleichen Homologieklassse von \mathfrak{L} , so handelt es sich um α gleichsinnig orientierte Breitenkreise. Es ist nämlich ihre Summe auf \mathfrak{B} homolog zu k , wie durch den auf \mathfrak{B} liegenden Teil von \mathfrak{F} in Evidenz gesetzt wird, und damit auf \mathfrak{B} homolog dem α -fachen einer orientierten Seele von \mathfrak{B} nach Definition der Umlaufzahl von k . Andererseits ist die Summe der Schnittlinien im Komplement von \mathfrak{B} nullhomolog, wie sich vermittels der im Komplement von \mathfrak{B} liegenden Teile von \mathfrak{F} ergibt. Da die Schnittlinien doppeltpunktfrei sind und zur selben Homologieklassse auf \mathfrak{L} gehören, kann es sich nur um α gleichsinnig orientierte Breitenkreise von \mathfrak{B} handeln.

Zum Beweis der Behauptung im betrachteten Falle ist also nur noch zu zeigen: Verteilen sich die noch vorhandenen Schnittlinien von \mathfrak{F} und \mathfrak{L} auf zwei Homologieklassen von \mathfrak{L} , so lassen sich durch Änderung von \mathfrak{F} noch Schnittlinien beseitigen. Dies wird so geschehen, dass jeweils ein Paar von Schnittlinien verschiedener Homologieklassen, wofür wir auch sagen: ein Paar entgegengesetzt orientierter Schnittlinien, beseitigt wird. Dabei wird die Verknotung von \mathfrak{B} wesentlich benutzt.

Wenn die auf \mathfrak{L} nicht nullhomologen Schnittlinien von \mathfrak{F} und \mathfrak{L} in zwei Homologieklassen von \mathfrak{L} liegen, gibt es unter ihnen ein Paar entgegengesetzt orientierter Schnittlinien, etwa s_1 und s_2 , das auf \mathfrak{L} einen Kreisring r berandet, der keine weitere Schnittlinie enthält. Wir schneiden \mathfrak{F} längs s_1 und s_2 auf und verbinden zunächst die in s_1 und s_2 im Inneren von \mathfrak{B} an \mathfrak{L} anstossenden Teile von \mathfrak{F} durch r . Danach heben wir r als Teil der entstandenen Fläche von \mathfrak{L} ins Innere von \mathfrak{B} ab und zwar so, dass der übrige Durchschnitt von \mathfrak{F} mit \mathfrak{L} und dass k festbleibt. Anschliessend fügen wir r ein in die Teile der Fläche, die in s_1 und s_2 an \mathfrak{L} im Äusseren von \mathfrak{B} anstossen, und heben r als Teil der entstandenen Fläche ins Äussere von \mathfrak{B} ab und zwar wieder so, dass der restliche Durchschnitt mit \mathfrak{L} und k festbleiben. Damit sind die Schnittlinien s_1 und s_2 verschwunden und keine neuen entstanden, und es ist die Charakteristik von \mathfrak{F} erhalten geblieben.

Wenn nun \mathfrak{F} bei diesem Vorgang nicht zerfallen ist, so ist \mathfrak{F} offenbar orientierbar und von gleichem Geschlecht geblieben, und es kann das Verfahren auf ein neues Paar entgegengesetzt orientierter Schnittlinien angewandt werden, falls ein solches noch vorhanden ist.

Wenn \mathfrak{F} bei diesem Vorgang zerfallen ist, so in eine orientierbare geschlossene Fläche

\mathfrak{F}_1 und eine orientierbare Fläche \mathfrak{F}_2 , die in k eingespannt ist. Da \mathfrak{F} minimales Geschlecht hatte, muss \mathfrak{F}_1 die Charakteristik 0 oder -2 haben, also entweder ein Torus oder eine 2-Sphäre sein. Im ersten Falle betrachten wir weiterhin \mathfrak{F}_2 statt \mathfrak{F}_1 . Der zweite Fall ist nicht möglich. Es müssten dann nämlich s_1 und s_2 auf \mathfrak{F} je ein Elementarflächenstück e_1 bzw. e_2 beranden, wobei sich e_1 und e_2 mit r zu einer 2-Sphäre zusammensetzen. Dann sind s_1 und s_2 Kreislinien und wegen der Verknotung von \mathfrak{B} nach § 7 Hilfssatz 2 Meridiane von \mathfrak{B} , da s_1 und s_2 nicht nullhomolog auf \mathfrak{T} sind. Falls nun nicht e_1 bereits Meridianfläche von \mathfrak{B} ist, also noch Schnittlinien mit \mathfrak{T} besitzt, so gibt es unter diesen eine innerste, die auf e_1 ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e'_1 berandet. Diese Schnittlinie ist Meridian von \mathfrak{B} , da die verbliebenen Schnittlinien von \mathfrak{F} und \mathfrak{T} auf \mathfrak{T} zu $\pm s_1$ homolog sind. e'_1 ist daher Meridianfläche von \mathfrak{B} . Entsprechend kann man für e_2 schliessen. Man erhielte damit zwei Meridianflächen von \mathfrak{B} , die k nicht treffen. k müsste also auf einer der beiden Kugeln liegen, in die \mathfrak{B} durch diese beiden Meridianflächen zerlegt wird, im Widerspruch zur Annahme, dass k in keiner auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten ist.

Man kann also, solange Paare entgegengesetzt orientierter Schnittlinien auf \mathfrak{T} vorhanden sind, das obige Verfahren fortsetzen, bis entweder nur noch gleichsinnig orientierte Schnittlinien oder keine Schnittlinien mehr vorhanden sind. Im letzten Falle ist $\alpha = 0$, d.h. k nullhomolog auf \mathfrak{B} , da k Rand der in \mathfrak{B} liegenden orientierbaren Fläche \mathfrak{F} ist.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, dass k in einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel \mathfrak{K} enthalten ist. In diesem Falle ist $\alpha = 0$, und es lassen sich die Schnittlinien von \mathfrak{F} mit dem Rande von \mathfrak{K} ebenso beseitigen wie oben die Schnittlinien von \mathfrak{F} mit \mathfrak{T} , die nullhomolog auf \mathfrak{T} waren. Man erhält dabei eine in k eingespannte Fläche, die im Inneren von \mathfrak{K} liegt, also \mathfrak{T} nicht trifft. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Hilfssatz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathbb{S}^3 mit dem Rande \mathfrak{T} . \mathfrak{F} sei eine orientierte, möglicherweise nicht zusammenhängende Fläche mit α Rändern, die, abgesehen von ihren Rändern, im Komplement von \mathfrak{B} liegt. Die Ränder von \mathfrak{F} mögen auf \mathfrak{T} liegen und in der Orientierung, die sie von \mathfrak{F} erhalten, auf \mathfrak{T} homolog aber nicht nullhomolog sein. \mathfrak{F} besitzt dann α zusammenhängende Komponenten mit je einem Rand.*

Beweis: Da die Ränder von \mathfrak{F} auf \mathfrak{T} homolog aber nicht nullhomolog sind und ihre Summe als Rand von \mathfrak{F} in $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ nullhomolog ist, sind diese Ränder α gleichsinnig orientierte Breitenkreise von \mathfrak{B} .

Wir zeigen indirekt, dass eine zusammenhängende Komponente von \mathfrak{F} nicht mehr als einen dieser gleichsinnig orientierten Breitenkreise von \mathfrak{B} zum Rand haben kann. Angenommen, es sei für eine zusammenhängende Komponente, die wieder mit \mathfrak{F} und deren Ränderzahl wieder mit α bezeichnet werde, $\alpha > 1$. Es existiert dann ein Meridian m von \mathfrak{B} , der jeden Rand von \mathfrak{F} in genau einem Punkte trifft. Die Ränder von \mathfrak{F} seien

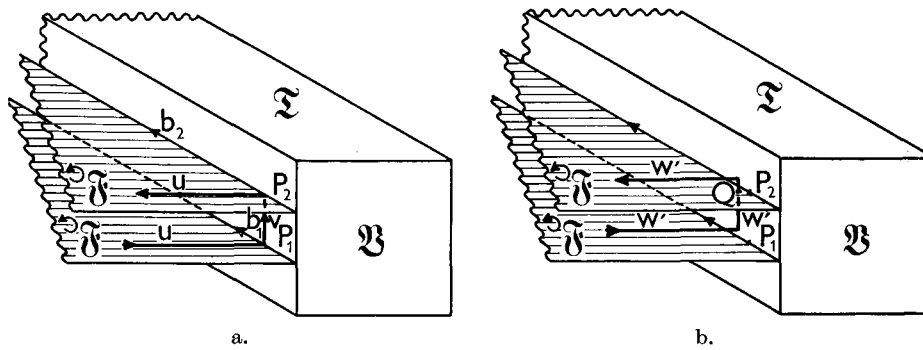


Fig. 10.

b_1, b_2, \dots, b_a , wobei die Numerierung die Reihenfolge anzeigt, in welcher diese Ränder bei Durchlaufen von m getroffen werden. Sei P_1 ein Punkt auf b_1 , P_2 ein Punkt auf b_2 . Wegen des Zusammenhanges von \mathfrak{F} lässt sich P_2 mit P_1 auf \mathfrak{F} durch einen Weg u verbinden, der mit den Rändern von \mathfrak{F} nur die Punkte P_1 und P_2 gemein hat. Auf \mathfrak{X} verbinden wir P_1 mit P_2 durch einen Weg v , der ein Stück von m ausmacht und b_3, \dots, b_a (falls mehr als 2 Ränder vorhanden sind) nicht trifft. Dies ist möglich nach Wahl von m und der Numerierung von b_1, b_2, \dots, b_a . Wir erhalten damit einen geschlossenen Weg $w = uv$.

Wegen der Orientierbarkeit von \mathfrak{F} lassen sich widerspruchsfrei Ober- und Unterseite von \mathfrak{F} unterscheiden, etwa so, dass m auf \mathfrak{X} die Ränder von \mathfrak{F} von der Unterseite von \mathfrak{F} zur Oberseite hin durchsetzt. (Das Durchsetzen erfolgt für alle Ränder im gleichen Sinne, da diese gleichsinnig orientierte Breitenkreise von \mathfrak{B} sind). Man kann nun w dadurch deformieren (Fig. 10 a, b), dass man den auf \mathfrak{F} liegenden Teil u auf der Oberseite von \mathfrak{F} heraushebt und gleichzeitig noch den auf \mathfrak{X} liegenden Teil v von w in das Äussere von \mathfrak{B} abhebt. Dadurch lässt sich ein Weg w' erhalten, der \mathfrak{X} nicht trifft und \mathfrak{F} nur in einem Punkte Q beliebig nahe an P_2 , wobei \mathfrak{F} in Q von w' von der Unterseite zur Oberseite hin durchsetzt wird. Dass eine solche Deformation von w möglich ist, erkennt man daraus, dass man w mit dem Inneren von endlich vielen Elementarflächenstücken auf $\mathfrak{F} + \mathfrak{X}$ überdecken kann, dass jedes dafür benutzte Elementarflächenstück durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich in ein 2-Simplex übergeführt werden kann und dass für die Teile von w , die dann auf einem solchen 2-Simplex liegen, die Deformation ohne weiteres ausführbar ist.

Damit ergibt sich nun ein Weg w' im Komplement von \mathfrak{B} , der keinen Punkt mit dem Rande von \mathfrak{B} gemein hat und dessen algebraische Schnittzahl mit \mathfrak{F} gleich ± 1 ist. Die Verschlingungszahl von w' mit der Summe der Ränder von \mathfrak{F} ist also ± 1 . Da jeder der gleichsinnig orientierten Breitenkreise b_1, b_2, \dots, b_a auf \mathfrak{B} zu einer geeignet orientierten Seele a von \mathfrak{B} homolog ist und w' im Komplement von \mathfrak{B} liegt, muss w' mit dem α -fachen von a die Verschlingungszahl ± 1 haben, was wegen $\alpha \neq 1$ unmöglich ist.

Wir betrachten nun wieder eine Knotenlinie k , die im Inneren eines verknoteten Vollringes \mathfrak{B} in der \mathfrak{S}^3 liegt, und eine Fläche \mathfrak{F} kleinsten Geschlechts, die in k gemäss Hilfssatz 1 eingespannt ist. Für das Folgende können wir annehmen, dass die Umlaufzahl α von k auf \mathfrak{B} nicht null ist, da andernfalls das Folgende trivial ist. Mit dem Rande \mathfrak{T} von \mathfrak{B} hat \mathfrak{F} also α gleichsinnig orientierte Breitenkreise $b_1, b_2, \dots, b_\alpha$ gemein. Die in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ liegenden Teile von \mathfrak{F} sind nach Hilfssatz 2 α Flächen $\mathfrak{F}_i (i = 1, 2, \dots, \alpha)$ mit je einem Rand b_i .

a sei eine Seele von \mathfrak{B} , die bezüglich k positiv orientiert ist. Nach Hilfssatz 1 kann in a eine orientierbare Fläche \mathfrak{G} minimalen Geschlechts eingespannt werden, die \mathfrak{T} in nur einem Breitenkreise von \mathfrak{B} trifft. Wegen § 2 Satz 2 und 3 kann angenommen werden, dass b_1 dieser Breitenkreis ist. Sei \mathfrak{G}_1 der in $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ liegende Teil von \mathfrak{G} . \mathfrak{G} und \mathfrak{G}_1 haben dasselbe Geschlecht. Das Geschlecht von \mathfrak{G}_1 ist sicher nicht grösser als das von \mathfrak{G} , und das Geschlecht von \mathfrak{G}_1 kann nicht kleiner als das von \mathfrak{G} sein, weil \mathfrak{G} eine in a eingespannte Fläche kleinsten Geschlechts ist und weil a und b_1 nach § 6 Hilfssatz 3 denselben Knoten darstellen. Aus \mathfrak{G}_1 lassen sich durch Deformation der Reihe nach paarweise punktfremde Flächen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_\alpha$ erhalten, die auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ liegen und in b_1 bzw. b_2, \dots, b_α eingespannt sind. Um \mathfrak{G}_2 zu erhalten, setze man beispielsweise einen von b_1 und b_2 auf \mathfrak{T} berandeten Kreisring in b_1 an \mathfrak{G}_1 an und hebe danach die entstandene Fläche ausser ihrem Rande b_2 von \mathfrak{G}_1 und \mathfrak{T} ab. Dass dies möglich ist, ergibt sich wie im Beweise von Hilfssatz 2 aus der Tatsache, dass die in b_2 zunächst eingespannte Fläche orientierbar ist, sich mit endlich vielen Elementarflächenstücken auf $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{T}$ überdecken lässt und jedes solche Elementarflächenstück durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich in ein 2-Simplex übergeführt werden kann.

Wenn man $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_\alpha$ durch $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_\alpha$ ersetzt, so entsteht aus \mathfrak{F} eine in k eingespannte, orientierbare Fläche, deren Geschlecht nach Wahl von \mathfrak{F} nicht kleiner sein kann als das von \mathfrak{F} . Es kann auch nicht grösser sein, da man andernfalls einen Widerspruch zur Wahl von \mathfrak{G} erhalten würde. Das Geschlecht von \mathfrak{F} ist also gleich der Summe aus dem α -fachen Geschlecht von \mathfrak{G} und dem Geschlecht derjenigen orientierbaren (abstrakten) Fläche \mathfrak{X} , die aus \mathfrak{F} entsteht, wenn man $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots, \mathfrak{F}_\alpha$ durch Elementarflächenstücke ersetzt.

Um die Fläche \mathfrak{X} in der \mathfrak{S}^3 zu realisieren, bilden wir \mathfrak{B} treu auf einen unverknoteten Vollring \mathfrak{B}^* in der \mathfrak{S}^3 ab. Die Breitenkreise von \mathfrak{B} gehen dabei in solche von \mathfrak{B}^* über. Aus k entsteht eine Knotenlinie k^* in \mathfrak{B}^* , in welche sich die Fläche \mathfrak{X} so einspannen lässt, dass \mathfrak{X} den Rand \mathfrak{T}^* von \mathfrak{B}^* in α Breitenkreisen trifft. \mathfrak{X} braucht nicht eine orientierbare Fläche kleinsten Geschlechts zu sein, die in k^* einspannbar ist. Es ist möglich, dass jede orientierbare Fläche kleinsten Geschlechts, die in k^* eingespannt ist und \mathfrak{T}^* nur in Breitenkreisen

von \mathfrak{B}^* trifft, \mathfrak{T}^* in mehr als α Breitenkreisen von \mathfrak{B}^* durchsetzt, wobei diese Breitenkreise nicht mehr gleichsinnig orientiert sind.

Wir erhalten damit den

Satz: Die Knotenlinie k liege im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} und habe die Umlaufzahl α auf \mathfrak{B} . a sei eine Seele von \mathfrak{B} . Die Knotenlinie k^* entstehe aus k dadurch, dass \mathfrak{B} treu auf einen unverknoteten Vollring \mathfrak{B}^* abgebildet wird. Sind dann $g(k)$, $g(k^*)$, $g(a)$ die Geschlechter der von k bzw. k^* , a dargestellten Knoten, so gilt

$$g(k) \geq \alpha g(a) + g(k^*).$$

Das Gleichheitszeichen gilt hierbei genau dann, wenn sich in k^* eine orientierbare Fläche kleinsten Geschlechts so einspannen lässt, dass der Durchschnitt dieser Fläche mit dem Rande von \mathfrak{B}^* aus α Breitenkreisen von \mathfrak{B}^* besteht.

Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass Seifert [13] für die entsprechenden L -Polynome (Alexander-Polynome)

$$\Delta_k(x), \Delta_a(x), \Delta_{k^*}(x)$$

die Beziehung

$$\Delta_k(x) = \Delta_a(x^\alpha) \Delta_{k^*}(x)$$

bewiesen hat.

§ 13. Begleitknoten.

Zu einer Knotenlinie k wollen wir Vollringe betrachten, die k im Inneren enthalten. Unter diesen Vollringen gibt es offenbar stets solche, die k als orientierte Seele besitzen, und solche, die in bezug auf k die Ordnung null haben, bei denen also k bereits auf einer Teilkugel liegt (§ 9 Satz 1). Beide Fälle sind für uns ohne Interesse, da es uns auf die Knoten ankommt, die durch die orientierten Seelen der k umfassenden Vollringe dargestellt werden. Im ersten Falle ist dies (bei geeigneter Orientierung der Seelen) der von k dargestellte Knoten, im zweiten Falle lässt sich jeder Knoten erhalten. Wir schliessen daher diese beiden Fälle als trivial aus und sagen, dass k *nicht-trivial* im Inneren des Vollringes \mathfrak{B} liegt, wenn k nicht orientierte Seele von \mathfrak{B} ist und \mathfrak{B} nicht die Ordnung null in bezug auf k hat. Wir werden ferner unter den k umfassenden Vollringen im allgemeinen die unverknoteten ausser Betracht lassen. k lässt sich stets auf mannigfache nicht-triviale Weise in unverknotete Vollringe einbetten, wie man schon aus einer Knotenprojektion des von k dargestellten Knotens erkennt.

Es sei k eine Knotenlinie, die den Knoten \varkappa darstellt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält. Wenn die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} nicht null ist, so bezeichnen wir den Knoten, der von den bezüglich k positiv orientierten Seelen von

\mathfrak{B} dargestellt wird, als *orientierten Begleitknoten* von κ . Besitzt k auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl null, so betrachten wir den nicht-orientierten Knoten, der durch die Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird, und nennen ihn *nicht-orientierten Begleitknoten* von κ . Wir sprechen von einem Begleitknoten von κ schlechthin, wenn offen gelassen wird, ob es sich um einen orientierten oder nicht-orientierten Begleitknoten von κ handelt.

Es sei nun k eine nicht-orientierte Knotenlinie, \mathfrak{B} ein verknöteter Vollring, der k im Inneren enthält. Wenn k nicht Seele von \mathfrak{B} ist und wenn \mathfrak{B} in bezug auf k nicht die Ordnung null hat, so sagen wir wieder, dass k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Wenn dies der Fall ist, bezeichnen wir den nicht-orientierten Knoten, der durch die Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird, als Begleitknoten des von k dargestellten nicht-orientierten Knotens. Ein Begleitknoten eines nicht-orientierten Knotens ist stets nicht-orientiert.

Es sei k wieder eine (orientierte) Knotenlinie, die den Knoten κ darstellt, λ ein Begleitknoten von κ und \mathfrak{B} ein Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält. Wir wollen sagen, dass *der Vollring \mathfrak{B} mit k den Begleitknoten λ von κ darstellt*, wenn einer der beiden folgenden Sachverhalte vorliegt:

- 1) Ist λ orientiert, so ist die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} nicht null, und die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} stellen den Knoten λ dar.
- 2) Ist λ nicht-orientiert, so ist die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} null, und es wird λ durch die Seelen von \mathfrak{B} dargestellt.

Ist $\gamma > 0$ die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k , so sagen wir auch, dass \mathfrak{B} mit k den *Begleitknoten λ von κ mit der Ordnung γ darstellt* und dass λ ein *Begleitknoten der Ordnung γ* von κ ist. Es ist möglich, dass λ als Begleitknoten von κ mehrere verschiedene Ordnungen besitzt. Ein Beispiel hierfür ist schematisch in Fig. 11 wiedergegeben. Zu der Knotenlinie k ist unten das Komplement eines Vollringes \mathfrak{B}_1 wiedergegeben, auf dem k die Umlaufzahl 3 besitzt, oben das Komplement eines Vollringes \mathfrak{B}_2 , auf dem k die Umlaufzahl 1 besitzt. Durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen beider Vollringe wird dieselbe Kleeblattschlinge dargestellt. Offenbar hat \mathfrak{B}_1 in bezug auf k die Ordnung 3, \mathfrak{B}_2 in bezug auf k die Ordnung 1.

Ist k eine nicht-orientierte Knotenlinie, die den nicht-orientierten Knoten κ darstellt, λ ein Begleitknoten von κ und \mathfrak{B} ein Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält, so sagen wir wie im orientierten Falle, dass \mathfrak{B} mit k den Begleitknoten λ von κ mit der Ordnung γ darstellt, wenn \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung γ hat und wenn λ durch die Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird. λ heisst dann wieder ein Begleitknoten der Ordnung γ von κ .

Nach § 7 Satz 1 ist es nicht möglich, dass eine Kreislinie nicht-trivial im Inneren eines Vollringes liegt. Der Kreis besitzt also keine Begleitknoten, ebenso der nicht-orientierte Kreis.

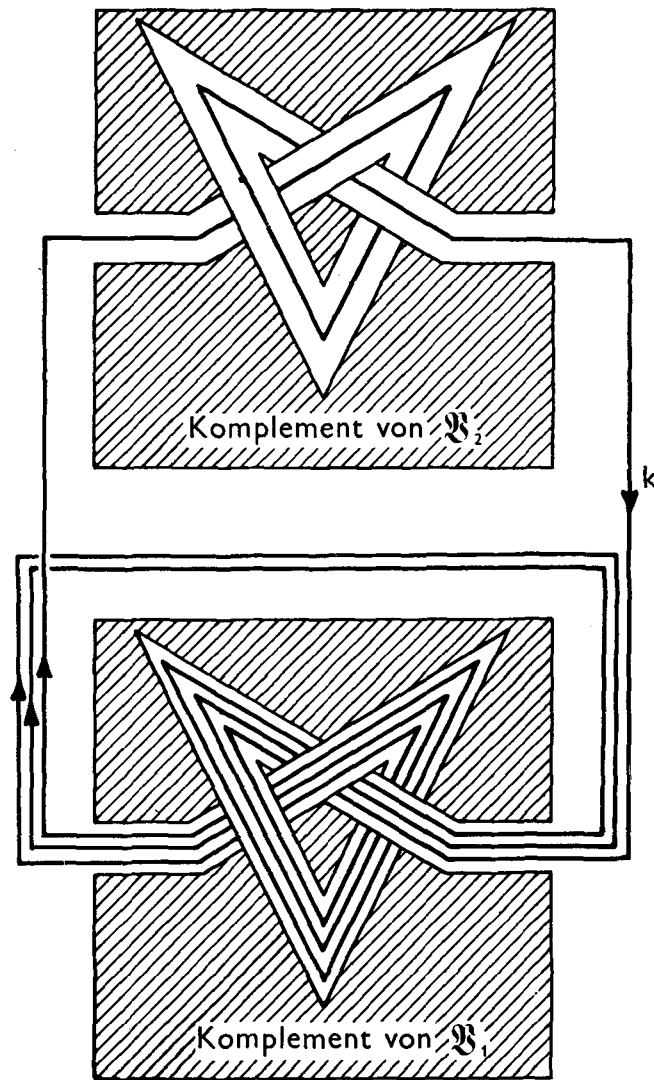


Fig. 11.

Satz 1: *Es seien κ , λ und μ Knoten oder nicht-orientierte Knoten. Ist λ Begleitknoten der Ordnung γ_1 von κ und μ Begleitknoten der Ordnung γ_2 von λ , so ist μ Begleitknoten der Ordnung $\gamma_1\gamma_2$ von κ .*

Beweis: Es sind vier Fälle zu unterscheiden, nämlich

- 1) κ , λ und μ sind orientiert,
- 2) κ und λ sind orientiert, μ ist nicht-orientiert,

3) κ ist orientiert, λ und μ sind nicht-orientiert,

4) κ , λ und μ sind nicht-orientiert.

Wir behandeln zunächst den 1. Fall.

Die Knotenlinie k sei Repräsentant von κ , und es sei \mathfrak{B} ein Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und mit k den Begleitknoten λ von κ mit der Ordnung γ_1 darstellt. Da wir κ und λ als orientiert vorausgesetzt haben, ist die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} nicht null. Es sei l eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} . l stellt den Knoten λ dar. Es gibt nun einen Vollring \mathfrak{B} , der l nicht-trivial im Inneren enthält und mit l den Begleitknoten μ von λ mit der Ordnung γ_2 darstellt. Dabei kann \mathfrak{B} so gewählt werden, dass \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Ist nämlich zunächst \mathfrak{B}^* ein Vollring, der l nicht-trivial im Inneren enthält und mit l den Begleitknoten μ von λ mit der Ordnung γ_2 darstellt, so gibt es nach § 10 Hilfssatz 1 einen Vollring \mathfrak{B}^* , der l als orientierte Seele besitzt und im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt, und nach § 10 Satz 1 gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{B}^* auf \mathfrak{B} und l auf sich abbildet, wobei \mathfrak{B}^* in einen Vollring \mathfrak{B} mit den gewünschten Eigenschaften übergeht.

Eine bezüglich l positiv orientierte Seele a von \mathfrak{B} stellt den Knoten μ dar. k liegt im Inneren von \mathfrak{B} , und es ist a positiv orientiert bezüglich k , da k auf \mathfrak{B} homolog zu einem positiven Vielfachen von l und l auf \mathfrak{B} homolog zu einem positiven Vielfachen von a ist.

Nach § 9 Satz 3 besitzt \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung $\gamma_1\gamma_2$. Es wird also durch \mathfrak{B} mit k der Knoten μ als Begleitknoten der Ordnung $\gamma_1\gamma_2$ von κ dargestellt, wenn k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Dies ist aber der Fall.

Zunächst ist die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k nicht null, da γ_1 und γ_2 nicht null sind. Ferner ist k keine orientierte Seele von \mathfrak{B} . Wäre nämlich k orientierte Seele von \mathfrak{B} , so wäre die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k gleich 1, sodass $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ sein müsste. Nehmen wir an, dass $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ ist. Da k nicht-trivial in \mathfrak{B} liegt, ist k keine orientierte Seele von \mathfrak{B} , und nach § 9 Satz 2 ist der von k dargestellte Knoten κ das Produkt aus einem vom Kreis verschiedenen Knoten ν_1 mit dem Knoten λ , der von der bezüglich k positiv orientierten Seele l von \mathfrak{B} dargestellt wird. l ist keine orientierte Seele von \mathfrak{B} , und der von l dargestellte Knoten λ ist das Produkt aus einem vom Kreis verschiedenen Knoten ν_2 mit dem Knoten μ , der von der bezüglich l positiv orientierten Seele a von \mathfrak{B} dargestellt wird. Es ist also $\kappa = \nu_1\nu_2\mu$, woraus nach § 5 Satz 1 folgt, dass κ und μ verschiedene Knoten sind, da ν_1 und ν_2 vom Kreis verschieden sind. Aus § 5 Satz 2 und Satz 3 folgt übrigens, dass das Geschlecht von κ grösser als das von μ ist. Es kann also k keine orientierte Seele von \mathfrak{B} sein, und es liegt k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} . Damit ist die Behauptung im 1. Falle bewiesen.

Im 2. Falle ist entsprechend vorzugehen: k liegt nicht-trivial im Inneren eines

Vollringes \mathfrak{B} , der mit k den Begleitknoten λ von \varkappa mit der Ordnung γ_1 darstellt. l sei wieder eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} . l liegt nicht-trivial im Inneren eines Vollringes \mathfrak{B} , der mit l den Begleitknoten μ von λ mit der Ordnung γ_2 darstellt. Es kann wieder angenommen werden, dass \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Dann liegt k im Inneren von \mathfrak{B} , und es hat \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung $\gamma_1\gamma_2$. Dabei ist $\gamma_1\gamma_2 \geq 2$, denn es ist $\gamma_1 > 0$, und γ_2 ist positiv und gerade, weil l nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} liegt und auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl null hat, da μ ein nicht-orientierter Begleitknoten des (orientierten) Knotens λ ist. Daraus folgt, dass k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} liegt. \mathfrak{B} stellt mit k den nicht-orientierten Knoten μ als Begleitknoten von \varkappa mit der Ordnung $\gamma_1\gamma_2$ dar, denn nach § 9 Satz 4 ist k nullhomolog auf \mathfrak{B} , weil l auf \mathfrak{B} nullhomolog ist.

Im 3. Falle ist ganz entsprechend zu schliessen, nur dass jetzt γ_1 positiv und gerade sein muss.

Im 4. Falle verläuft die Schlussweise analog zum 1. Falle, wobei nur zunächst auf die Orientierung der Seelen l bzw. a von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B} zu verzichten ist. Es kann dabei k nicht Seele des Vollringes \mathfrak{B} sein, weil sich für $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ unter Zuhilfenahme einer Orientierung von k , l und a wieder wie oben ergibt, dass \varkappa und μ verschiedenes Geschlecht haben.

Satz 2: *Jeder nicht-orientierte Knoten ist von seinen Begleitknoten verschieden.*

Beweis: Der nicht-orientierte Kreis besitzt keine Begleitknoten, wie oben bemerkt wurde. Es sei \varkappa ein nicht-orientierter Knoten, der vom nicht-orientierten Kreis verschieden ist. \varkappa werde durch die nicht-orientierte Knotenlinie k dargestellt. Nehmen wir an, es gäbe einen Vollring \mathfrak{B} , der k nicht-trivial im Inneren enthält und durch dessen Seelen der nicht-orientierte Knoten \varkappa dargestellt wird.

Es kann \mathfrak{B} in bezug auf k nicht die Ordnung 1 haben. Andernfalls erhielte man durch Orientierung von k eine Knotenlinie, die keine orientierte Seele von \mathfrak{B} ist und nach § 9 Satz 2 einen Knoten darstellte, der das Produkt aus einem vom Kreis verschiedenen Knoten mit demjenigen Knoten ist, der von den bezüglich k (nach Orientierung) positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird. Nach § 5 Satz 2 und Satz 3 folgte daraus, dass der von k dargestellte nicht-orientierte Knoten und der nicht-orientierte Knoten, der von den Seelen von \mathfrak{B} dargestellt wird, verschiedenes Geschlecht haben im Widerspruch zur Annahme, dass es sich beide Male um denselben nicht-orientierten Knoten \varkappa handelt.

Nehmen wir nun an, dass \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung $\gamma > 1$ besitzt. Es wäre also \varkappa Begleitknoten von sich selbst mit der Ordnung $\gamma > 1$. Aus Satz 1 folgte nun durch vollständige Induktion nach der natürlichen Zahl n , dass \varkappa Begleitknoten von sich selbst mit der Ordnung γ^n für $n = 1, 2, 3, \dots$ sein müsste. Es gäbe also für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$ einen Vollring \mathfrak{B}_n , der k nicht-trivial im Inneren enthält, der in bezug auf k die Ordnung

γ^n besitzt und durch dessen Seelen der nicht-orientierte Knoten κ dargestellt wird. Dies führt aber zu einem Widerspruch zu § 9 Satz 5, wonach die Ordnungen in bezug auf k der verknoteten Vollringe, die k im Inneren enthalten, beschränkt sind. Ein nicht-orientierter Knoten kann also nicht Begleitknoten von sich selbst sein.

Ist λ ein orientierter Begleitknoten der Ordnung γ des Knotens κ , so ist der nicht-orientierte Knoten, der λ als orientierte Komponente besitzt, Begleitknoten der Ordnung γ des nicht-orientierten Knotens, der κ als orientierte Komponente besitzt. Ist λ nicht-orientierter Begleitknoten der Ordnung γ des Knotens κ , so ist λ auch Begleitknoten der Ordnung γ des nicht-orientierten Knotens, der κ als orientierte Komponente besitzt. Damit ergibt sich die

Folgerung aus Satz 2: Jeder Knoten ist verschieden von seinen orientierten Begleitknoten und von den orientierten Komponenten seiner nicht-orientierten Begleitknoten.

Wie oben bemerkt wurde, besitzen der Kreis und der nicht-orientierte Kreis keine Begleitknoten. Sie können auch nicht als Begleitknoten eines anderen Knotens oder nicht-orientierten Knotens auftreten nach Definition der Begleitknoten. In der Menge der vom Kreis und nicht-orientierten Kreis verschiedenen Knoten und nicht-orientierten Knoten wird nun durch die Zuordnung von Knoten bzw. nicht-orientierten Knoten und Begleitknoten wegen der Sätze 1, 2 und der Folgerung aus Satz 2 eine (teilweise) Anordnung definiert, wenn man unter $\lambda < \kappa$ versteht, dass λ Begleitknoten von κ ist. Die minimalen Elemente in dieser Anordnung sind diejenigen Knoten und nicht-orientierten Knoten, die keine Begleitknoten besitzen. Wir nennen diese *einfach*. Beispiele für einfache Knoten werden wir in § 20 durch die Schlingknoten mit dem Kreis als Diagonalknoten und in § 21 durch die Torusknoten erhalten. Ist λ Begleitknoten des Knotens bzw. nicht-orientierten Knotens κ , so bezeichnen wir λ auch als *einfacher verknotet* als κ und κ als *stärker verknotet* als λ . Wir werden in § 14 zeigen, dass ein Produktknoten κ stärker verknotet ist als seine vom Kreis und von κ verschiedenen Faktoren. Den Kreis und den nicht-orientierten Kreis nennen wir *einfacher verknotet* als jeden anderen Knoten bzw. nicht-orientierten Knoten.

§ 14. Begleitknoten der Ordnung 1.

Die Knotenlinie k stelle den Knoten κ dar. Ist \mathfrak{B} ein Vollring, der k im Inneren enthält, so unterscheiden sich die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k und die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} um eine gerade Zahl nach § 9 Hilfssatz 1; daraus folgt der

Hilfssatz: *Ist λ nicht-orientierter Begleitknoten des Knotens κ , so sind die Ordnungen, die λ als Begleitknoten von κ besitzt, gerade. Besitzt ein Begleitknoten μ von κ eine ungerade Ordnung, so ist μ orientiert.*

Insbesondere sind für einen Knoten κ die Begleitknoten der Ordnung 1 orientiert. Aus § 9 Satz 2 folgt:

Satz 1: *Besitzt der Knoten κ einen Begleitknoten λ der Ordnung 1, so ist dieser orientiert, und es ist κ das Produkt aus λ und einem vom Kreis verschiedenen Knoten.*

Umgekehrt gilt:

Satz 2: *Der Knoten κ sei das Produkt der vom Kreis verschiedenen Knoten λ_1 und λ_2 . Dann sind λ_1 und λ_2 orientierte Begleitknoten von κ der Ordnung 1.*

Beweis: Da κ das Produkt von λ_1 und λ_2 ist, gibt es zu einem Repräsentanten k von κ eine 2-Sphäre \mathbb{S}^2 , welche die \mathbb{S}^3 so in zwei Kugeln $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ zerlegt, dass k in \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 je eine Sehne k_1 bzw. k_2 bildet, die in \mathbb{R}_1 bzw. \mathbb{R}_2 den Knoten λ_1 bzw. λ_2 erzeugt (vgl. § 5). Nun lässt sich aus \mathbb{R}_1 eine hinreichend kleine Umgebung \mathbb{U} von k_1 bezüglich \mathbb{R}_1 so ausbohren, dass die abgeschlossene Hülle von \mathbb{U} eine Kugel \mathbb{R}_1^* ist, in der k_1 unverknotet ist. Man kann dazu etwa wie im Beweise von § 10 Hilfssatz 1 verfahren, nachdem man \mathbb{R}_1 durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich in einen Würfel übergeführt hat. Der Durchschnitt von \mathbb{R}_1^* und \mathbb{R}_2 besteht aus zwei disjunkten Elementarflächenstücken e und f , die den Durchschnitt des Randes von \mathbb{R}_1^* mit \mathbb{S}^2 ausmachen. Nach § 3 Hilfssatz 1 bilden \mathbb{R}_1^* und \mathbb{R}_2 zusammen einen Vollring \mathfrak{B} , der e und f als Meridianflächen besitzt. \mathfrak{B} enthält k im Inneren und hat in bezug auf k die Ordnung 1, da e und f von k in je einem Punkte geschnitten werden. Man erhält aus k eine bezüglich k positiv orientierte Seele a von \mathfrak{B} , wenn man die Sehne k_2 von \mathbb{R}_2 durch eine in \mathbb{R}_2 unverknotete Sehne k'_2 mit demselben Anfangspunkt und demselben Endpunkt ersetzt. Der von a repräsentierte Knoten wird durch den Rand \mathbb{S}^2 von \mathbb{R}_2 als Produkt des von k'_2 in \mathbb{R}_2 erzeugten Kreises mit dem von k_1 in \mathbb{R}_1 erzeugten Knoten λ_1 dargestellt. Die bezüglich k positiv orientierte Seele a von \mathfrak{B} stellt also den Knoten λ_1 dar, und es wird λ_1 durch \mathfrak{B} mit k als Begleitknoten der Ordnung 1 von κ dargestellt. Für λ_2 lässt sich entsprechend schliessen.

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt

Satz 3: *Ein Knoten ist genau dann Primknoten, wenn er keinen Begleitknoten der Ordnung 1 besitzt.*

Folgerung: Die orientierten Komponenten eines nicht-orientierten Knotens κ sind genau dann Primknoten, wenn κ keine Begleitknoten der Ordnung 1 besitzt.

Es sei nun der Knoten κ das Produkt der vom Kreis verschiedenen Knoten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Nach § 5 Hilfssatz 3 gibt es dann zu einem Repräsentanten k von κ paarweise punktfremde Kugeln $\mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2, \dots, \mathbb{R}_n$ derart, dass k in \mathbb{R}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je eine Sehne k_i bildet. Bohrt man wie im Beweise von Satz 2 aus jeder Kugel \mathbb{R}_i eine geeignete Umgebung von k_i aus, so erhält man n Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$, von denen jeder k im Inneren enthält

und in bezug auf k die Ordnung 1 hat, und es wird von den bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_i der Knoten λ_i dargestellt. Ausserdem bemerkt man: Jeder der Vollringe \mathfrak{B}_i enthält die Komplemente der übrigen Vollringe im Inneren.

Es werden hier also mehrere Begleitknoten von \varkappa gleichzeitig durch verschiedene Vollringe dargestellt, von denen jeder das Komplement der anderen im Inneren enthält. Etwas Ähnliches wurde bereits durch Fig. 11 wiedergegeben. Es wurden dort zu einer Knotenlinie k zwei Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ angegeben, die k nicht-trivial im Inneren enthalten und von denen jeder das Komplement des anderen im Inneren enthält. Wir wollen als nächstes zu einer Knotenlinie k solche Systeme von Vollringen untersuchen.

§ 15. Vollringe, die bezüglich einer Knotenlinie nebengeordnet sind.

Es sei k eine Knotenlinie. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ seien verknotete Vollringe, von denen jeder k nicht-trivial im Inneren enthält. Enthält jeder dieser Vollringe die abgeschlossenen Komplemente der übrigen im Inneren, so heissen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ *nebengeordnet* bezüglich k . Für ein System solcher Vollringe soll nun die Lage dieser Vollringe zueinander genauer untersucht werden. Dies geschieht unter etwas allgemeineren Voraussetzungen durch die Sätze 1 und 2.

Satz 1: *Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ verknotete Vollringe in der \mathbb{S}^3 , von denen jeder die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe und die Knotenlinie k im Inneren enthalte. \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) habe in bezug auf k die Ordnung γ_i . Der Rand von \mathfrak{B}_i sei \mathfrak{L}_i . Dann lassen sich für die Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ Meridianflächen m_1 bzw. m_2, \dots, m_n gleichzeitig so wählen, dass k von m_i in nur γ_i Punkten getroffen wird und dass m_i keine der übrigen Meridianflächen und keinen der von \mathfrak{L}_i verschiedenen Randtori trifft.*

Beweis: Die Numerierung von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ sei so vorgenommen, dass $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n$ ist. Sei zunächst m_1 eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 , die k in γ_1 Punkten trifft. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m_1 mit $\mathfrak{L}_2, \dots, \mathfrak{L}_n$, falls er nicht bereits leer ist, nur aus doppelungsfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Jede solche Schnittlinie auf \mathfrak{L}_j ($j = 2, \dots, n$) ist entweder nullhomolog auf \mathfrak{L}_j oder Meridian von \mathfrak{B}_j . Dies folgt wegen der Verknotung von \mathfrak{B}_j aus § 7 Hilfssatz 2, da jede Schnittlinie auf m_1 ein Elementarflächenstück berandet und somit eine Kreislinie ist.

Wir können zunächst alle Schnittlinien beseitigen, die nullhomolog auf einem \mathfrak{L}_j sind, zunächst etwa diejenigen, die nullhomolog auf \mathfrak{L}_2 sind (falls solche überhaupt vorhanden sind). Sei s eine innerste nullhomologe Schnittlinie auf \mathfrak{L}_2 . s berandet auf \mathfrak{L}_2 ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e und auf m_1 ein Elementarflächen-

stück f . Wir ersetzen f durch e und heben dann von \mathfrak{I}_2 so ab, dass die Schnittlinie s verschwindet und der übrige Durchschnitt von $m_1 - f$ mit $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ und k ungeändert bleibt. Dies ist möglich, da die Tori $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ paarweise und zu k punktfremd sind. Man erhält damit eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 , sie heisse wieder m_1 , deren Schnittpunktzahl mit k nicht grösser als ursprünglich, also wieder γ_1 , ist. So lassen sich der Reihe nach alle auf \mathfrak{I}_2 nullhomologen Schnittlinien beseitigen und anschliessend ebenso die Schnittlinien, die nullhomolog auf $\mathfrak{I}_3, \dots, \mathfrak{I}_n$ sind.

Enthält nun m_1 noch Schnittlinien, so betrachten wir eine innerste auf m_1 . Sie ist Meridian eines Vollringes \mathfrak{B}_j ($j \geq 2$) und berandet auf m_1 ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück m_j . m_j ist daher Meridianfläche von \mathfrak{B}_j . Da die Anzahl β_j der Schnittpunkte von m_j und k nicht grösser als diejenige von m_1 und k ist, $\beta_j \leq \gamma_1$, muss wegen $\gamma_j \geq \gamma_1$ gelten $\gamma_j = \beta_j = \gamma_1$. Wir vertauschen die Bezeichnung von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_j . Damit liegt nun für \mathfrak{B}_1 eine Meridianfläche m_1 vor, die k in γ_1 Punkten trifft und zu $\mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ punktfremd ist.

Wir wollen nun annehmen, dass bereits Meridianflächen m_1, \dots, m_{p-1} von $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{p-1}$ so bestimmt sind, dass jedes m_i ($i = 1, 2, \dots, p-1$) die von ihm verschiedenen Meridianflächen und die von \mathfrak{I}_i verschiedenen Tori nicht und k in nur γ_i Punkten trifft. Sei nun m_p eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_p , die k in γ_p Punkten trifft. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m_p mit \mathfrak{I}_i ($i = 1, 2, \dots, n; i \neq p$) nur aus doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Wie oben lassen sich sämtliche Schnittlinien beseitigen, die auf einem Torus nullhomolog sind. Falls dann noch Schnittlinien vorhanden sind, so ist jede Meridian eines von \mathfrak{B}_p verschiedenen Vollringes. Man kann annehmen, dass auf m_p kein Meridian von $\mathfrak{B}_{p+1}, \dots, \mathfrak{B}_n$ liegt, da man andernfalls wie oben zu einer auf m_p liegenden Meridianfläche eines solchen Vollringes übergehen und umnummerieren könnte.

Es sind nun noch die restlichen Schnittlinien von m_p mit $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_{p-1}$ und ausserdem die Durchschnitte von m_p mit m_1, \dots, m_{p-1} zu beseitigen. Zunächst werden wir erreichen, dass der Durchschnitt von m_p mit \mathfrak{I}_1 und m_1 verschwindet, ohne dass sich die übrigen Durchschnitte vergrössern.

Falls der Durchschnitt von m_p mit \mathfrak{I}_1 nicht bereits leer ist, besteht er aus paarweise punktfremden Meridianen von \mathfrak{B}_1 . Es gibt daher einen Meridian s_0 von \mathfrak{B}_1 , der keine dieser Schnittlinien trifft. Nach § 2 Satz 2 ist der Rand von m_1 auf \mathfrak{I}_1 zu s_0 kombinatorisch isotop, und nach § 2 Satz 3 lässt sich m_1 in eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 überführen, die s_0 als Rand hat und deren Durchschnitt mit $k, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ und m_2, \dots, m_{p-1} derselbe ist wie derjenige von m_1 . Wir können also im Weiteren annehmen, dass s_0 der Rand von m_1 ist. Ferner kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m_p und m_1 nur aus

doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig und k nicht treffen, da sich dies durch eine Deformation von m_p erreichen lässt, welche die Schnittpunktzahl von m_p mit k und den Durchschnitt von m_p mit $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n$ und m_2, \dots, m_{p-1} nicht ändert. Keine der Schnittlinien von m_1 und m_p kann den Rand von m_1 oder von m_p treffen, wie sich aus der Lage dieser Ränder ergibt.

Auf m_p betrachten wir zunächst die „äussersten“ Schnittlinien von m_p und \mathfrak{X}_1 , d.h. solche, die auf m_p von keiner weiteren Schnittlinie mit \mathfrak{X}_1 umfasst werden. Überschreitet man auf m_p eine solche äusserste Schnittlinie von aussen nach innen, so gelangt man aus dem Inneren von \mathfrak{B}_1 ins Äussere, da das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}_p und damit der Rand von m_p im Inneren von \mathfrak{B}_1 liegt. Das Elementarflächenstück, das auf m_p von einer solchen äussersten Schnittlinie von m_p mit \mathfrak{X}_1 berandet wird, muss noch mindestens eine weitere Schnittlinie mit \mathfrak{X}_1 enthalten, da eine auf m_p innerste Schnittlinie von m_p und \mathfrak{X}_1 auf m_p eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 berandet. Gleichzeitig folgt, dass auf einem Elementarflächenstück, das auf m_p von einer äussersten Schnittlinie von m_p und \mathfrak{X}_1 berandet wird, mindestens γ_1 Schnittpunkte mit k liegen, da γ_1 die Ordnung von \mathfrak{B}_1 in bezug auf k ist. Wir nehmen nun aus m_p alle Elementarflächenstücke heraus, die auf m_p von einer äussersten Schnittlinie von m_p und \mathfrak{X}_1 berandet werden, wodurch aus m_p ein Elementarflächenstück mit Löchern m'_p entsteht. Wir werden später die Löcher so schliessen, dass dabei jeweils höchstens γ_1 Schnittpunkte mit k entstehen. Die dabei aus m'_p entstehende Meridianfläche von \mathfrak{B}_p hat dann jedenfalls nicht mehr Schnittpunkte mit k als m_p , also ebensoviele nach Wahl von m_p .

Wir betrachten nun zunächst die Schnittlinien von m'_p mit m_1 . Sei s_1 auf m_1 eine innerste Schnittlinie von m_1 und m'_p , die auf m_1 ein Elementarflächenstück e_1 berandet, das keine weitere solche Schnittlinie und möglichst wenig Schnittpunkte mit k enthält. Auf e_1 mögen $\beta_1 \leq \gamma_1$ Schnittpunkte mit k liegen. s_1 berandet auf m_p ein Elementarflächenstück f_1 , das nicht auf m'_p zu liegen braucht sondern noch äusserste Schnittlinien von m_p und \mathfrak{X}_1 enthalten kann. Falls dies letzte eintritt, muss f_1 mindestens γ_1 Schnittpunkte mit k enthalten, und wir können m'_p dadurch abändern, dass wir noch den Durchschnitt von m'_p und f_1 aus m'_p herausnehmen und dann das von s_1 berandete Loch durch e_1 schliessen. Durch Abheben kann danach erreicht werden, dass die Schnittlinie s_1 verschwindet, dass sich der Durchschnitt von $m'_p - f_1$ mit $\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_n, m_1, \dots, m_{p-1}$ und k nicht ändert, dass keine weiteren Schnitte entstehen und dass die Schnittpunktzahl von k und $m'_p - f_1 + e_1$ un geändert bleibt. Dieses Vorgehen ist zulässig, da wir die Löcher von m'_p so schliessen wollten, dass für jedes Loch nur höchstens γ_1 Schnittpunkte mit k entstehen, und bei unserem Vorgang mindestens ein Loch verschwindet, während $\beta_1 \leq \gamma_1$ Schnittpunkte mit k hinzutreten. Berandet s_1 ein Elementarflächenstück f_1 bereits auf m'_p und liegen auf f_1 nicht

weniger als β_1 Schnittpunkte mit k , so kann wieder f_1 durch e_1 ersetzt und das Abheben wie im Vorangehenden vorgenommen werden.

Wir zeigen noch, dass auf f_1 nicht weniger als β_1 Schnittpunkte mit k liegen können, woraus folgt, dass sich die Schnittlinie s_1 von m'_p und m_1 in jedem Falle beseitigen lässt. Sei α_1 die Anzahl der Schnittpunkte von k mit f_1 . Wir betrachten eine auf f_1 innerste Schnittlinie s_2 von m'_p und m_1 , wobei s_2 mit s_1 zusammenfallen kann. s_2 berandet auf f_1 und damit auf m'_p ein Elementarflächenstück f_2 , das keine weitere Schnittlinie von m'_p mit m_1 enthält. Die Anzahl der Schnittpunkte von f_2 mit k sei α_2 . Sicher ist $\alpha_2 \leq \alpha_1$. s_2 berandet auf m_1 ein Elementarflächenstück e_2 , auf dem β_2 Schnittpunkte mit k liegen mögen. Es ist nun $\beta_2 \leq \alpha_2$. Da nämlich f_2 auf m'_p liegt und m'_p , abgesehen von seinen Rändern, im Inneren von \mathfrak{B}_1 liegt, erhält man aus m_1 eine neue Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 , wenn man e_2 durch f_2 ersetzt. Nach Wahl von m_1 kann sich dabei die Anzahl der Schnittpunkte mit k nicht verkleinern, woraus $\beta_2 \leq \alpha_2$ folgt. Sei nun s_3 eine innerste Schnittlinie von m'_p und m_1 auf e_2 , die mit s_2 zusammenfallen kann. s_3 berandet auf e_2 und damit auf m_1 ein Elementarflächenstück e_3 , das β_3 Schnittpunkte mit k habe. Dabei ist $\beta_3 \leq \beta_2$. Wir erhalten also $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \beta_2 \geq \beta_3$. Nun war aber s_1 so bestimmt, dass das von s_1 auf m_1 berandete Elementarflächenstück e_1 möglichst wenig Schnittpunkte mit k enthielt. Also ist $\beta_3 \geq \beta_1$, woraus $\alpha_1 \geq \beta_1$ folgt. Die Schnittlinie s_1 lässt sich also beseitigen, und es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien von m_1 und m'_p zum Verschwinden bringen.

Es sind nun noch die Löcher von m'_p zu schliessen. Die Ränder dieser Löcher sind Meridiane von \mathfrak{B}_1 , die den Rand s_0 von m_1 nicht treffen. Wir bezeichnen sie mit s_1, \dots, s_q , wobei die Numerierung so erfolge, dass s_{i-1} und s_i ($i = 1, 2, \dots, q$) aus \mathfrak{X}_1 einen Kreisring r_i beranden, der keinen weiteren dieser Meridiane enthält. Wir schliessen nun das von s_1 berandete Loch von m'_p durch das Elementarflächenstück, das sich aus m_1 und r_1 zusammensetzt. Die Anzahl der Schnittpunkte mit k nimmt dabei um γ_1 zu. Durch Abheben des in m'_p eingefügten Elementarflächenstückes von r_1 und m_1 kann man ein Elementarflächenstück mit $q - 1$ Löchern erhalten, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{X}_1 nur noch aus s_2, \dots, s_q besteht und dessen Durchschnitt mit m_1 leer ist. Das Abheben kann zudem so geschehen, dass sich die Schnittpunktzahl mit k nicht ändert und dass der Durchschnitt des entstandenen Elementarflächenstückes mit Löchern mit $\mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$ und m_2, \dots, m_{p-1} derselbe ist wie der von m'_p . Man bemerkt nun, dass sich so der Reihe nach alle Löcher von m'_p schliessen lassen, wodurch eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_p entsteht, die k in höchstens γ_p Punkten schneidet, die m_1 und \mathfrak{X}_1 nicht trifft und deren Durchschnitt mit m_2, \dots, m_{p-1} und $\mathfrak{X}_2, \dots, \mathfrak{X}_n$ enthalten ist im entsprechenden Durchschnitt der ursprünglichen Meridianfläche m_p von \mathfrak{B}_p . Anschliessend lassen sich für die nun vorliegende Meridianfläche von \mathfrak{B}_p entsprechend die Durchschnitte mit m_2 und \mathfrak{X}_2 beseitigen, und man kann so fortfahren

bis man schliesslich eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_p erhält, die k in γ_p Punkten schneidet und ausserdem m_1, \dots, m_{p-1} und die von \mathfrak{T}_p verschiedenen Tori $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_n$ nicht trifft. Damit ergibt sich schliesslich die Behauptung des Satzes.

Anmerkung zu Satz 1: Sind $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ verknotete Vollringe in der \mathfrak{E}^3 , von denen jeder die abgeschlossenen Komplemente der übrigen im Inneren enthält, so gibt es jedenfalls eine Knotenlinie k , die im Inneren aller dieser Vollringe liegt. Satz 1 besagt dann insbesondere, dass man für $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ gleichzeitig Meridianflächen m_1 bzw. m_2, \dots, m_n so wählen kann, dass m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die von m_i verschiedenen Meridianflächen und die Ränder der von \mathfrak{B}_i verschiedenen Vollringe nicht trifft.

Satz 2: *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{W} zwei verknotete Vollringe in der \mathfrak{E}^3 , und es enthalte \mathfrak{B} das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{W} im Inneren. a sei eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , die den Rand von \mathfrak{W} nicht trifft. Dann liegt a im Inneren von \mathfrak{W} , und es hat \mathfrak{W} in bezug auf a die Ordnung null.*

Beweis: Da \mathfrak{B} das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{W} im Inneren enthält, muss \mathfrak{W} das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} im Inneren enthalten. Nach der Anmerkung zu Satz 1 gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die den Rand von \mathfrak{W} nicht trifft. Da a diese Meridianfläche treffen muss und da a den Rand von \mathfrak{W} nicht trifft, liegt a im Inneren von \mathfrak{W} .

Da \mathfrak{B} in bezug auf seine orientierte Seele a die Ordnung 1 hat, gibt es nach Satz 1 eine Meridianfläche m_1 von \mathfrak{B} , die den Rand von \mathfrak{W} nicht trifft und a in nur einem Punkte. Hinreichend nahe an m_1 lässt sich eine zweite Meridianfläche m_2 von \mathfrak{B} so wählen, dass m_1 und der Rand von \mathfrak{W} von m_2 nicht getroffen werden und dass a mit m_2 ebenfalls nur einen Punkt gemein hat. Durch m_1 und m_2 wird \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegt, in denen a nach § 6 Hilfssatz 4 je eine unverknotete Sehne a_1 bzw. a_2 bildet. Eine der beiden Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ enthält das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{W} im Inneren, etwa \mathfrak{R}_1 (Fig. 12).

Da a_1 im Inneren von \mathfrak{W} liegt, kann man eine hinreichend kleine Umgebung von a_1 bezüglich \mathfrak{R}_1 so wählen, dass diese eine Kugel \mathfrak{R}_1^* ausmacht, die im Inneren von \mathfrak{W} liegt und deren Rand mit dem Rande von \mathfrak{R}_1 zwei disjunkte Elementarflächenstücke m_1^* , m_2^* gemein hat, die auf m_1 bzw. m_2 liegen. a_1 ist Sehne von \mathfrak{R}_1^* und zwar eine unverknotete nach § 8 Hilfssatz 2, da a_1 unverknotete Sehne von \mathfrak{R}_1 ist.

Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_1 ist nun eine Kugel \mathfrak{R}_2^* , die im Inneren von \mathfrak{W} liegt. \mathfrak{R}_1^* und \mathfrak{R}_2^* haben die beiden Elementarflächenstücke m_1^* und m_2^* gemein und bilden nach § 3 Hilfssatz 1 einen Vollring \mathfrak{B}^* , für welchen m_1^* und m_2^* Meridianflächen sind. a liegt im Inneren von \mathfrak{B}^* und \mathfrak{B}^* im Inneren von \mathfrak{W} . Ersetzt man a_2 durch eine unverknotete Sehne a_2^* von \mathfrak{R}_2^* mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt, so entsteht

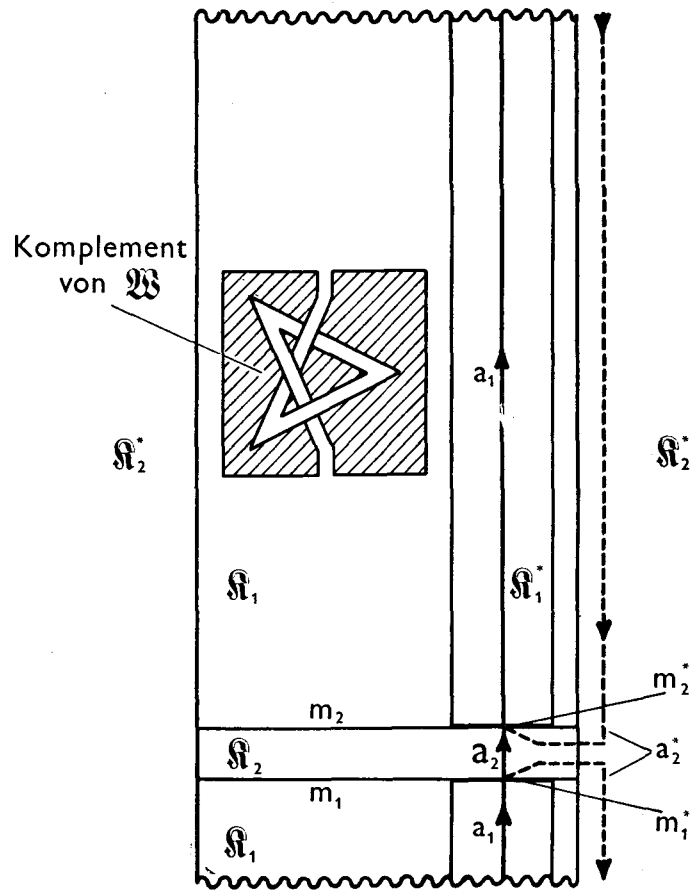


Fig. 12.

aus a eine Knotenlinie a^* , die eine orientierte Seele von \mathfrak{B}^* ist, da a_1 in \mathfrak{R}_1^* und a_2^* in \mathfrak{R}_2^* unverknotet ist. Der von a^* dargestellte Knoten wird durch den gemeinsamen Rand von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2^* dargestellt als Produkt des von a_1 in \mathfrak{R}_1 erzeugten Kreises mit dem von a_2^* in \mathfrak{R}_2^* erzeugten Kreise. a^* ist daher eine Kreislinie. Da \mathfrak{B} verknotet ist, muss a^* nach § 7 Satz 1 im Inneren einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten sein, es hat also \mathfrak{B} in bezug auf a^* die Ordnung null nach § 9 Satz 1, und es hat \mathfrak{B} auch in bezug auf \mathfrak{B}^* die Ordnung null, da a^* orientierte Seele von \mathfrak{B}^* ist. Nach § 9 Hilfssatz 3 gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , welche \mathfrak{B}^* nicht trifft. Diese trifft auch a nicht, da a im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Es hat also \mathfrak{B} in bezug auf a die Ordnung null.

Hilfssatz: Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ verknotete Vollringe in der \mathbb{E}^3 , von denen jeder die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe und die Knotenlinie k im Inneren enthalte. Der Rand von \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sei \mathfrak{L}_i . Der Vollring \mathfrak{B}_1 werde treu auf den Vollring \mathfrak{B}_1^*

in der \mathbb{S}^3 abgebildet, wobei k in die Knotenlinie k^* , die Tori $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_n$ in die Tori $\mathfrak{T}_1^*, \mathfrak{T}_2^*, \dots, \mathfrak{T}_n^*$ übergehen mögen. Dann berandet \mathfrak{T}_j^* ($j = 2, 3, \dots, n$) einen Vollring \mathfrak{B}_j^* , der k^* im Inneren enthält, und es sind \mathfrak{B}_j und \mathfrak{B}_j^* gleich verknötet. Jeder der Vollringe $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ enthält die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe im Inneren, und die Umlaufzahl von k^* auf \mathfrak{B}_i^* ($i = 1, 2, \dots, n$) ist dieselbe wie die von k auf \mathfrak{B}_i . Die Ordnung von \mathfrak{B}_1^* in bezug auf k^* ist gleich der Ordnung von \mathfrak{B}_1 in bezug auf k , die Ordnung von \mathfrak{B}_j^* ($j = 2, 3, \dots, n$) in bezug auf k^* ist nicht grösser als die Ordnung von \mathfrak{B}_j in bezug auf k . Ist insbesondere \mathfrak{B}_1^* verknötet, so ist die Ordnung von \mathfrak{B}_i^* in bezug auf k^* gleich der Ordnung von \mathfrak{B}_i in bezug auf k .

Beweis: Es sei γ_i die Ordnung von \mathfrak{B}_i in bezug auf k . Nach Satz 1 lässt sich zu jedem Vollring \mathfrak{B}_i eine Meridianfläche m_i so wählen, dass k von m_i in genau γ_i Punkten getroffen wird und dass m_i zu den von m_i verschiedenen Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_n und den von \mathfrak{T}_i verschiedenen Tori $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \dots, \mathfrak{T}_n$ punktfremd ist. Hinreichend nahe an m_1 können wir noch eine Meridianfläche m'_1 von \mathfrak{B}_1 wählen, die zu den Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_n und den Tori $\mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3, \dots, \mathfrak{T}_n$ punktfremd ist. Durch m_1 und m'_1 wird \mathfrak{B}_1 in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegt, wovon eine, etwa \mathfrak{R}_2 , bei geeigneter Wahl von m'_1 die Tori \mathfrak{T}_j ($j = 2, 3, \dots, n$) und die Meridianflächen m_j im Inneren enthält.

Es sei τ die treue Abbildung von \mathfrak{B}_1 auf \mathfrak{B}_1^* . Durch τ geht m_i in eine Meridianfläche m_i^* eines von \mathfrak{T}_i^* in der \mathbb{S}^3 berandeten Vollringes \mathfrak{B}_i^* über nach § 3 Hilfssatz 2. \mathfrak{B}_i^* enthält k^* im Inneren. Man kann nämlich einen Punkt von m_i mit einem Punkte auf k durch einen Weg w_i so verbinden, dass w_i im Inneren von \mathfrak{B}_1 und von \mathfrak{B}_i liegt. $\tau(w_i)$ liegt dann im Inneren von \mathfrak{B}_1^* und \mathfrak{B}_i^* . Also liegt auch k^* im Inneren von \mathfrak{B}_i^* , da k^* den Rand von \mathfrak{B}_i^* nicht trifft. m_i^* trifft k^* in γ_i Punkten. Daraus ergibt sich, dass die Ordnung von \mathfrak{B}_i^* in bezug auf k^* höchstens gleich γ_i ist. Die Ordnung von \mathfrak{B}_1^* in bezug auf k^* ist gleich der von \mathfrak{B}_1 in bezug auf k , wie bereits in § 11 bemerkt wurde.

Die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B}_i ist gleich dem Betrag der algebraischen Schnitzzahl von k mit m_i , ebenso ist die Umlaufzahl von k^* auf \mathfrak{B}_i^* gleich dem Betrag der algebraischen Schnitzzahl von k^* mit m_i^* . Die Beträge dieser beiden algebraischen Schnitzzahlen sind offenbar gleich, die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B}_i ist also gleich der Umlaufzahl von k^* auf \mathfrak{B}_i^* .

Die Kugel \mathfrak{R}_2 wird durch τ auf eine Kugel \mathfrak{R}_2^* auf \mathfrak{B}_1^* abgebildet, welche die Tori \mathfrak{T}_j^* ($j = 2, 3, \dots, n$) und die Meridianflächen m_j^* im Inneren enthält. Es gibt nun eine s -Abbildung φ der \mathbb{S}^3 auf sich, welche auf \mathfrak{R}_2 mit τ übereinstimmt: Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_2 ist eine Kugel $\bar{\mathfrak{R}}_2$, dasjenige von \mathfrak{R}_2^* eine Kugel $\bar{\mathfrak{R}}_2^*$. Durch τ ist eine s -Abbildung des Randes von $\bar{\mathfrak{R}}_2$ auf den Rand von $\bar{\mathfrak{R}}_2^*$ gegeben, die sich zu einer s -Abbildung χ von $\bar{\mathfrak{R}}_2$ auf $\bar{\mathfrak{R}}_2^*$ erweitern lässt nach § 1 Satz 8. Durch τ und χ wird φ definiert. φ ist orien-

tierungserhaltend, da τ die von einer festen Orientierung der \mathbb{S}^3 auf \mathbb{R}_2 induzierte Orientierung in die auf \mathbb{R}_2^* induzierte Orientierung überträgt. τ und φ bilden das Komplement von \mathfrak{B}_j ($j = 2, 3, \dots, n$) auf das Komplement von \mathfrak{B}_j^* ab. Daher wird \mathfrak{B}_j durch φ auf \mathfrak{B}_j^* abgebildet, woraus folgt, dass \mathfrak{B}_j und \mathfrak{B}_j^* gleich verknötet sind. Ausserdem ergibt sich, dass jeder der Vollringe $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ die abgeschlossenen Komplemente der übrigen im Inneren enthält.

Ist nun schliesslich \mathfrak{B}_1^* verknötet, so sind die Voraussetzungen für $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$, k^* und die treue Abbildung τ^{-1} von \mathfrak{B}_1^* auf \mathfrak{B}_1 erfüllt. Aus dem Obigen folgt, dass die Ordnung von \mathfrak{B}_i in bezug auf k nicht grösser sein kann als die Ordnung von \mathfrak{B}_i^* in bezug auf k^* , womit sich ergibt, dass \mathfrak{B}_i in bezug auf k dieselbe Ordnung hat wie \mathfrak{B}_i^* in bezug auf k^* .

Wenn wir einen verknöteten Vollring \mathfrak{B} in der \mathbb{S}^3 treu auf einen unverknöteten Vollring \mathfrak{B}^* in der \mathbb{S}^3 abbilden, so wollen wir dafür auch sagen, dass wir das *Komplement* von \mathfrak{B} durch einen unverknöteten Vollring ersetzen. Mit dieser Ausdrucksweise lässt sich der Satz von § 12 folgendermassen verallgemeinern:

Satz 3: *Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ verknötete Vollringe in der \mathbb{S}^3 , von denen jeder die abgeschlossenen Komplemente der übrigen und die Knotenlinie k im Inneren enthalte, k habe auf \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) die Umlaufzahl α_i . Die Knotenlinie k^* entstehe aus k dadurch, dass man die Komplemente der Vollringe \mathfrak{B}_i durch unverknötete Vollringe ersetzt. Bezeichnet $g(k)$ bzw. $g(k^*)$ das Geschlecht von k bzw. k^* , $g(\mathfrak{B}_i)$ das Geschlecht von \mathfrak{B}_i , so gilt*

$$g(k) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i g(\mathfrak{B}_i) + g(k^*).$$

Beweis: Bildet man \mathfrak{B}_1 treu auf einen unverknöteten Vollring \mathfrak{B}_1^* ab, so entsteht aus k eine Knotenlinie k_1^* und nach dem Satz von § 12 gilt:

$$g(k) \geq \alpha_1 g(\mathfrak{B}_1) + g(k_1^*).$$

Nach dem obigen Hilfssatz erhält man beim Übergang von \mathfrak{B}_1 zu \mathfrak{B}_1^* aus $\mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \dots, \mathfrak{B}_n$ verknötete Vollringe $\mathfrak{B}_2^*, \mathfrak{B}_3^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$, von denen jeder die abgeschlossenen Komplemente der übrigen und k_1^* im Inneren enthält. Dabei hat k_1^* auf \mathfrak{B}_j^* ($j = 2, 3, \dots, n$) die Umlaufzahl α_j . Die Behauptung ergibt sich daher durch vollständige Induktion nach n .

§ 16. Zerlegung eines Vollringes durch einen Kreisring.

Es sei k eine Knotenlinie, \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 seien zwei Vollringe, die k im Inneren enthalten. Wenn sich die Ränder von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 nicht treffen, so enthält entweder einer der beiden Vollringe den anderen im Inneren oder es enthält jeder der beiden Vollringe das abgeschlossene Komplement des anderen im Inneren. Den 1. Fall haben wir in § 9 untersucht, den

2. Fall im Vorangehenden. Wir wollen im Weiteren den Fall behandeln, dass sich die Ränder von \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 gegenseitig treffen, und diesen so weit wie möglich auf die vorher genannten Fälle zurückführen. Ehe wir daran gehen (§ 18), entwickeln wir in diesem und im folgenden Paragraphen die Hilfsmittel.

Es sei \mathfrak{B} ein Vollring mit dem Randtorus \mathfrak{T} , r ein Kreisring auf \mathfrak{B} , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. Wir wollen untersuchen, wie \mathfrak{B} durch r zerlegt wird. Hierbei sind mehrere Fälle zu unterscheiden, die durch die Homologieklassen von \mathfrak{T} charakterisiert sind, in denen s_1 und s_2 liegen. Es kann angenommen werden, dass \mathfrak{B} in der \mathfrak{E}^3 liegt, da jeder Vollring semilineares Bild eines Vollringes in der \mathfrak{E}^3 ist.

Satz 1: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring mit dem Randtorus \mathfrak{T} , r ein Kreisring auf \mathfrak{B} , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 bestehe. Ferner sei s_1 nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} . Dann wird \mathfrak{B} durch r in zwei Vollringe zerlegt. Auf einem dieser Vollringe haben s_1 und s_2 die Umlaufzahl 1, auf dem anderen dieselbe Umlaufzahl wie auf \mathfrak{B} . Dieser zweite Vollring und \mathfrak{B} sind gleich verknotet.*

Beweis: s_1 und s_2 seien als Ränder von r gleichsinnig orientiert. Da s_1 nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} ist, hat s_1 eine von null verschiedene Umlaufzahl α auf \mathfrak{B} . Die Umlaufzahl von s_2 auf \mathfrak{B} ist ebenfalls α , da s_1 und s_2 als gleichsinnig orientierte Ränder von r zueinander homolog auf \mathfrak{B} sind. s_1 und s_2 bilden auf \mathfrak{T} ein System von 2 Parallelkurven und zerlegen \mathfrak{T} in zwei Kreisringe r_1 und r_2 . Ferner besitzen s_1 und s_2 auf \mathfrak{T} die algebraische Schnittzahl α mit einem geeignet orientierten Meridian von \mathfrak{B} .

Wir zerlegen \mathfrak{T} und r simplizial. Wegen § 2 Hilfssatz 3 und Satz 4 können wir auf \mathfrak{T} einen Meridian m von \mathfrak{B} so wählen, dass s_1 und s_2 von m in genau α Punkten getroffen werden, und dies kann so geschehen, dass m keine Ecke der simplizialen Zerlegung von \mathfrak{T} und r trifft, da sich dies stets durch isotope simpliziale Deformation von m erreichen lässt. m werde so orientiert, dass m mit einer bezüglich s_1 positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} die Verschlingungszahl $+1$ besitzt. Wir spannen in m eine Meridianfläche \mathfrak{m} von \mathfrak{B} ein und zwar so, dass \mathfrak{m} keine Ecke der simplizialen Zerlegung von r trifft, was möglich ist. Fig. 13 zeigt den längs \mathfrak{m} aufgeschnittenen Vollring \mathfrak{B} als Prisma, bei dem die Dachfläche nach Drehung um $\frac{2\pi\delta}{\alpha}$ mit der Bodenfläche zu identifizieren ist.

Sei δ die Verschlingungszahl von s_1 mit einer Seele von \mathfrak{B} , die bezüglich s_1 positiv orientiert ist. Die Schnittpunkte von m mit s_1 bezeichnen wir mit $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ und zwar so, dass die Punkte P_i bei Durchlaufen von m mit wachsenden Indices aufeinanderfolgen. Durchläuft man s_1 im Sinne seiner Orientierung, so haben die Punkte P_i die Reihenfolge $P_1, P_{1+\delta}, P_{1+2\delta}, \dots, P_{1+(\alpha-1)\delta}, P_1$ (Indices modulo α), wie man erkennt, wenn man \mathfrak{T} längs s_1 zu einem Kreisring aufschneidet und berücksichtigt, dass dann m auf diesem

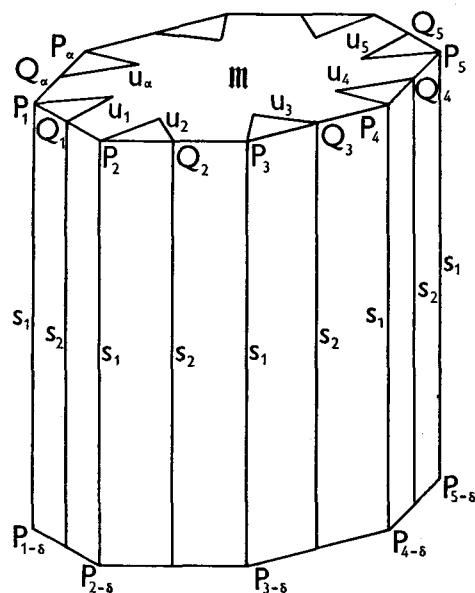


Fig. 13.

Kreisring punktfremde Querschnitte von einem Rand zum anderen bildet. s_1 wird durch $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ in α Bögen w_i zerlegt, wobei w_i von P_i nach $P_{i+\delta}$ führe. Die Schnittpunkte von m mit s_2 seien $Q_1, Q_2, \dots, Q_\alpha$, wobei Q_i auf m zwischen P_i und P_{i+1} (Indices modulo α) liege. Bei Durchlaufen von s_2 im Sinne seiner Orientierung haben die Punkte Q_i die Reihenfolge $Q_1, Q_{1+\delta}, Q_{1+2\delta}, \dots, Q_{1+(\alpha-1)\delta}, Q_1$.

Die Wahl der Meridianfläche m von \mathfrak{B} ist so erfolgt, dass der Durchschnitt von m mit r aus doppelungsfreien Schnittlinien besteht, die in einem Schnittpunkte von m mit s_1 bzw. s_2 entspringen und in einem solchen Punkte enden, und möglicherweise noch endlich vielen geschlossenen, doppelungsfreien Schnittlinien, die s_1 und s_2 nicht treffen. Dabei sind je zwei Schnittlinien disjunkt.

Wir betrachten zunächst diejenigen Schnittlinien von m und r , die in einem Randpunkte von r beginnen und enden, und werfen die Frage auf, ob eine solche von einem Punkte P_i zu einem Punkte P_j führen kann, also beide Endpunkte auf s_1 liegen können. Dies ist nicht möglich. Es wäre dann nämlich diese Schnittlinie auf r zu einem Bogen von s_1 homolog, der sich aus einem oder mehreren, etwa $\beta < \alpha$, Bögen w_i zusammensetzt. Man erhielte daher einen auf \mathfrak{B} zu s_1 homologen (nicht notwendigerweise mehr doppelungsfreien) Weg, wenn man die betreffenden Bögen w_i durch den betreffenden Bogen von m ersetzt. Dieser Weg wäre dann aber auf \mathfrak{B} dem $(\alpha - \beta)$ -fachen einer bezüglich s_1 positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} homolog, was offenbar unmöglich ist. Die betrachteten Schnittlinien müssen also einen Punkt P_i mit einem Punkt Q_j verbinden. Wir orientieren sie so,

dass sie von Q_j nach P_i führen, und bezeichnen sie dann mit u_j . Durch die Schnittlinien u_j wird r in α Elementarflächenstücke zerlegt.

Wir wenden uns nun den geschlossenen Schnittlinien von m und r zu. Jede von ihnen berandet auf r ein Elementarflächenstück, da sie auf einem der Elementarflächenstücke liegen muss, in welche r durch die Schnittlinien u_j zerlegt wird, und es gibt unter ihnen eine solche, etwa s , die auf r ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s berandet auf m ein Elementarflächenstück f . e und f bilden zusammen eine 2-Sphäre, die den Rand von \mathfrak{B} nicht trifft und daher eine Kugel \mathfrak{K} berandet, die im Inneren von \mathfrak{B} liegt und weder s_1 noch s_2 noch eine der Schnittlinien u_j enthält. Es kann nun m dadurch deformiert werden, dass man f über \mathfrak{K} deformiert und so von e abhebt, dass s_1 , s_2 und die Schnittlinien u_j festbleiben. Auf diese Weise lassen sich alle geschlossenen Schnittlinien von m und r der Reihe nach beseitigen.¹

Wir betrachten nun wieder die Schnittlinien u_j . Jede zerlegt m in zwei Elementarflächenstücke, und eine von ihnen, etwa u_h , schneidet von m ein Elementarflächenstück f ab, das keine weitere Schnittlinie enthält. Da von jedem Punkte Q_j eine Schnittlinie u_j ausgeht, muss Q_h der einzige Punkt sein, den f mit s_2 gemein hat, und daher u_h von Q_h entweder nach P_h oder P_{h+1} (Indices modulo α) führen.

Nach § 3 Hilfssatz 2 ist f Meridianfläche eines Vollringes \mathfrak{B}_1 , dessen Rand ein Torus \mathfrak{T}_1 ist, der von r und einem der beiden von s_1 und s_2 auf \mathfrak{T} berandeten Kreisringe r_1 , r_2 , etwa von r_1 , gebildet wird. \mathfrak{B}_1 liegt auf \mathfrak{B} , da dies für den Rand \mathfrak{T}_1 und die Meridianfläche f der Fall ist. s_1 und s_2 haben auf \mathfrak{B}_1 die Umlaufzahl 1, da sie auf \mathfrak{T}_1 den Rand der Meridianfläche f nur in einem Punkte treffen und dort durchsetzen.

Da u_h von Q_h nach P_h oder P_{h+1} führt, muss jede der Schnittlinien u_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) von Q_i nach P_i bzw. P_{i+1} (Indices modulo α) führen, wie man aus der Lage der Punkte P_i und Q_i auf r und der Tatsache erkennt, dass sich die Schnittlinien u_i gegenseitig nicht treffen. Aus der Lage der Punkte P_i und Q_i auf m folgt, dass jedes u_i von m ein Elementarflächenstück abschneidet, das keine weitere Schnittlinie enthält und Meridianfläche von \mathfrak{B}_1 ist. Nach Abschneiden dieser Elementarflächenstücke von m verbleibt ein Elementarflächenstück e , das Meridianfläche eines Vollringes \mathfrak{B}_2 ist, der von dem aus r und r_2 bestehenden Torus \mathfrak{T}_2 berandet wird. \mathfrak{B}_2 macht das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}_1 bezüglich \mathfrak{B} aus, und es haben s_1 und s_2 auf \mathfrak{B}_2 die Umlaufzahl α , da sie den Meridian von \mathfrak{B}_2 , der vom Rande von e gebildet wird, in α Punkten treffen und dort gleichsinnig durchsetzen.

Dass \mathfrak{B} und \mathfrak{B}_2 gleich verknotet sind, erkennt man folgendermassen:

Nach dem Satz von § 8 lässt sich \mathfrak{T} dadurch deformieren, dass man r_1 über \mathfrak{B}_1 in r bei festem r_2 deformiert. Es gibt also eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{T} in \mathfrak{T}_2 überführt und auf r_2 die Identität ist. Der von \mathfrak{T} berandete Vollring \mathfrak{B} geht dabei in einen von

\mathfrak{L}_2 berandeten Vollring über. Dieser Vollring muss \mathfrak{B}_2 sein, da sein Inneres an dieselbe Seite von r_2 anstossen muss wie das Innere von \mathfrak{B} , und aus § 10 Satz 2 folgt, dass \mathfrak{B} und \mathfrak{B}_2 gleich verknotet sind.

Anmerkung zu Satz 1: Haben s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl 1, so wird \mathfrak{B} durch r in zwei Vollringe \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 zerlegt, auf denen s_1 und s_2 die Umlaufzahl 1 haben, und es sind \mathfrak{B} , \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 gleich verknotet.

Nach § 8 lässt sich nämlich in diesem Falle \mathfrak{L} auch dadurch deformieren, dass man (in obiger Bezeichnungsweise) r_2 bei festem r_1 über \mathfrak{B}_2 in r deformiert, wobei \mathfrak{B} in \mathfrak{B}_1 übergeht.

Hilfssatz: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring mit dem Randtorus \mathfrak{L} , r ein Kreisring auf \mathfrak{B} , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{L} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 bestehe. s_1 und s_2 seien Meridiane von \mathfrak{B} . Dann existieren Meridianflächen m_1, m_2 von \mathfrak{B} , die sich nicht treffen und deren Durchschnitt mit r nur aus s_1 bzw. s_2 besteht.*

Beweis: Wir wählen zunächst einen Meridian m von \mathfrak{B} , der s_1 und s_2 nicht trifft, und spannen in ihn eine Meridianfläche e von \mathfrak{B} ein. m und s_1 beranden auf \mathfrak{L} einen Kreisring \mathfrak{s} , der s_2 nicht enthält. e und \mathfrak{s} bilden zusammen ein Elementarflächenstück f mit dem Rande s_1 . f lässt sich dadurch deformieren, dass man \mathfrak{s} bei festgehaltenem s_1 von \mathfrak{L} ins Innere von \mathfrak{B} abhebt, und das kann so geschehen, dass der Durchschnitt von r mit einer Umgebung von s_1 bezüglich f nur aus s_1 besteht. Damit ist aus f eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} mit dem Rande s_1 entstanden. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m mit r nur aus s_1 und doppelungsfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig und s_1 nicht treffen.

Falls überhaupt Schnittlinien von r und m vorhanden sind, so sind diese auf r nullhomolog oder (bei geeigneter Orientierung) homolog zu s_1 . Diejenigen, die auf r nullhomolog sind, lassen sich der Reihe nach auf eine bereits mehrfach beschriebene Weise beseitigen, wobei man mit einer innersten Schnittlinie auf r beginnt. Es verbleiben dann nur noch Schnittlinien, die auf r homolog zu s_1 sind. Eine von ihnen, sie heisse t , berandet zusammen mit s_1 auf r einen Kreisring t , der keine weitere Schnittlinie enthält. t berandet auf m ein Elementarflächenstück e . t und e bilden zusammen eine Meridianfläche m' von \mathfrak{B} mit dem Rande s_1 . Sie wird dadurch deformiert, dass man t bei festgehaltenem s_1 von r abhebt und zwar so, dass der Durchschnitt von m' mit r ausser s_1 nur noch aus den Schnittlinien von e mit r besteht. Die entstandene Meridianfläche von \mathfrak{B} bezeichnen wir wieder mit m . Das Verfahren lässt sich so lange fortsetzen, bis alle Schnittlinien verschwunden sind und man eine Meridianfläche m_1 von \mathfrak{B} erhält, die mit r nur noch den Rand s_1 gemein hat.

Nun bilden m_1 und r zusammen ein Elementarflächenstück g . Durch Abheben von

r und m_1 erhält man aus g eine Meridianfläche m_2 von \mathfrak{B} , die m_1 nicht trifft und mit r nur den Rand s_2 gemein hat.

Satz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring mit dem Randtorus \mathfrak{L} , r ein Kreisring auf \mathfrak{B} , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{L} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. s_1 und s_2 seien Meridiane von \mathfrak{B} . Dann liegt auf \mathfrak{B} ein Vollring \mathfrak{B}^* , der von r und einem von s_1 und s_2 auf \mathfrak{L} berandeten Kreisring berandet wird und der mit \mathfrak{B} Meridianflächen gemein hat. Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} ist entweder ein unverknoteter Vollring mit s_1 als Breitenkreis oder kein Vollring, je nachdem ob \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet sind oder nicht. Im zweiten Falle ist \mathfrak{B}^* stärker verknotet als \mathfrak{B} .*

Beweis: Nach dem Hilfssatz existieren zwei sich nicht treffende Meridianflächen m_1 und m_2 von \mathfrak{B} , deren Durchschnitt mit r aus ihren Rändern s_1 bzw. s_2 besteht. Durch m_1 und m_2 wird \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 zerlegt, wovon eine, etwa \mathfrak{K}_2 , r umfasst. Der Rand von \mathfrak{K}_1 besteht aus der 2-Sphäre, die gebildet wird von m_1 , m_2 und einem Kreisring \mathfrak{s}_1 , der von s_1 und s_2 auf \mathfrak{L} berandet wird. Der Rand von \mathfrak{K}_2 besteht aus m_1 , m_2 und einem Kreisring \mathfrak{s}_2 auf \mathfrak{L} . Ferner bilden m_1 , m_2 und r eine 2-Sphäre, die eine auf \mathfrak{K}_2 liegende Kugel \mathfrak{K}_2^* berandet.

\mathfrak{s}_1 und r bilden zusammen einen Torus \mathfrak{T}^* . Dieser berandet einen auf \mathfrak{B} liegenden Vollring \mathfrak{B}^* , der sich aus den beiden Kugeln \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2^* zusammensetzt und m_1 , m_2 als Meridianflächen besitzt. Sei a eine orientierte Seele von \mathfrak{B}^* , die in \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2^* je eine unverknotete Sehne u_1 bzw. u_2 bildet. u_2 ist gleichzeitig Sehne von \mathfrak{K}_2 . Ist u_2 auch unverknotet in \mathfrak{K}_2 , so ist a auch orientierte Seele von \mathfrak{B} , und es sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet. Ist u_2 in \mathfrak{K}_2 verknotet, so stellt a nach § 6 Hilfssatz 5 einen Knoten dar, der das Produkt von dem durch u_2 in \mathfrak{K}_2 erzeugten Knoten mit demjenigen Knoten ist, der von einer bezüglich a positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} dargestellt wird. In diesem Falle ist also \mathfrak{B}^* stärker verknotet als \mathfrak{B} . Nach § 8 Hilfssatz 1 ist nun die unverknotete Sehne u_2 von \mathfrak{K}_2^* genau dann unverknotet in \mathfrak{K}_2 , wenn das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}_2^* bezüglich \mathfrak{K}_2 ein Vollring ist, und in diesem Falle ist dieser Vollring unverknotet und besitzt s_1 und s_2 als Breitenkreise. Da das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}_2^* bezüglich \mathfrak{K}_2 zugleich das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}^* bezüglich \mathfrak{B} ist, ergibt sich die Behauptung.

Satz 3: *Es sei \mathfrak{B} ein Vollring mit dem Randtorus \mathfrak{L} , r ein Kreisring, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{L} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. s_1 und s_2 seien auf \mathfrak{L} nullhomolog und mögen auf \mathfrak{L} einen Kreisring \mathfrak{s} beranden. Ersetzt man \mathfrak{s} durch r , so entsteht aus \mathfrak{L} ein Torus \mathfrak{T}^* . \mathfrak{T}^* berandet einen auf \mathfrak{B} liegenden Vollring \mathfrak{B}^* , der mit \mathfrak{B} Meridianflächen gemein hat, und es sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet.*

Beweis: Einer der beiden Ränder s_1 , s_2 von r , etwa s_2 , berandet auf \mathfrak{L} ein Elementarflächenstück e , das den anderen Rand, also s_1 , nicht enthält. $e + r$ und $e + \mathfrak{s}$ sind dann

Elementarflächenstücke, und man kann sich \mathfrak{I}^* aus \mathfrak{I} dadurch entstanden denken, dass man das Elementarflächenstück $e + \mathfrak{s}$ durch das Elementarflächenstück $e + \mathfrak{r}$ ersetzt. Auf \mathfrak{I} können wir wegen § 2 Hilfssatz 3 einen Meridian m und einen Breitenkreis b von \mathfrak{B} so wählen, dass s_1 und damit s_2 nicht getroffen werden. m und b bilden sowohl auf \mathfrak{I} wie auf \mathfrak{I}^* eine 1-dimensionale Homologiebasis.

Ist nun \mathfrak{B} unverknotet, so ist auch das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} ein unverknoteter Vollring nach § 7 Satz 2, und es lässt sich in b ein Elementarflächenstück \mathfrak{f} einspannen, das Meridianfläche dieses zu \mathfrak{B} komplementären Vollringes ist. \mathfrak{f} ist dann auch Meridianfläche eines von \mathfrak{I}^* berandeten Vollringes \mathfrak{U} . Nun ist m eine Kreislinie auf \mathfrak{I}^* , die auf \mathfrak{I}^* nicht nullhomolog und nicht Meridian von \mathfrak{U} ist. Daraus folgt nach § 7 Hilfssatz 2, dass \mathfrak{U} unverknotet ist und dass daher \mathfrak{I}^* einen zu \mathfrak{U} komplementären Vollring \mathfrak{B}^* berandet, der auf \mathfrak{B} liegt und unverknotet ist.

Sei nun \mathfrak{B} und damit b verknotet. Durch \mathfrak{I}^* wird die \mathbb{S}^3 in zwei Bereiche \mathfrak{A} und \mathfrak{B}^* zerlegt, wovon \mathfrak{A} das Komplement von \mathfrak{B} umfasse und \mathfrak{B}^* auf \mathfrak{B} liege. b ist nullhomolog auf \mathfrak{A} , da b bereits nullhomolog auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{I}$ ist. Da b nicht nullhomolog auf \mathfrak{I}^* und keine Kreislinie ist, kann \mathfrak{A} kein Vollring sein, denn nach § 3 sind die Meridiane die einzigen einfachen Wege auf dem Rande eines Vollringes, die nullhomolog auf dem Vollring nicht aber auf dem Randtorus sind, und Meridiane sind Kreislinien. Es muss daher \mathfrak{B}^* ein Vollring sein. Für \mathfrak{B}^* ist b Breitenkreis. Da b auch Breitenkreis von \mathfrak{B} ist, folgt aus § 6 Hilfssatz 3, dass \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet sind.

In beiden Fällen ist eine Meridianfläche e von \mathfrak{B}^* , deren Rand die auf \mathfrak{I}^* nullhomologen Wege s_1, s_2 nicht trifft, zugleich Meridianfläche von \mathfrak{B} .

Anmerkung: Zu einer gemeinsamen Meridianfläche e von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* kann man hinreichend nahe an e eine weitere gemeinsame Meridianfläche \mathfrak{f} finden, die e nicht trifft. Daraus folgt, dass \mathfrak{r} auf einer von \mathfrak{B} umfassten Kugel liegt.

In den durch Satz 1, 2, 3 behandelten Fällen ergab sich, dass man mittels \mathfrak{r} immer einen auf \mathfrak{B} liegenden Vollring erhält, der entweder die gleiche Verknotung wie \mathfrak{B} aufweist oder stärker verknotet ist. Für die Lage von \mathfrak{r} sind noch zwei weitere Fälle möglich:

- 1) Beide Ränder sind nullhomolog auf \mathfrak{I} , und es werden durch sie auf \mathfrak{I} zwei disjunkte Elementarflächenstücke berandet.
- 2) Einer der beiden Ränder ist nullhomolog auf \mathfrak{I} , während der andere Meridian von \mathfrak{B} ist.

Im ersten Falle wird \mathfrak{B} in eine Kugel und eine berandete Mannigfaltigkeit zerlegt, deren Rand eine Fläche vom Geschlecht 2 ist. Im zweiten Falle tritt keine Zerlegung von \mathfrak{B} ein.

§ 17. Kreisringe, die das Komplement eines Vollringes in der \mathbb{S}^3 zerlegen.

Zu einem Vollring \mathfrak{B} in der \mathbb{S}^3 mit dem Randtorus \mathfrak{T} betrachten wir jetzt einen Kreisring r , der auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$ liegt und dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. Wir stellen zunächst eine Hilfsbetrachtung über Faserungen von Vollringen voran.

Wir wollen annehmen, dass der Rand \mathfrak{T} eines Vollringes \mathfrak{B} durch zwei „parallele“ Knotenlinien k_1, k_2 auf \mathfrak{T} mit der Umlaufzahl $\alpha \geq 1$ auf \mathfrak{B} in zwei Kreisringe r_1, r_2 zerlegt wird. (Falls nur eine Knotenlinie k_1 vorgegeben ist, so kann k_2 noch geeignet dazu gewählt werden). Bildet man r_1 semilinear auf einen Kreisring r der euklidischen Ebene ab, der von zwei konzentrisch ineinander gelegenen gleichseitigen Dreiecken berandet wird, so ergibt sich durch ähnliches Zusammenziehen des äusseren Randes von r eine Faserung von r , die sich auf r_1 überträgt. Verfährt man entsprechend für r_2 , so erhält man eine Faserung von \mathfrak{T} , in welcher k_1 und k_2 Fasern sind und je zwei Fasern „parallele“ Knotenlinien auf \mathfrak{T} darstellen. Aus der Art und Weise, in welcher die Faserung von \mathfrak{T} hergestellt wurde, erkennt man, dass sich auf \mathfrak{T} ein Meridian von \mathfrak{B} so angeben lässt, dass dieser jede Faser in genau α Punkten trifft. Nach der Anmerkung zu § 3 Hilfssatz 2 kann bei einer Darstellung von \mathfrak{B} durch ein Prisma \mathfrak{P} bezüglich einer Abbildung σ mit den üblichen angegebenen Eigenschaften angenommen werden, dass das Bild des Randes der Bodenfläche e_1 von \mathfrak{P} ein solcher Meridian ist, der jede Faser von \mathfrak{T} in genau α Punkten trifft (und folglich dort durchsetzt). Durch die Faserung von \mathfrak{T} wird dann eine Zerlegung des Mantels von \mathfrak{P} in Streckenzüge bewirkt. Durch ähnliches Zusammenziehen des Mantels auf die Achse des Prismas unter Mitnahme dieser Zerlegung erhält man eine entsprechende Zerlegung von \mathfrak{P} . Durch die Abbildung σ setzen sich, abgesehen von der Achse des Prismas, je α solcher Streckenzüge zu einer Knotenlinie auf \mathfrak{B} zusammen, welche zu k_1 äquivalent ist. Zusammen mit dem Bild der Achse erhält man eine Faserung von \mathfrak{B} durch Knotenlinien. Die Seele von \mathfrak{B} , welche das Bild der Achse von \mathfrak{P} ausmacht, ist im Falle $\alpha = 1$ eine reguläre Faser, im Falle $\alpha > 1$ eine Ausnahmefaser der Vielfachheit α .

Satz 1: *Es sei \mathfrak{B} ein verknoteter Vollring in der \mathbb{S}^3 mit dem Rande \mathfrak{T} . r sei ein Kreisring auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{T}$, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. s_1 und s_2 seien nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} . Dann gibt es einen Vollring \mathfrak{B}^* , der \mathfrak{B} umfasst und dessen Rand aus r und einem auf \mathfrak{T} liegenden Kreisring besteht. s_1 und s_2 haben auf \mathfrak{B}^* eine von null verschiedene Umlaufzahl.*

Beweis: Da \mathfrak{B} verknotet ist und s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} nicht nullhomolog sind, sind s_1 und s_2 nach § 7 Hilfssatz 2 verknotet. Daraus folgt: Liegen s_1 und s_2 auf dem Rande eines Vollringes \mathfrak{U} , so sind s_1 und s_2 auf \mathfrak{U} nicht nullhomolog.

Durch s_1 und s_2 wird \mathfrak{X} in zwei Kreisringe r_1 und r_2 zerlegt. r bildet zusammen mit r_1 einen Torus \mathfrak{X}_1 , zusammen mit r_2 einen Torus \mathfrak{X}_2 . Jeder dieser beiden Tori berandet mindestens einen Vollring \mathfrak{U}_1 bzw. \mathfrak{U}_2 . Falls einer dieser beiden Vollringe \mathfrak{B} umfasst, ist nichts mehr zu zeigen.

Falls \mathfrak{B} von keinem der beiden Vollringe umfasst wird, so bilden \mathfrak{B} , \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_2 eine Zerlegung der 3-Sphäre. Wie oben beschrieben können wir die Kreisringe r , r_1 , r_2 fasern und diese Faserung auf \mathfrak{B} , \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_2 fortsetzen. Wir erhalten damit eine Faserung der 3-Sphäre. Nach Seifert [10] besitzt eine solche Faserung höchstens zwei Ausnahmefasern, d.h. s_1 und s_2 haben auf mindestens einem der drei Vollringe die Umlaufzahl 1.

Es sei dies zunächst für \mathfrak{B} der Fall. Nach § 8 lässt sich dann \mathfrak{X}_1 dadurch deformieren, dass man r_1 über \mathfrak{B} in r_2 deformiert und r festhält. Es gibt also eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, die \mathfrak{X}_1 in \mathfrak{X}_2 überführt und auf r die Identität ist. Dabei geht \mathfrak{U}_1 in einen Vollring \mathfrak{B}^* über, der durch r_1 in \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{B} zerlegt wird. \mathfrak{B}^* muss nach § 7 Satz 2 unverknotet sein, da \mathfrak{B}^* das abgeschlossene Komplement \mathfrak{U}_2 besitzt. s_1 und damit jede bezüglich s_1 positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} stellt einen Torusknoten¹ dar. Man bemerkt nun leicht, dass im hier betrachteten Falle \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 unverknotet sind und dass ihre abgeschlossenen Komplemente unverknotete Vollringe sind, die \mathfrak{B} umfassen.

Dass s_1 und s_2 auf einem der beiden Vollringe \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_2 die Umlaufzahl 1 haben, kann nicht eintreten, da \mathfrak{B} verknotet ist. Hätten s_1 und s_2 beispielsweise auf \mathfrak{U}_1 die Umlaufzahl 1, so liesse sich \mathfrak{X} dadurch deformieren, dass man r_1 bei festem r_2 über \mathfrak{U}_1 in r deformiert. Man erhielte damit einen Vollring, der durch r_1 in \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{B} zerlegt wird, dieselbe Verknotung wie \mathfrak{B} aufweist und dessen abgeschlossenes Komplement der Vollring \mathfrak{U}_2 wäre. Dies ist aber wegen § 7 Satz 2 ein Widerspruch zur Verknotung von \mathfrak{B} .

Betrachten wir noch den Fall, dass \mathfrak{B} sowohl von \mathfrak{U}_1 wie von \mathfrak{U}_2 umfasst wird. Da s_1 und s_2 auf \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 nicht nullhomolog sind, wird \mathfrak{U}_1 wegen § 16 Satz 1 durch r_2 in \mathfrak{B} und einen Vollring \mathfrak{B}_1 zerlegt. \mathfrak{U}_2 wird durch r_1 in \mathfrak{B} und einen Vollring \mathfrak{B}_2 zerlegt. Wir erhalten damit den gerade betrachteten Fall, dass das Komplement von \mathfrak{B} durch r in zwei Vollringe zerlegt wird. Wie sich aus dem Vorangehenden ergibt, müssen dann s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl 1 haben und einen Torusknoten darstellen. Wir erhalten also:

Zusatz zu Satz 1: \mathfrak{B}^* ist eindeutig bestimmt, falls nicht s_1 und s_2 auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl 1 haben und einen Torusknoten darstellen.

Satz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein unverknoteter Vollring in der \mathbb{S}^3 mit dem Rande \mathfrak{X} . r sei ein Kreisring auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{X}$, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{X} nur aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. s_1 und s_2 seien nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} . Dann gibt es mindestens einen Vollring \mathfrak{B}^* , der \mathfrak{B}*

¹ Ein Torusknoten ist ein vom Kreis verschiedener Knoten, der einen Repräsentanten auf dem Rande eines unverknoteten Vollringes besitzt.

umfasst und dessen Rand aus r und einem auf \mathcal{L} liegenden Kreisring besteht. Haben s_1 und s_2 auf \mathcal{B}^* die Umlaufzahl null, so sind s_1 und s_2 Breitenkreise von \mathcal{B} .

Beweis: Da \mathcal{B} unverknotet ist, ist das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B} ein Vollring \mathcal{B} . Sind s_1 und s_2 auf \mathcal{B} nicht nullhomolog, so wird \mathcal{B} nach § 16 Satz 1 durch r in zwei Vollringe \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 zerlegt, wovon mindestens einer, etwa \mathcal{B}_1 , unverknotet ist. Das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B}_1 ist ein (unverknoteter) Vollring \mathcal{B}^* , der \mathcal{B} umfasst. Da s_1 und s_2 auf keinem der Vollringe $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}$ nullhomolog sind, kann man auf die oben beschriebene Weise eine Faserung von $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}$ und damit der \mathbb{S}^3 herstellen. Dabei wird \mathcal{B}^* gefasert, woraus folgt, dass s_1 und s_2 auf \mathcal{B}^* nicht nullhomolog sind.

Sind s_1 und s_2 nullhomolog auf \mathcal{B} , so sind sie Meridiane von \mathcal{B} und damit Breitenkreise von \mathcal{B} , da s_1 und s_2 nicht nullhomolog auf \mathcal{L} sind. Nach § 16 Satz 2 liegt auf \mathcal{B} ein Vollring \mathcal{B}^* , der mit \mathcal{B} Meridianflächen gemein hat und von r und einem Kreisring r_1 auf \mathcal{L} berandet wird. Ist das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B}^* in bezug auf \mathcal{B} ein Vollring \mathcal{U} , so sind \mathcal{B}^* und \mathcal{U} unverknotet. Das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B}^* ist dann ein Vollring \mathcal{B}^* , der \mathcal{B} umfasst.

Ist das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B}^* in bezug auf \mathcal{B} kein Vollring, so ist es Komplement eines verknoteten Vollringes \mathcal{B}^* , der \mathcal{B} umfasst und von r und einem auf \mathcal{L} liegenden Kreisring berandet wird. s_1 und s_2 sind nullhomolog auf \mathcal{B}^* wegen § 7 Hilfssatz 2, da s_1 und s_2 als Meridiane von \mathcal{B} Kreislinien sind.

Satz 3: Es sei \mathcal{B} ein Vollring in der \mathbb{S}^3 mit dem Rande \mathcal{L} . r sei ein Kreisring auf $\mathbb{S}^3 - \mathcal{B} + \mathcal{L}$, dessen Durchschnitt mit \mathcal{L} aus seinen Rändern s_1 und s_2 besteht. s_1 und s_2 seien Meridiane von \mathcal{B} . Durch s_1 und s_2 wird \mathcal{L} in zwei Kreisringe r_1 und r_2 zerlegt. Es gibt dann zwei Vollringe $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, deren Ränder von r und r_1 bzw. von r und r_2 gebildet werden, die \mathcal{B} umfassen und auf denen s_1 und s_2 Meridiane sind. Ist \mathcal{U}_1 unverknotet, so sind \mathcal{B} und \mathcal{U}_2 gleich verknotet.

Beweis: Seien m_1 und m_2 zwei sich nicht treffende Meridianflächen von \mathcal{B} , die s_1 bzw. s_2 als Rand haben. Sie sind zugleich Meridianflächen der bezeichneten Vollringe nach § 3 Hilfssatz 2.

Ist \mathcal{U}_1 unverknotet, so ist das abgeschlossene Komplement von \mathcal{U}_1 ein unverknoteter Vollring, der zugleich das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B} bezüglich \mathcal{U}_2 ist. Nach § 16 Satz 2 sind dann \mathcal{U}_2 und \mathcal{B} gleich verknotet.

Satz 4: Es sei \mathcal{B} ein Vollring in der \mathbb{S}^3 mit dem Rande \mathcal{L} . r sei ein Kreisring auf $\mathbb{S}^3 - \mathcal{B} + \mathcal{L}$, dessen Durchschnitt mit \mathcal{L} aus seinen Rändern s_1 und s_2 bestehe. s_1 und s_2 mögen nullhomolog auf \mathcal{L} sein und auf \mathcal{L} einen Kreisring \mathfrak{s} beranden. Ersetzt man \mathfrak{s} durch r , so entsteht aus \mathcal{L} ein Torus \mathcal{L}^* . \mathcal{L}^* berandet einen Vollring \mathcal{B}^* , der \mathcal{B} umfasst. \mathcal{B} und \mathcal{B}^* sind gleich verknotet und besitzen gemeinsame Meridianflächen.

Beweis: Man kann eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} finden, deren Rand s_1 und s_2 nicht trifft. m ist zugleich Meridianfläche eines von \mathfrak{I}^* berandeten Vollringes, der \mathfrak{B} umfasst. Das Weitere folgt aus § 16 Satz 3.

Für die Lage von r sind noch zwei weitere Fälle möglich, nämlich erstens, dass beide Ränder nullhomolog auf \mathfrak{I} sind und auf \mathfrak{I} disjunkte Elementarflächenstücke beranden, und zweitens, dass der eine Rand von r nullhomolog auf \mathfrak{I} und der andere Breitenkreis von \mathfrak{B} ist. Beide Fälle führen nicht zu einem Vollring, der \mathfrak{B} umfasst.

§ 18. Knotenlinien, die gleichzeitig in mehreren Vollringen liegen.

Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* zwei Vollringe in der \mathfrak{S}^3 , welche dieselbe Knotenlinie k im Inneren enthalten. Es ist unsere Absicht, durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die k festlässt, \mathfrak{B}^* so abzubilden, dass sich die Lage von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* zueinander überblicken lässt. Es kann dabei der Fall ausgeschlossen werden, dass einer der beiden Vollringe in bezug auf k die Ordnung null hat, da sich in diesem Falle erreichen lässt, dass dieser Vollring den anderen im Inneren enthält. Um zu einem übersichtlichen Resultat zu gelangen, machen wir im Folgenden die Voraussetzung, dass \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* verknotet sind.

Satz 1: *Es seien \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* zwei verknotete Vollringe in der \mathfrak{S}^3 mit den Rändern \mathfrak{I} bzw. \mathfrak{I}^* . \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* mögen die Knotenlinie k im Inneren enthalten und in bezug auf k positive Ordnung besitzen. Durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die k punktweise festlässt, kann erreicht werden, dass \mathfrak{B}^* eine der folgenden Lagen erhält:*

- 1) \mathfrak{B}^* liegt im Inneren von \mathfrak{B} ,
- 2) \mathfrak{B}^* enthält \mathfrak{B} im Inneren,
- 3) \mathfrak{B}^* enthält das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} im Inneren,
- 4) \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* schneiden sich in Schnittlinien, die zugleich Meridiane von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind, wodurch \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* in Kreisringe zerlegt werden. Dabei berandet jeder Torus, der aus einem solchen Kreisring auf \mathfrak{I} und einem solchen Kreisring auf \mathfrak{I}^* zusammengesetzt werden kann und für den einer dieser beiden Kreisringe ausser seinen Rändern keine Schnittlinie von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* enthält, einen verknoteten Vollring.

Im letzten Falle gibt es einen Vollring \mathfrak{B} , der k im Inneren enthält und im Inneren von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* so enthalten ist, dass \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1 haben. Eine orientierte Seele l von \mathfrak{B} stellt dann einen Produktknoten λ dar, die bezüglich l positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* stellen Knoten dar, die von λ verschiedene Faktoren von λ , nicht aber Primfaktoren sind.

Beweis: Wir merken zunächst an, dass einer der Fälle 1), 2), 3) eintritt, wenn sich \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* nicht treffen.

Wie in § 1 erörtert können wir annehmen, dass der Durchschnitt von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* nur aus endlich vielen doppelungsfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten. Es wird sich zunächst darum handeln, diese Schnittlinien der Reihe nach soweit als möglich zu beseitigen.

1. Schritt: Beseitigung der Schnittlinien, die nullhomolog auf \mathfrak{I} sind.

Jede der Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* , die nullhomolog auf \mathfrak{I} ist, berandet auf \mathfrak{I} ein Elementarflächenstück, und es gibt unter ihnen eine „innerste“ s , die auf \mathfrak{I} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s ist auch auf \mathfrak{I}^* nullhomolog. Wegen § 3 Hilfssatz 2 wäre nämlich andernfalls e Meridianfläche eines von \mathfrak{I}^* berandeten Vollringes, also von \mathfrak{B}^* nach § 7 Satz 2, da \mathfrak{B}^* verknotet ist. Da aber k von e nicht getroffen wird, besäße dann \mathfrak{B}^* in bezug auf k die Ordnung null entgegen der Voraussetzung. s berandet also auf \mathfrak{I}^* ein Elementarflächenstück e^* .

e und e^* bilden zusammen eine 2-Sphäre, die von k nicht getroffen wird und die daher eine Kugel \mathfrak{K} berandet, welche k nicht enthält. \mathfrak{K} enthält $\mathfrak{I}^* - e^*$ nicht, da andernfalls das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K} eine auf \mathfrak{B}^* liegende Kugel wäre, die k im Inneren enthält, und es hätte dann \mathfrak{B}^* in bezug auf k die Ordnung null. Wie in § 1 erörtert kann durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, die auf \mathfrak{I}^* nicht aber auf \mathfrak{I} wirkt, erreicht werden, dass e^* über \mathfrak{K} deformiert und von e so abgehoben wird, dass die Schnittlinie s verschwindet und keine neuen Schnittlinien von $\mathfrak{I}^* - e^*$ und \mathfrak{I} entstehen. Da man eine solche s -Abbildung so wählen kann, dass sie ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von \mathfrak{K} die Identität ist, kann sie insbesondere so gewählt werden, dass sie k punktweise festlässt.

Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Schnittlinien, die auf \mathfrak{I} nullhomolog sind, zum Verschwinden bringen. Es sind dann auch alle Schnittlinien verschwunden, die nullhomolog auf \mathfrak{I}^* sind, wie man erkennt, wenn man im Vorangehenden die Rollen von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* vertauscht.

2. Schritt: Verringerung der Anzahl der verbleibenden Schnittlinien.

Falls nach dem 1. Schritt alle Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* verschwunden sind, ist einer der Fälle 1), 2), 3) des Satzes erreicht. Anderenfalls sind die verbleibenden Schnittlinien bei geeigneter Orientierung paarweise zu einander homolog auf \mathfrak{I} und auch auf \mathfrak{I}^* . Sind diese Schnittlinien Meridiane von \mathfrak{B} , so sind sie Kreislinien und, da \mathfrak{B}^* verknotet ist, nach § 7 Hilfssatz 2 auch Meridiane von \mathfrak{B}^* und umgekehrt. Wir haben also die Fälle zu unterscheiden:

- a) Die Schnittlinien sind nicht Meridiane von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* .
- b) Die Schnittlinien sind Meridiane sowohl von \mathfrak{B} als auch von \mathfrak{B}^* .

Fall a: Da die Schnittlinien nicht nullhomolog auf \mathfrak{B}^* sind, besitzen sie auf \mathfrak{B}^* eine positive Umlaufzahl α .

Wir unterscheiden:

Fall a_1 : Es ist $\alpha = 1$.

Fall a_2 : Es ist $\alpha > 1$.

Fall a_1 : Durch die Schnittlinien wird \mathfrak{I} in Kreisringe zerlegt, die abwechselnd auf \mathfrak{B}^* und $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegen. Wir betrachten zwei Schnittlinien s_1 und s_2 , die auf \mathfrak{I} einen Kreisring r beranden, der auf \mathfrak{B}^* liegt. Durch s_1 und s_2 wird \mathfrak{I}^* in zwei Kreisringe r_1^* und r_2^* zerlegt. Nach § 16 Satz 1 wird \mathfrak{B}^* durch r in zwei Vollringe \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 zerlegt, die von r und r_1^* bzw. r und r_2^* berandet werden, und es besitzen s_1 und s_2 auf \mathfrak{U}_1 und auf \mathfrak{U}_2 die Umlaufzahl 1. Da r von k nicht getroffen wird, enthält einer der beiden Vollringe, etwa \mathfrak{U}_1 , k im Inneren. Nach § 8 lassen sich nun die Schnittlinien s_1 und s_2 dadurch beseitigen, dass man den aus \mathfrak{I}^* und k bestehenden Komplex dadurch deformiert, dass man k festhält und r_2^* über \mathfrak{U}_2 deformiert und anschliessend von r abhebt. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* paarweise beseitigen, und man gelangt zu einem der Fälle 1), 2), 3) des Satzes.

Fall a_2 : Wir betrachten jetzt zwei Schnittlinien s_1 und s_2 , die auf \mathfrak{I} einen Kreisring r beranden, der auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegt. \mathfrak{I}^* wird durch s_1 und s_2 in zwei Kreisringe r_1^* und r_2^* zerlegt. Nach § 17 Satz 1 berandet r zusammen mit einem der beiden Kreisringe auf \mathfrak{I}^* , etwa mit r_1^* , einen Vollring \mathfrak{V} , der \mathfrak{B}^* umfasst und auf dem s_1 und s_2 nicht nullhomolog sind. \mathfrak{V} wird nach § 16 Satz 1 durch r_2^* in zwei Vollringe zerlegt und zwar in \mathfrak{B}^* und einen Vollring \mathfrak{U} . Da die Umlaufzahl von s_1 und s_2 auf \mathfrak{B}^* nach Annahme grösser als 1 ist, müssen nach § 16 Satz 1 s_1 und s_2 auf \mathfrak{U} die Umlaufzahl 1 besitzen. Es lassen sich nun nach § 8 die Schnittlinien s_1 und s_2 dadurch beseitigen, dass man den aus \mathfrak{I}^* und k bestehenden Komplex dadurch deformiert, dass man k festhält und r_2^* über \mathfrak{U} deformiert und von r abhebt. Auch in diesem Falle lassen sich alle Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* der Reihe nach paarweise beseitigen.

Fall b: Es sind jetzt die Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* sowohl Meridiane von \mathfrak{B} als auch von \mathfrak{B}^* . Durch die Schnittlinien wird \mathfrak{I} in Kreisringe zerlegt, die abwechselnd auf \mathfrak{B}^* und auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegen. Sei r ein solcher Kreisring, der auf \mathfrak{B}^* liegt. Die Ränder von r seien s_1 und s_2 . Nach § 16 Satz 2 berandet r zusammen mit einem Kreisring auf \mathfrak{I}^* einen Vollring \mathfrak{V} , der von \mathfrak{B}^* umfasst wird und mit \mathfrak{B}^* Meridianflächen gemein hat. \mathfrak{V} enthält k im Inneren. Da nämlich \mathfrak{B}^* in bezug auf k positive Ordnung besitzt, kann k nach § 9 Satz 1 nicht in einer auf \mathfrak{B}^* liegenden Kugel enthalten sein. Da r von k nicht getroffen wird, muss ferner k entweder in \mathfrak{V} oder im abgeschlossenen Komplement von \mathfrak{V} bezüglich \mathfrak{B}^* liegen. Das letzte ist nicht möglich, da dieses Komplement auf einer von

\mathfrak{B}^* umfassten Kugel liegt, wie aus dem Beweise von § 16 Satz 2 hervorgeht. Ist nun das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{Y} in bezug auf \mathfrak{B}^* ein unverknoteter Vollring \mathfrak{U} , so sind s_1 und s_2 Breitenkreise von \mathfrak{U} nach § 16 Satz 2, und wir können die Schnittlinien s_1 und s_2 nach § 8 dadurch zum Verschwinden bringen, dass man den aus k und \mathfrak{I}^* bestehenden Komplex dadurch deformiert, dass man k festhält und den Kreisring auf \mathfrak{I}^* , der zusammen mit r den Rand von \mathfrak{U} bildet, über \mathfrak{U} deformiert und von r abhebt. Ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{Y} in bezug auf \mathfrak{B}^* kein Vollring, so lassen wir die Schnittlinien s_1 und s_2 von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* unverändert.

Es sei nun r ein Kreisring auf \mathfrak{I} , der auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegt und die Ränder s_1 und s_2 besitzt. Durch s_1 und s_2 wird \mathfrak{I}^* in zwei Kreisringe r_1^* und r_2^* zerlegt. Nach § 17 Satz 3 wird dann \mathfrak{B}^* von zwei Vollringen \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 umfasst, die von r und r_1^* bzw. von r und r_2^* berandet werden und auf denen s_1 und s_2 Meridiane sind. \mathfrak{U}_1 bzw. \mathfrak{U}_2 wird durch r_2^* bzw. r_1^* nach § 16 Satz 2 zerlegt. Ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}^* in bezug auf einen der Vollringe \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_2 ein unverknoteter Vollring, so können die Schnittlinien s_1 und s_2 wieder dadurch beseitigt werden, dass man einen Kreisring auf \mathfrak{I}^* über einen solchen unverknoteten Vollring deformiert und anschliessend von r abhebt. Ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{U}_1 und dasjenige in bezug auf \mathfrak{U}_2 kein Vollring, so lassen wir die Schnittlinien s_1 und s_2 von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* unverändert.

Wir können nun alle Kreisringe auf \mathfrak{I} , die auf \mathfrak{B}^* oder auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegen, deren Ränder also Schnittlinien sind und die sonst keine weitere Schnittlinie enthalten, daraufhin untersuchen, ob sich die Schnittlinien, die ihre Ränder bilden, nach den beschriebenen Verfahren beseitigen lassen, und so der Reihe nach so viele Paare von Schnittlinien wie möglich beseitigen. Es sind dann entweder alle Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* verschwunden, sodass einer der Fälle 1), 2), 3) des Satzes eintritt, oder es verbleiben noch Schnittlinien. Dann liegt Fall 4) des Satzes vor:

3. Schritt: Nachweis, dass Fall 4) eintritt, wenn nach dem 2. Schritt noch Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* vorhanden sind.

Wenn nach dem 2. Schritt noch Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* vorhanden sind, so sind diese zugleich Meridiane von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* , und es werden \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* durch sie in Kreisringe zerlegt. Es ist zu zeigen, dass jeder Torus, der sich aus je einem solchen Kreisring auf \mathfrak{I} und einem solchen Kreisring auf \mathfrak{I}^* zusammensetzt und für den einer dieser beiden Kreisringe ausser seinen Rändern keine Schnittlinie von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* enthält, einen verknoteten Vollring berandet.

Sei \mathfrak{I}' ein solcher Torus, der von einem Kreisring r auf \mathfrak{I} und einem Kreisring r^*

auf \mathcal{I}^* gebildet wird, wobei einer der Kreisringe r , r^* ausser seinen Rändern keine Schnittlinien von \mathcal{I} und \mathcal{I}^* enthält. Die gemeinsamen Ränder von r und r^* seien s_1 und s_2 .

Wir betrachten zunächst den Fall, dass r von Schnittlinien frei ist. r liegt dann entweder auf \mathcal{B}^* oder auf $\mathcal{S}^3 - \mathcal{B}^* + \mathcal{I}^*$. Nehmen wir an, dass \mathcal{I}' keinen verknoteten sondern (wegen § 7 Satz 2) zwei unverknotete Vollringe berandet. Falls r auf \mathcal{B}^* liegt, berandet r nach § 16 Satz 2 zusammen mit einem Kreisring r_0^* auf \mathcal{I}^* einen Vollring \mathcal{Y}^* , der von \mathcal{B}^* umfasst wird und mit \mathcal{B}^* Meridianflächen gemein hat (vgl. 2. Schritt, Fall b). \mathcal{Y}^* ist verknotet nach § 16 Satz 2. r_0^* kann daher nicht mit r^* zusammenfallen sondern muss sich (da auch r_0^* die Ränder s_1 und s_2 besitzt) mit r^* zu \mathcal{I}^* zusammensetzen. \mathcal{I}' berandet dann das abgeschlossene Komplement von \mathcal{Y}^* in bezug auf \mathcal{B}^* . Da \mathcal{I}' zwei unverknotete Vollringe beranden sollte, wäre dieses Komplement ein unverknoteter Vollring. Dann müssten aber die Schnittlinien s_1 und s_2 von \mathcal{I} und \mathcal{I}^* durch den 2. Schritt, Fall b beseitigt sein. Falls r auf $\mathcal{S}^3 - \mathcal{B}^* + \mathcal{I}^*$ liegt, lässt sich ähnlich schliessen: Durch s_1 und s_2 wird \mathcal{I}^* in r^* und einen Kreisring r_0^* zerlegt, und \mathcal{B}^* wird nach § 17 Satz 3 von zwei Vollringen \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 umfasst, die von \mathcal{I}' bzw. von r und r_0^* berandet werden. Dabei wird auch das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B}^* in bezug auf \mathcal{U}_2 von \mathcal{I}' berandet. Da \mathcal{I}' zwei unverknotete Vollringe beranden sollte, müsste dieses abgeschlossene Komplement ein unverknoteter Vollring sein, und es müssten s_1 und s_2 durch den 2. Schritt, Fall b beseitigt sein.

Es ist noch der Fall zu betrachten, dass auf r ausser den Rändern noch weitere Schnittlinien von \mathcal{I} und \mathcal{I}^* liegen, dass aber r^* von Schnittlinien frei ist. Nehmen wir wieder an, dass \mathcal{I}' zwei unverknotete Vollringe berandet. Für einen dieser Vollringe, er heisse \mathcal{U} , sind dann s_1 und s_2 Breitenkreise, und der Durchschnitt von \mathcal{U} und \mathcal{I} besteht aus r :

r^* liegt entweder auf \mathcal{B} oder auf $\mathcal{S}^3 - \mathcal{B} + \mathcal{I}$. Im ersten Falle wird \mathcal{B} durch r^* nach § 16 Satz 2 zerlegt. r^* berandet dann zusammen mit einem Kreisring r_0 auf \mathcal{I} einen Vollring \mathcal{Y} , der von \mathcal{B} umfasst wird und in bezug auf den \mathcal{B} die Ordnung 1 hat. Aus § 16 Satz 2 ergibt sich, dass \mathcal{Y} verknotet ist, sodass \mathcal{I}' nicht \mathcal{Y} sondern das abgeschlossene Komplement von \mathcal{Y} bezüglich \mathcal{B} berandet. Dieses ist dann nach § 16 Satz 2 ein Vollring \mathcal{U} mit den angegebenen Eigenschaften. Liegt r^* auf $\mathcal{S}^3 - \mathcal{B} + \mathcal{I}$, so gibt es nach § 17 Satz 3 zwei Vollringe $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$, die \mathcal{B} umfassen und von $r^* + r = \mathcal{I}'$ bzw. r^* und einem Kreisring r_0 auf \mathcal{I} berandet werden. s_1 und s_2 sind Meridiane von \mathcal{U}_1 und \mathcal{U}_2 . Da \mathcal{I}' zwei unverknotete Vollringe beranden soll, ist \mathcal{U}_1 unverknotet und das abgeschlossene Komplement von \mathcal{U}_1 ist ein Vollring \mathcal{U} mit s_1 und s_2 als Breitenkreisen. \mathcal{U} ist zugleich das abgeschlossene Komplement von \mathcal{B} bezüglich \mathcal{U}_2 . Der Durchschnitt von \mathcal{U} und \mathcal{I} besteht also aus r .

Wir betrachten weiterhin den Vollring \mathcal{U} . Alle Schnittlinien von \mathcal{I} und \mathcal{I}^* , die noch auf r liegen, sind auf r homolog zu s_1 , also Breitenkreise von \mathcal{U} .

Die Schnittlinien von r und \mathcal{I}^* beranden paarweise Kreisringe auf \mathcal{I}^* , die auf \mathcal{U}

liegen und deren Durchschnitt mit \mathfrak{L} nur aus ihren Rändern besteht, da der Durchschnitt von \mathfrak{U} und \mathfrak{L} nur aus r besteht. Nach § 16 Anmerkung zu Satz 1 wird \mathfrak{U} durch jeden solchen Kreisring in zwei unverknotete Vollringe zerlegt, auf denen s_1 und s_2 wieder die Umlaufzahl 1 haben, und einer dieser beiden Vollringe wird berandet von dem betreffenden Kreisring auf \mathfrak{L}^* und einem auf r liegenden Kreisring. Auf dem Rande dieses Vollringes liegen weniger Schnittlinien von \mathfrak{L} und \mathfrak{L}^* als auf \mathfrak{L}' , nämlich sicher nicht s_1 und s_2 . Man bemerkt nun unmittelbar, dass auf \mathfrak{U} ein unverknoteter Vollring liegen muss, der berandet wird von einem auf r liegenden Kreisring, der ausser seinen Rändern keine Schnittlinien enthält, und einem auf dem Durchschnitt von \mathfrak{U} und \mathfrak{L}^* liegenden Kreisring. Nach dem Obigen kann dies aber nach Ausführung des 2. Schrittes nicht der Fall sein. Wenn also nach dem 2. Schritt noch Schnittlinien von \mathfrak{L} und \mathfrak{L}^* vorhanden sind, so muss Fall 4) des Satzes eintreten.

4. Schritt: Beweis, dass der Fall 4) nicht eintreten kann, wenn durch eine orientierte Seele eines der beiden Vollringe \mathfrak{B} , \mathfrak{B}^* ein Primknoten dargestellt wird.

Es ist zu zeigen, dass im vorliegenden Falle alle Schnittlinien von \mathfrak{L} und \mathfrak{L}^* , die Meridiane von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind, nach dem 2. Schritt, Fall b verschwunden sind, falls solche Schnittlinien überhaupt vorhanden waren. Es werde etwa durch orientierte Seelen von \mathfrak{B} ein Primknoten dargestellt. Nehmen wir an, dass nach dem 2. Schritt noch Schnittlinien von \mathfrak{L} und \mathfrak{L}^* vorhanden sind. r^* sei ein Kreisring auf \mathfrak{L}^* , der von zwei Schnittlinien s_1 und s_2 berandet wird und der ganz auf $\mathfrak{E}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{L}$ liegt. In die Meridiane s_1 und s_2 spannen wir zwei sich gegenseitig nicht treffende Meridianflächen m_1 , m_2 von \mathfrak{B} ein, wodurch \mathfrak{B} in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 zerlegt wird. Wir wählen eine orientierte Seele a von \mathfrak{B} so, dass sie in \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 je eine unverknotete Sehne u_1 bzw. u_2 bildet. m_1 , m_2 und r^* setzen sich zu einer 2-Sphäre \mathfrak{E}^2 zusammen, welche die \mathfrak{E}^3 in zwei Kugeln \mathfrak{R}_1^* und \mathfrak{R}_2^* zerlegt, wovon jede je eine der Kugeln \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 umfasst. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass \mathfrak{R}_1 von \mathfrak{R}_1^* und \mathfrak{R}_2 von \mathfrak{R}_2^* umfasst wird. u_1 bzw. u_2 ist dann Sehne von \mathfrak{R}_1^* bzw. \mathfrak{R}_2^* . Durch \mathfrak{E}^2 wird nun der von der Knotenlinie a repräsentierte Primknoten λ als Produkt der beiden Knoten dargestellt, die von u_1 bzw. u_2 in \mathfrak{R}_1^* bzw. \mathfrak{R}_2^* erzeugt werden. Da λ Primknoten ist, muss einer dieser beiden Faktoren der Kreis sein, etwa der von u_1 in \mathfrak{R}_1^* erzeugte. Dann ist also u_1 sowohl in \mathfrak{R}_1 als auch in \mathfrak{R}_1^* unverknotet, und nach § 8 Hilfssatz 1 ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_1 in bezug auf \mathfrak{R}_1^* ein unverknoteter Vollring, der von einem Kreisring auf \mathfrak{L} und dem von Schnittlinien freien Kreisring r^* auf \mathfrak{L}^* berandet wird, womit sich ein Widerspruch zum 3. Schritt ergibt. Entsprechend schliesst man, wenn durch orientierte Seelen von \mathfrak{B}^* ein Primknoten dargestellt wird.

5. Schritt: Konstruktion des Vollringes \mathfrak{B} im Falle 4).

Sei zunächst e eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , deren Rand keine der Schnittlinien von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* trifft. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{T}^* und e , falls er nicht bereits leer ist, aus doppelpunktfreien Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen.

Wir unterscheiden

Fall a: Der Durchschnitt von \mathfrak{T}^* und e ist leer.

Fall b: Der Durchschnitt von \mathfrak{T}^* und e besteht aus doppelpunktfreien, disjunkten Schnittlinien.

Wir wollen zeigen, dass es in beiden Fällen eine gemeinsame Meridianfläche von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gibt, die eine Schnittlinie von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* als Rand hat.

Fall a: In diesem Falle liegt e ganz im Inneren von \mathfrak{B}^* , da andernfalls e von k nicht getroffen werden könnte und somit \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung null hätte gegen die Voraussetzung. Sei t der Rand von e . t berandet zusammen mit einer geeigneten Schnittlinie s von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* auf \mathfrak{T} einen Kreisring r , der ganz auf \mathfrak{B}^* liegt. e und r bilden zusammen ein Elementarflächenstück, aus dem sich durch Deformation, nämlich durch Abheben von r bei festgehaltenem s , eine gemeinsame Meridianfläche von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* erhalten lässt.

Fall b: Da eine Schnittlinie von e und \mathfrak{T}^* eine Kreislinie ist (sie berandet auf e ein Elementarflächenstück), ist sie nach § 7 Hilfssatz 2 entweder nullhomolog auf \mathfrak{T}^* oder Meridian von \mathfrak{B}^* . Diejenigen Schnittlinien, die auf \mathfrak{T}^* nullhomolog sind, lassen sich der Reihe nach beseitigen: Man betrachte auf \mathfrak{T}^* zunächst eine innerste s , die auf \mathfrak{T}^* ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück f^* berandet. f^* liegt im Inneren von \mathfrak{B} , da s in \mathfrak{B} liegt und auf f^* kein Meridian von \mathfrak{B}^* , also auch keine Schnittlinie von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* , liegen kann. Auf e berandet s ein Elementarflächenstück f . Man kann nun s dadurch beseitigen, dass man f durch f^* ersetzt und anschliessend das dabei aus e entstehende Elementarflächenstück von f^* abhebt. Auf diese Weise lässt sich aus e eine Meridianfläche von \mathfrak{B} erhalten, sie heisse wieder e , deren Durchschnitt mit \mathfrak{T}^* aus dem Durchschnitt von \mathfrak{T}^* mit $e - f$ (ohne s) besteht, und es lassen sich so alle Schnittlinien von e und \mathfrak{T}^* beseitigen, die auf \mathfrak{T}^* nullhomolog sind.

Sind nun keine Schnittlinien von e und \mathfrak{T}^* mehr vorhanden, sind wir auf Fall a geführt. Falls noch Schnittlinien von e und \mathfrak{T}^* vorhanden sind, so sind diese Meridiane von \mathfrak{B}^* . Wir betrachten eine innerste auf e , sie heisse s . Sie berandet auf e eine Meridianfläche e^* von \mathfrak{B}^* . s trifft keine der Schnittlinien von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* , da s im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Wir werden damit auf Fall a geführt, wenn wir die Rollen von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* vertauschen.

In jedem Falle erhalten wir eine gemeinsame Meridianfläche m_1 von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* , deren Rand s_1 Schnittlinie von \mathfrak{T} und \mathfrak{T}^* ist.

In s_1 tritt \mathfrak{I}^* vom Äusseren ins Innere von \mathfrak{B} ein. s_1 ist ein Rand eines Kreisringes r_1^* auf \mathfrak{I}^* , der auf \mathfrak{B} liegt. Sei s_2 der zweite Rand von r_1^* . m_1 und r_1^* bilden zusammen ein Elementarflächenstück. Durch Deformation (Abheben) dieses Elementarflächenstückes erhält man eine gemeinsame Meridianfläche m_2 von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* , die s_2 als Rand hat und m_1 nicht trifft. m_1 , m_2 und r_1^* bilden zusammen eine 2-Sphäre, die eine auf \mathfrak{B}^* liegende Kugel \mathfrak{K}_1^* berandet. m_1 und m_2 zerlegen \mathfrak{B} in zwei Kugeln, wovon eine \mathfrak{K}_1^* umfasst. Diese Kugel heisse \mathfrak{K}_1 . \mathfrak{K}_1 wird berandet von m_1 , m_2 und einem Kreisring r_1 auf \mathfrak{I} (Fig. 14).

In s_2 tritt \mathfrak{I} vom Äusseren ins Innere von \mathfrak{B}^* ein, und es ist s_2 ein Rand eines Kreisringes r_2 auf \mathfrak{I} , der auf \mathfrak{B}^* liegt. s_3 sei der zweite Rand von r_2 . r_2 und m_2 bilden zusammen ein Elementarflächenstück. Durch Deformation dieses Elementarflächenstückes (Abheben) erhält man eine gemeinsame Meridianfläche m_3 von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* , die s_3 als Rand hat und m_1 und m_2 nicht trifft, falls nicht $s_3 = s_1$ ist. Im Falle $s_1 = s_3$ setzen wir $m_3 = m_1$. Da r_1 in s_2 an \mathfrak{B}^* von aussen anstösst, wird r_2 nicht von r_1 umfasst. r_2 bildet zusammen mit m_2 und m_3 eine 2-Sphäre, die eine auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* liegende Kugel \mathfrak{K}_2 berandet. \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 haben nur m_2 gemein, falls $s_1 \neq s_3$ ist, andernfalls haben \mathfrak{K}_1 und \mathfrak{K}_2 die Elementarflächenstücke m_1 und m_2 gemein und machen zusammen ganz \mathfrak{B} aus. \mathfrak{B}^* wird durch m_2 und m_3 in zwei Kugeln zerlegt, wovon eine \mathfrak{K}_2 umfasst. Diese Kugel heisse \mathfrak{K}_2^* . Sie wird berandet von m_2 , m_3 und einem Kreisring r_2^* auf \mathfrak{I}^* . Im Falle $s_1 \neq s_3$ besteht der Durchschnitt von \mathfrak{K}_1^* und \mathfrak{K}_2^* aus m_2 , im Falle $s_1 = s_3$ besteht er aus m_1 und m_2 , und es machen dann \mathfrak{K}_1^* und \mathfrak{K}_2^* zusammen ganz \mathfrak{B}^* aus.

Falls nun nicht $s_1 = s_3$ ist, ist s_3 der eine Rand eines Kreisringes r_3^* auf \mathfrak{I}^* , der ganz auf \mathfrak{B} liegt. s_4 sei der zweite Rand von r_3^* . s_4 kann nicht mit s_1 zusammenfallen, da andernfalls \mathfrak{I} in s_1 nicht von \mathfrak{I}^* durchsetzt würde. Wie oben lässt sich eine gemeinsame Meridianfläche m_4 von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* finden, die s_4 als Rand hat und keine der Meridianflächen m_1 , m_2 , m_3 trifft. m_3 , m_4 und r_3^* beranden zusammen eine auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* liegende Kugel \mathfrak{K}_3^* . Der Durchschnitt von \mathfrak{K}_3^* mit \mathfrak{K}_2^* besteht aus m_3 , der Durchschnitt von \mathfrak{K}_3^* und \mathfrak{K}_1^* ist leer. Auf \mathfrak{I} beranden s_3 und s_4 einen Kreisring r_3 , der nicht von dem Kreisring $r_1 + r_2$ auf \mathfrak{I} umfasst wird. m_3 , m_4 und r_3 beranden zusammen eine auf \mathfrak{B} liegende Kugel \mathfrak{K}_3 , die \mathfrak{K}_3^* umfasst, deren Durchschnitt mit \mathfrak{K}_2 aus m_3 besteht und deren Durchschnitt mit \mathfrak{K}_1 leer ist. s_4 ist nun ein Rand eines Kreisringes r_4 auf \mathfrak{I} , der auf \mathfrak{B}^* liegt und die Schnittlinie s_5 als Rand besitzt. Falls $s_5 = s_1$ ist, setzen wir $m_5 = m_1$, falls $s_5 \neq s_1$ ist, lässt sich wieder eine gemeinsame Meridianfläche m_5 von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* finden, die s_5 als Rand besitzt und die m_1 , m_2 , m_3 , m_4 nicht trifft. s_4 und s_5 beranden auf \mathfrak{I}^* einen Kreisring r_4^* , dessen Durchschnitt mit dem Kreisring $r_1^* + r_2^* + r_3^*$ auf \mathfrak{I}^* nur aus s_4 ($s_5 \neq s_1$) bzw. s_4 und s_1 ($s_5 = s_1$) besteht, und wir erhalten Kugeln \mathfrak{K}_4 bzw. \mathfrak{K}_4^* , die auf \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* liegen und von m_4 , m_5 und r_4 bzw. r_4^* berandet werden.

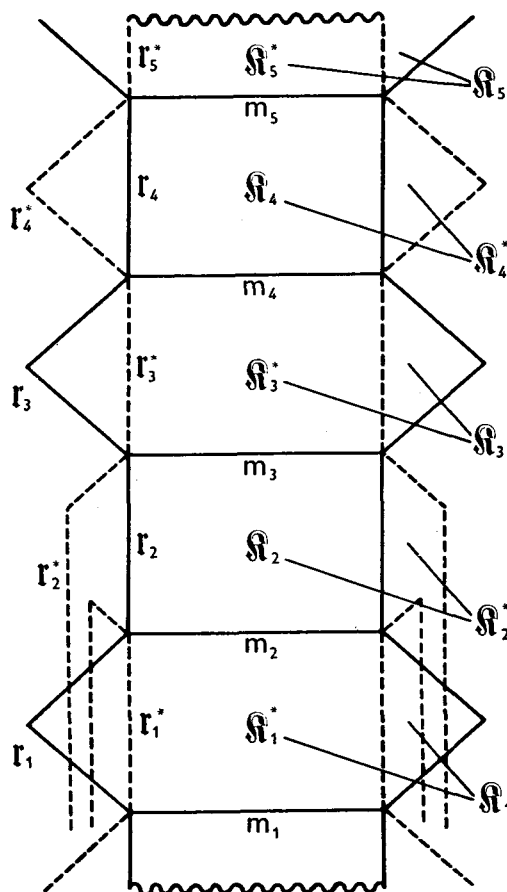


Fig. 14.

Falls nun nicht $s_5 = s_1$ ist, können wir entsprechend fortfahren, bis wir zu einer Schnittlinie s_{2n+1} von \mathfrak{X} und \mathfrak{X}^* gelangen, die mit s_1 zusammenfällt. In die Schnittlinien s_1, s_2, \dots, s_{2n} sind dann gemeinsame Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_{2n} von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* eingespannt, die paarweise disjunkt sind. s_i und s_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, 2n$) (Indices modulo $2n$) beranden auf \mathfrak{X} bzw. \mathfrak{X}^* den Kreisring r_i bzw. r_i^* , und durch die Meridianflächen m_i wird \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* in die von m_i, m_{i+1} und r_i bzw. r_i^* berandeten Kugeln \mathfrak{R}_i bzw. \mathfrak{R}_i^* zerlegt. Dabei wird \mathfrak{R}_{2j-1}^* ($j = 1, 2, \dots, n$) von \mathfrak{R}_{2j-1} und \mathfrak{R}_{2j} von \mathfrak{R}_{2j}^* umfasst. Es ist nicht gesagt, dass mit den Schnittlinien s_i alle Schnittlinien von \mathfrak{X} und \mathfrak{X}^* erfasst sind, doch sind etwaige weitere Schnittlinien für uns ohne Interesse (Fig. 14). Die Kugeln \mathfrak{R}_{2j} und \mathfrak{R}_{2j-1}^* ($j = 1, 2, \dots, n$) setzen sich nun zu einem Vollring \mathfrak{B}^* zusammen, für welchen die Elementarflächenstücke m_i Meridianflächen sind. \mathfrak{B}^* enthält die Knotenlinie k im Inneren, da k keinen der Kreisringe r_{2j} und r_{2j-1}^* trifft, die den Rand von \mathfrak{B}^* ausmachen, und da k sicher

die Meridianflächen m_i von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* trifft. l sei eine orientierte Seele von \mathfrak{B}^* , die jede Meridianfläche in nur einem Punkte P_i trifft und in jeder Kugel \mathfrak{R}_{2j-1}^* bzw. \mathfrak{R}_{2j} eine unverknotete Sehne u_{2j-1} bzw. u_{2j} bildet. Man erhält den im Satz genannten Vollring \mathfrak{B} dadurch, dass man zu \mathfrak{B}^* einen Vollring angibt, der l zur Seele hat, der im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt und k im Inneren enthält und der von jedem der Elementarflächenstücke m_i in einer Meridianfläche getroffen wird. Man kann dazu so verfahren, dass man zunächst \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* zusammenfallen lässt und dann den Rand von \mathfrak{B} vom Rande von \mathfrak{B}^* geeignet ins Innere von \mathfrak{B}^* abhebt. Offenbar haben \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1.

Um den von l dargestellten Knoten λ genauer zu untersuchen, bemerken wir zunächst: Die in der Kugel \mathfrak{R}_{2j} unverknotete Sehne u_{2j} ist gleichzeitig Sehne der Kugel \mathfrak{R}_{2j}^* und in \mathfrak{R}_{2j}^* verknotet. Wäre nämlich u_{2j} in \mathfrak{R}_{2j}^* unverknotet, so wäre nach § 8 Hilfssatz 1 das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}_{2j} in bezug auf \mathfrak{R}_{2j}^* ein unverknoteter Vollring mit s_{2j} und s_{2j+1} (Indices modulo $2n$) als Breitenkreisen. Dann liessen sich aber die Schnittlinien s_{2j} und s_{2j+1} beseitigen, wie unter dem 2. Schritt, Fall b ausgeführt wurde, was zu einem Widerspruch führt. Die Sehne u_{2j} ist also in \mathfrak{R}_{2j}^* verknotet. Entsprechend bemerkt man, dass die Sehnen u_{2j-1} in \mathfrak{R}_{2j-1} verknotet sind. Da man eine bezüglich l positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}^* erhält, wenn man die Sehnen u_{2j-1} von \mathfrak{R}_{2j-1} bzw. u_{2j} von \mathfrak{R}_{2j}^* durch in \mathfrak{R}_{2j-1} bzw. \mathfrak{R}_{2j}^* unverknotete Sehnen ersetzt, ergibt sich aus § 5 Hilfssatz 4: Der von l dargestellte Knoten λ ist das Produkt der vom Kreise verschiedenen Knoten, die von den Sehnen u_{2j-1} in \mathfrak{R}_{2j-1} erzeugt werden, und dem Knoten, der von einer bezüglich l positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} dargestellt wird. Ebenso ist λ das Produkt der vom Kreis verschiedenen Knoten, die von den Sehnen u_{2j} in den Kugeln \mathfrak{R}_{2j}^* erzeugt werden, und dem Knoten, der von einer bezüglich l positiv orientierten Seele von \mathfrak{B}^* dargestellt wird. Ferner wird durch die orientierten Seelen von \mathfrak{B} oder \mathfrak{B}^* kein Primknoten dargestellt, wie aus dem 4. Schritt folgt. Der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Anmerkung zu Satz 1: Der Beweis des Satzes wurde so geführt, dass der von k und \mathfrak{T}^* gebildete Komplex so deformiert wurde, dass dabei k punktweise festblieb. Dadurch konnte auf die Existenz einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich geschlossen werden, die einem der 4 Fälle genügt. Die 4 Fälle brauchen sich jedoch nicht gegenseitig auszuschliessen.

Satz 2: *Es seien $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ zwei Systeme von verknoteten Vollringen in der \mathfrak{S}^3 mit den Eigenschaften*

a) *Jeder Vollring der beiden Systeme enthält die Knotenlinie k im Inneren und besitzt in bezug auf k positive Ordnung.*

b) *Die Ränder der Vollringe des ersten Systems sind paarweise disjunkt, ebenso die Ränder der Vollringe des zweiten Systems.*

c) Für kein Paar $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j^*$ ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$) kann Fall 4 des Satzes 1 eintreten.

Dann lässt sich das aus den Vollringen $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ bestehende System von Vollringen durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, so abbilden, dass keiner der Ränder von $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ einen Rand der Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m$ trifft.

Der Beweis besteht im Wesentlichen aus einer Wiederholung der ersten beiden Schritte des Beweises zu Satz 1. $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ seien die Ränder von \mathfrak{B}_1 bzw. $\mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ die Ränder von \mathfrak{B}_1^* bzw. $\mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt der Tori $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ mit den Tori $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ nur aus doppel-punktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Wie im 1. Schritt des Beweises von Satz 1 lassen sich zunächst alle Schnittlinien beseitigen, die nullhomolog auf \mathfrak{I}_1 sind, man hat nur statt der dort betrachteten Deformation des aus k und \mathfrak{I}^* bestehenden Komplexes eine Deformation des Komplexes vorzunehmen, der von $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ und k gebildet wird. Anschliessend lassen sich die Schnittlinien beseitigen, die auf \mathfrak{I}_2 nullhomolog sind, und man kann entsprechend fortfahren, bis alle Schnittlinien verschwunden sind, die auf einem Torus $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ nullhomolog sind.

Zum 2. Schritt betrachten wir zunächst den Durchschnitt von \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_1^* , falls dieser nicht bereits leer ist. Die Beseitigung eines Paares von Schnittlinien, das auf \mathfrak{I}_1 einen auf \mathfrak{B}_1^* liegenden Kreisring berandet (Fall a₁ und Fall b 1. Absatz), kann wieder als Deformation des aus $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ und k bestehenden Komplexes aufgefasst werden. Soll ein Paar von Schnittlinien beseitigt werden, das auf \mathfrak{I}_1 einen auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}_1^* + \mathfrak{I}_1^*$ liegenden Kreisring r berandet (Fall a₂ und Fall b 2. Absatz), so kann es eintreten, dass auf r noch Schnittlinien von \mathfrak{I}_1 mit $\mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ liegen. Nun handelt es sich aber bei der Beseitigung des Schnittlinienpaares um die Deformation eines Kreisringes r_1^* auf \mathfrak{I}_1^* über einen auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}_1^* + \mathfrak{I}_1^*$ liegenden Vollring U in r und anschliessendes Abheben. Nach § 8 kann die Deformation über U durch eine s -Abbildung φ der \mathfrak{S}^3 auf sich bewirkt werden, welche die Identität ist auf k , auf einer hinreichend kleinen Umgebung der Ränder von r bezüglich $\mathfrak{I}_1 - r$ und auf dem Komplement einer beliebig kleinen Umgebung von U . Da $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ paarweise disjunkt sind, kann man diese Umgebung von U so wählen, dass bei Anwendung der Abbildung φ auf das System $\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^*$ die im Komplement von U liegenden Schnittlinien zwischen den Tori $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ und $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ ungeändert bleiben und keine neuen Schnittlinien entstehen, womit auch die auf r liegenden Schnittlinien von \mathfrak{I}_1 mit $\mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ verschwinden. Das anschliessende Abheben kann wieder als Deformation des aus $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ und k bestehenden Komplexes geschehen. Man bemerkt nun, dass sich so der Reihe nach alle Schnittlinien von \mathfrak{I}_1 mit $\mathfrak{I}_1^*, \mathfrak{I}_2^*, \dots, \mathfrak{I}_n^*$ und dann entsprechend diejenigen auf $\mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_m$ beseitigen lassen, woraus sich die Behauptung des Satzes ergibt.

KAPITEL III.

Anwendungen.

§ 19. Begleitknoten von Produktknoten.¹

Es sei κ ein Knoten, der nicht Primknoten oder Kreis ist. Nach § 5 Satz 5 lässt sich κ auffassen als Produkt von (endlich vielen) Primknoten, etwa $\kappa = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ Primknoten sind. Die Knotenlinie k sei Repräsentant von κ . Nach § 5 Hilfssatz 3 gibt es dann n paarweise punktfremde Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ derart, dass k den Rand jeder Kugel in genau zwei Punkten trifft (und dort durchsetzt) und in jeder Kugel \mathfrak{R}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) je eine Sehne u_i bildet, die in \mathfrak{R}_i den Primknoten λ_i erzeugt. Bohrt man, wie in § 14 beschrieben, aus jeder der Kugeln \mathfrak{R}_i eine geeignete Umgebung der Sehne u_i aus, so erhält man aus \mathfrak{R}_i einen Vollring \mathfrak{B}_i , der k im Inneren enthält, bezüglich k die Ordnung 1 hat und durch dessen bezüglich k positiv orientierte Seelen der Primknoten λ_i dargestellt wird. Ausserdem enthält jeder der Vollringe \mathfrak{B}_i die abgeschlossenen Komplemente der übrigen Vollringe im Inneren. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ bilden also ein System von Vollringen, die bezüglich k nebengeordnet sind (§ 15). Da dieses System die angegebene Zerlegung von κ in Primfaktoren in Evidenz setzt, wollen wir es als *zerlegendes System von Vollringen* für den Repräsentanten k des Knotens κ bezeichnen. Wird k durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich in eine Knotenlinie k' übergeführt, so geht ein zerlegendes System von Vollringen für den Repräsentanten k offenbar in ein solches für den Repräsentanten k' von κ über. Es reicht daher aus, zerlegende Systeme von Vollringen für einen festen Repräsentanten k von κ zu betrachten.

Ein zerlegendes System von Vollringen für den Repräsentanten k eines Produktknotens κ ist als System bezüglich k nebengeordneter Vollringe vollständig in dem Sinne, dass es nicht durch Hinzunahme eines weiteren Vollringes zu einem System von bezüglich k nebengeordneten Vollringen erweitert werden kann. Es gilt der

Hilfssatz: Die Knotenlinie k stelle den Produktknoten κ dar. Die Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ mögen ein zerlegendes System von Vollringen für k bilden. Ist \mathfrak{B}_0 ein verknotteter Vollring, der k und die abgeschlossenen Komplemente der Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ im Inneren enthält, so hat \mathfrak{B}_0 in bezug auf k die Ordnung null.

Beweis: Durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) werde der Primknoten λ_i dargestellt. Nach § 15 Satz 1 lassen sich für die Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ und \mathfrak{B}_0 paarweise punktfremde Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_n und m_0 gleichzeitig so wählen, dass k von m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) in nur einem Punkte getroffen wird

¹ Vgl. hierzu [9].

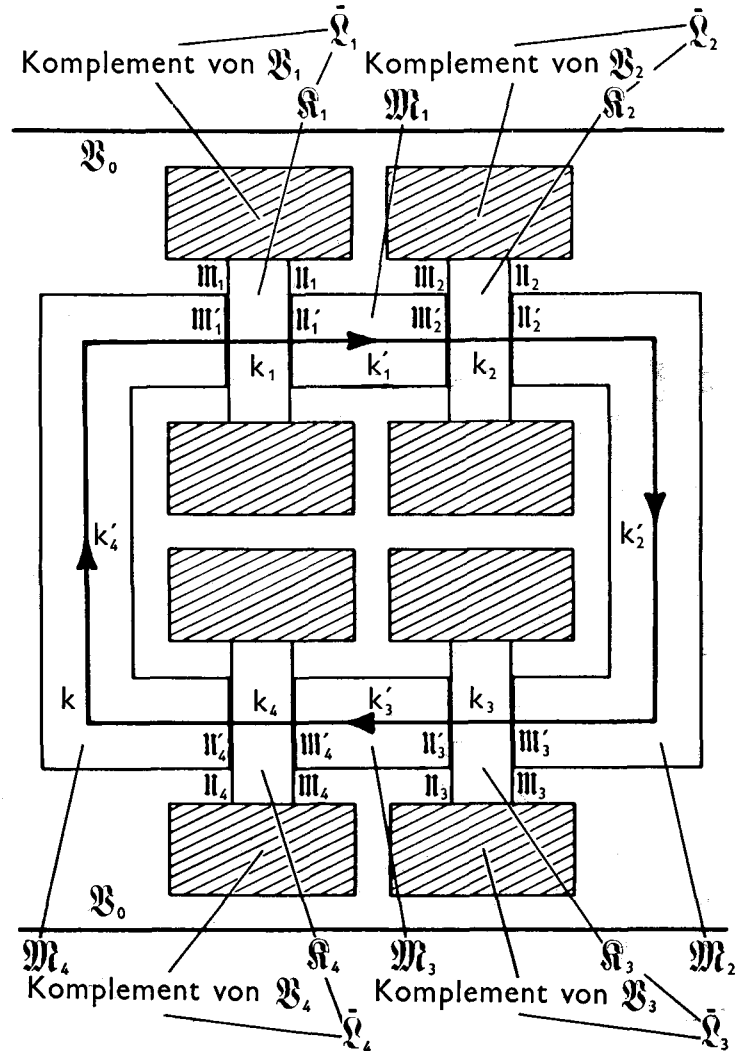


Fig. 15.

und dass m_i im Inneren der von \mathfrak{B}_i verschiedenen Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ und \mathfrak{B}_0 liegt. Die Meridianfläche m_0 von \mathfrak{B}_0 lassen wir ausser Betracht. Schneidet man \mathfrak{B}_1 längs m_1 zu einem Prisma auf, so erkennt man: Durch m_1 und eine Meridianfläche n_1 , die hinreichend nahe bei m_1 liegt, lässt sich \mathfrak{B}_1 so in zwei Kugeln $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ zerlegen, dass k von m_1 in nur einem Punkte getroffen wird und in \mathfrak{Q}_1 eine unverknotete Sehne k_1 bildet und dass die abgeschlossenen Komplemente der Vollringe $\mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{B}_0$ und die Meridianflächen m_2, \dots, m_n im Inneren von \mathfrak{Q}_1 liegen. (Fig. 15). Das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{Q}_1 ist eine Kugel $\bar{\mathfrak{Q}}_1$, die im Inneren von $\mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ und \mathfrak{B}_0 liegt und von m_2, \dots, m_n

nicht getroffen wird. $\bar{\mathcal{Q}}_1$ umfasst \mathcal{R}_1 und das Komplement von \mathcal{B}_1 , und k_1 ist zugleich Sehne von $\bar{\mathcal{Q}}_1$. In $\bar{\mathcal{Q}}_1$ erzeugt k_1 den Knoten λ_1 . Da nämlich k_1 in \mathcal{R}_1 unverknotet ist, kann man k_1 durch eine unverknotete Sehne l_1 von \mathcal{Q}_1 zu einer bezüglich k positiv orientierten Seele a_1 von \mathcal{B}_1 ergänzen, wobei a_1 den Knoten λ_1 darstellt. Durch den Rand von $\bar{\mathcal{Q}}_1$ wird λ_1 dargestellt als Produkt des von l_1 in \mathcal{Q}_1 erzeugten Kreises mit dem von k_1 in $\bar{\mathcal{Q}}_1$ erzeugten Knoten. Dieser muss nach § 5 Satz 1 der Knoten λ_1 sein.

Durch m_2 und eine Meridianfläche n_2 , die hinreichend nahe an m_2 liegt, kann man nun \mathcal{B}_2 so in zwei Kugeln $\mathcal{R}_2, \mathcal{Q}_2$ zerlegen, dass k von n_2 in nur einem Punkte getroffen wird und in \mathcal{R}_2 eine unverknotete Sehne k_2 bildet und dass die abgeschlossenen Komplemente der Vollringe $\mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_0$ und $\bar{\mathcal{Q}}_1, m_3, \dots, m_n$ im Inneren von \mathcal{Q}_2 liegen. Das abgeschlossene Komplement von \mathcal{Q}_2 ist eine Kugel $\bar{\mathcal{Q}}_2$, die im Inneren von $\mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_0$ liegt und von m_3, \dots, m_n und $\bar{\mathcal{Q}}_1$ nicht getroffen wird. k_2 ist Sehne von $\bar{\mathcal{Q}}_2$, und man erkennt wie oben, dass k_2 in $\bar{\mathcal{Q}}_2$ den Knoten λ_2 erzeugt. Entsprechend kann man nun der Reihe nach Meridianflächen n_3, \dots, n_n für die Vollringe $\mathcal{B}_3, \dots, \mathcal{B}_n$ wählen. Man erhält: \mathcal{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) wird durch m_i und n_i in zwei Kugeln $\mathcal{R}_i, \mathcal{Q}_i$ zerlegt. k wird von m_i und n_i in je einem Punkte getroffen und bildet in \mathcal{R}_i eine unverknotete Sehne k_i . Das abgeschlossene Komplement von \mathcal{Q}_i ist eine Kugel $\bar{\mathcal{Q}}_i$, welche \mathcal{R}_i und das Komplement von \mathcal{B}_i umfasst. k_i ist Sehne von $\bar{\mathcal{Q}}_i$ und erzeugt in $\bar{\mathcal{Q}}_i$ den Knoten λ_i . Die Kugeln $\bar{\mathcal{Q}}_1, \bar{\mathcal{Q}}_2, \dots, \bar{\mathcal{Q}}_n$ sind paarweise punktfremd und liegen im Inneren von \mathcal{B}_0 . Die Bezeichnungen können noch so gewählt werden, dass man die Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_n und n_1, n_2, \dots, n_n bei Durchlaufen von k in der Reihenfolge $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots, m_n, n_n$ trifft. Fig. 15 gibt den Sachverhalt schematisch im Schnitt wieder.

Wir betrachten nun das Stück k'_i von k , das von n_i nach m_{i+1} führt (Indices modulo n). Es ist punktfremd zu den von $\bar{\mathcal{Q}}_i$ und $\bar{\mathcal{Q}}_{i+1}$ verschiedenen Kugeln $\bar{\mathcal{Q}}_1, \bar{\mathcal{Q}}_2, \dots, \bar{\mathcal{Q}}_n$ und zum Rande von \mathcal{B}_0 . Ausserdem sind die Stücke k'_1, k'_2, \dots, k'_n paarweise punktfremd. Wir können daher aus dem abgeschlossenen Komplement von $\bar{\mathcal{Q}}_1 + \bar{\mathcal{Q}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{Q}}_n$ bezüglich \mathcal{B}_0 für jedes k'_i eine solche Umgebung \mathcal{M}_i ausbohren, dass \mathcal{M}_i eine Kugel ist, für welche k'_i eine unverknotete Sehne ist, dass der Durchschnitt von \mathcal{M}_i mit $\bar{\mathcal{Q}}_i$ aus einem Elementarflächenstück n'_i auf n_i , der Durchschnitt von \mathcal{M}_i mit $\bar{\mathcal{Q}}_{i+1}$ aus einem Elementarflächenstück m'_{i+1} auf m_{i+1} besteht, dass der Durchschnitt von \mathcal{M}_i mit den von $\bar{\mathcal{Q}}_i$ und $\bar{\mathcal{Q}}_{i+1}$ verschiedenen Kugeln $\bar{\mathcal{Q}}_1, \bar{\mathcal{Q}}_2, \dots, \bar{\mathcal{Q}}_n$ und mit dem Rande von \mathcal{B}_0 leer ist und dass schliesslich die Kugeln \mathcal{M}_i paarweise punktfremd sind. Das Ausbohren kann wie die Konstruktion des Vollringes im Beweise von § 10 Hilfssatz 1 bezw. wie in § 14 vorgenommen werden.

Die Kugeln $\bar{\mathcal{Q}}_1, \bar{\mathcal{Q}}_2, \dots, \bar{\mathcal{Q}}_n$ und $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_n$ setzen sich nun zu einem Vollring

\mathbb{U} zusammen, der im Inneren von \mathfrak{B}_0 liegt, der k im Inneren enthält und für welchen m'_1, m'_2, \dots, m'_n und n'_1, n'_2, \dots, n'_n Meridianflächen sind. \mathbb{U} ist unverknotet. Man erhält nämlich aus k eine orientierte Seele a' von \mathbb{U} , wenn man in jeder Kugel $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ die Sehne k_i durch eine unverknotete Sehne (mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt) ersetzt, und es ist a' eine Kreislinie, da der von k dargestellte Knoten κ einerseits das Produkt der von den Sehnen k_i in den Kugeln $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ erzeugten Knoten λ_i ist, andererseits nach § 5 Hilfssatz 4 das Produkt aus den Knoten λ_i und dem von a' dargestellten Knoten, woraus wegen § 5 Satz 1 folgt, dass a' den Kreis darstellt. Da \mathfrak{B}_0 verknotet ist, hat \mathfrak{B}_0 in bezug auf die orientierte Seele a' von \mathbb{U} die Ordnung null nach § 7 Satz 1 und § 9 Satz 1. \mathfrak{B}_0 hat also in bezug auf \mathbb{U} die Ordnung null, und nach § 9 Hilfssatz 3 gibt es eine Meridianfläche von \mathfrak{B}_0 , die \mathbb{U} nicht trifft. Diese Meridianfläche trifft auch k nicht, da k im Inneren von \mathbb{U} liegt. \mathfrak{B}_0 hat also die Ordnung null in bezug auf k , was zu beweisen war.

Satz 1: Die Knotenlinie k stelle den Produktknoten κ dar.

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_m \tag{S}$$

und

$$\mathfrak{B}_1^*, \mathfrak{B}_2^*, \dots, \mathfrak{B}_n^* \tag{S^*}$$

seien zwei zerlegende Systeme von Vollringen für k . Dann ist $n = m$, und es gibt eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist und das System (S^*) in das System (S) überführt.

Beweis: Da für jedes Paar $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j^*)$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_i (oder auch von \mathfrak{B}_j^*) ein Primknoten dargestellt wird, kann für kein solches Paar der Fall 4 des Satzes 1 von § 18 eintreten. Nach § 18 Satz 2 kann daher das System (S^*) durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, so abgebildet werden, dass keiner der Ränder des Systems (S^*) einen Rand der Vollringe des Systems (S) trifft. \mathfrak{B}_j^* kann dann nicht die abgeschlossenen Komplemente aller Vollringe des Systems (S) im Inneren enthalten, da sich sonst ein Widerspruch aus dem vorangehenden Hilfssatz und der Tatsache ergäbe, dass \mathfrak{B}_j^* in bezug auf k die Ordnung 1 hat. Für mindestens eines der Paare $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_j^*)$ ($i = 1, 2, \dots, m, j$ fest) muss also einer der beiden Vollringe des Paares den anderen im Inneren enthalten.

Enthält \mathfrak{B}_j^* den Vollring \mathfrak{B}_h im Inneren, so liegt der Rand von \mathfrak{B}_j^* im Komplement von \mathfrak{B}_h und damit im Inneren aller von \mathfrak{B}_h verschiedenen Vollringe des Systems (S) . \mathfrak{B}_j^* umfasst also nur \mathfrak{B}_h . Ausserdem hat \mathfrak{B}_j^* in bezug auf \mathfrak{B}_h die Ordnung 1 wegen § 9 Satz 3, da \mathfrak{B}_j^* und \mathfrak{B}_h in bezug auf k die Ordnung 1 haben. Da ferner durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_h ein Primknoten dargestellt wird, sind diese nach

§ 9 Satz 2 zugleich orientierte Seelen von \mathfrak{B}_j^* . Schliesslich stellen wir noch fest, dass \mathfrak{B}_h nicht noch in einem von \mathfrak{B}_j^* verschiedenen Vollring des Systems (S^*) enthalten sein kann. Wäre \mathfrak{B}_h ausser in \mathfrak{B}_j^* noch in \mathfrak{B}_i^* ($i \neq j$) enthalten, so müssten die orientierten Seelen von \mathfrak{B}_h zugleich Seelen von \mathfrak{B}_j^* und \mathfrak{B}_i^* sein. Dies ist aber ein Widerspruch zu § 15 Satz 2, da \mathfrak{B}_j^* das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}_i^* im Inneren enthält.

Ist \mathfrak{B}_j^* im Inneren von \mathfrak{B}_h enthalten, so hat \mathfrak{B}_h nach § 9 Satz 3 die Ordnung 1 in bezug auf \mathfrak{B}_j^* . Da durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_j^* ein Primknoten dargestellt wird, sind diese nach § 9 Satz 2 zugleich Seelen von \mathfrak{B}_h . Ausserdem kann wegen § 15 Satz 2 \mathfrak{B}_j^* nicht zugleich im Inneren eines von \mathfrak{B}_h verschiedenen Vollringes des Systems (S) enthalten sein. Da ferner der Rand von \mathfrak{B}_h im Komplement von \mathfrak{B}_j^* und damit im Inneren der von \mathfrak{B}_j^* verschiedenen Vollringe des Systems (S^*) liegt, kann \mathfrak{B}_h keinen von \mathfrak{B}_j^* verschiedenen Vollring des Systems (S^*) enthalten. Schliesslich bemerken wir noch, dass \mathfrak{B}_j^* nicht zugleich einen Vollring des Systems (S) umfassen und im Inneren eines der Vollringe des Systems (S) enthalten sein kann, da sonst ein Vollring des Systems (S) im Inneren eines anderen enthalten wäre.

Jedem Vollring \mathfrak{B}_j^* ist damit auf umkehrbar eindeutige Weise ein Vollring des Systems (S) zugeordnet, der entweder in \mathfrak{B}_j^* enthalten ist oder \mathfrak{B}_j^* umfasst, woraus $n \leq m$ folgt. Da man im Vorangehenden die Rollen der Systeme (S) und (S^*) vertauschen kann, ergibt sich $n = m$, und es besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Vollringe von (S^*) zu den Vollringen von (S) . Wir können im System (S^*) die Numerierung der Vollringe so wählen, dass jeweils $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i^*)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ein solches Paar einander zugeordneter Vollringe darstellt. Betrachten wir das Paar $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_i^*)$. Enthält \mathfrak{B}_i^* den Vollring \mathfrak{B}_i im Inneren, so sind die Seelen von \mathfrak{B}_i zugleich Seelen von \mathfrak{B}_i^* , also \mathfrak{B}_i und \mathfrak{B}_i^* gleich verknotet, und nach § 10 Hilfssatz 2 existiert eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{B}_i^* in \mathfrak{B}_i überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung des abgeschlossenen Komplements von \mathfrak{B}_i in bezug auf \mathfrak{B}_i^* die Identität ist. Diese Umgebung kann insbesondere so gewählt werden, dass sie zu k und den Rändern der von \mathfrak{B}_i bzw. \mathfrak{B}_i^* verschiedenen Vollringe des Systems (S) bzw. (S^*) punktfremd ist. Ein entsprechender Sachverhalt liegt vor, wenn \mathfrak{B}_i^* im Inneren von \mathfrak{B}_i enthalten ist, woraus die Behauptung des Satzes unmittelbar folgt.

Anmerkung: Aus Satz 1 folgt insbesondere die Eindeutigkeit der Faktorzerlegung eines Produktknotens in Primknoten. In [9] wurde dies mit Hilfe zerlegender Systeme von Kugeln bewiesen, für die jedoch eine dem Satz 1 entsprechende Aussage nicht gilt.

Aus § 14 Satz 1 und Satz 2 folgt, dass man für einen Produktknoten κ als Begleitknoten der Ordnung 1 alle von κ und vom Kreis verschiedenen Faktoren erhält. Für die Begleitknoten höherer Ordnung gilt

Satz 2: *Es sei κ ein Produktknoten, μ ein Begleitknoten der Ordnung $\gamma \geq 2$ von κ . Dann ist μ Begleitknoten der Ordnung γ für (mindestens) einen Primfaktor von κ .*

Beweis: Es sei k ein Repräsentant von κ , und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ sei ein zerlegendes System von Vollringen für k . Durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_i werde der Primknoten λ_i dargestellt. \mathfrak{B} sei ein Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und der mit k den Begleitknoten μ von κ mit der Ordnung γ darstellt. Da durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ein Primknoten dargestellt wird, kann für kein Paar $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B})$ der Fall 4 des Satzes 1 von § 18 eintreten. Nach § 18 Satz 2 kann durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, erreicht werden, dass der Rand von \mathfrak{B} keinen der Ränder von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ trifft. Wegen des obigen Hilfssatzes und $\gamma > 0$ kann dann \mathfrak{B} nicht die abgeschlossenen Komplemente aller Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ enthalten. Für mindestens eines der Paare $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B})$ muss also gelten, dass einer der beiden Vollringe des Paares den anderen im Inneren enthält. \mathfrak{B} kann nicht im Inneren eines Vollringes \mathfrak{B}_i liegen. Es ergäbe sich sonst ein Widerspruch zu § 9 Satz 3, da \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung $\gamma > 1$, jedoch \mathfrak{B}_i in bezug auf k die Ordnung 1 besitzt. \mathfrak{B} muss also einen der Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_n$ im Inneren enthalten, etwa \mathfrak{B}_j . \mathfrak{B} hat in bezug auf \mathfrak{B}_j die Ordnung γ nach § 9 Satz 3, da \mathfrak{B}_j in bezug auf k die Ordnung 1 und \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung γ hat. Sei a_j eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B}_j . a_j stellt den Primfaktor λ_j von κ dar. Da k und a_j zu einander homolog auf \mathfrak{B}_j sind, sind sie zu einander homolog auf \mathfrak{B} . Ist nun k nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} , so ist eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} zugleich positiv orientiert bezüglich a_j , der Begleitknoten μ von κ ist orientiert, und es wird μ durch \mathfrak{B} und a_j als orientierter Begleitknoten der Ordnung γ von λ_j dargestellt. Ist k nullhomolog auf \mathfrak{B} , so ist auch a_j nullhomolog auf \mathfrak{B} , der Begleitknoten μ von κ ist nicht-orientiert, und es wird μ durch \mathfrak{B} und a_j als nicht-orientierter Begleitknoten der Ordnung γ von λ_j dargestellt.

§ 20. Begleitknoten von Schlingknoten.¹

Schlingknoten sind nicht-orientierte Knoten, in deren Repräsentanten sich ein Elementarflächenstück mit einer Selbstdurchdringung einspannen lässt. Genauer: Wir betrachten ein ebenes Quadrat $\bar{\eta}$ mit den Ecken $\bar{A}, \bar{R}, \bar{B}', \bar{S}$ (Fig. 16), aus dem durch eine simpliziale Abbildung η in die \mathbb{S}^3 ein Elementarflächenstück η mit Selbstdurchdringung entstehe. Die Selbstdurchdringung von η erfolge längs eines Streckenzuges d , dem im Urbild $\bar{\eta}$ die beiden gleichlangen Strecken $\bar{d} = \bar{A}\bar{B}$ und $\bar{d}' = \bar{A}'\bar{B}'$ der Diagonale $\bar{A}\bar{B}'$ von $\bar{\eta}$ entsprechen. Dabei sollen je zwei Punkte von d und d' , die bei der Translation $\bar{A} \rightarrow \bar{A}'$

¹ Vgl. hierzu H. SEIFERT [12]. Die Figuren 16 und 17 sind [12] entnommen.

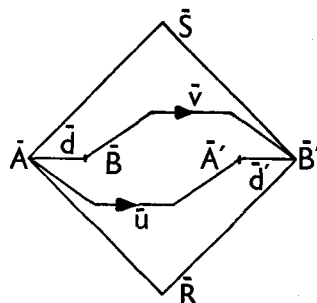


Fig. 16.

einander entsprechen, und nur solche, denselben Bildpunkt bei der Abbildung η haben. Der Rand von η heisst dann Repräsentant eines Schlingknotens λ . Wir sagen auch, dass λ durch η als Schlingknoten dargestellt wird. Man gewinnt einen anschaulichen Eindruck von den Verhältnissen, die hierbei auftreten können, wenn man das Urbildquadrat $\bar{\eta}$ in Richtung der Diagonale $\bar{A}\bar{B}'$ zu einem langen Bande ausdehnt, dieses beliebig verschlingt und verdrillt und dann die Enden so zusammensteckt, dass sie sich längs einer Strecke $d = AB$ durchdringen. Fig. 17 zeigt ein Beispiel.

Durch das Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung ist ausser dem Schlingknoten λ , der durch den Rand von η dargestellt wird, noch ein weiterer nicht-orientierter Knoten bestimmt, der *Diagonalknoten* κ von λ heisst: Wir betrachten im Urbild $\bar{\eta}$ von η die nicht-orientierte Strecke $\bar{A}\bar{A}'$. Durch η geht sie in eine nicht-orientierte Knotenlinie k auf η über. Der von k dargestellte nicht-orientierte Knoten ist der *Diagonalknoten* κ von λ . Wir bezeichnen k auch als diagonale Knotenlinie von η .

Unterwirft man das Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung η einer s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, so gehen dabei der Rand l von η und die auf η diagonale Knoten-

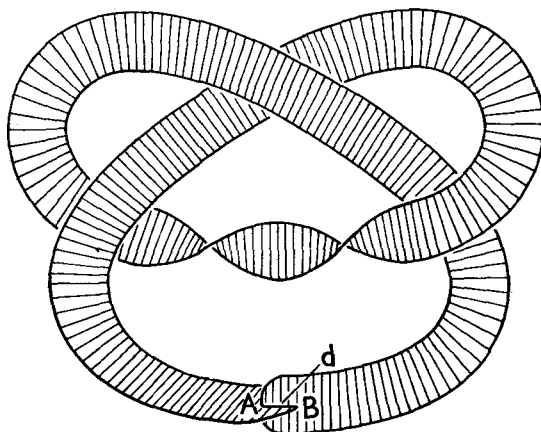


Fig. 17.

linie k in nicht-orientierte Knotenlinien über, die wieder die nicht-orientierten Knoten λ und \varkappa darstellen. η besitzt noch zwei weitere Invarianten gegenüber s -Abbildungen der \mathbb{S}^3 auf sich: Die *Eigenschnittzahl* und die *Verdrillungszahl*. Um die Eigenschnittzahl zu erhalten, orientiere man η und erteile dem Rande l die von η induzierte Orientierung. Die algebraische Schnittzahl von η mit l ist dann die Eigenschnittzahl von η . Kehrt man die Orientierung von η um, so ändert sich auch die Orientierung von l , sodass die algebraische Schnittzahl von η und l dieselbe bleibt. Die Eigenschnittzahl von η ist also unabhängig von der zur Bestimmung gewählten Orientierung. Ihr Wert ist offenbar entweder $+2$ oder -2 .

Zur Definition der *Verdrillungszahl* von η verbinden wir im Urbild $\bar{\eta}$ die Punkte \bar{A} und \bar{A}' , durch einen von \bar{A} nach \bar{A}' orientierten, doppelpunktfreien Weg \bar{u} , der mit $\bar{d} + \bar{d}'$ nur seine Endpunkte gemein hat, und wir verbinden die Punkte \bar{B} und \bar{B}' durch einen von \bar{B} nach \bar{B}' orientierten, doppelpunktfreien Weg \bar{v} , der \bar{u} nicht trifft und mit $\bar{d} + \bar{d}'$ ebenfalls nur seine Endpunkte gemein hat. Durch die Abbildung η gehen \bar{u} und \bar{v} in Knotenlinien u und v auf η über. Die Verschlingungszahl dieser Knotenlinien ist die Verdrillungszahl von η . Sie ist unabhängig davon, wie die Wege \bar{u} und \bar{v} auf $\bar{\eta}$ gewählt werden (Graeub [6]). Sie bleibt auch erhalten, wenn man die Orientierung von \bar{u} und \bar{v} , und damit von u und v , zugleich umkehrt.

Von GRAEUB [6] wurde gezeigt: Durch Vorgabe von Diagonalknoten, Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl ist ein Schlingknoten eindeutig bestimmt:¹ Je zwei Elementarflächenstücke mit Selbstdurchdringung, die in diesen Invarianten übereinstimmen, lassen sich durch s -Abbildungen der \mathbb{S}^3 auf sich ineinander überführen, sodass man durch ihre Ränder denselben nicht-orientierten Knoten erhält. Umgekehrt wurde von SEIFERT [12] gezeigt: Ein Schlingknoten bestimmt den Diagonalknoten eindeutig, d.h. für einen nicht-orientierten Knoten, der sich als Schlingknoten durch den Rand eines Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung darstellen lässt, erhält man bei jeder solchen Darstellung denselben Diagonalknoten. Ferner gilt: Ein Schlingknoten, dessen Diagonalknoten vom nicht-orientierten Kreis verschieden ist, bestimmt auch die Eigenschnittzahl und die Verdrillungszahl eindeutig, sodass man für diese Knoten durch Diagonalknoten, Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl ein vollständiges Invariantensystem erhält. Für einen Schlingknoten, dessen Diagonalknoten der nicht-orientierte Kreis ist, kann es möglich sein, dass man durch gleichzeitigen Vorzeichenwechsel für Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl denselben Schlingknoten erhält, wobei die Frage offen ist, ob der nicht-orientierte Kreis und

¹ GRAEUB nimmt den Diagonalknoten als orientiert an. Das Resultat bleibt jedoch richtig, wenn der Diagonalknoten nicht-orientiert benutzt wird. Dies beruht darauf, dass die Verdrillungszahl des Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung $\bar{\eta}$ erhalten bleibt bei gleichzeitiger Umorientierung der zur Definition benutzten Knotenlinien u, v .

der nicht-orientierte Viererknoten die einzigen Schlingknoten dieser Art sind. Wir werden durch die Sätze 3 und 4 einen erneuten Beweis dafür erhalten, dass ein Schlingknoten seinen Diagonalknoten eindeutig bestimmt.

Die Schlingknoten sind nach Definition nicht-orientierte Knoten. Wird einem Schlingknoten eine Orientierung erteilt, so sprechen wir von einem *orientierten Schlingknoten*. Man erhält durch die beiden möglichen Orientierungen denselben Knoten, es gilt

Satz 1: *Jeder orientierte Schlingknoten ist symmetrisch.*

Beweis: Sei λ ein (nicht-orientierter) Schlingknoten, der durch den Diagonalknoten α , die Eigenschaftszahl 2ε ($\varepsilon = \pm 1$) und die Verdrillungszahl δ bestimmt ist.

Es sei \mathfrak{P} ein Prisma im R^3 , dessen Boden- und Dachfläche Quadrate sind. a' sei die Achse von \mathfrak{P} . Auf \mathfrak{P} wählen wir zwei Elementarflächenstücke η_1, η_2 auf die folgende Weise (Fig. 18): η_1 sei ein rechteckiges Elementarflächenstück, das mit der Bodenfläche von \mathfrak{P} die Kante s_1 gemein hat, sonst im Inneren von \mathfrak{P} liegt und in sich übergeht, wenn man \mathfrak{P} um die Achse a' um den Winkel π dreht. s_2 sei die Strecke in der Dachfläche von

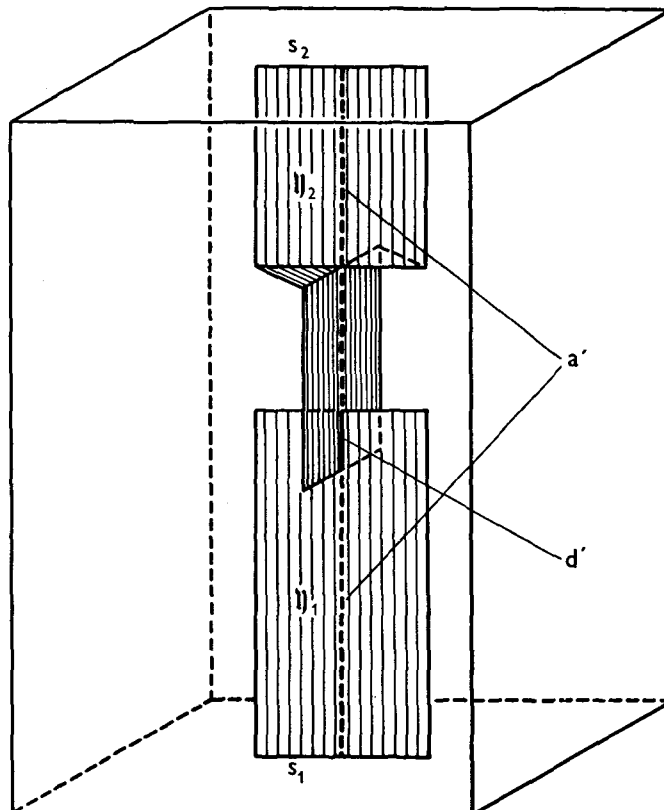


Fig. 18.

\mathfrak{P} , die aus s_1 durch Translation längs a' entsteht. Das Elementarflächenstück η_2 stosse an s_2 an, liege sonst im Inneren von \mathfrak{P} und gehe in sich über, wenn \mathfrak{P} um π um die Achse a' gedreht wird. Die Elementarflächenstücke η_1 und η_2 mögen sich ausserdem in einer Strecke d' auf a' durchdringen und sonst punktfremd sein.

Es sei nun \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , durch dessen Seelen der nicht-orientierte Knoten \varkappa dargestellt wird. \mathfrak{B} lässt sich längs einer Meridianfläche zu dem Prisma \mathfrak{P} aufschneiden, σ sei die zugehörige Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} . Durch σ setzen sich η_1 und η_2 längs des gemeinsamen Bildes der Strecken s_1, s_2 zu einem Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung η zusammen. Das Bild der Achse a' von \mathfrak{P} ist diagonale Knotenlinie auf η und ausserdem Seele von \mathfrak{B} nach § 6 Hilfssatz 2, stellt also \varkappa dar. Wenn die Eigenschnittzahl von η nicht 2ε sondern -2ε ist, so setzen wir σ noch mit einer Spiegelung von \mathfrak{P} an einer Ebene durch a' zusammen, wodurch man ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung erhält, dessen Eigenschnittzahl 2ε ist. Ist nun die Verdrillungszahl von η noch nicht δ , so setzen wir σ noch mit einer s -Abbildung von \mathfrak{P} auf sich zusammen, welche die Bodenfläche festlässt und die Dachfläche um ein solches Vielfache von 2π dreht, dass η die Verdrillungszahl δ erhält. Wir haben nun in \mathfrak{B} ein Elementarflächenstück mit Selbstdurchdringung η liegen, durch dessen diagonale Knotenlinie \varkappa dargestellt wird, dessen Eigenschnittzahl gleich 2ε und dessen Verdrillungszahl gleich δ ist. Der Rand l von η stellt also den Schlingknoten λ dar. Wir erteilen l eine beliebige Orientierung.

Wir drehen nun \mathfrak{B} um die Achse a' um den Winkel π . Diese Drehung induziert eine s -Abbildung χ von \mathfrak{B} auf sich, welche η auf sich abbildet und die Orientierung von l umkehrt. χ ist orientierungserhaltend auf \mathfrak{B} , da die Drehung von \mathfrak{B} eine orientierungserhaltende Selbstabbildung von \mathfrak{B} ist. Ausserdem wird durch χ jeder Breitenkreis von \mathfrak{B} in einen gleichsinnig orientierten übergeführt, denn aus der Konstruktion von χ folgt unmittelbar, dass jeder Weg auf dem Rande von \mathfrak{B} durch χ in einen homologen übergeführt wird. Nach § 10 Satz 3 kann χ zu einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich erweitert werden. l stellt also in beiden möglichen Orientierungen denselben Knoten dar, also einen symmetrischen Knoten. Damit ergibt sich die Behauptung.

Satz 2: *Das Geschlecht eines Schlingknotens ist höchstens gleich 1.*

Beweis: Es sei λ ein Schlingknoten. Wir wollen in einen Repräsentanten l von λ eine Fläche vom Geschlecht 1 einspannen. Um diesen Vorgang überblicken zu können, erteilen wir l eine spezielle Gestalt. l soll in einem 3-Simplex \mathfrak{G}^3 der \mathfrak{S}^3 liegen. \mathfrak{G}^3 kann dann auch als 3-Simplex des euklidischen Raumes R^3 aufgefasst werden, sodass es Sinn hat, von einer Knotenprojektion von l (Parallelprojektion von l in eine Ebene des R^3) zu sprechen.

Da λ durch Diagonalknoten, Eigenschnittzahl und Verdrillungszahl eindeutig bestimmt

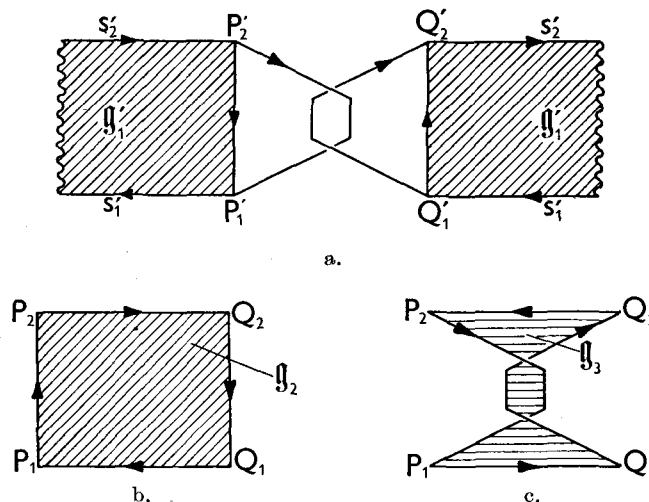


Fig. 19.

ist, können wir λ so durch den Rand l eines Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung η im Inneren von \mathbb{E}^3 darstellen, dass η für eine Umgebung der Selbstdurchdringung d von η eine Projektion in eine Ebene des R^3 besitzt, die das Aussehen von Fig. 19 a hat, wobei dieser Teil der Projektion von dem restlichen Teil nirgends überdeckt wird. Dabei kann η noch so gewählt werden, dass die Strecken $P_1'P_2'$ und $Q_1'Q_2'$ Projektionen von geradlinigen Querschnitten P_1P_2, Q_1Q_2 von η sind, die von η je ein d enthaltendes Elementarflächenstück e_1 bzw. e_2 abschneiden. Nach Abschneiden von e_1 und e_2 entsteht aus η ein (singularitätenfreies) Elementarflächenstück g_1 , das berandet wird von den Querschnitten P_1P_2, Q_1Q_2 und zwei Stücken s_1, s_2 des Randes l von η . In Fig. 19 a sind die Projektionen mit entsprechenden gestrichelten Bezeichnungen versehen. Ausserdem sind l und g_1 orientiert, um die Orientierbarkeit der in l einzuspannenden Fläche in Evidenz zu setzen. Es lässt sich nun in das Viereck $P_1P_2Q_1Q_2$ ein Elementarflächenstück g_2 einspannen (Fig. 19 b), das mit l nur die Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 und mit g_1 nur die Strecken P_1P_2 und Q_1Q_2 gemein hat. Ausserdem lässt sich ein Elementarflächenstück g_3 finden (Fig. 19 c), das berandet wird von den Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 und den beiden Stücken von l , die auf dem Rande von e_1 bzw. e_2 liegen, und dass g_3 mit g_2 nur die Strecken P_1Q_1, P_2Q_2 und mit g_1 nur die Punkte P_1, P_2, Q_1, Q_2 gemein hat. g_1, g_2 und g_3 setzen sich zu einer orientierbaren, singularitätenfreien Fläche vom Geschlecht 1 zusammen, die in l eingespannt ist, woraus sich die Behauptung ergibt.

Nach § 5 Satz 3 ist der Kreis der einzige Knoten vom Geschlecht null, und nach § 5 Satz 4 ist jeder Knoten vom Geschlecht 1 Primknoten. Wir erhalten damit

Folgerung I: Ein orientierter Schlingknoten ist entweder Primknoten oder Kreis.

Da der Kreis keine Begleitknoten besitzt und ein Primknoten keinen der Ordnung 1 nach § 14 Satz 3, ergibt sich aus Folgerung 1:

Folgerung 2: Ein Schlingknoten besitzt keine Begleitknoten der Ordnung 1.

Dies lässt sich auch so aussprechen:

Folgerung 3: Liegt der Repräsentant l des Schlingknotens λ im Inneren des verknöteten Vollringes \mathfrak{B}^* und hat \mathfrak{B}^* in bezug auf l die Ordnung 1, so ist l Seele von \mathfrak{B}^* .

Im Folgenden sei der Schlingknoten λ durchweg durch den Rand l eines Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung η dargestellt, k sei diagonale Knotenlinie auf η , d die Selbstdurchdringung von η . Eine geeignete Umgebung von η macht dann einen Vollring \mathfrak{B} aus, der k zur Seele hat und η im Inneren enthält. Die Existenz eines solchen Vollringes ergibt sich auch aus dem Beweise von Satz 1. Nach SEIFERT [12] gilt:

Hilfssatz 1: *l ist auf keiner auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten, und es gibt eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} , die von l in genau zwei Punkten R und S getroffen und dort durchsetzt wird und die η in einer einzigen Schnittlinie c trifft, welche R und S verbindet und zu d punktfremd ist.*

Es kann dabei angenommen werden, dass R und S die Bilder der Ecken \bar{R} und \bar{S} des Urbildquadrates $\bar{\eta}$ (Fig. 16) bezüglich der oben angegebenen Abbildung η von $\bar{\eta}$ auf η sind.

Da l bei Auszeichnung einer Orientierung nullhomolog auf \mathfrak{B} ist (nämlich Rand einer 2-Kette, die aus η durch geeignete Orientierung entsteht), hat l die Umlaufzahl null auf \mathfrak{B} . Da sich nach § 9 Hilfssatz 1 Ordnung und Umlaufzahl um eine gerade Zahl unterscheiden, ist die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf l gerade und zwar null oder 2 wegen Hilfssatz 1. Die Ordnung kann nicht null sein, da sonst l nach § 9 Satz 1 im Inneren einer auf \mathfrak{B} liegenden Kugel enthalten wäre im Widerspruch zu Hilfssatz 1. Es gilt also

Hilfssatz 2: \mathfrak{B} hat in bezug auf l die Ordnung 2.

Hilfssatz 3: *Der Schlingknoten λ sei durch den Rand l des Elementarflächenstückes mit Selbstdurchdringung η dargestellt. Der Vollring \mathfrak{B} enthalte η im Inneren und habe die auf η diagonale Knotenlinie k zur Seele. Ferner sei \mathfrak{B}^* ein verknöteter Vollring, der l nicht-trivial im Inneren enthält und dessen Rand \mathfrak{L}^* im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Dann liegt \mathfrak{B}^* im Inneren von \mathfrak{B} , \mathfrak{B} hat in bezug auf \mathfrak{B}^* die Ordnung 1, und \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind gleich verknötet.*

Nach § 10 Hilfssatz 2 gibt es also eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, welche \mathfrak{B}^* auf \mathfrak{B} abbildet und auf l die Identität ist.

Beweis: Wir wählen zunächst nach Hilfssatz 1 eine Meridianfläche m von \mathfrak{B} , die von l in genau zwei Punkten R und S getroffen wird und die η in einer einzigen doppelpunkt-freien Schnittlinie c trifft, welche R und S auf η verbindet und zu der Selbstdurchdringung d von η punktfremd ist. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m mit

\mathfrak{T}^* aus doppelpunktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen, und dass der Durchschnitt von \mathfrak{T}^* und η aus Schnittlinien besteht, die höchstens in Punkten von d Doppelpunkte besitzen oder sich gegenseitig treffen.

Die Schnittlinien von \mathfrak{T}^* mit m sind Kreislinien und wegen der Verknotung von \mathfrak{B}^* nach § 7 Hilfssatz 2 entweder nullhomolog auf \mathfrak{T}^* oder Meridiane von \mathfrak{B}^* . Wir betrachten zunächst, falls eine solche vorhanden ist, eine innerste Schnittlinie s auf m , die auf m ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie und keinen der Punkte R, S enthält. s ist nullhomolog auf \mathfrak{T}^* , da andernfalls e Meridianfläche von \mathfrak{B}^* wäre, die l nicht trifft, sodass also \mathfrak{B}^* in bezug auf l die Ordnung null hätte gegen die Voraussetzung. s berandet auf \mathfrak{T}^* ein Elementarflächenstück e^* , und es beranden e und e^* eine Kugel \mathfrak{K} auf \mathfrak{B} , die l nicht enthalten kann, da \mathfrak{B} nach Hilfssatz 2 in bezug auf l die Ordnung 2 hat. Wie mehrfach ausgeführt, lässt sich die Schnittlinie s dadurch beseitigen, dass man \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich unterwirft, die auf l , dem Rande von \mathfrak{B} und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von s bezüglich $\mathfrak{T}^* - e^*$ die Identität ist, und es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien der angegebenen Art beseitigen.

Jede der verbleibenden Schnittlinien von m und \mathfrak{T}^* berandet auf m ein Elementarflächenstück, das mindestens einen der Punkte R, S enthält, und es muss jedes solche Elementarflächenstück beide Punkte R, S enthalten. Andernfalls gäbe es eine innerste Schnittlinie s , die auf m ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e berandete, das nur einen der Punkte R, S , etwa R , enthielte. s kann nicht nullhomolog auf \mathfrak{T}^* sein, da sich sonst e mit einem von s auf \mathfrak{T}^* berandeten Elementarflächenstück zu einer 2-Sphäre zusammensetzte, die von l nur im Punkte R durchsetzt wird, was unmöglich ist. s kann auch nicht Meridian von \mathfrak{B}^* sein. Es wäre dann e Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , und \mathfrak{B}^* hätte in bezug auf l die Ordnung 1. Nach Folgerung 3 aus Satz 2 widerspricht dies der Voraussetzung, dass l nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Die verbleibenden Schnittlinien von m und \mathfrak{T}^* umfassen also auf m beide Punkte R und S .

Es lässt sich nun die Schnittlinie c von m und η , welche die Punkte R und S verbindet, auf m kombinatorisch isotop so deformieren, dass c keine der verbleibenden Schnittlinien von m und \mathfrak{T}^* trifft. Das Resultat der Deformation lässt sich auch dadurch erhalten, dass man \mathfrak{B} (und damit η) einer s -Abbildung φ der \mathfrak{S}^3 auf sich unterwirft, die m in sich überführt und die auf l , dem Komplement von \mathfrak{B} und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung von m die Identität ist (§ 2, Anmerkung 3 zu Satz 3). Statt φ auf \mathfrak{B} wirken zu lassen, unterwerfen wir \mathfrak{B}^* der Abbildung φ^{-1} . Im Weiteren kann also angenommen werden, dass c die verbliebenen Schnittlinien von m und \mathfrak{T}^* nicht trifft.

Wir beseitigen nun die Schnittlinien von \mathfrak{T}^* mit η . Durch c wird η in zwei Elementarflächenstücke η_1, η_2 zerlegt, die von c und je einem Bogen auf l berandet werden und die

keine Selbstdurchdringung oder Singularität aufweisen. Der Rand von η_1 bzw. η_2 liegt im Inneren von \mathfrak{B}^* , und η_1 bzw. η_2 wird von l in einem Punkte A bzw. B durchsetzt. Von den Schnittlinien von \mathfrak{T}^* mit η_1 kann angenommen werden, dass sie doppelpunktfrei und disjunkt sind. Da diese Schnittlinien Kreislinien sind, müssen sie nullhomolog auf \mathfrak{T}^* oder Meridiane von \mathfrak{B}^* sein. Eine innerste s auf η_1 , die den Punkt A nicht umfasst, kann nicht Meridian von \mathfrak{B}^* sein, da sie sonst auf η_1 eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* berandete, die l nicht trifft, sodass \mathfrak{B}^* in bezug auf l die Ordnung null hätte. s ist also nullhomolog auf \mathfrak{T}^* und kann wie üblich so beseitigt werden, dass keine neuen Schnitte von \mathfrak{T}^* mit η_1 entstehen. Es lassen sich so der Reihe nach alle Schnittlinien auf η_1 beseitigen, die nicht A umfassen, und es kann dann keine weitere Schnittlinie von η_1 und \mathfrak{T}^* vorhanden sein. Andernfalls gäbe es eine innerste s auf η_1 , die A umfasst. Wäre s nullhomolog auf \mathfrak{T}^* , so erhielte man eine 2-Sphäre, die von l in dem einzigen Punkte A durchsetzt wird, was unmöglich ist. Wäre s Meridian von \mathfrak{B}^* , so berandete s auf η_1 eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , und wegen Folgerung 3 aus Satz 2 widerspricht dies der Voraussetzung, dass l nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt.

Wir betrachten nun die Schnittlinien von \mathfrak{T}^* mit η_2 . Keine dieser Schnittlinien kann die auf η_2 liegende Selbstdurchdringung d von η treffen, da \mathfrak{T}^* bereits zu η_1 punktfremd ist. Wie für η_1 lassen sich nun sämtliche Schnittlinien von η_2 und \mathfrak{T}^* beseitigen und zwar so, dass keine neuen Schnitte von \mathfrak{T}^* mit η_1 entstehen, sodass dann \mathfrak{T}^* zu η punktfremd ist.

Es liegt nun η im Inneren von \mathfrak{B}^* , da dies für den Rand l von η der Fall ist. Wenn nun die diagonale Knotenlinie k von η unverknotet ist oder wenn das Komplement von \mathfrak{B}^* im Inneren von \mathfrak{B} liegt, so muss k im Inneren einer auf \mathfrak{B}^* liegenden Kugel \mathfrak{K} enthalten sein. Im ersten Fall folgt dies aus der Verknotung von \mathfrak{B}^* und § 7 Satz 1, im zweiten aus § 15 Satz 2, da k Seele von \mathfrak{B} ist. Nun lässt sich aber l auf η kombinatorisch isotop so deformieren, dass l in eine beliebig kleine Umgebung von k zu liegen kommt. (Man kann die Deformation im Urbild $\bar{\eta}$ von η ausführen und auf η übertragen). Da die kombinatorische Deformation auch durch eine isotope simpliziale Deformation des aus l und \mathfrak{T}^* bestehenden Komplexes bewirkt werden kann, müsste es nach § 1 eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich geben, die auf dem Komplement von \mathfrak{B}^* die Identität ist und l so abbildet, dass l ins Innere der Kugel \mathfrak{K} zu liegen kommt. Dann hat aber \mathfrak{B}^* in bezug auf l die Ordnung null im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es muss also k und damit \mathfrak{B} verknotet sein und \mathfrak{B}^* im Inneren von \mathfrak{B} liegen. Da \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung 1 hat, muss \mathfrak{B}^* in bezug auf k und \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}^* die Ordnung 1 haben nach § 9 Satz 3. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind gleich verknotet, und k ist zugleich Seele von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* . Andernfalls läge k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B}^* , und es würde durch eine Seele a^* von \mathfrak{B}^* ein Begleitknoten μ der Ordnung 1 des nicht-orientierten Knotens κ dargestellt,

der von k repräsentiert wird. Andererseits läge a^* bei verschiedener Verknötung von \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} , wobei \mathfrak{B} in bezug auf a^* die Ordnung 1 hätte, und man erhielte damit κ als Begleitknoten von μ . Nach § 13 Satz 1 müsste dann κ Begleitknoten von sich selbst sein, was wegen § 13 Satz 2 ausgeschlossen ist. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind also gleich verknötet.

Satz 3: *Es sei λ ein Schlingknoten mit dem vom Kreis verschiedenen Diagonalknoten κ . Ist μ ein von κ verschiedener Begleitknoten der Ordnung γ von λ , so ist γ gerade und μ Begleitknoten der Ordnung $\frac{\gamma}{2}$ von κ . Ferner tritt κ als Begleitknoten von λ nur mit der Ordnung 2 auf.*

Beweis: Es mögen l und \mathfrak{B} die bisherige Bedeutung haben. \mathfrak{B}^* sei ein verknöteter Vollring, der l nicht-trivial im Inneren enthält und der mit l den von κ verschiedenen Begleitknoten μ von λ mit der Ordnung γ darstellt. Auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* kann § 18 Satz 1 angewendet werden (wobei dort k durch l zu ersetzen ist). Dabei kann der Fall 4 nicht eintreten, da es sonst einen Vollring \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B} gäbe, der l im Inneren enthielte, der ebenso wie \mathfrak{B} in bezug auf l die Ordnung 2 hätte (wegen § 9 Satz 3), und es wären \mathfrak{B} und \mathfrak{B} nicht gleich verknötet im Widerspruch zu Hilfssatz 3. Ferner scheiden die Fälle 1 und 3 von § 18 Satz 1 aus, denn in beiden Fällen käme der Rand von \mathfrak{B}^* ins Innere von \mathfrak{B} zu liegen, was wegen Hilfssatz 3 unmöglich ist, da \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* nicht gleich verknötet sind. Es kann nur der Fall 2 eintreten. Wenn man also \mathfrak{B}^* einer geeigneten s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich unterwirft, die auf l die Identität ist, so liegt \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* . \mathfrak{B} hat in bezug auf l die Ordnung 2 nach Hilfssatz 2, \mathfrak{B}^* hat in bezug auf l die Ordnung γ . Nach § 9 Satz 3 hat \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} , also in bezug auf die Seele k von \mathfrak{B} , die Ordnung $\frac{\gamma}{2} \neq 0$. Da κ von μ verschieden ist, wird μ durch \mathfrak{B}^* mit k als Begleitknoten der Ordnung $\frac{\gamma}{2}$ von κ dargestellt.

Um die letzte Behauptung des Satzes zu beweisen, nehmen wir an, dass κ durch einen Vollring \mathfrak{B}^* , der l nicht-trivial im Inneren enthält, und l als Begleitknoten der Ordnung $\gamma > 2$ dargestellt wird. Auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* liesse sich wieder § 18 Satz 1 anwenden. Die Fälle 1, 3 und 4 könnten wieder nicht eintreten, Fall 1 führte zu einem Widerspruch zu § 9 Satz 3 wegen $\gamma > 2$ und Hilfssatz 2, Fall 3 ist ausgeschlossen durch Hilfssatz 3, da sonst der Rand von \mathfrak{B}^* ins Innere von \mathfrak{B} zu liegen käme, während \mathfrak{B}^* nicht im Inneren von \mathfrak{B} läge, und schliesslich kommt Fall 4 nicht in Frage, da \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* in bezug auf l verschiedene Ordnungen haben sollten. Es führt aber auch der Fall 2 zu einem Widerspruch. Man könnte dann nämlich erreichen, dass \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* läge, wobei \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung $\frac{\gamma}{2}$ hätte wegen § 9 Satz 3. Wegen $\frac{\gamma}{2} > 1$ erhielte man damit den Diagonalknoten

\varkappa von λ als Begleitknoten der Ordnung $\frac{\gamma}{2}$ von sich selbst im Widerspruch zu § 13 Satz 2.

Der Satz ist damit bewiesen.

Anmerkung zu Satz 3:

1) Das eben Bewiesene lässt sich mit Hilfe der in § 13 definierten Anordnung in der Menge der Knoten und nicht-orientierten Knoten auch so ausdrücken: Für einen Schlingknoten λ mit dem vom Kreis verschiedenen Diagonalknoten \varkappa ist \varkappa maximaler Begleitknoten und zwar der einzige.

2) Aus Satz 3 folgt insbesondere wegen Folgerung 2 aus Satz 2: Ein Schlingknoten besitzt keinen Begleitknoten ungerader Ordnung.

3) Ein orientierter Schlingknoten λ mit vom Kreis verschiedenem Diagonalknoten besitzt keinen orientierten Begleitknoten, d.h.: Liegt der Repräsentant l von λ nicht-trivial im Inneren eines Vollringes \mathfrak{B}^* , so ist l nullhomolog auf \mathfrak{B}^* . Dies ergibt sich aus § 9 Satz 4, wenn man wie im Vorgehenden \mathfrak{B}^* so abbildet, dass \mathfrak{B} ins Innere von \mathfrak{B}^* zu liegen kommt.

Satz 4: *Ein Schlingknoten, der den Kreis als Diagonalknoten besitzt, ist einfach.*

Beweis: Es mögen l , η und k die bisherige Bedeutung haben, wobei k unverknotet ist. Nehmen wir an, dass es einen verknoteten Vollring \mathfrak{B}^* gäbe, der l nicht-trivial im Inneren enthält. Es sei \mathfrak{X}^* der Rand von \mathfrak{B}^* .

η wird durch einen Querschnitt c in zwei singularitätenfreie Elementarflächenstücke η_1 und η_2 zerlegt, die sich gegenseitig in der Selbstdurchdringung d von η durchdringen. Es sei A der Schnittpunkt von η_1 mit dem Rande von η_2 , B der Schnittpunkt von η_2 mit dem Rande von η_1 . Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{X}^* und c nur aus (isolierten) Schnittpunkten besteht, da sich dies stets dadurch erreichen lässt, dass man \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich unterwirft, die die Ecken einer simplizialen Zerlegung von \mathfrak{X}^* verschiebt und auf l die Identität ist.

Wir betrachten nun den Durchschnitt von \mathfrak{X}^* und η_1 . Es kann angenommen werden, dass er nur aus doppelungsfreien und paarweise disjunkten Schnittlinien besteht, die in einem Punkte von c entspringen und in einem anderen Punkte von c enden, und möglicherweise noch weiteren geschlossenen, doppelungsfreien Schnittlinien, die sich gegenseitig und die ersten nicht treffen. Die geschlossenen Schnittlinien lassen sich beseitigen wie im Beweise von Hilfssatz 3.

Den noch verbleibenden Schnittlinien von \mathfrak{X}^* und η_1 , die also auf c entspringen und enden, erteilen wir eine Orientierung, ebenso der Selbstdurchdringung d von η . Auf η_1 hat dann d mit einer Schnittlinie s von η_1 und \mathfrak{X}^* entweder die algebraische Schnittzahl ± 1 oder die algebraische Schnittzahl null, je nachdem ob das von s zusammen mit einem

Bogen von c auf η_1 berandete Elementarflächenstück den Schnittpunkt A von η_1 mit l enthält oder nicht. Da die Schnittlinien doppeltpunktfrei sind und sich gegenseitig nicht treffen, können wir d bei festgehaltenen Endpunkten A, B auf η_1 kombinatorisch isotop so deformieren, dass d mit jeder Schnittlinie nur noch so viele Punkte gemein hat, wie die algebraische Schnittzahl angibt (vgl. dazu § 2 Beweis von Hilfssatz 3). Das Deformationsergebnis können wir auch dadurch erhalten, dass wir η einer s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich unterwerfen, die η_1 auf sich abbildet und auf l die Identität ist (§ 2, Anmerkung 3 zu Satz 3). Die verbleibenden Schnittpunkte von d mit den Schnittlinien von η_1 und \mathfrak{T}^* bezeichnen wir mit P_1, P_2, \dots, P_n . Die Schnittlinie durch P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnen wir mit t_i . Eine Schnittlinie, die d nicht trifft, schneidet von η_1 ein Elementarflächenstück ab, das keine der Schnittlinien t_i enthält. Eine hinreichend kleine Umgebung eines solchen Elementarflächenstückes bezüglich η_1 macht noch ein Elementarflächenstück aus, das kein t_i trifft oder enthält. Wir denken uns dieses letzte Elementarflächenstück von η_1 abgeschnitten und zu η_2 hinzugefügt. Dies kann für alle Schnittlinien ausgeführt werden, die d nicht treffen, sodass wir annehmen können, dass η_1 nur noch die Schnittlinien t_i enthält.

Wir betrachten nun den Durchschnitt von \mathfrak{T}^* mit η_2 . Es kann wieder angenommen werden, dass er aus Schnittlinien besteht, die doppeltpunktfrei und paarweise punktfremd sind und die zum Teil geschlossen sind und zum Teil verschiedene Punkte auf c als Endpunkte haben. Wir betrachten zunächst diejenigen Schnittlinien auf η_2 , die d nicht treffen. Die geschlossenen lassen sich wie im Beweis von Hilfssatz 3 beseitigen. Eine auf c entspringende und endende Schnittlinie, die d nicht trifft, schneidet von η_2 ein Elementarflächenstück ab, das zu d punktfremd ist. Wie oben schneiden wir eine hinreichend kleine Umgebung dieses Elementarflächenstückes bezüglich η_2 , die noch ein zu d punktfremdes Elementarflächenstück auf η_2 ausmacht, von η_2 ab und heften sie an η_1 an, und wir wiederholen dieses Verfahren so oft als möglich.

Nunmehr wenden wir uns wieder η_1 zu. Es ist möglich, dass durch die vorangehende Operation jetzt wieder geschlossene Schnittlinien auf η_1 liegen. Diese treffen d (in einer geraden Anzahl von Punkten) und können wie oben beseitigt werden. Die Anzahl der Punkte P_i auf d verringert sich dabei. Durch die vorangehende Operation kann es auch eintreten, dass sich mehrere der Schnittlinien t_i zusammen mit ursprünglich auf η_2 liegenden Schnittlinien zu einer einzigen zusammensetzen. Wie oben lässt sich wieder erreichen, dass d jede der jetzt vorhandenen Schnittlinien in keinem oder nur einem Punkte trifft, wobei sich die Anzahl der Punkte P_i wieder verringert. Durch Abänderung der Zerlegung von η in η_1 und η_2 kann nun wieder erreicht werden, dass η_1 nur Schnittlinien enthält, die d in genau einem Punkte schneiden. Wir betrachten nun wieder η_2 . Falls nach Beseitigung der auf η_2 geschlossenen Schnittlinien wieder Schnittlinien vorhanden sind, die d nicht

treffen, kann das vorangehende Verfahren wiederholt werden, und dies kann immer wieder dann geschehen, wenn beim erneuten Übergang zu η_2 nicht-geschlossene Schnittlinien auftreten, die d nicht treffen. Das Verfahren muss abbrechen, da sich jedesmal die Anzahl der Schnittpunkte von d mit den Schnittlinien auf η_1 verringert. Es tritt also schliesslich einer der beiden folgenden Fälle ein:

Fall 1: η_1 trifft \mathfrak{I}^* nicht.

Fall 2: η_1 und \mathfrak{I}^* schneiden sich in nicht-geschlossenen Schnittlinien, die d auf η_1 in je einem Punkte schneiden. Auf η_2 wird d von jeder nicht-geschlossenen Schnittlinie geschnitten.

Im Falle 1 lassen sich etwaige Schnittlinien von η_2 und \mathfrak{I}^* wie im Beweise von Hilfssatz 3 beseitigen, sodass schliesslich η im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Da die auf η diagonale Knotenlinie k unverknotet ist, muss k in einer auf \mathfrak{B}^* liegenden Kugel enthalten sein. Wie im Beweise von Hilfssatz 3 folgt hieraus, dass \mathfrak{B}^* in bezug auf l die Ordnung null hat, was der Annahme widerspricht, dass l nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt.

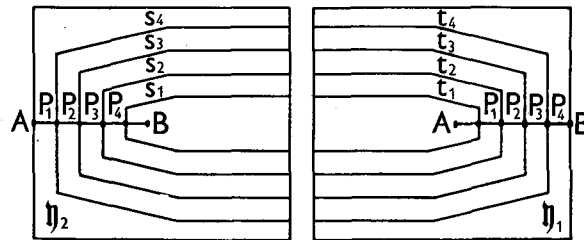


Fig. 20.

Im Falle 2 bezeichnen wir zunächst auf η_1 die Schnittpunkte von d mit den Schnittlinien von η_1 und \mathfrak{I}^* mit P_1, P_2, \dots, P_n und zwar so, dass sie bei Durchlaufen von d in Richtung von A nach B mit wachsendem Index aufeinander folgen. Ferner sei t_i die Schnittlinie von η_1 und \mathfrak{I}^* , die durch P_i geht (Fig. 20). Wir betrachten nun η_2 . Die geschlossenen Schnittlinien von η_2 und \mathfrak{I}^* , die d nicht treffen, können wir uns wieder beseitigt denken. Auf η_2 muss es genau n nicht-geschlossene Schnittlinien s_1, s_2, \dots, s_n geben, da auf der Trennlinie von η_1 und η_2 insgesamt $2n$ Endpunkte der Schnittlinien t_i ($i = 1, 2, \dots, n$) von η_1 liegen und je zwei solche Punkte durch eine Schnittlinie auf η_2 verbunden sein müssen. Jede der Schnittlinien s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) hat mit d mindestens einen Punkt gemein. Als solche Punkte kommen nur die gemeinsamen Punkte P_i von d und \mathfrak{I}^* in Frage. Da sich die Schnittlinien s_i gegenseitig nicht treffen, geht jede durch genau einen der Punkte P_i , und wir denken uns die Schnittlinien s_i so numeriert, dass s_i durch P_{n+1-i} geht. Man erkennt unmittelbar (Fig. 20), dass sich s_i mit t_i zu einer geschlossenen Schnittlinie u_i

von η mit \mathfrak{T}^* zusammensetzt. Ferner bemerkt man, dass auf η_2 keine geschlossenen Schnittlinien von η_2 und \mathfrak{T}^* liegen können, da diejenigen, die d nicht treffen, beseitigt sind. Ferner bemerken wir, dass n gerade, also mindestens gleich 2, sein muss, da der Rand l von η und damit auch die Schnittpunkte A, B von l mit η im Inneren von \mathfrak{B}^* liegen. l und u_n beranden nun auf η einen Kreisring r , der von Selbstdurchdringungen frei ist, da die auf d liegenden Stücke AP_1 (auf η_2) und P_nB (auf η_1) wegen $P_1 \neq P_n$ keinen Punkt gemein haben. r liegt auf \mathfrak{B}^* , da sein Rand l im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. u_n liegt auf dem Rande von \mathfrak{B}^* , und es sind l und u_n bei geeigneter Orientierung auf \mathfrak{B}^* kombinatorisch isotop, wie man mittels r aus § 2 Hilfssatz 4 erkennt. Nun stellt l und damit u_n einen Knoten dar, der nach Satz 1 höchstens das Geschlecht 1 hat. \mathfrak{B}^* ist ein verknoteter Vollring, durch dessen Seelen nach § 5 Satz 3 ein Knoten dargestellt wird, der mindestens das Geschlecht 1 hat. Es kann daher u_n auf \mathfrak{B}^* höchstens die Umlaufzahl 1 besitzen, da sich sonst ein Widerspruch zu dem Satz von § 12 erhalten liesse. Hat u_n auf \mathfrak{B}^* die Umlaufzahl null, so ist u_n nullhomolog auf \mathfrak{T}^* oder Meridian von \mathfrak{B}^* , also jedenfalls Kreislinie. Dann ist auch l unverknotet, und nach § 7 Satz 1 muss l trivial im Inneren des verknoteten Vollringes \mathfrak{B}^* liegen. Hat u_n auf \mathfrak{B}^* die Umlaufzahl 1, so ist u_n nach § 9 Hilfssatz 1 und § 6 Hilfssatz 3 auf \mathfrak{B}^* kombinatorisch isotop zu einer Seele von \mathfrak{B}^* . Daraus folgt, dass durch l und die Seelen von \mathfrak{B}^* bei geeigneter Orientierung derselbe Knoten dargestellt wird. Dies widerspricht der Annahme, dass l nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt, da jeder Knoten von seinen Begleitknoten verschieden ist. Wir erhalten also in jedem Falle einen Widerspruch, sodass es keinen verknoteten Vollring geben kann, der l nicht-trivial im Inneren enthält. Der von l dargestellte nicht-orientierte Knoten ist also einfach.

§ 21. Schlauchknoten.

Es sei \mathfrak{T} ein Torus in der \mathfrak{E}^3 . Wir wollen eine Knotenlinie k betrachten, die auf \mathfrak{T} liegt. Dabei können wir den Fall ausschliessen, dass k auf einem von \mathfrak{T} berandeten Vollring nullhomolog ist, da k in diesem Falle sicher unverknotet ist. Ferner wollen wir ausschliessen, dass k auf einem von \mathfrak{T} berandeten Vollring die Umlaufzahl 1 hat, da k in diesem Falle nach § 9 Hilfssatz 1 und § 6 Hilfssatz 3 denselben Knoten darstellt wie die bezüglich k positiv orientierten Seelen des betreffenden Vollringes. Wir sagen, dass k als *Schlauchknoten auf \mathfrak{T}* liegt, wenn k auf keinem von \mathfrak{T} berandeten Vollring die Umlaufzahl null oder 1 besitzt. Den von k dargestellten Knoten κ nennen wir auch *Schlauchknoten*. Der Knoten, der von den bezüglich k positiv orientierten Seelen eines von \mathfrak{T} berandeten Vollringes dargestellt wird, heisse *Träger* des Schlauchknotens κ . Der Träger ist durch \mathfrak{T} eindeutig bestimmt, da \mathfrak{T} entweder nur einen (verknoteten) Vollring berandet oder zwei unverknotete, wobei man durch jeden dieser beiden Vollringe den Kreis als Träger erhält. Es wäre denkbar,

dass sich ein Knoten (wenn überhaupt) auf verschiedene Weisen als Schlauchknoten darstellen lässt und dabei verschiedene Träger auftreten. Wir werden später sehen, dass dies nicht möglich ist.

\mathfrak{X} berande den Vollring \mathfrak{B} , und es sei a eine Seele von \mathfrak{B} , die bezüglich k positiv orientiert ist, sodass also a den Träger von k darstellt. Ferner sei b ein Breitenkreis, der auf \mathfrak{B} homolog zu a ist, und m ein Meridian von \mathfrak{B} , der mit a die Verschlingungszahl $+1$ hat oder, gleichbedeutend damit, der auf \mathfrak{X} die algebraische Schnittzahl $+1$ mit b besitzt. Auf \mathfrak{X} besteht dann eine Homologie:

$$k \sim \alpha b + \beta m \quad (\alpha, \beta \text{ ganz}).$$

Dabei ist $\alpha \geq 2$ die *Umlaufzahl* von k auf \mathfrak{B} und β die *Verschlingungszahl* von k mit a . Das letzte folgt daraus, dass b mit a die Verschlingungszahl null hat, da b auf $\mathbb{S}^3 - \mathfrak{B} + \mathfrak{X}$ nullhomolog ist. Auf \mathfrak{X} kann β gedeutet werden als algebraische Schnittzahl von k mit b , während $-\alpha$ die algebraische Schnittzahl von k mit m ist.

Schlauchknoten, die mit dem Kreis als Träger dargestellt sind, bezeichnen wir auch als *Torusknoten*. Bei diesen ist \mathfrak{B} unverknotet, und das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} ist ein Vollring \mathfrak{B} , für welchen b Meridian und m Breitenkreis ist. Bei Übergang von \mathfrak{B} zu \mathfrak{B} vertauschen sich Umlauf- und Verschlingungszahl, gegebenenfalls unter gleichzeitigem Vorzeichenwechsel, damit die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} positiv ist. Für Torusknoten muss also auch $|\beta| \geq 2$ sein.

Wir bemerken noch, dass Umlauf- und Verschlingungszahl teilerfremd sind. Da nämlich k doppeltpunktfrei und nicht nullhomolog auf \mathfrak{X} ist, existiert auf \mathfrak{X} ein zu k konjugierter Rückkehrschnitt c , für den etwa gelte

$$c \sim \gamma b + \delta m \quad (\gamma, \delta \text{ ganz}).$$

Nun bilden sowohl b und m als auch k und c eine eindimensionale Homologiebasis auf \mathfrak{X} . Es muss daher gelten

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Wegen $\alpha \geq 2$ folgt daraus, dass $\beta \neq 0$ und teilerfremd zu α ist.

Nach § 10 ist durch Vorgabe des Trägers ein Vollring \mathfrak{B} mit orientierter Seele a in der \mathbb{S}^3 bis auf Äquivalenz durch semilineare Abbildungen der \mathbb{S}^3 auf sich eindeutig bestimmt. Durch Vorgabe einer Umlaufzahl $\alpha \geq 2$ und einer zu α teilerfremden Verschlingungszahl β , deren Betrag für den Kreis als Träger grösser als 1 sei, wird auf dem Rande \mathfrak{X} von \mathfrak{B} eine Homologiekategorie eindeutig bestimmt, wenn man α und β auf die orientierte Seele a von \mathfrak{B} bezieht. Diese Homologiekategorie enthält einfache Wege, da α und β teilerfremd

sind, und nach § 2 Satz 3 wird durch alle einfachen Wege dieser Homologiekategorie derselbe Knoten dargestellt. Wir erhalten also:

Hilfssatz 1: *Durch Träger, Umlauf- und Verschlingungszahl wird ein Schlauchknoten eindeutig bestimmt. Umlauf- und Verschlingungszahl müssen den Bedingungen genügen, dass die Umlaufzahl grösser als 1 ist und dass Umlauf- und Verschlingungszahl teilerfremd sind. Für den Kreis als Träger muss auch der Betrag der Verschlingungszahl grösser als 1 sein.*

Zusatz: Genauer gilt: Sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}' zwei Vollringe in der \mathfrak{S}^3 mit den orientierten Seelen a bzw. a' , durch welche derselbe Knoten dargestellt wird, und sind k und k' Knotenlinien, die als Schlauchknoten auf dem Rande von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}' liegen und bezüglich a bzw. a' in Umlauf- und Verschlingungszahl übereinstimmen, so gibt es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \mathfrak{B} so auf \mathfrak{B}' abbildet, dass a in a' und k in k' übergeht.

Wir stellen nun fest, dass ein Schlauchknoten stets vom Kreis verschieden ist. Falls nämlich der Träger kein Kreis ist, folgt dies aus § 7 Hilfssatz 2. Für den Kreis als Träger ergibt sich dies aus dem Alexanderschen Polynom, das von Burau [4] berechnet wurde und das die Gestalt hat

$$\Delta_{\alpha, \delta}(x) = \frac{(x^{\alpha\delta} - 1)(x - 1)}{(x^\alpha - 1)(x^\delta - 1)},$$

wenn α die Umlaufzahl und δ den Betrag der Verschlingungszahl bezeichnen. $\Delta_{\alpha, \delta}(x)$ ist sicher nicht identisch 1 wie das Alexandersche Polynom des Kreises, wenn α und δ grösser als 1 sind.

Wir erhalten damit als Gegenstück zu § 7 Hilfssatz 2:

Hilfssatz 2: *Es sei \mathfrak{B} ein unverknöteter Vollring in der \mathfrak{S}^3 . Eine Kreislinie s auf dem Rande \mathfrak{L} von \mathfrak{B} ist entweder nullhomolog auf \mathfrak{L} , oder mindestens eine der beiden algebraischen Schnittzahlen auf \mathfrak{L} von s mit einem Meridian und einem Breitenkreis von \mathfrak{B} besitzt den Betrag 1.*

Sei wieder k eine Knotenlinie, die auf dem Rande \mathfrak{L} des Vollringes \mathfrak{B} als Schlauchknoten liegt. k' sei eine Knotenlinie im Inneren von \mathfrak{B} . Wenn es einen Kreisring r gibt, der von k und k' berandet wird und dessen Durchschnitt mit \mathfrak{L} nur aus k besteht, so sagen wir, dass k' als Schlauchknoten in \mathfrak{B} liegt.

Satz 1: *Die Knotenlinie k liege auf dem Rande \mathfrak{L} des Vollringes \mathfrak{B} als Schlauchknoten mit der Umlaufzahl α . Die Verschlingungszahl von k mit einer orientierten Seele a von \mathfrak{B} habe den Betrag δ . Bezeichnet $g(k)$ bzw. $g(\mathfrak{B})$ das Geschlecht des von k bzw. a dargestellten Knotens, so gilt*

$$g(k) = \frac{(\alpha - 1)(\delta - 1)}{2} + \alpha g(\mathfrak{B}).$$

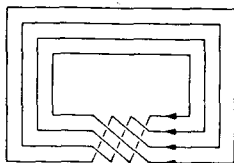


Fig. 21.

Beweis: Für Schlauchknoten mit dem Kreis als Träger (Torusknoten) wurde das Geschlecht von Seifert in [11] bestimmt und zwar zu

$$\frac{(\alpha - 1)(\delta - 1)}{2}.$$

Dabei wird von einer Knotenprojektion mit $(\alpha - 1)\delta$ Doppelpunkten ausgegangen, die in Fig. 21 für den Fall $\alpha = 4$, $\delta = 3$ wiedergegeben ist. Aus dem Verfahren, nach dem Seifert eine Fläche minimalen Geschlechtes in eine Knotenlinie mit solcher Projektion einspannt, lässt sich entnehmen: In einen Repräsentanten k^* eines Torusknotens, der als Schlauchknoten in einem unverknoteten Vollring \mathfrak{B}^* liegt, lässt sich eine Fläche von minimalem Geschlecht so einspannen, dass sie den Rand von \mathfrak{B}^* in genau α Breitenkreisen trifft. Ferner ist zu bemerken, dass zwar für Torusknoten $\delta \geq 2$ vorauszusetzen ist, dass aber der angeführte Sachverhalt auch für den Fall $\delta = 1$ gültig bleibt.

Liegt nun die Knotenlinie k als Schlauchknoten auf dem Rande \mathfrak{T} eines verknoteten Vollringes \mathfrak{B} , so bilden wir \mathfrak{B} durch eine treue Abbildung φ auf einen unverknoteten Vollring \mathfrak{B}^* im Inneren eines 3-Simplexes der \mathbb{S}^3 ab. Die Breitenkreise von \mathfrak{B} gehen dabei in Breitenkreise von \mathfrak{B}^* über. Aus k entsteht eine Knotenlinie k^* auf dem Rande \mathfrak{T}^* von \mathfrak{B}^* . Wegen § 2 Satz 3 und § 10 kann dabei φ so gewählt werden, dass k^* eine Projektion der durch Fig. 21 bezeichneten Art besitzt. Neben k^* betrachten wir eine Knotenlinie k_0^* , die im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt und zusammen mit k^* einen Kreisring r^* berandet, dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T}^* nur aus k^* besteht. Es kann offenbar angenommen werden, dass auch k_0^* eine Projektion der durch Fig. 21 bezeichneten Art besitzt. k_0^* sei so orientiert, dass k_0^* auf r^* zu k^* homolog ist. Vermöge φ^{-1} geht k_0^* in eine Knotenlinie k_0 über, die als Schlauchknoten in \mathfrak{B} liegt und denselben Knoten wie k darstellt. Aus dem Vorangehenden und dem Satz von § 12 folgt nun ohne weiteres auch die Behauptung des Satzes für Schlauchknoten mit verknotetem Träger.

Für die weitere Untersuchung sei wieder k eine Knotenlinie, die als Schlauchknoten auf dem Torus \mathfrak{T} liege. Ferner sei \mathfrak{B}^* ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthalte. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{T} und dem Rande \mathfrak{T}^* von \mathfrak{B}^* nur aus doppeltpunktfreien Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen.

Wir wollen zeigen, dass sich alle Schnittlinien dadurch beseitigen lassen, dass man \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich unterwirft, die k punktweise festlässt.

Da k von keiner Schnittlinie getroffen wird, ist eine Schnittlinie von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* auf \mathfrak{I} entweder nullhomolog oder, bei geeigneter Orientierung, homolog zu k . Im ersten Falle ist die Schnittlinie unverknotet, im zweiten verknotet. Wir betrachten zunächst diejenigen, die auf \mathfrak{I} nullhomolog sind, und unter ihnen eine innerste s , die auf \mathfrak{I} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie (und auch k nicht) enthält. s ist auch auf \mathfrak{I}^* nullhomolog. Dies folgt wegen der Verknotung von \mathfrak{B}^* aus § 7 Hilfssatz 2 und der Tatsache, dass s nicht Meridian von \mathfrak{B}^* sein kann, da andernfalls e eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* wäre, die k nicht trifft, und somit k trivial in \mathfrak{B}^* läge. s berandet also auf \mathfrak{I}^* ein Elementarflächenstück e^* , und es beranden e und e^* zusammen eine Kugel \mathfrak{K} , die k nicht enthält. \mathfrak{K} enthält auch $\mathfrak{I}^* - e^*$ nicht, da sonst das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K} eine auf \mathfrak{B}^* liegende Kugel wäre, die k im Inneren enthielte. Es liegt aber k nicht-trivial in \mathfrak{B}^* . Wie mehrfach erörtert, kann durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die auf \mathfrak{B}^* nicht aber auf \mathfrak{B} wirkt, erreicht werden, dass e^* über \mathfrak{K} deformiert und von e abgehoben wird, sodass die Schnittlinie s verschwindet und keine neuen Schnittlinien entstehen. Diese s -Abbildung kann zudem so vorgenommen werden, dass sie auf k die Identität ist, da \mathfrak{K} von k nicht getroffen wird. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Schnittlinien beseitigen, die nullhomolog auf \mathfrak{I} sind.

Die verbleibenden Schnittlinien von \mathfrak{I} und \mathfrak{I}^* werden so orientiert, dass sie auf \mathfrak{I} homolog zu k sind. Da sie verknotet sind, ist keine von ihnen nullhomolog auf \mathfrak{I}^* . Sie bilden also auf \mathfrak{I}^* ein System von Parallelkurven, die nicht Meridiane von \mathfrak{B}^* sind. Die Umlaufzahl α^* der Schnittlinien auf \mathfrak{B}^* ist grösser als 1. Auf \mathfrak{I} berandet nämlich k zusammen mit einer der Schnittlinien einen Kreisring, der auf \mathfrak{B}^* liegt. Hätten nun die Schnittlinien auf \mathfrak{B}^* die Umlaufzahl 1, so müssten sie nach § 6 Hilfssatz 3 denselben Knoten darstellen wie eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B}^* , woraus wegen § 13 Satz 2 folgte, dass k orientierte Seele von \mathfrak{B}^* wäre, was wir ausgeschlossen hatten. Es ist also $\alpha^* > 1$.

Durch die Schnittlinien wird \mathfrak{I} in Kreisringe zerlegt, die abwechselnd auf \mathfrak{B}^* und $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegen. Wir betrachten nun zwei Schnittlinien s_1, s_2 , die auf \mathfrak{I} einen Kreisring r beranden, der auf $\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{B}^* + \mathfrak{I}^*$ liegt, und zeigen, dass sich beide gleichzeitig beseitigen lassen. Durch s_1 und s_2 wird \mathfrak{I}^* in zwei Kreisringe r_1^*, r_2^* zerlegt, und nach § 17 Satz 1 berandet einer dieser Kreisringe, etwa r_1^* , zusammen mit r einen Vollring \mathfrak{B} , der \mathfrak{B}^* umfasst und auf dem s_1 und s_2 nicht nullhomolog sind. \mathfrak{B} wird durch r_2^* gemäss § 16 Satz 1 zerlegt. Da s_1 und s_2 auf \mathfrak{B}^* die Umlaufzahl $\alpha^* > 1$ haben, ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B}^* bezüglich \mathfrak{B} ein Vollring \mathfrak{U} , auf dem s_1 und s_2 die Umlaufzahl 1 haben. Nach § 8 lassen sich nun die Schnittlinien s_1 und s_2 dadurch beseitigen, dass man r_2^* über

\mathcal{U} deformiert und anschliessend von r abhebt. Das kann so geschehen, dass keine neuen Schnittlinien entstehen. Das Deformationsergebnis lässt sich auch dadurch erhalten, dass man \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich unterwirft, die auf k die Identität ist, da k auf \mathfrak{B}^* liegt und somit zu \mathcal{U} punktfremd ist. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle Schnittlinien beseitigen, sodass schliesslich \mathfrak{T} im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Wir erhalten also

Hilfssatz 3: *Die Knotenlinie k liege als Schlauchknoten auf dem Torus \mathfrak{T} und ausserdem nicht-trivial im Inneren des verknöteten Vollringes \mathfrak{B}^* . Durch eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, lässt sich \mathfrak{B}^* in einen Vollring überführen, der \mathfrak{T} im Inneren enthält.*

Falls nun \mathfrak{T} zwei unverknötete Vollringe $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ berandet, so müsste einer von ihnen, etwa \mathfrak{B}_1 , im Inneren von \mathfrak{B}^* liegen, und jede Seele von \mathfrak{B}_1 läge nach § 7 Satz 1 in einer auf \mathfrak{B}^* liegenden Kugel. Nach § 9 Satz 1 hätte also \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B}_1 die Ordnung null, und nach § 9 Hilfssatz 3 gäbe es eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , die \mathfrak{B}_1 nicht trifft, sodass \mathfrak{B}^* auch in bezug auf k die Ordnung null hätte im Widerspruch zur Voraussetzung, dass k nicht-trivial in \mathfrak{B}^* liegt. Es ist also in diesem Falle nicht möglich, dass k nicht-trivial im Inneren eines verknöteten Vollringes liegt, oder

Satz 2: *Torusknoten sind einfach.*

Falls \mathfrak{T} einen verknöteten Vollring \mathfrak{B} berandet, so liegt \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* . Andernfalls gäbe es nach § 15 Anmerkung zu Satz 1 eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , die \mathfrak{B} nicht trifft, woraus folgte, dass k trivial in \mathfrak{B}^* läge. \mathfrak{B}^* enthält also \mathfrak{B} im Inneren. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind nun entweder gleich verknötet, oder es wird durch \mathfrak{B}^* und eine bezüglich k positiv orientierte Seele a von \mathfrak{B} ein Begleitknoten des Trägers des von k dargestellten Schlauchknotens \varkappa dargestellt. Jeder vom Träger verschiedene Begleitknoten von \varkappa ist also gleichzeitig Begleitknoten des Trägers. Dies lässt sich auch so ausdrücken:

Satz 3: *Für einen Schlauchknoten mit verknötetem Träger ist der Träger der einzige maximale Begleitknoten.*

Aus den Sätzen 2 und 3 folgt, dass ein Schlauchknoten seinen Träger eindeutig bestimmt. Ausserdem erhalten wir bei verknötetem Träger, dass \mathfrak{B}^* nicht die Ordnung 1 in bezug auf k haben kann, denn ist $\alpha \neq 1$ die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} , so ist die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B}^* nach § 9 Satz 4 entweder null oder ein positives Vielfaches von α , woraus wegen § 9 Hilfssatz 1 folgt, dass die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf k nicht 1 ist. Wegen § 14 Satz 3 folgt hieraus

Satz 4: *Jeder Schlauchknoten ist Primknoten.*

Aus den Sätzen 1 und 4 ergibt sich noch, dass es Primknoten von beliebigem Geschlecht grösser als null gibt.

Wir wollen nun annehmen, dass \mathfrak{B}^* verknotet ist und dass k als Schlauchknoten in \mathfrak{B}^* liegt. Nach Satz 3 sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet. Da \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} nicht die Ordnung null haben kann, muss nach § 13 Satz 2 eine Seele von \mathfrak{B} zugleich Seele von \mathfrak{B}^* sein, woraus folgt, dass die Umlaufzahlen von k auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* übereinstimmen. Wir erhalten damit, dass für einen Schlauchknoten mit verknotetem Träger jede Darstellung durch eine Knotenlinie, die als Schlauchknoten auf einem Torus liegt, nicht nur denselben Träger sondern auch dieselbe Umlaufzahl besitzt. Wir wollen noch zeigen, dass dies auch für die Verschlingungszahl gilt.

Die Knotenlinie k , die als Schlauchknoten in \mathfrak{B}^* liegt, berandet zusammen mit einer Knotenlinie k' , die als Schlauchknoten auf dem Rande \mathfrak{T}^* von \mathfrak{B}^* liegt, einen Kreisring r , dessen Durchschnitt mit \mathfrak{T}^* nur aus k' besteht. k' sei so orientiert, dass k' auf r zu k homolog ist. Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von \mathfrak{T} und r ausser aus k nur aus endlich vielen doppelungsfreien Schnittlinien besteht, die entweder geschlossen sind und den Rand von r nicht treffen oder auf k entspringen und enden, wobei sich zwei Schnittlinien höchstens auf k (also in Endpunkten) treffen können.

Wir betrachten zunächst die geschlossenen Schnittlinien. Eine solche ist auf r entweder nullhomolog oder (bei geeigneter Orientierung) homolog zu k' . Eine auf r nullhomologe Schnittlinie ist auch auf \mathfrak{T} nullhomolog. Da sie nämlich k nicht trifft, könnte sie auf \mathfrak{T} sonst nur zu $\pm k$ homolog sein, was unmöglich ist, da sie als Rand eines Elementarflächenstückes auf r unverknotet ist. Die auf r nullhomologen geschlossenen Schnittlinien lassen sich daher wie mehrfach ausgeführt durch Deformation von r beseitigen.

Wenn nun geschlossene Schnittlinien existieren, die auf r homolog zu k' sind, so gibt es unter ihnen eine solche, wir nennen sie k^* , die mit k' auf r einen Kreisring r^* berandet, der keine weitere Schnittlinie enthält. Da k von k^* nicht getroffen wird, ist k^* auch auf \mathfrak{T} homolog zu k . Es kann nämlich k^* nicht nullhomolog auf \mathfrak{T} sein, da k^* verknotet ist, und es kann k^* auch nicht homolog $-k$ auf \mathfrak{T} sein, da sonst k auf \mathfrak{B}^* homolog $-k$, also nullhomolog, wäre. Wir ersetzen dann r durch r^* .

Falls keine solche Schnittlinie von r und \mathfrak{T} auftritt, betrachten wir diejenigen, die auf k entspringen und enden, und zwar zunächst solche, deren Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Diese können als geschlossene Schnittlinien aufgefasst werden. Diejenigen, die auf r nullhomolog sind, sind es auch auf \mathfrak{T} . Sie sind nämlich unverknotet und nach § 7 Hilfssatz 2 entweder nullhomolog auf \mathfrak{T} oder Meridiane von \mathfrak{B} , da \mathfrak{B} verknotet ist. Meridiane scheiden aus, da jeder Meridian mit k mehr als einen Punkt gemein haben muss. Es können nun diese Schnittlinien wieder der Reihe nach durch Deformation von r beseitigt werden, wobei nur beim Abheben der auf k liegende Punkt festgehalten werden muss, was nach den Erörterungen von § 1 möglich ist. Existieren geschlossene Schnittlinien von r und \mathfrak{T} ,

die mit k genau einen Punkt gemein haben und die auf r nicht nullhomolog sind, so sind sie auf r (bei geeigneter Orientierung) homolog zu k' , und es gibt unter ihnen eine, sie heiße k^* , die zusammen mit k' auf r einen Kreisring r^* berandet, der keine weitere Schnittlinie enthält. Wir ersetzen r durch r^* und zeigen, dass k^* auf \mathfrak{X} zu k homolog ist. Da k^* verknotet ist, kann k^* auf \mathfrak{X} nicht nullhomolog sein. Die algebraische Schnittzahl von k und k^* auf \mathfrak{X} ist null oder ± 1 , da k und k^* nur einen Punkt gemein haben. Wäre diese Schnittzahl ± 1 , so wäre k^* ein zu k konjugierter Rückkehrschnitt von \mathfrak{X} , der denselben Knoten wie k darstellt. Dies ist aber unmöglich, da die Invarianz der Umlaufzahl bereits nachgewiesen wurde und k^* als Schlauchknoten auf \mathfrak{X} liegt. Wegen der Verknotung von k^* ist nämlich die Umlaufzahl von k^* auf \mathfrak{B} nicht null, und sie kann nicht 1 sein, da sonst k und k^* wegen Satz 1 und § 6 Hilfssatz 3 Knoten verschiedenen Geschlechtes darstellten. Es muss also k^* auf \mathfrak{X} mit k die algebraische Schnittzahl null besitzen. Daraus folgt, dass k und k^* auf \mathfrak{X} homolog sind, denn es kann wieder nicht k^* homolog $-k$ sein.

Falls auch Schnittlinien der eben betrachteten Art nicht auftreten, wenden wir uns denjenigen zu, die in einem Punkte von k entspringen und in einem anderen Punkte von k enden. Jede bildet zusammen mit einem geeigneten Bogen von k auf r eine nullhomologe geschlossene Kurve. Eine solche geschlossene Kurve ist auch nullhomolog auf \mathfrak{X} . Da sie nämlich als Rand eines Elementarflächenstückes unverknotet ist und da \mathfrak{B} verknotet ist, kann sie nach § 7 Hilfssatz 2 entweder nur Meridian von \mathfrak{B} oder nullhomolog auf \mathfrak{X} sein. Meridiane scheiden aus, da die algebraische Schnittzahl einer solchen Kurve mit k auf \mathfrak{X} nur null oder ± 1 sein kann, wie man sofort durch isotope kombinatorische Deformation erkennt. Es lassen sich daher die Schnittlinien der Reihe nach durch Deformation von r beseitigen, wobei nur das auf k liegende Stück beim Abheben festzuhalten ist. Sind so alle Schnittlinien beseitigt, bezeichnen wir r auch mit r^* und k mit k^* .

In jedem Falle ist erreicht, dass der Kreisring r^* auf $\mathfrak{B}^* - \mathfrak{B} + \mathfrak{X}$ liegt und mit \mathfrak{X} nur den Rand k^* gemein hat, der auf \mathfrak{X} zu k homolog ist.

Eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} ist nun zugleich eine solche für \mathfrak{B}^* , und es haben k' , k^* und k mit ihr dieselbe Verschlingungszahl, wie sich vermöge r^* und aus der Tatsache ergibt, dass k und k^* auf \mathfrak{X} homolog sind. Wir erhalten also:

Lässt sich ein Knoten als Schlauchknoten mit verknotetem Träger darstellen, so sind für jede Darstellung durch eine Knotenlinie, die als Schlauchknoten auf einem Torus liegt, Träger, Umlauf- und Verschlingungszahl dieselben.

Es bleiben noch die Torusknoten zu untersuchen. Bei diesen lassen sich Umlauf- und Verschlingungszahl so normieren, dass die Umlaufzahl kleiner als der Betrag der Verschlingungszahl ist, da man eine Knotenlinie, die auf dem Rande eines unverknoteten Vollringes \mathfrak{B} als Schlauchknoten liegt, auch auf denjenigen Vollring beziehen kann, der

das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} ausmacht. Aus dem oben angegebenen Alexander-schen Polynom solcher Knoten erkennt man sofort, dass bei dieser Normierung zwei solche Knoten nur dann gleich sein können, wenn sie in Umlaufzahl und Betrag der Verschlingungszahl übereinstimmen. Zwei Torusknoten sind aber auch dann verschieden, wenn sie in der Umlaufzahl übereinstimmen und sich im Vorzeichen der Verschlingungszahl unterscheiden. Dies wurde zuerst von Dehn [5] für die Kleeblattschlingen (Umlaufzahl 2, Betrag der Verschlingungszahl 3) nachgewiesen mit einer Betrachtung, die sich auf den allgemeinen Fall überträgt, und später durch Schreier [8] durch Untersuchung der Automorphismen der Knotengruppe.

Zusammen mit Hilfssatz 1 erhalten wir:

Satz 5: *Für einen Schlauchknoten bilden Träger, Umlauf- und Verschlingungszahl ein vollständiges Invariantensystem, wenn im Falle des Kreises als Träger Umlauf- und Verschlingungszahl so bezogen werden, dass die erste kleiner als der Betrag der zweiten ist.*

Dieser Satz überträgt sich wegen § 2 Satz 4 auf Verkettungen von Knotenlinien, die als Schlauchknoten auf dem Rande desselben Vollringes liegen. Als weitere Invariante kommt lediglich die Anzahl der Knotenlinien hinzu.

Aus Satz 5 folgt noch, dass ein Schlauchknoten genau dann symmetrisch ist, wenn es der Träger ist, und dass kein Schlauchknoten amphicheiral ist.

§ 22. Schlauchzöpfe.

Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{E}^3 . Wie in § 3 können wir \mathfrak{B} darstellen durch ein Prisma \mathfrak{P} im R^3 und eine simpliziale Abbildung σ von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} , bei welcher jeder Punkt P der Bodenfläche von \mathfrak{P} denselben Bildpunkt hat wie derjenige Punkt der Dachfläche, der aus P durch Translation längs der Achse von \mathfrak{P} entsteht, während jedes andere Paar von Punkten aus \mathfrak{P} verschiedene Bildpunkte hat. Ist a' die Achse von \mathfrak{P} , die so orientiert ist, dass sie von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führt, so ist $\sigma(a')$ eine orientierte

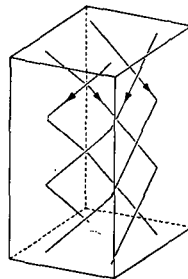


Fig. 22.

Seele a von \mathfrak{B} . a möge den Knoten λ darstellen. Man erkennt nun leicht (Fig. 22): In \mathfrak{B} kann man $\alpha > 1$ Sehnen $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ finden, die von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führen und so beschaffen sind, dass

1. jede Ebene, die parallel zur Bodenfläche von \mathfrak{B} ist und \mathfrak{B} trifft, jede Sehne k_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) in nur je einem Punkte trifft und dass
2. sich die Sehnen k_i bei Ausführung der Abbildung σ zu einer Knotenlinie k zusammensetzen, die als Schlauchknoten in \mathfrak{B} liegt.

k stellt dann einen Schlauchknoten \varkappa mit dem Träger λ und der Umlaufzahl α dar, und man kann hierbei offenbar auch noch die Verschlingungszahl von \varkappa beliebig vorgeben. Man kann also auf diese Weise jeden Schlauchknoten erhalten. Für die Eigenschaft 1. der Sehnen k_i von \mathfrak{B} wollen wir kurz sagen, dass die *Sehnen monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führen*.

Wir wollen nun den Begriff des Schlauchknotens folgendermassen verallgemeinern: Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , k eine Knotenlinie im Inneren von \mathfrak{B} , die auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl $\alpha > 1$ besitze. Wenn sich \mathfrak{B} längs einer Meridianfläche so zu einem Prisma \mathfrak{P} aufschneiden lässt, dass k dabei in α Sehnen von \mathfrak{P} übergeht, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führen, so sagen wir, dass

- \mathfrak{B} mit k *einen geschlossenen Zopf darstellt*, wenn \mathfrak{B} unverknotet ist, und dass
- \mathfrak{B} mit k *einen Schlauchzopf darstellt*, wenn \mathfrak{B} verknotet ist.

Wird durch den Vollring \mathfrak{B}_1 mit der Knotenlinie k_1 und durch den Vollring \mathfrak{B}_2 mit der Knotenlinie k_2 je ein geschlossener Zopf bzw. Schlauchzopf dargestellt, so bezeichnen wir diese Darstellungen als *äquivalent*, wenn es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, welche \mathfrak{B}_2 so auf \mathfrak{B}_1 abbildet, dass dabei k_2 in k_1 übergeht. In diesem Falle sind \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 gleich verknotet. Ausserdem sind für diesen Äquivalenzbegriff Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt. Eine Äquivalenzklasse der Darstellungen von geschlossenen Zöpfen bzw. von Schlauchzöpfen bezeichnen wir als *geschlossenen Zopf* bzw. *Schlauchzopf*.

Wenn der Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k einen geschlossenen Zopf bzw. Schlauchzopf Z darstellt und $\alpha > 1$ dabei die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} ist, so bezeichnen wir α auch als *Fädenzahl* von Z . Sie ist offenbar unabhängig von der Darstellung von Z . Wir haben gefordert, dass die Fädenzahl stets grösser als 1 sein soll, da man für $\alpha = 1$ orientierte Seelen der betreffenden Vollringe erhalten würde nach § 6 Hilfssatz 2.

In der betrachteten Darstellung von Z wird durch k ein Knoten \varkappa und durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} ein Knoten λ dargestellt. Aus der Definition der Äquivalenz für Darstellungen von geschlossenen Zöpfen bzw. von Schlauchzöpfen folgt unmittelbar, dass diese Knoten unabhängig von der Darstellung von Z sind. Wir bezeichnen λ als *Träger* von Z (der Träger eines geschlossenen Zopfes ist also der Kreis)

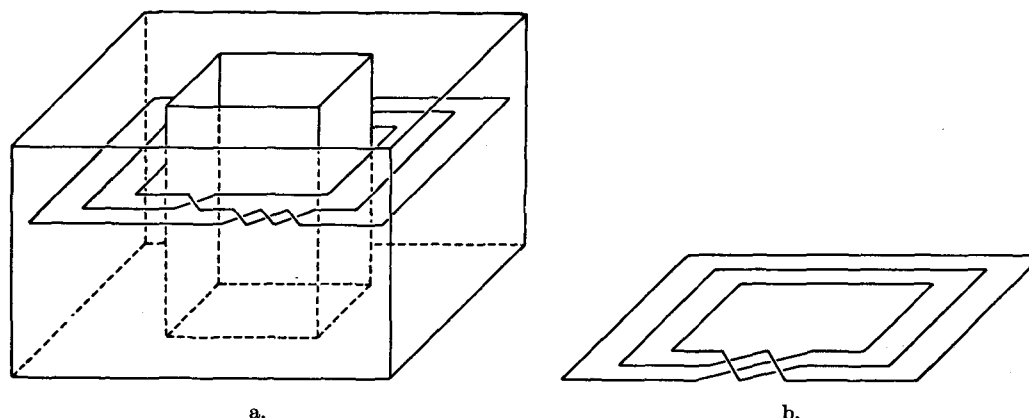


Fig. 23.

und sagen, dass der *Knoten* κ durch Z als *geschlossener Zopf* bzw. als *Schlauchzopf* dargestellt wird. Bekanntlich¹ lässt sich jeder *Knoten* als *geschlossener Zopf* darstellen und zwar auf unendlich viele verschiedene Weisen. Dabei ist es auch möglich, dass derselbe *Knoten* durch verschiedene *geschlossene Zöpfe* mit gleicher Fädenzahl dargestellt wird. Fig. 23 zeigt ein Beispiel hierfür. Aus diesen Gründen werden wir Darstellungen von *Knoten* durch *geschlossene Zöpfe* nicht untersuchen sondern nur Darstellungen von *Knoten* durch *Schlauchzöpfe*. Es wurde deshalb auch die Definition der *Schlauchzöpfe* so gewählt (im Gegensatz zur Definition der *Schlauchknoten*), dass der *Kreis* als *Träger* abgeschlossen ist.

Wir wollen zunächst zeigen, dass für einen *Schlauchzopf* der *Träger* und ein geeignet zugeordneter *geschlossener Zopf* ein vollständiges Invariantensystem bilden. Wir benutzen dazu *treue Abbildungen* von *Vollringen* in der \mathbb{S}^3 (§ 11).

Hilfssatz 1: *Durch den Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k werde ein geschlossener Zopf bzw. Schlauchzopf dargestellt. τ sei eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf den Vollring \mathfrak{B}^* in der \mathbb{S}^3 , die k in die Knotenlinie k^* überführe. Dann stellt \mathfrak{B}^* mit k^* einen geschlossenen Zopf bzw. Schlauchzopf dar.*

Beweis: Nach Voraussetzung lässt sich \mathfrak{B} so zu einem Prisma \mathfrak{P} aufschneiden, dass k in $\alpha > 1$ Sehnen $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ von \mathfrak{P} übergeht, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führen. Sei σ die zugehörige Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B} . Dann ist $\tau\sigma$ eine Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{B}^* , bei welcher sich die Sehnen $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ zu k^* zusammensetzen, woraus die Behauptung folgt.

¹ Vgl. etwa [1], [3], [7]. Es ist dort die Definition des geschlossenen Zopfes von Artin [3] zugrundegelegt, der Sachverhalt überträgt sich jedoch ohne weiteres auf unsere Definition.

Hilfssatz 2: *Es sei Z ein geschlossener Zopf bzw. Schlauchzopf, der durch den Vollring \mathfrak{B}_1 mit der Knotenlinie k_1 und durch den Vollring \mathfrak{B}_2 mit der Knotenlinie k_2 dargestellt werde. k^* sei eine Knotenlinie, die im Inneren des Vollringes \mathfrak{B}^* liegt. Wenn es eine treue Abbildung τ_1 von \mathfrak{B}_1 auf \mathfrak{B}^* gibt, die k_1 in k^* überführt, so gibt es auch eine treue Abbildung τ_2 von \mathfrak{B}_2 auf \mathfrak{B}^* , die k_2 in k^* überführt.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es eine s -Abbildung φ der \mathbb{S}^3 auf sich, die \mathfrak{B}_2 so auf \mathfrak{B}_1 abbildet, dass k_2 in k_1 übergeht. $\tau_2 = \tau_1 \varphi$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Hilfssatz 3: *Es sei Z^* ein geschlossener Zopf bzw. Schlauchzopf, der durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k^* dargestellt werde. τ_1 bzw. τ_2 sei eine treue Abbildung von \mathfrak{B}^* auf den Vollring \mathfrak{B}_1 bzw. \mathfrak{B}_2 in der \mathbb{S}^3 , die k^* in die Knotenlinie k_1 bzw. k_2 überführt. Wenn dann die bezüglich k_1 positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_1 denselben Knoten darstellen wie die bezüglich k_2 positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B}_2 , so wird durch \mathfrak{B}_1 mit k_1 derselbe geschlossene Zopf bzw. Schlauchzopf dargestellt wie durch \mathfrak{B}_2 mit k_2 .*

Beweis: Dass durch \mathfrak{B}_1 mit k_1 bzw. durch \mathfrak{B}_2 mit k_2 ein geschlossener Zopf oder ein Schlauchzopf dargestellt wird, folgt aus Hilfssatz 1. Sei nun a^* eine Seele von \mathfrak{B}^* , die bezüglich k^* positiv orientiert ist. $a_1 = \tau_1(a^*)$ bzw. $a_2 = \tau_2(a^*)$ ist dann eine Seele von \mathfrak{B}_1 bzw. \mathfrak{B}_2 , die bezüglich k_1 bzw. k_2 positiv orientiert ist. $\tau = \tau_2 \tau_1^{-1}$ ist eine treue Abbildung von \mathfrak{B}_1 auf \mathfrak{B}_2 , die a_1 in a_2 und k_1 in k_2 überführt. Wenn nun a_1 und a_2 denselben Knoten darstellen, so lässt sich τ nach § 11 Satz 2 zu einer s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich erweitern, woraus die Behauptung folgt.

Aus den vorangehenden Hilfssätzen ergibt sich: Man kann einem Schlauchzopf Z einen geschlossenen Zopf Z^* dadurch zuordnen, dass man für eine Darstellung von Z durch einen Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k den Vollring \mathfrak{B} treu auf einen unverknoteten Vollring \mathfrak{B}^* in der \mathbb{S}^3 abbildet. \mathfrak{B}^* stellt dann mit dem Bild von k den geschlossenen Zopf Z^* dar. Eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* existiert nach § 11 Satz 1, nach Hilfssatz 1 stellt \mathfrak{B}^* mit dem Bild von k einen geschlossenen Zopf Z^* dar, und wegen der Hilfssätze 2 und 3 ist Z^* unabhängig davon, welche Darstellung von Z benutzt wird, und unabhängig davon, wie der unverknotete Vollring \mathfrak{B}^* und die treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* gewählt werden. Umgekehrt kann man einem vorgegebenen geschlossenen Zopf Z^* einen Schlauchzopf Z mit vorgegebenem, vom Kreis verschiedenen Träger λ zuordnen: Man stelle Z^* durch einen Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k^* dar. Nach § 10 Satz 2 gibt es einen Vollring \mathfrak{B} mit orientierter Seele a in der \mathbb{S}^3 , für welchen a den Knoten λ darstellt. Bildet man nun \mathfrak{B}^* treu so auf \mathfrak{B} ab, dass a Bild einer bezüglich k^* positiv orientierten Seele von \mathfrak{B}^* ist, so stellt \mathfrak{B} mit dem Bild von k^* den Schlauchzopf Z dar. Aus den Hilfssätzen 1 bis 3 folgt wieder, dass Z dabei durch λ und Z^* eindeutig bestimmt ist.

Wir definieren nun: Ein Schlauchzopf Z und ein geschlossener Zopf Z^* heißen einander zugeordnet, wenn es für eine Darstellung von Z durch einen Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k und eine Darstellung von Z^* durch einen Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k^* eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* gibt, die k in k^* überführt. Nach dem Vorangehenden gilt der

Satz: Ein Schlauchzopf bestimmt seinen Träger und seinen zugeordneten geschlossenen Zopf eindeutig. Zu jedem vom Kreis verschiedenen Knoten λ und jedem geschlossenen Zopf Z^* gibt es genau einen Schlauchzopf Z , der λ als Träger und Z^* als zugeordneten geschlossenen Zopf besitzt.

Für das Weitere benötigen wir noch

Hilfssatz 4: Es sei \mathfrak{P} ein Prisma im R^3 , in dem α Sehnen monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führen. Es gibt eine s -Abbildung von \mathfrak{P} auf sich, welche auf der Bodenfläche von \mathfrak{P} die Identität ist, die Dachfläche um ein vorgegebenes Vielfaches von 2π dreht und die Sehnen von \mathfrak{P} in Sehnen überführt, die wieder monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führen.

Beweis: Durch ein Elementarflächenstück, das parallel zur Dachfläche von \mathfrak{P} ist und hinreichend nahe an ihr liegt, kann man von \mathfrak{P} ein Teilprisma \mathfrak{P}' so abschneiden, dass die auf \mathfrak{P}' liegenden Stücke der Sehnen von \mathfrak{P} in \mathfrak{P}' geradlinig verlaufen und dass diese Sehnen von \mathfrak{P}' sich auf eine zur Achse von \mathfrak{P}' parallele Ebene so projizieren, dass sich die Projektionen gegenseitig nicht treffen. Es reicht offenbar hin, die Behauptung für \mathfrak{P}' zu beweisen. Statt \mathfrak{P}' schreiben wir dabei wieder \mathfrak{P} .

Sei \mathfrak{d}_1 die Dachfläche, \mathfrak{d}_2 die Bodenfläche von \mathfrak{P} . $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ seien die Sehnen von \mathfrak{P} . Wir schneiden aus \mathfrak{P} paarweise disjunkte Keile $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_\alpha$ aus, sodass k_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) die Schneide von \mathfrak{R}_i ist (Fig. 24): \mathfrak{R}_i werde berandet von einem Dreieck \mathfrak{d}_{i1} auf \mathfrak{d}_1 , einem Dreieck \mathfrak{d}_{i2} auf \mathfrak{d}_2 , einem Elementarflächenstück m_i auf dem Mantel von \mathfrak{P} und zwei Elementarflächenstücken e_{i1}, e_{i2} , die in k_i zusammenstossen und, abgesehen von ihrem Rand, im Inneren von \mathfrak{P} liegen. Dass solche paarweise disjunkten Keile aus \mathfrak{P} ausgeschnitten werden können, folgt ohne weiteres aus der obigen Annahme über den Verlauf der Sehnen von \mathfrak{P} . Nach Wegnahme der Keile \mathfrak{R}_i bleibt von \mathfrak{P} eine Kugel \mathfrak{R}_0 über, die berandet wird von einem Elementarflächenstück \mathfrak{d}_{01} auf \mathfrak{d}_1 , einem Elementarflächenstück \mathfrak{d}_{02} auf \mathfrak{d}_2 , den Elementarflächenstücken e_{i1}, e_{i2} ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) und Elementarflächenstücken n_i auf dem Mantel von \mathfrak{P} . Die Bezeichnungen können dabei so gewählt werden, dass n_i an e_{i2} und $e_{i+1,1}$ (Indices modulo α) und damit auch an m_i und m_{i+1} anstösst. n_{i-1}, e_{i1} und m_i mögen in t_{i1} zusammenstossen, n_i, e_{i2} und m_i in t_{i2} . Dabei seien t_{i1} und t_{i2} von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} orientiert.

Sei nun γ das Vielfache von 2π , um welches \mathfrak{d}_1 zu drehen ist (γ kann auch negativ sein).

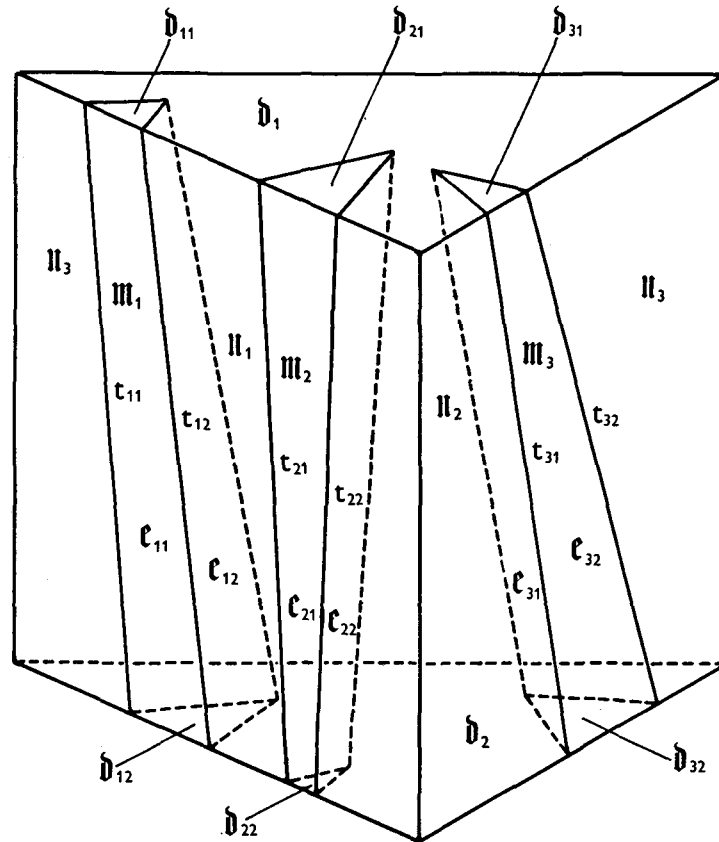


Fig. 24.

Wir ordnen den Wegen t_{11} und t_{12} Wege t'_{11} , t'_{12} auf dem Mantel von \mathfrak{P} zu, die jeweils denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt wie t_{11} bzw. t_{12} haben und sich $(-\gamma)$ -mal um die von d_1 nach d_2 orientierte Achse von \mathfrak{P} herumwinden (Fig. 25). Die Wege t'_{11} und t'_{12} können offenbar so gewählt werden, dass sie paarweise disjunkt sind und monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führen. Der Mantel von \mathfrak{P} wird durch sie in 2α Elementarflächenstücke $m'_1, m'_2, \dots, m'_\alpha, n'_1, n'_2, \dots, n'_\alpha$ zerlegt. Dabei werde die Bezeichnung so gewählt, dass m'_i mit m_i und n'_i mit n_i je ein Stück des Randes auf d_1 und d_2 gemein hat.

Wir wollen nun „verschraubte Keile“ $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \dots, \mathfrak{R}'_\alpha$ aus \mathfrak{P} ausschneiden, die paarweise disjunkt sind. \mathfrak{R}'_i soll berandet werden von d_{i1}, d_{i2}, m'_i und zwei Elementarflächenstücken e'_{i1}, e'_{i2} , die, abgesehen von ihrem Rand, im Inneren von \mathfrak{P} liegen und die in der „Schneide“ k'_i zusammenstossen. Dabei grenze e'_{i1} an t'_{i1} und e'_{i2} an t'_{i2} an. Die Schneiden k'_i sollen so gewählt werden, dass sie monoton von d_1 nach d_2 führen. Man gehe etwa so vor: Von \mathfrak{R}'_i sind zunächst die Randflächen d_{i1}, d_{i2}, m'_i vorgegeben. Man führe nun k'_i vom Anfangs-

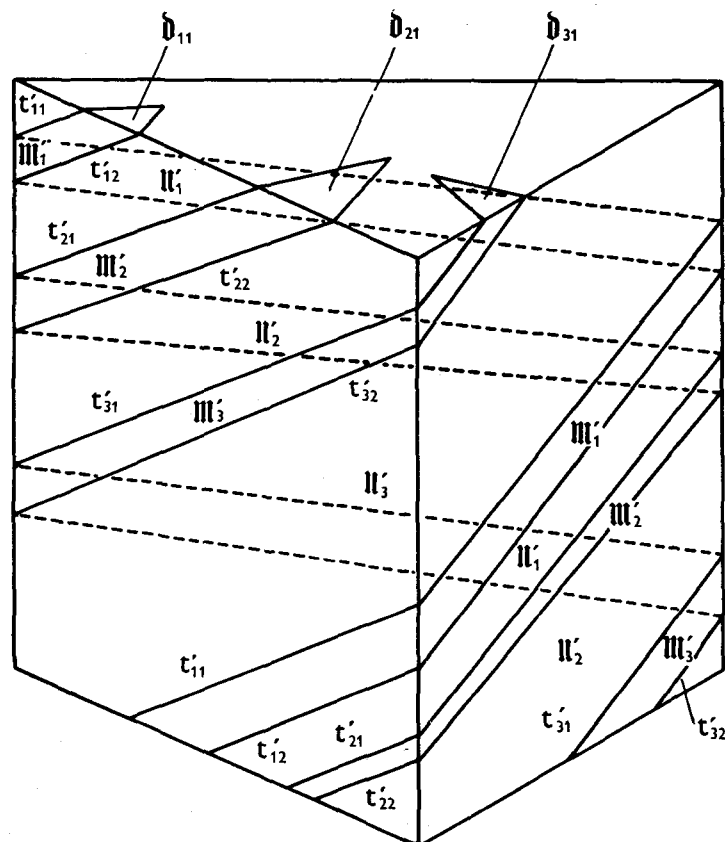


Fig. 25.

punkt von k_i aus dicht unterhalb d_{i1} bis in die Nähe des Mantels von \mathfrak{P} , dann in der Nähe von m'_i bis dicht an die Bodenfläche von \mathfrak{P} und schliesslich dicht über d_{i2} bis an den Endpunkt von k_i und zwar so, dass k'_i monoton verläuft. Daraufhin werden die Elementarflächenstücke e'_{i1} , e'_{i2} eingespannt. Die Einzelheiten sind Fig. 25 zu entnehmen. In Fig. 26 ist einer der verschraubten Keile gesondert gezeichnet. Nimmt man von \mathfrak{P} die verschraubten Keile $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \dots, \mathfrak{R}'_\alpha$ fort, so verbleibt eine Kugel \mathfrak{R}'_0 .

Es ist nunmehr einfach, die gewünschte s -Abbildung von \mathfrak{P} auf sich zu konstruieren. Wir bilden d_1 und d_2 identisch auf sich ab. k_i, t_{i1}, t_{i2} werden semilinear auf k'_i bzw. t'_{i1}, t'_{i2} so abgebildet, dass Anfangs- und Endpunkt festbleiben. Damit ist für die Elementarflächenstücke m_i, n_i, e_{i1}, e_{i2} eine s -Abbildung des Randes auf den Rand von m'_i bzw. n'_i, e'_{i1}, e'_{i2} gegeben, die nach § 1 Satz 1 a zu einer s -Abbildung von m_i bzw. n_i, e_{i1}, e_{i2} auf m'_i bzw. n'_i, e'_{i1}, e'_{i2} erweitert werden kann. Damit ist dann für die Kugeln \mathfrak{R}_0 bzw. $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_\alpha$ eine s -Abbildung des Randes auf den Rand von \mathfrak{R}'_0 bzw. $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \dots, \mathfrak{R}'_\alpha$ gege-

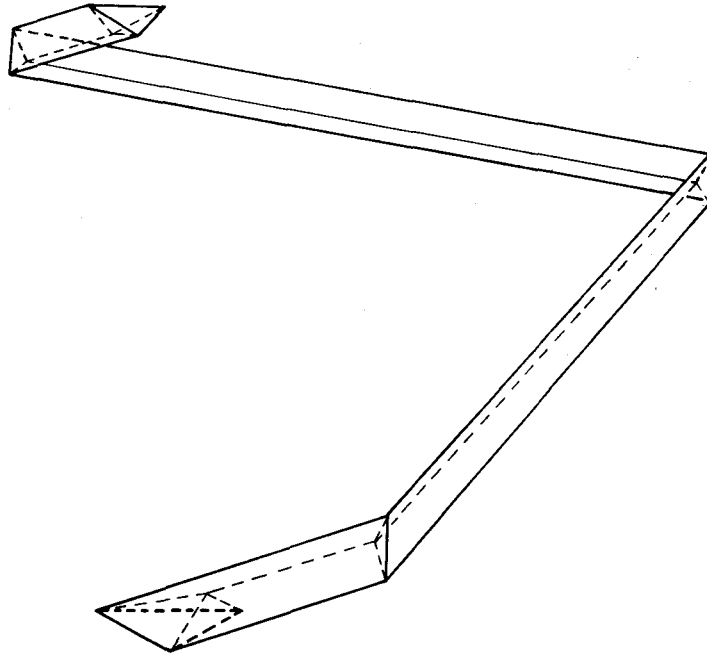


Fig. 26.

ben, die nach § 1 Satz 8 zu einer s -Abbildung von \mathfrak{R}_i ($i = 0, 1, \dots, \alpha$) auf \mathfrak{R}'_i erweitert werden kann. Durch diese s -Abbildungen wird eine s -Abbildung von \mathfrak{P} auf sich definiert, die k_i in k'_i überführt und die gewünschten Eigenschaften hat.

§ 23. Knoten, die sich als Schlauchzöpfe darstellen lassen.

Ein Knoten, der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, kann Darstellungen durch verschiedene Schlauchzöpfe besitzen. Ein Beispiel für diesen Sachverhalt gibt

Hilfssatz 1: *Der Knoten κ werde durch einen Schlauchzopf Y mit dem Träger λ und der Fädenzahl α dargestellt. Wenn sich λ durch einen Schlauchzopf Z mit dem Träger μ und der Fädenzahl β darstellen lässt, so lässt sich κ auch durch einen Schlauchzopf Z' darstellen, der μ als Träger hat und die Fädenzahl $\alpha\beta$ besitzt.*

Beweis: Der Schlauchzopf Y werde dargestellt durch den Vollring \mathfrak{U} mit der Knotenlinie k , Z werde dargestellt durch den Vollring \mathfrak{P} mit der Knotenlinie l . Es stellt also k den Knoten κ und l den Knoten λ dar. \mathfrak{U} lässt sich so zu einem Prisma \mathfrak{P} im R^3 aufschneiden, dass k in α Sehnen von \mathfrak{P} zerfällt, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führen. Entsprechend schneiden wir \mathfrak{P} so zu einem Prisma \mathfrak{Q} im R^3 auf, dass l in β Sehnen von \mathfrak{Q} zerfällt, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{Q} führen.

Sei ϱ bzw. σ die zugehörige Abbildung von \mathfrak{P} bzw. Ω auf \mathbb{U} bzw. \mathfrak{B} . Wenn wir der \mathbb{S}^3 und dem R^3 eine feste Orientierung erteilen, können wir noch annehmen, dass die Darstellungen von \mathbb{U} bzw. \mathfrak{B} durch \mathfrak{P} und ϱ bzw. Ω und σ so beschaffen sind, dass die vom R^3 auf \mathfrak{P} bzw. Ω induzierte Orientierung durch ϱ bzw. σ in die von der \mathbb{S}^3 auf \mathbb{U} bzw. \mathfrak{B} induzierte Orientierung übertragen wird.

Die Translation des R^3 , welche die Dachfläche von Ω in die Bodenfläche überführt, sei τ . Wenden wir auf Ω die Translationen τ^j für $j = 1, 2, \dots, \beta$ an, so erhalten wir β zu Ω kongruente Prismen $\Omega_j = \tau^j(\Omega)$, die sich zu einem Prisma $\bar{\Omega}$ zusammensetzen. $\bar{\Omega}$ entspricht der β -fachen Überlagerung von \mathfrak{B} . Den Sehnen von Ω , die wir mit l_1, l_2, \dots, l_β bezeichnen, entsprechen vermöge τ^j Sehnen der Prismen Ω_j , die sich zu β Sehnen von $\bar{\Omega}$ zusammensetzen. Sei \bar{l} eine dieser Sehnen von $\bar{\Omega}$, \bar{l}_j das auf Ω_j liegende Stück von \bar{l} . $\tau^{-1}(\bar{l}_1), \tau^{-1}(\bar{l}_2), \dots, \tau^{-\beta}(\bar{l}_\beta)$ sind dann wieder die Sehnen l_1, l_2, \dots, l_β von Ω , wobei wir die Numerierung so vornehmen können, dass $l_j = \tau^{-j}(\bar{l}_j)$ ist.

Die Dachfläche von \mathfrak{P} sei $\bar{\delta}$, und $\bar{\delta}$ sei ein zu $\bar{\delta}$ ähnliches Elementarflächenstück in der Dachfläche von $\bar{\Omega}$, das den Anfangspunkt von \bar{l} zur Ecke hat. Wenn wir $\bar{\delta}$ parallel zu sich selbst so verschieben, dass die auf \bar{l} liegende Ecke stets auf \bar{l} verbleibt, so überstreicht $\bar{\delta}$, wenn $\bar{\delta}$ hinreichend klein gewählt wird, eine Kugel $\bar{\mathfrak{K}}$, die von $\bar{\delta}$, dem Elementarflächenstück $\tau^\beta(\bar{\delta})$ und einem auf $\bar{\Omega}$ liegenden Kreisring \bar{r} berandet wird. Eine zu $\bar{\delta}$ parallele Ebene, die $\bar{\Omega}$ trifft, schneidet $\bar{\mathfrak{K}}$ in einem zu $\bar{\delta}$ kongruenten Elementarflächenstück. Der Durchschnitt von $\bar{\mathfrak{K}}$ und Ω_j ist eine Kugel \mathfrak{K}_j . Dadurch, dass man $\bar{\delta}$ hinreichend klein wählt, und dies soll geschehen, kann offenbar erreicht werden, dass die entsprechenden Kugeln $\tau^{-1}(\mathfrak{K}_1), \tau^{-2}(\mathfrak{K}_2), \dots, \tau^{-\beta}(\mathfrak{K}_\beta)$ auf Ω paarweise punktfremd sind. Vermöge σ setzen sich diese Kugeln zu einem Vollring \mathbb{U}' zusammen, die Knotenlinie l liegt auf dem Rande von \mathbb{U}' und hat auf \mathbb{U}' die Umlaufzahl 1. Nach § 6 Hilfssatz 3 stellt eine bezüglich l positiv orientierte Seele a von \mathbb{U}' denselben Knoten λ dar wie l . Die Verschlingungszahl von l mit a sei δ . Wir merken noch an: Man erhält eine Abbildung ω von $\bar{\mathfrak{K}}$ auf \mathbb{U}' dadurch, dass man ω auf $\bar{\mathfrak{K}}$ durch $\sigma\tau^{-j}$ definiert. ω bildet übereinanderliegende Punkte von $\bar{\delta}$ und $\tau^\beta(\bar{\delta})$ in denselben Punkt ab, während jedes andere Punktepaar auf $\bar{\mathfrak{K}}$ verschiedene Bildpunkte besitzt. Ausserdem ist ω simplizial und überträgt die vom R^3 auf $\bar{\mathfrak{K}}$ induzierte Orientierung in die von der \mathbb{S}^3 auf \mathbb{U}' induzierte. Das letzte folgt aus der Art der Orientierungsübertragung von Ω auf \mathfrak{B} durch σ .

Nach § 22 Hilfssatz 4 kann angenommen werden, dass die Darstellung von \mathbb{U} durch \mathfrak{P} und ϱ so beschaffen ist, dass eine Mantellinie von \mathfrak{P} , die von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führt, durch ϱ in einen einfachen Weg übergeführt wird, der mit einer bezüg-

lich k positiv orientierten Seele von \mathbb{U} ebenfalls die Verschlingungszahl δ besitzt. Ferner kann angenommen werden, dass \mathfrak{P} und $\bar{\mathfrak{Q}}$ gleiche Höhe haben und so zu einander liegen, dass die Dachflächen von \mathfrak{P} und $\bar{\mathfrak{Q}}$ und die Bodenflächen von \mathfrak{P} und $\bar{\mathfrak{Q}}$ in je einer Ebene liegen und dass ausserdem die Dachfläche \mathfrak{d} von \mathfrak{P} zu dem Elementarflächenstück $\bar{\mathfrak{d}}$ in der Dachfläche von $\bar{\mathfrak{Q}}$ kongruent ist und aus ihm durch Translation entsteht. Dies lässt sich dadurch erreichen, dass man \mathfrak{P} einer geeigneten affinen Abbildung unterwirft und ϱ entsprechend abändert. Wir betrachten nun eine Schar von Ebenen, die parallel zu \mathfrak{d} sind, und verschieben das von einer solchen Ebene E aus \mathfrak{P} ausgeschnittene Elementarflächenstück parallel zu sich in das von E aus $\bar{\mathfrak{R}}$ ausgeschnittene Elementarflächenstück. Wird dies für alle Ebenen, die \mathfrak{P} treffen, ausgeführt, so entsteht eine s -Abbildung χ von \mathfrak{P} auf $\bar{\mathfrak{R}}$, welche die auf \mathfrak{P} vom R^3 induzierte Orientierung in die auf $\bar{\mathfrak{R}}$ induzierte überträgt.

Seien k_1, k_2, \dots, k_a die Sehnen von \mathfrak{P} , die sich vermöge ϱ zu k zusammensetzen. $\chi(k_1), \chi(k_2), \dots, \chi(k_a)$ sind dann Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}$, die monoton von der Dachfläche von $\bar{\mathfrak{Q}}$ zur Bodenfläche führen. Wendet man nun auf die Prismen $\mathfrak{Q}_j (j = 1, 2, \dots, \beta)$ die Translationen τ^{-j} an und nimmt man dabei die auf \mathfrak{Q}_j liegenden Stücke der Sehnen $\chi(k_1), \chi(k_2), \dots, \chi(k_a)$ mit, so erhält man $\alpha\beta$ Sehnen $k'_1, k'_2, \dots, k'_{\alpha\beta}$ von \mathfrak{Q} , die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führen. Vermöge σ setzen sich diese zu einer Knotenlinie k' zusammen, denn man erhält vermittels \mathfrak{P} und $\bar{\mathfrak{R}}$ eine s -Abbildung ψ von \mathbb{U} auf \mathbb{U}' durch ϱ, χ und ω , bei welcher k in k' übergeführt wird. \mathfrak{P} stellt mit k' einen Schlauchzopf der Fädenzahl $\alpha\beta$ dar. Die Behauptung ergibt sich, wenn noch gezeigt wird, dass k und k' denselben Knoten κ darstellen.

Aus der Art der Orientierungsübertragung durch die Abbildungen ϱ, χ, ω erkennt man zunächst, dass ψ eine Abbildung ist, welche die von der \mathbb{S}^3 auf \mathbb{U} induzierte Orientierung in die auf \mathbb{U}' induzierte überträgt. Ferner wird durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathbb{U} derselbe Knoten λ dargestellt wie durch die bezüglich k' positiv orientierten Seelen von \mathbb{U}' , denn die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathbb{U} stellen den Knoten λ nach Voraussetzung dar und die bezüglich k' positiv orientierten Seelen von \mathbb{U}' sind zugleich positiv orientiert bezüglich l , da die Sehnen $\chi(k_1), \chi(k_2), \dots, \chi(k_a)$ von $\bar{\mathfrak{R}}$ ebenso wie die Sehne l von $\bar{\mathfrak{Q}}$ von der Dachfläche zur Bodenfläche von $\bar{\mathfrak{Q}}$ führen und diese Sehnen durch ω in k' bzw. l übergehen. Schliesslich gehen bei ψ Breitenkreise von \mathbb{U} in Breitenkreise von \mathbb{U}' über. Dies folgt daraus, dass $\chi^{-1}(l)$ eine Mantellinie von \mathfrak{P} ist, die durch ϱ in eine Knotenlinie auf dem Rande von \mathbb{U} übergeführt wird, die mit einer bezüglich k positiv orientierten Seele von \mathbb{U} die Verschlingungszahl δ besitzt (die Darstellung von \mathbb{U} durch

\mathfrak{B} und ϱ war so gewählt), und dass $\chi^{-1}(l)$ durch $\omega\chi$ in die Knotenlinie l auf dem Rande von \mathfrak{U}' übergeht, die mit der bezüglich l und damit bezüglich k' positiv orientierten Seele a von \mathfrak{U}' ebenfalls die Verschlingungszahl δ besitzt. ψ ist also eine treue Abbildung von \mathfrak{U} auf \mathfrak{U}' . Nimmt man die identische Abbildung von \mathfrak{U} auf sich hinzu, so folgt aus § 22 Hilfssatz 3, dass durch \mathfrak{U} mit k derselbe geschlossene Zopf dargestellt wird wie durch \mathfrak{U}' mit k' , woraus sich insbesondere ergibt, dass k und k' denselben Knoten darstellen. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 2: *Durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k werde ein Schlauchzopf oder geschlossener Zopf Z^* mit der Fädenzahl $\alpha > 1$ dargestellt. \mathfrak{B} sei ein verknöteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und dessen Rand \mathfrak{T} im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt. Dann liegt \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* , und \mathfrak{B} stellt mit k einen Schlauchzopf Z dar. Die Fädenzahl γ von Z ist Teiler von α . Für $\gamma = \alpha$ ist $Z = Z^*$, für $\gamma < \alpha$ stellt \mathfrak{B}^* mit einer orientierten Seele von \mathfrak{B} einen Schlauchzopf oder geschlossenen Zopf der Fädenzahl $\beta = \alpha\gamma^{-1}$ dar.*

Beweis: Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Im 1. Schritt wird \mathfrak{B}^* längs einer Meridianfläche m^* zu einem Prisma aufgeschnitten und die gegenseitige Lage von m^* und \mathfrak{T} auf eine vorläufige Fallunterscheidung gebracht (durch Beseitigung der auf \mathfrak{T} nullhomologen Schnittlinien von m^* und \mathfrak{T}). Diese Fallunterscheidung wird im 2. Schritt verschärft (durch Beseitigung weiterer Schnittlinien von m^* und \mathfrak{T}). Die entstehenden 3 Fälle werden im 3. bis 5. Schritt einzeln untersucht, und im 6. Schritt wird schliesslich nachträglich eine Hilfsabbildung konstruiert, die im 5. Schritt benötigt wird.

Wir merken zuvor noch an: Ist \mathfrak{B} ein Prisma im Inneren eines 3-Simplexes, das die \mathbb{S}^3 mit dem R^3 gemein hat, und k' eine Sehne von \mathfrak{B} , die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führt, so ist k' in \mathfrak{B} unverknötet. Es lässt sich nämlich k' auf dem Rande von \mathfrak{B} so zu einer Knotenlinie k schliessen, dass k eine doppelpunktfreie Projektion (auf eine Ebene parallel zur Achse des Prismas) besitzt. Von dieser Tatsache werden wir mehrfach Gebrauch machen. Von den im Folgenden auftretenden Prismen können wir stets annehmen, dass sie im Inneren eines 3-Simplexes liegen, das die \mathbb{S}^3 mit dem R^3 gemein hat.

Wir wenden uns nun dem Beweise zu. Nach Voraussetzung lässt sich \mathfrak{B}^* längs einer Meridianfläche m^* so zu einem Prisma \mathfrak{B} aufschneiden, dass k dabei in α Sehnen $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ von \mathfrak{B} zerfällt, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führen. Die zugehörige Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* sei σ . Wir wollen zunächst den Durchschnitt von \mathfrak{T} und m^* untersuchen und dadurch auf eine möglichst übersichtliche Gestalt bringen, dass wir \mathfrak{B}^* (und damit m^*) einer geeigneten s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich unterwerfen, die auf dem Rande von \mathfrak{B}^* und auf k die Identität ist. Wenn φ eine solche s -Abbildung ist, so ist die Abbildung σ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* durch $\varphi\sigma$ zu ersetzen. (Es wird also dann \mathfrak{B}^* durch \mathfrak{B} und $\varphi\sigma$ dargestellt).

Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m^* und \mathfrak{T} nur aus doppel-punktfreien, geschlossenen Schnittlinien besteht, die sich gegenseitig nicht treffen. Jede solche Schnittlinie ist unverknotet, da sie auf m^* ein Elementarflächenstück berandet, und wegen der Verknotung von \mathfrak{B} und § 7 Hilfssatz 2 ist sie entweder nullhomolog auf \mathfrak{T} oder Meridian von \mathfrak{B} .

1. Schritt: Beseitigung der auf \mathfrak{T} nullhomologen Schnittlinien von m^* und \mathfrak{T} .

Sei s eine innerste Schnittlinie auf \mathfrak{T} , die auf \mathfrak{T} ein Elementarflächenstück e berandet, das keine weitere Schnittlinie enthält. s berandet auf m^* ein Elementarflächenstück e^* , und e und e^* bilden zusammen eine 2-Sphäre, die eine auf \mathfrak{B}^* liegende Kugel \mathfrak{K} berandet. Wir stellen zunächst fest, dass \mathfrak{K} von k nicht getroffen wird. Da nämlich e ausser seinem Rande keine Schnittlinie enthält, kann e aufgefasst werden als topologisches Bild eines auf \mathfrak{B} liegenden Elementarflächenstückes e' , dessen Rand s' entweder in der Dachfläche oder in der Bodenfläche von \mathfrak{B} liegt. s' möge etwa auf der Bodenfläche von \mathfrak{B} liegen. s' berandet dann in ihr ein Elementarflächenstück e^{*} , das sich in e^* abbildet, und e' und e^{*} beranden zusammen eine Kugel \mathfrak{K}' auf \mathfrak{B} , die der Kugel \mathfrak{K} auf \mathfrak{B}^* entspricht. Da e von k nicht getroffen wird, wird e' von keiner der Sehnen k_1, k_2, \dots, k_a von \mathfrak{B} getroffen. Man bemerkt nun, dass \mathfrak{K}' von keiner Sehne getroffen werden kann, da jede Sehne von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führt und keine Sehne in der Bodenfläche entspringt und endet. Also ist \mathfrak{K}' zu k punktfremd. Falls der Rand s' von e' in der Dachfläche von \mathfrak{B} liegt, kann man entsprechend schliessen. Wir können nun m^* dadurch deformieren, dass wir e^* über \mathfrak{K} deformieren und anschliessend von e so abheben, dass die Schnittlinie s verschwindet und keine neuen entstehen. Dies kann auch dadurch bewirkt werden, dass wir \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung φ der \mathbb{C}^3 auf sich unterwerfen, die auf dem Rande von \mathfrak{B}^* und auf k die Identität ist. Auf diese Weise lassen sich der Reihe nach alle auf \mathfrak{T} nullhomologen Schnittlinien beseitigen.

Es sind nun die folgenden Fälle zu unterscheiden:

- a') m^* und \mathfrak{T} treffen sich nicht.
- b') m^* und \mathfrak{T} schneiden sich in nur einem Meridian von \mathfrak{B} .
- c') m^* und \mathfrak{T} schneiden sich in mindestens zwei Meridianen von \mathfrak{B} .

2. Schritt: Verschärfung der Fallunterscheidung.

Wir behandeln den letzten Fall weiter. Durch die Schnittlinien wird \mathfrak{T} in Kreisringe zerlegt, die ausser ihren Rändern keine weiteren Schnittlinien enthalten. Jeder solche Kreisring ist topologisches Bild eines Kreisringes auf \mathfrak{B} , dessen Ränder auf dem Rande von \mathfrak{B} in Boden- oder Dachfläche liegen. Wenn es unter diesen Kreisringen auf \mathfrak{B} solche gibt, deren

Ränder beide in der Dachfläche oder beide in der Bodenfläche von \mathfrak{B} liegen, so lassen sich die Schnittlinien, die diesen Rändern entsprechen, beseitigen:

Sei r' etwa ein Kreisring, dessen beide Ränder s'_1 und s'_2 in der Bodenfläche von \mathfrak{B} liegen, r der entsprechende Kreisring auf \mathfrak{L} , s_1 und s_2 die Schnittlinien von m^* und \mathfrak{L} , die s'_1 und s'_2 entsprechen. Wir stellen zunächst fest, dass s'_1 und s'_2 in der Bodenfläche von \mathfrak{B} einen Kreisring r^* beranden. Wäre dies nicht der Fall, so würden durch s'_1 und s'_2 in der Bodenfläche von \mathfrak{B} disjunkte Elementarflächenstücke e'_1 und e'_2 berandet, die zusammen mit r' eine auf \mathfrak{B} liegende Kugel berandeten, die zur Dachfläche von \mathfrak{B} punktfremd ist. Diese Kugel könnte von keiner der Sehnen k_1, k_2, \dots, k_a von \mathfrak{B} getroffen werden, da r' von keiner dieser Sehnen getroffen wird und keine dieser Sehnen in der Bodenfläche entspringt und endet. Betrachten wir nun das Elementarflächenstück e_1 auf m^* , das dem Elementarflächenstück e'_1 der Bodenfläche von \mathfrak{B} entspricht. Eine auf e_1 innerste Schnittlinie von m^* und \mathfrak{L} (diese kann der Rand von e_1 sein) berandete dann auf m^* eine Meridianfläche des verknoteten Vollringes \mathfrak{B} , die k nicht trifft. Dies ist unmöglich, da k nicht-trivial in \mathfrak{B} liegen sollte. Durch s'_1 und s'_2 muss also in der Bodenfläche von \mathfrak{B} ein Kreisring r^* berandet werden, dem ein Kreisring r^* auf m^* entspricht. Einer der beiden Ränder, etwa s'_1 , berandet in der Bodenfläche ein Elementarflächenstück e'_1 , das den anderen Rand von r^* , also s'_2 , nicht enthält. e'_1 muss den Endpunkt von mindestens einer der Sehnen k_1, k_2, \dots, k_a enthalten, etwa den von k_i . Andernfalls entspräche nämlich e'_1 ein Elementarflächenstück e_1 auf m^* , das von k nicht getroffen wird, und eine innerste Schnittlinie auf e_1 wäre Rand einer Meridianfläche des verknoteten Vollringes \mathfrak{B} , die k nicht trifft, was unmöglich ist. Nun berandet s'_2 auf dem Rande von \mathfrak{B} ein Elementarflächenstück e'_2 , das s'_1 nicht enthält und die Dachfläche von \mathfrak{B} umfasst. e'_1, e'_2 und r' beranden auf \mathfrak{B} eine Kugel \mathfrak{K}' , deren Rand mit dem Rande von \mathfrak{B} die Elementarflächenstücke e'_1 und e'_2 gemein hat. k_i ist Sehne sowohl von \mathfrak{K}' wie von \mathfrak{B} und führt von e'_2 nach e'_1 . Nun ist k_i unverknotet in \mathfrak{B} . Daraus folgt nach § 8 Hilfssatz 2, dass k_i auch unverknotet in \mathfrak{K}' ist und dass r' und r^* zusammen auf \mathfrak{B} einen unverknoteten Vollring \mathfrak{U}' beranden (das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}' bezüglich \mathfrak{B}), für den s'_1 und s'_2 Breitenkreise sind. \mathfrak{U}' wird von keiner der Sehnen k_1, k_2, \dots, k_a getroffen, da dies für r' der Fall ist und keine Sehne in der Bodenfläche von \mathfrak{B} entspringt und endet. Dem Vollring \mathfrak{U}' entspricht in \mathfrak{B}^* ein Vollring \mathfrak{U} , auf welchem s_1 und s_2 die Umlaufzahl 1 haben. Nach § 8 lässt sich nun m^* dadurch deformieren, dass man r^* über \mathfrak{U} deformiert und von r so abhebt, dass die Schnittlinien s_1 und s_2 verschwinden und keine neuen entstehen. Dies lässt sich auch dadurch erreichen, dass man \mathfrak{B}^* einer s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich unterwirft, die auf k und dem Rande von \mathfrak{B}^* die Identität ist. Dieser Vorgang soll so oft wie möglich wiederholt werden. Wir erhalten dann einen der Fälle:

- a) m^* und \mathfrak{T} treffen sich nicht,
- b) m^* und \mathfrak{T} schneiden sich in nur einem Meridian von \mathfrak{B} ,
- c) m^* und \mathfrak{T} schneiden sich in $\beta > 1$ Meridianen von \mathfrak{B} , und beim Aufschneiden von \mathfrak{B}^* längs m^* zu einem Prisma \mathfrak{P} zerfällt \mathfrak{T} in β Kreisringe auf \mathfrak{P} , bei denen je ein Rand in der Dachfläche und ein Rand in der Bodenfläche von \mathfrak{P} liegt.

Wir werden zeigen, dass der Fall a) nicht eintreten kann, dass im Falle b) durch \mathfrak{B} mit k derselbe Schlauchzopf wie durch \mathfrak{B}^* mit k dargestellt wird und dass im Falle c) durch \mathfrak{B} mit k ein Schlauchzopf bzw. geschlossener Zopf dargestellt wird, dessen Fädenzahl $\gamma = \alpha\beta^{-1}$ ist, und dass ausserdem eine orientierte Seele von \mathfrak{B} mit \mathfrak{B}^* einen Schlauchzopf bzw. geschlossenen Zopf der Fädenzahl β darstellt.

3. Schritt: Diskussion des Falles a.

In diesem Falle muss \mathfrak{B}^* das Komplement von \mathfrak{B} im Inneren enthalten. Andernfalls hätte nämlich \mathfrak{B}^* in bezug auf den verknoteten Vollring \mathfrak{B} die Ordnung null und in bezug auf die in \mathfrak{B} liegende Knotenlinie k die Ordnung α , was nach § 9 Satz 3 unmöglich ist.

Dem Torus \mathfrak{T} im Inneren von \mathfrak{B}^* entspricht ein Torus \mathfrak{T}' im Inneren von \mathfrak{B} . Wenn wir annehmen, dass \mathfrak{B} in einem 3-Simplex liegt, das die \mathfrak{E}^3 mit R^3 gemein hat, berandet \mathfrak{T}' in der \mathfrak{E}^3 mindestens einen Vollring. \mathfrak{T}' kann keinen Vollring beranden, der in \mathfrak{B} liegt. Einem solchen entspräche nämlich ein von \mathfrak{T} berandeter Vollring im Inneren von \mathfrak{B}^* , während von \mathfrak{T} wegen der Verknotung von \mathfrak{B} nur ein Vollring berandet wird, nämlich \mathfrak{B} , und dieser liegt nicht im Inneren von \mathfrak{B}^* , wie eben festgestellt wurde. \mathfrak{T}' ist also in der \mathfrak{E}^3 Rand eines verknoteten Vollringes \mathfrak{B}' , der den Rand von \mathfrak{B} im Inneren enthält. Es kann angenommen werden, dass eine Ebenenschar (E) des R^3 , die parallel zur Bodenfläche von \mathfrak{B} ist, in bezug auf \mathfrak{T}' zulässig ist, da sich dies durch eine beliebig kleine Verschiebung der Ecken einer simplizialen Zerlegung von \mathfrak{T}' erreichen lässt, bei welcher \mathfrak{T}' zu den Sehnen k_i und dem Rande von \mathfrak{B} punktfremd bleibt. Einer solchen Verschiebung entspricht eine Deformation von \mathfrak{T} , die man auch dadurch erhalten kann, dass man \mathfrak{T} einer geeigneten s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich unterwirft, die auf k die Identität ist. Nach § 4 Satz 2 gibt es eine Ebene E der Schar (E) , die \mathfrak{T}' in mindestens einem Meridian von \mathfrak{B}' schneidet. Sei m' ein solcher, der auf E ein Elementarflächenstück e berandet, das keinen weiteren Meridian von \mathfrak{B}' enthält. Falls e Schnittlinien mit \mathfrak{T}' gemein hat, so lassen sich diese nach § 9 Hilfssatz 6 beseitigen, sodass man, wenn e nicht bereits diese Eigenschaft hat, aus e eine Meridianfläche m' von \mathfrak{B}' erhält, die im Inneren von \mathfrak{B} liegt, m' zum Rand hat und deren Schnittpunkte mit den Sehnen k_i von \mathfrak{B} auf e liegen. m' muss mindestens eine der Sehnen k_i treffen, denn m' entspricht einer Meridianfläche m von \mathfrak{B} , und es muss m von k geschnitten werden, da k nicht-trivial in \mathfrak{B} liegt. Sei etwa k_j eine solche Sehne von \mathfrak{B} ,

die m' trifft. k_j und m' haben nur einen Schnittpunkt gemein, da jeder gemeinsame Punkt in e liegt und e höchstens einen Punkt mit k_j gemein haben kann, weil e parallel zur Bodenfläche von \mathfrak{B} ist und k_j monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{B} führt. Man kann nun k_j durch einen Weg auf dem Rande von \mathfrak{B} zu einer Kreislinie l_j schliessen. Diese liegt im Inneren von \mathfrak{B}' und hat in \mathfrak{B}' die Umlaufzahl 1 nach § 9, Folgerung aus Hilfssatz 1. Da aber \mathfrak{B}' verknotet ist, erhält man einen Widerspruch zu § 7 Satz 1. Damit ergibt sich, dass der hier betrachtete Fall nicht eintreten kann.

4. Schritt: Diskussion des Falles b.

Die einzige Schnittlinie s von m^* und \mathfrak{T} berandet auf m^* eine Meridianfläche m des verknoteten Vollringes \mathfrak{B} , und es liegt \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* . \mathfrak{T} entspricht einem Kreisring r' auf \mathfrak{B} , von dessen Rändern der eine, s'_1 , in der Dachfläche, der andere, s'_2 , in der Bodenfläche von \mathfrak{B} liegt. s'_1 bzw. s'_2 berandet in der Dach- bzw. Bodenfläche von \mathfrak{B} ein Elementarflächenstück m'_1 bzw. m'_2 , und es bilden sich m'_1 und m'_2 in die Meridianfläche m von \mathfrak{B} ab. m'_1 , m'_2 und r' beranden auf \mathfrak{B} eine Kugel \mathfrak{K}' , die sich auf \mathfrak{B} abbildet. Da k in \mathfrak{B} liegt, enthält \mathfrak{K}' alle Sehnen k_i von \mathfrak{B} . Der Durchschnitt des Randes von \mathfrak{B} mit dem Rande von \mathfrak{K}' besteht aus den disjunkten Elementarflächenstücken m'_1 und m'_2 . Die Sehnen k_i sind in \mathfrak{B} unverknotet und führen von m'_1 in \mathfrak{K}' nach m'_2 . Nach § 8 Hilfssatz 2 sind die Sehnen k_i auch in \mathfrak{K}' unverknotet, und das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}' bezüglich \mathfrak{B} ist ein unverknoteter Vollring.

Wir betrachten nun auf \mathfrak{B} einen Kreisring \mathfrak{s} , der von einer Seele a von \mathfrak{B} und einem Breitenkreis b von \mathfrak{B} berandet wird, der abgesehen von b im Inneren von \mathfrak{B} liegt und dessen Durchschnitt mit der Meridianfläche m von \mathfrak{B} aus nur einem Querschnitt von \mathfrak{s} besteht. Dass ein solcher Kreisring existiert, erkennt man unmittelbar, wenn man \mathfrak{B} längs m zu einem Prisma aufschneidet und beachtet, dass die Achse dieses Prismas einer Seele von \mathfrak{B} entspricht.

Vermöge der Abbildung σ von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* entspricht dem Kreisring \mathfrak{s} auf \mathfrak{B} ein Elementarflächenstück \mathfrak{s}' auf \mathfrak{K}' , der Seele a von \mathfrak{B} bei Orientierung eine Sehne a' von \mathfrak{K}' , die in \mathfrak{K}' unverknotet ist, wie durch \mathfrak{s}' in Evidenz gesetzt wird. a' ist auch unverknotet in \mathfrak{B} , da das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}' bezüglich \mathfrak{B} ein unverknoteter Vollring ist. Dann bildet sich aber a' auch in eine orientierte Seele von \mathfrak{B}^* ab nach § 6 Hilfssatz 2. \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind also gleich verknotet, und es hat \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1. Nach § 10 Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, die \mathfrak{B} in \mathfrak{B}^* überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung des abgeschlossenen Komplements von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}^* , also insbesondere auf k , die Identität ist, woraus sich ergibt, dass \mathfrak{B} mit k denselben Schlauchzopf darstellt wie \mathfrak{B}^* mit k . (Ein geschlossener Zopf kommt nicht in Frage, da \mathfrak{B} verknotet sein sollte).

5. Schritt: Diskussion des Falles c.

Es sei σ wieder die Abbildung von \mathfrak{P} auf \mathfrak{P}^* , die zu der Darstellung von \mathfrak{P}^* durch \mathfrak{P} gehört. Ferner sei τ die Translation des R^3 , welche die Dachfläche von \mathfrak{P} in die Bodenfläche überführt.

Auf \mathfrak{P} liegen β Kreisringe, die sich vermöge σ zu \mathfrak{T} zusammensetzen und die je einen Rand in der Dachfläche und in der Bodenfläche von \mathfrak{P} liegen haben. In der Dachfläche von \mathfrak{P} betrachten wir einen Rand s'_{11} eines solchen Kreisringes, wobei s'_{11} so gewählt werde, dass s'_{11} in der Dachfläche von \mathfrak{P} ein Elementarflächenstück m'_{11} berandet, das keinen weiteren Rand eines Kreisringes enthält¹. s'_{11} ist Rand eines Kreisringes r'_1 , dessen zweiter Rand s'_{22} in der Bodenfläche von \mathfrak{P} liegt und dort ein Elementarflächenstück m'_{22} berandet. m'_{11} , r'_1 und m'_{22} beranden auf \mathfrak{P} eine Kugel \mathfrak{K}'_1 . m'_{22} kann keinen Rand eines der von r'_1 verschiedenen Kreisringe enthalten, da m'_{11} keinen solchen Rand enthält und jeder dieser Kreisringe je einen Rand in der Dachfläche und in der Bodenfläche von \mathfrak{P} hat. m'_{11} und m'_{22} bilden sich also vermöge σ in Meridianflächen m_1 bzw. m_2 von \mathfrak{B} ab, die aus \mathfrak{B} eine Kugel \mathfrak{K}_1 ausschneiden, die Bild der auf \mathfrak{P} von m'_{11} , r'_1 und m'_{22} berandeten Kugel \mathfrak{K}'_1 ist. Der Meridianfläche m_2 von \mathfrak{B} entspricht in der Dachfläche von \mathfrak{P} ein Elementarflächenstück $m'_{21} = \tau^{-1}(m'_{22})$ mit dem Rande s'_{21} . Dabei ist s'_{21} Rand eines Kreisringes r'_2 , und auf m'_{21} liegt kein weiterer Rand eines Kreisringes. Man bemerkt nun, dass der zweite Rand s'_{32} von r'_2 in der Bodenfläche von \mathfrak{P} ein Elementarflächenstück m'_{32} berandet, das keinen weiteren Rand eines Kreisringes enthält und sich in eine Meridianfläche m_3 von \mathfrak{B} abbildet. m'_{21} , m'_{32} und r'_2 beranden auf \mathfrak{P} eine Kugel \mathfrak{K}'_2 , die sich in eine Kugel \mathfrak{K}_2 auf \mathfrak{B} abbildet. Man kann nun diese Betrachtung fortsetzen, indem man jetzt das Elementarflächenstück $m'_{31} = \tau^{-1}(m'_{32})$ in der Dachfläche von \mathfrak{P} betrachtet, das der Meridianfläche m_3 von \mathfrak{B} entspricht, und entsprechend weiterschliesst. Man bemerkt: Ist $\beta > 1$ die Anzahl der Schnittlinien von m^* und \mathfrak{T} , so schneiden diese β disjunkte Elementarflächenstücke m_1, m_2, \dots, m_β aus m^* aus, die Meridianflächen von \mathfrak{B} sind. Jeder solchen Meridianfläche m_i ($i = 1, 2, \dots, \beta$) entspricht in der Dachfläche bzw. Bodenfläche von \mathfrak{P} ein Elementarflächenstück m'_{i1} bzw. m'_{i2} mit dem Rande $s'_{i,1}$ bzw. $s'_{i,2}$, und es ist $\tau(m'_{i1}) = m'_{i2}$. Ferner sind $s'_{i,1}$ und $s'_{i+1,2}$ (Indices modulo β) die Ränder eines Kreisringes r'_i , der zusammen mit m'_{i1} und $m'_{i+1,2}$ auf \mathfrak{P} eine Kugel \mathfrak{K}'_i berandet, die durch σ in eine Kugel \mathfrak{K}_i abgebildet wird, welche aus \mathfrak{B} durch m_i und m_{i+1} ausgeschnitten wird. Da jede der Sehnen $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$ von \mathfrak{P} von der Dachfläche zur Bodenfläche von \mathfrak{P} führt und über jedem Endpunkt einer Sehne (in der Bodenfläche) ein Anfangspunkt einer Sehne (in der Dachfläche) liegt, müssen in jeder der Kugeln $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \dots, \mathfrak{K}'_\beta$ je $\gamma = \alpha\beta^{-1}$ Sehnen liegen.

¹ Tatsächlich ist s'_{11} beliebig wählbar.

Wenden wir auf \mathfrak{P} die Translationen τ^j für $j = 1, 2, \dots, \beta$ an, so erhalten wir β Prismen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_\beta$, wobei die Dachfläche von \mathfrak{P}_j mit der Bodenfläche von \mathfrak{P}_{j-1} zusammenfällt. Die Prismen \mathfrak{P}_j setzen sich also zu einem Prisma $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammen. In $\overline{\mathfrak{P}}$ betrachten wir das Bild $\overline{\mathfrak{K}}_j$ von \mathfrak{K}'_j . Die Kugeln $\overline{\mathfrak{K}}_1, \overline{\mathfrak{K}}_2, \dots, \overline{\mathfrak{K}}_\beta$ setzen sich zu einer einzigen Kugel $\overline{\mathfrak{K}}$ zusammen, und aus den Bildern der entsprechenden Sehnen von \mathfrak{P} erhält man γ Sehnen $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots, \overline{k}_\gamma$ von $\overline{\mathfrak{K}}$, die monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche von $\overline{\mathfrak{P}}$ führen. $\overline{\mathfrak{K}}$ hat mit der Dachfläche und der Bodenfläche von $\overline{\mathfrak{P}}$ je ein Elementarflächenstück $\overline{m}_1 = \tau(m'_{11})$ bzw. $\overline{m}_2 = \tau^\beta(m'_{12})$ gemein. Wendet man auf jede Kugel $\overline{\mathfrak{K}}_j$ die Abbildung $\sigma\tau^{-j}$ an, so erhält man eine simpliziale Abbildung ω von $\overline{\mathfrak{K}}$ auf \mathfrak{P} , bei der jeder Punkt P von \overline{m}_1 denselben Bildpunkt hat wie derjenige Punkt von \overline{m}_2 , der aus P durch die Translation τ^β entsteht, während jedes andere Punktepaar von $\overline{\mathfrak{K}}$ verschiedene Bildpunkte hat. Man erhält eine Darstellung von \mathfrak{P} durch ein Prisma, wenn man noch $\overline{\mathfrak{K}}$ in geeigneter Weise in ein Prisma überführt. Wir werden im 6. Schritt zeigen, dass wir $\overline{\mathfrak{K}}$ durch eine semilineare Abbildung φ so auf $\overline{\mathfrak{P}}$ abbilden können, dass die Sehnen $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots, \overline{k}_\gamma$ von $\overline{\mathfrak{K}}$ punktweise festbleiben und dass \overline{m}_1 bzw. \overline{m}_2 so in die Dach- bzw. Bodenfläche von $\overline{\mathfrak{P}}$ übergehen, dass auf \overline{m}_1 gilt $\varphi = \tau^{-\beta}\varphi\tau^\beta$, d. h. übereinanderliegende Punkte von \overline{m}_1 und \overline{m}_2 gehen in übereinanderliegende Punkte der Dach- oder Bodenfläche von $\overline{\mathfrak{P}}$ über. Durch $\overline{\mathfrak{P}}$ und $\omega\varphi^{-1}$ erhält man dann eine Darstellung von \mathfrak{P} , wobei sich die Sehnen $\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots, \overline{k}_\gamma$, die in $\overline{\mathfrak{P}}$ monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führen, zu k zusammensetzen. \mathfrak{P} stellt also mit k einen Schlauchzopf der Fädenzahl γ dar, wenn $\gamma \neq 1$ ist. Dass tatsächlich $\gamma \neq 1$ ist, wird sich sogleich ergeben.

Wir wenden uns dem Nachweis zu, dass \mathfrak{P}^* mit einer orientierten Seele von \mathfrak{P} einen Schlauchzopf bzw. geschlossenen Zopf der Fädenzahl β darstellt. Wir benutzen dazu die Sehne \overline{k}_1 von $\overline{\mathfrak{K}}$. Ihren Endpunkt verbinden wir in \overline{m}_2 mit dem Endpunkt von \overline{k}_γ durch einen Weg u , der den Rand von \overline{m}_2 nicht trifft. Wir können nun u so von \overline{m}_2 abheben, dass aus $\overline{k}_1 u$ eine Sehne \overline{a} von $\overline{\mathfrak{K}}$ entsteht, die von \overline{m}_1 monoton nach \overline{m}_2 führt. Wir werden die Abbildung φ von $\overline{\mathfrak{K}}$ auf $\overline{\mathfrak{P}}$ noch so bestimmen, dass sie auch auf \overline{a} die Identität ist. \overline{a} wurde so gewählt, dass Anfangs- und Endpunkt bezüglich der Abbildung $\omega\varphi^{-1}$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ auf \mathfrak{P} denselben Bildpunkt haben, d. h. \overline{a} geht in eine Knotenlinie a auf \mathfrak{P} über. Da \overline{a} monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führt, ist \overline{a} in $\overline{\mathfrak{P}}$ unverknotet, und daraus folgt nach § 6 Hilfssatz 2, dass a orientierte Seele von \mathfrak{P} ist. \mathfrak{P}^* stellt mit a einen Schlauchzopf bzw. geschlossenen Zopf der Fädenzahl β dar. Wendet man nämlich auf jede Kugel $\overline{\mathfrak{K}}_j$ die Translation τ^{-j} an, so geht \overline{a} in β Sehnen von \mathfrak{P} über, die monoton von der Dachfläche zur Boden-

fläche von \mathfrak{P} führen und sich vermöge σ wieder zu a zusammensetzen, denn auf $\bar{\mathfrak{R}}_j$ ist die Abbildung ω gerade durch $\sigma\tau^{-j}$ definiert.

Aus dem eben Ausgeführten ergibt sich zugleich, dass $\gamma \neq 1$ ist. Andernfalls könnte \bar{k}_1 als \bar{a} benutzt werden, und man erhielte, dass k orientierte Seele von \mathfrak{P} ist. Es war jedoch vorausgesetzt, dass k nicht-trivial in \mathfrak{P} liegt.

6. Schritt: Konstruktion der im 5. Schritt benutzten Abbildung φ .

Wir unterwerfen \mathfrak{P}_β der Abbildung $\tau^{-\beta}$, wodurch \mathfrak{P}_β in $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}$ und $\bar{\mathfrak{R}}_\beta$ in $\bar{\mathfrak{R}}_0$ übergeht. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ haben das Elementarflächenstück \bar{m}_1 gemein, das in der Dachfläche \mathfrak{d}_1 von \mathfrak{P}_1 liegt. Sei s_1 der Rand von \bar{m}_1 , t der Rand von \mathfrak{d}_1 . s_1 und t beranden auf \mathfrak{d}_1 einen Kreisring r , der das abgeschlossene Komplement von \bar{m}_1 bezüglich \mathfrak{d}_1 ausmacht. Nach § 2 Hilfssatz 4 lässt sich s_1 über r kombinatorisch isotop in t (bei geeigneter Orientierung) deformieren. Wir benutzen dazu eine simpliziale Zerlegung von \mathfrak{d}_1 , die so fein ist, dass kein 2-Simplex der Zerlegung, das eine Ecke mit s_1 gemein hat, einen der Anfangspunkte der Sehnen $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma$ und \bar{a} von $\bar{\mathfrak{R}}$ enthält. Wir führen nun die Deformation von s_1 über r in t aus und definieren bei jedem Deformationsschritt eine s -Abbildung für $\bar{\mathfrak{R}}_0$ und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ und zwar so, dass $\bar{\mathfrak{R}}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_1$ stets in \mathfrak{P}_0 bzw. \mathfrak{P}_1 verbleibt. Bei den Deformationen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- 1) eine Kante eines 2-Simplexes wird über dieses hinweg in die beiden anderen Kanten deformiert,
- 2) zwei Kanten eines 2-Simplexes werden über dieses hinweg in die dritte Kante deformiert.

1. Fall:

Es sei e das 2-Simplex, über welches die Kante a_1 in die Kanten a_2 und a_3 zu deformieren ist. Der Durchschnitt von e und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ besteht aus a_1 . f sei das 2-Simplex von \mathfrak{d}_1 , das mit e

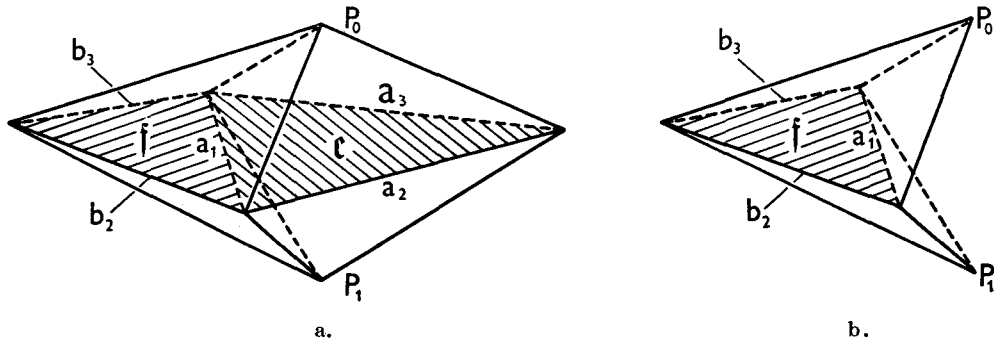


Fig. 27.

die Kante a_1 gemein hat. \bar{f} enthält keinen Anfangspunkt der Sehnen $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ von $\bar{\mathfrak{R}}$. Wir können nun (Fig. 27) in \mathfrak{P}_1 unterhalb von e einen Punkt P_1 so nahe an e wählen, dass der Projektionskegel von P_1 nach dem Rande von e mit $\bar{\mathfrak{R}}_1$ nur die Strecke a_1 gemein hat und dass der Projektionskegel von P_1 nach dem Rande von \bar{f} keines der auf $\bar{\mathfrak{R}}_1$ liegenden Stücke von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ trifft. Entsprechend können wir einen Punkt P_0 in \mathfrak{P}_0 oberhalb e so nahe an e wählen, dass der Projektionskegel von P_0 nach dem Rande von e mit $\bar{\mathfrak{R}}_0$ nur die Strecke a_1 gemein hat und dass der Projektionskegel von P_0 nach dem Rande von \bar{f} keine der Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}_0$ trifft, die aus den auf $\bar{\mathfrak{R}}_\beta$ liegenden Stücken von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ durch $\tau^{-\beta}$ entstehen. Seien b_2 und b_3 die von a_1 verschiedenen Kanten von \bar{f} . Durch die Projektionsstrahlen von P_0 und P_1 nach dem Rande von \bar{f} wird eine Doppelpyramide \mathfrak{A} berandet, die Projektionsstrahlen von P_0 und P_1 nach dem Rande des Elementarflächenstückes $e + \bar{f}$ beranden eine Doppelpyramide \mathfrak{B} (vgl. § 2, Beweis von Satz 3). Wir bilden nun das 2-Simplex \bar{f} durch eine s -Abbildung χ so auf das von e und \bar{f} gebildete Elementarflächenstück ab, dass χ auf b_2 und b_3 die Identität ist. Diese Abbildung erweitern wir zu einer s -Abbildung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{B} , indem wir den Projektionsstrahl von P_0 bzw. P_1 nach einem Punkte Q von \bar{f} affin auf den Projektionsstrahl von P_0 bzw. P_1 nach $\chi(Q)$ abbilden. Diese Abbildung von \mathfrak{A} auf \mathfrak{B} bezeichnen wir wieder mit χ . Da χ auf den Projektionsstrahlen von P_0 und P_1 nach den Punkten von b_2 und b_3 die Identität ist, erhalten wir eine s -Abbildung für $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$, wenn wir den auf \mathfrak{A} liegenden Teil von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ der Abbildung χ unterwerfen und den ausserhalb \mathfrak{A} liegenden Teil von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ identisch auf sich abbilden. Die so gewonnenen s -Abbildungen von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ wollen wir mit χ_1 bzw. χ_0 bezeichnen. χ_1 bzw. χ_0 ist auf den in $\bar{\mathfrak{R}}_1$ liegenden Stücken von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ bzw. den entsprechenden Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}_0$ die Identität. Ausserdem hat $\chi_1(\bar{\mathfrak{R}}_1)$ bzw. $\chi_0(\bar{\mathfrak{R}}_0)$ mit den Projektionsstrahlen von P_1 bzw. P_0 nach den Punkten von a_2 und a_3 nur die Punkte von a_2 und a_3 gemein. Statt $\chi_1(\bar{\mathfrak{R}}_1)$ bzw. $\chi_0(\bar{\mathfrak{R}}_0)$ schreiben wir wieder $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$.

2. Fall:

Es sei e das 2-Simplex, über welches die beiden Kanten a_1, a_2 in die Kante a_3 zu deformieren sind. Der Durchschnitt von e und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ besteht aus $a_1 + a_2$. Die Kanten a_i und a_{i+1} (Indices modulo 3) mögen in der Ecke Q_{i+2} zusammenstossen. Wir können nun (Fig. 28) einen Punkt Q_4 in \mathfrak{b}_1 ausserhalb e so nahe an Q_3 wählen, dass a_3 zusammen mit den Strecken $b_1 = Q_4 Q_1, b_2 = Q_4 Q_2$ auf \mathfrak{b}_1 ein 2-Simplex e^* berandet, das e umfasst und keinen Anfangspunkt der Sehnen $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ enthält. Das abgeschlossene Komplement von e bezüglich e^* ist ein Elementarflächenstück \bar{f} , das von b_1, b_2, a_1, a_2 berandet wird. Das weitere Vorgehen entspricht nun dem im 1. Falle. Wir wählen den Punkt P_1 bzw. P_0 in \mathfrak{P}_1 bzw.

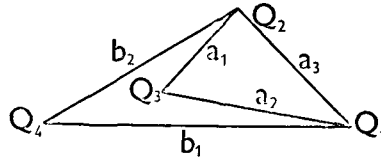


Fig. 28.

\mathfrak{P}_0 unterhalb bzw. oberhalb e so, dass der Projektionskegel von P_1 bzw. P_0 nach dem Rande von e mit $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ nur die Strecken a_1, a_2 gemein hat und dass der Projektionskegel von P_1 bzw. P_0 nach dem Rande von f keines der auf $\bar{\mathfrak{R}}_1$ liegenden Stücke von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ bzw. keine der entsprechenden Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}_0$ trifft. Wir erhalten wieder zwei Doppelpyramiden \mathfrak{A} und \mathfrak{B} , die von den Projektionsstrahlen von P_0 und P_1 nach dem Rande von f bzw. nach dem Rande von $e^* = e + f$ berandet werden. f wird durch eine s -Abbildung χ , die auf b_1 und b_2 die Identität ist, auf e^* abgebildet, und diese Abbildung wird durch affine Mitnahme der Projektionsstrahlen von P_0 und P_1 zu einer s -Abbildung χ von \mathfrak{A} auf \mathfrak{B} erweitert. Man erhält eine s -Abbildung χ_1 bzw. χ_0 von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$, wenn man den auf \mathfrak{A} liegenden Teil von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ der Abbildung χ unterwirft und den ausserhalb \mathfrak{A} liegenden Teil von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ identisch abbildet. $\chi_1(\bar{\mathfrak{R}}_1)$ bzw. $\chi_0(\bar{\mathfrak{R}}_0)$ hat mit den Projektionsstrahlen von P_1 bzw. P_0 nach den Punkten von a_3 nur die auf a_3 liegenden Punkte gemein, und χ_1 bzw. χ_0 ist auf den Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ die Identität. Statt $\chi_1(\bar{\mathfrak{R}}_1)$ bzw. $\chi_0(\bar{\mathfrak{R}}_0)$ wird wieder $\bar{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_0$ geschrieben.

Wenn wir nun die kombinatorische Deformation von s_1 über den Kreisring r in den Rand t von \mathfrak{d}_1 ausführen und bei jedem Deformationsschritt $\bar{\mathfrak{R}}_0$ und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ den entsprechenden Abbildungen χ_0 bzw. χ_1 unterwerfen, so setzen sich diese Abbildungen zu einer einzigen s -Abbildung ψ_0 bzw. ψ_1 von $\bar{\mathfrak{R}}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_1$ zusammen. Diese Abbildungen stimmen auf dem Elementarflächenstück $\bar{m}_1 = \tau^{-\beta}(\bar{m}_2)$, das $\bar{\mathfrak{R}}_0$ und $\bar{\mathfrak{R}}_1$ gemein haben, überein und sind auf den von $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ herrührenden Sehnen von $\bar{\mathfrak{R}}_0$ bzw. $\bar{\mathfrak{R}}_1$ die Identität. Wir erhalten nun für $\bar{\mathfrak{R}}$ eine s -Abbildung φ_1 , wenn wir $\bar{\mathfrak{R}}_1$ der Abbildung ψ_1 , $\bar{\mathfrak{R}}_0$ der Abbildung $\tau^\beta \psi_0 \tau^{-\beta}$ unterwerfen und $\bar{\mathfrak{R}}_2, \dots, \bar{\mathfrak{R}}_{\beta-1}$ identisch abbilden. φ_1 ist auf $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ die Identität, und auf \bar{m}_1 ist $\varphi_1 = \tau^{-\beta} \varphi_1 \tau^\beta$. $\varphi_1(\bar{\mathfrak{R}})$ wird berandet von der Dachfläche $\mathfrak{d}_1 = \varphi_1(\bar{m}_1)$ des Prismas $\bar{\mathfrak{P}}$, der Bodenfläche $\mathfrak{d}_2 = \varphi_1(\bar{m}_2)$ von $\bar{\mathfrak{P}}$ und einem Kreisring \bar{s} , der, abgesehen von seinen Rändern, im Inneren von $\bar{\mathfrak{P}}$ liegt. Das letzte folgt aus der obigen Konstruktion der Abbildungen χ_0 und χ_1 . Wir werden nun eine s -Abbildung φ_2 von $\varphi_1(\bar{\mathfrak{R}})$ auf $\bar{\mathfrak{P}}$ angeben, die auf $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$ und den Sehnen $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ die Identität ist, sodass $\varphi = \varphi_2 \varphi_1$ eine s -Abbildung von $\bar{\mathfrak{R}}$ auf $\bar{\mathfrak{P}}$ mit den gewünschten Eigenschaften ist.

Sei t der Mantel von $\overline{\mathfrak{B}}$. Der Rand von $\overline{\mathfrak{B}}$ hat mit dem Rand von $\varphi_1(\overline{\mathfrak{R}})$ die beiden disjunkten Elementarflächenstücke δ_1, δ_2 gemein. Da die Sehne \bar{k}_1 monoton von δ_1 nach δ_2 führt, ist \bar{k}_1 unverknotet in $\overline{\mathfrak{B}}$, und nach § 8 Hilfssatz 2 ist \bar{k}_1 auch unverknotet in $\varphi_1(\overline{\mathfrak{R}})$. Das abgeschlossene Komplement von $\varphi_1(\overline{\mathfrak{R}})$ in bezug auf $\overline{\mathfrak{B}}$ ist nach § 8 Hilfssatz 1 ein unverknoteter Vollring \mathfrak{B} , für welchen die Ränder von δ_1 und δ_2 Breitenkreise sind. Der von δ_1, δ_2 und den Sehnen $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ gebildete Komplex hat mit \mathfrak{B} nur diese beiden Breitenkreise gemein, und diese zerlegen den Rand von \mathfrak{B} in die Kreisinge \bar{s} und t . Nach § 8 gibt es nun eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die \bar{s} in t überführt und auf $\delta_1, \delta_2, \bar{k}_1, \bar{k}_2, \dots, \bar{k}_\gamma, \bar{a}$ die Identität ist. Diese s -Abbildung induziert auf $\varphi_1(\overline{\mathfrak{R}})$ eine s -Abbildung φ_2 mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes beendet.

Hilfssatz 3: *Durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k werde ein Schlauchzopf Z^* dargestellt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält. Dann lässt sich durch eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, \mathfrak{B} in einen Vollring überführen, der im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt oder \mathfrak{B}^* umfasst.*

Beweis: Wir wenden § 18 Satz 1 auf \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* an. Der Fall 3 dieses Satzes kann nicht eintreten, da sonst der Rand und das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{B} ins Innere von \mathfrak{B}^* zu liegen käme, was nach Hilfssatz 2 nicht möglich ist. Es kann auch der Fall 4 von § 18 Satz 1 nicht eintreten. Es existierte dann nämlich im Inneren von \mathfrak{B}^* ein Vollring \mathfrak{B} , in bezug auf welchen \mathfrak{B}^* die Ordnung 1 hätte und der nicht mit \mathfrak{B}^* gleich verknotet ist. Nach der Folgerung aus § 9 Hilfssatz 1 hätte \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* die Umlaufzahl 1, und nach § 9 Satz 4 besäße k auf \mathfrak{B} dieselbe Umlaufzahl α wie auf \mathfrak{B}^* . Nach Hilfssatz 2 stellte dann \mathfrak{B} mit k denselben Schlauchzopf dar wie \mathfrak{B}^* mit k . Dann müssten aber \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet sein, womit wir einen Widerspruch erhalten. Die verbleibenden Fälle 1 und 2 von § 18 Satz 1 sind gerade unsere Behauptung.

Hilfssatz 4: *Ein Knoten, der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, kann nicht durch zwei verschiedene Schlauchzöpfe der gleichen Fädenzahl dargestellt werden.*

Beweis: Der Knoten κ werde dargestellt durch die Schlauchzöpfe Z' und Z'' der gleichen Fädenzahl. Es ist zu zeigen, dass $Z' = Z''$ ist. Der Vollring \mathfrak{B}' stelle mit der Knotenlinie k den Schlauchzopf Z' dar. Für Z'' wählen wir eine Darstellung, die k ebenfalls als Knotenlinie besitzt. Dies ist möglich, da κ sowohl durch Z' als auch durch Z'' dargestellt werden soll. Die Darstellung von Z'' bestehe also aus einem Vollring \mathfrak{B}'' mit der Knotenlinie k . Nach Hilfssatz 3 kann angenommen werden, dass einer der beiden Vollringe $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$ im Inneren des anderen liegt. \mathfrak{B}' enthalte etwa \mathfrak{B}'' im Inneren. Aus Hilfssatz 2 folgt nun $Z' = Z''$, da Z' und Z'' gleiche Fädenzahl besitzen.

Hilfssatz 5: *Der Knoten κ lasse sich durch einen Schlauchzopf Z mit der Fädenzahl α und dem Träger λ darstellen. Ist \mathfrak{B} ein Vollring, der mit der Knotenlinie k den Begleitknoten λ von κ darstellt, so hat \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung α , und es stellt \mathfrak{B} mit k den Schlauchzopf Z dar.*

Beweis: Die Knotenlinie k stellt den Knoten κ dar. Wir wählen für Z eine Darstellung, die k als Knotenlinie besitzt. \mathfrak{B}^* sei der Vollring in dieser Darstellung. Die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf k ist die Fädenzahl α von Z : Nach § 9 Hilfssatz 1 ist die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf k nicht kleiner als die Umlaufzahl α von k auf \mathfrak{B}^* , und es gibt eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , die k in nur α Punkten trifft, sodass die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf k auch nicht grösser als α sein kann.

Nach Hilfssatz 3 kann angenommen werden, dass \mathfrak{B} entweder im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt oder \mathfrak{B}^* im Inneren enthält. Es liege etwa \mathfrak{B}^* im Inneren von \mathfrak{B} . Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}^* kann nicht null sein, da sonst \mathfrak{B} nach § 9 Satz 3 in bezug auf k die Ordnung null hätte im Widerspruch zur Voraussetzung, dass k nicht-trivial im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} und von \mathfrak{B}^* wird der Knoten λ dargestellt. Es muss nun eine so orientierte Seele a von \mathfrak{B}^* zugleich orientierte Seele von \mathfrak{B} sein, da andernfalls \mathfrak{B} mit a den Knoten λ als Begleitknoten von sich selbst darstellte, was nach § 13 Satz 2 unmöglich ist. Es hat daher \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}^* die Ordnung 1, und es sind \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* gleich verknotet. Nach § 10 Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, die \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* abbildet und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung des abgeschlossenen Komplements von \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} , insbesondere auf k , die Identität ist. Es stellt also auch \mathfrak{B} mit k den Schlauchzopf Z dar. Falls \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt, lässt sich entsprechend schliessen.

Wir haben nun alle Hilfsmittel zur Verfügung, um einen Überblick über die Begleitknoten zu erhalten, die ein als Schlauchzopf darstellbarer Knoten besitzt. Betrachten wir für einen solchen Knoten κ zunächst eine Darstellung durch einen Schlauchzopf Z' mit möglichst kleiner Fädenzahl α' . Z' werde dargestellt durch den Vollring \mathfrak{B}' mit der Knotenlinie k und habe den Träger λ' . \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und mit k einen Begleitknoten $\mu \neq \lambda'$ von κ mit der Ordnung γ darstellt. Nach Hilfssatz 3 kann angenommen werden, dass \mathfrak{B} entweder im Inneren von \mathfrak{B}' liegt oder \mathfrak{B}' umfasst. Nun kann aber \mathfrak{B} nicht im Inneren von \mathfrak{B}' liegen, denn nach Hilfssatz 2 stellte dann \mathfrak{B} mit k einen Schlauchzopf Z dar. Da die Fädenzahl α' von Z' minimal sein sollte, müsste nach Hilfssatz 2 auch Z die Fädenzahl α' haben und $Z = Z'$ sein, was der Voraussetzung $\mu \neq \lambda'$ widerspricht. \mathfrak{B} muss also \mathfrak{B}' umfassen. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{B}' sei γ' . Nach § 9 Satz 3 ist $\gamma = \gamma' \alpha'$, woraus wegen $\gamma \neq 0$ folgt $\gamma' \neq 0$. Sei l eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{B}' . l stellt den Knoten λ' dar, und wegen

$\mu \neq \lambda'$ wird μ durch \mathfrak{B} und l als Begleitknoten der Ordnung $\gamma\alpha'^{-1}$ von λ' dargestellt. Wenn wir die Hilfssätze 4 und 5 und den Satz von § 22 berücksichtigen, erhalten wir:

Satz 1: *Ein Knoten κ , der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt einen einzigen maximalen Begleitknoten λ' : λ' tritt als Begleitknoten von κ mit nur einer Ordnung α' auf, und ist μ ein von λ' verschiedener Begleitknoten der Ordnung γ von κ , so ist μ Begleitknoten der Ordnung $\gamma\alpha'^{-1}$ von λ' . λ' ist Träger eines Schlauchzopfes Z' der Fädenzahl α' , welcher der einzige Schlauchzopf kleinster Fädenzahl ist, durch den sich κ darstellen lässt. κ ist durch λ' und den geschlossenen Zopf Z^* , der Z' zugeordnet ist, umkehrbar eindeutig bestimmt.*

Folgerung: Jeder Knoten, der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, ist Primknoten.

Die Folgerung ergibt sich wegen § 14 Satz 3 ohne weiteres daraus, dass die Fädenzahl α' von Z' grösser als 1 ist.

Die Fädenzahlen, die bei den Darstellungen eines Knotens durch Schlauchzöpfe auftreten können, sind beschränkt nach § 9 Satz 5. Unter den Darstellungen eines Knotens κ durch Schlauchzöpfe gibt es daher eine Darstellung durch einen Schlauchzopf Z'' mit maximaler Fädenzahl. Z'' werde dargestellt durch den Vollring \mathfrak{B}'' mit der Knotenlinie k und besitze den Träger λ'' . \mathfrak{B} sei ein verknöteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und mit k den Begleitknoten $\mu \neq \lambda''$ von κ darstellt. Nach Hilfssatz 3 kann wieder angenommen werden, dass \mathfrak{B} entweder im Inneren von \mathfrak{B}'' liegt oder \mathfrak{B}'' umfasst. Falls \mathfrak{B}'' von \mathfrak{B} umfasst wird, kann \mathfrak{B} mit k keinen Schlauchzopf darstellen. Da nämlich Z'' maximale Fädenzahl hat, müsste andernfalls \mathfrak{B} mit k einen Schlauchzopf derselben Fädenzahl wie Z'' darstellen. Dann folgte aber aus Hilfssatz 4, dass \mathfrak{B} mit k denselben Schlauchzopf darstellte wie \mathfrak{B}'' mit k , also Z'' , was wegen $\mu \neq \lambda''$ ausgeschlossen ist. Liegt \mathfrak{B} im Inneren von \mathfrak{B}'' , so folgt aus Hilfssatz 2, dass \mathfrak{B} mit k einen Schlauchzopf darstellt, dessen Fädenzahl ein echter Teiler der Fädenzahl von Z'' ist, und dass \mathfrak{B}'' mit einer bezüglich k positiv orientierten Seele von \mathfrak{B} einen Schlauchzopf darstellt. Wir erhalten:

Satz 2: *Ein Knoten κ , der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt eine Darstellung durch einen Schlauchzopf Z'' mit maximaler Fädenzahl. Der Träger λ'' von Z'' ist der kleinste Begleitknoten von κ , der als Träger einer Schlauchzopfdarstellung von κ auftreten kann. Ein Begleitknoten μ von κ ist entweder Begleitknoten von λ'' oder Träger eines Schlauchzopfes, durch den κ dargestellt wird. Im letzten Falle ist μ entweder gleich λ'' oder ein Knoten, der sich durch einen Schlauchzopf mit dem Träger λ'' darstellen lässt.*

Aus den Sätzen 1, 2 und Hilfssatz 1 folgt:

Satz 3: *Ein Knoten, der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt nur eine Darstellung als Schlauchzopf genau dann, wenn sein maximaler Begleitknoten nicht als Schlauchzopf darstellbar ist.*

Schliesslich folgt noch aus den Hilfssätzen 2, 3, 4, 5:

Satz 4: *Ein Knoten κ , der sich als Schlauchzopf darstellen lässt, kann nur durch endlich viele Schlauchzöpfe dargestellt werden. Werden diese Schlauchzöpfe nach aufsteigender Fädenzahl geordnet, so sind ihre Träger als Begleitknoten von κ streng absteigend geordnet.*

§ 24. Knoten, die sich als verallgemeinerte Schlauchzöpfe darstellen lassen.

Bei den vorangehenden Betrachtungen wurden Prismen benutzt, in denen Sehnen monoton von der Dachfläche zur Bodenfläche führten. Wenn man die Schlussweisen genauer verfolgt, bemerkt man, dass häufig der monotone Verlauf der Sehnen des betreffenden Prismas nur zu der Aussage benutzt wurde, dass die Sehnen in dem Prisma unverknotet sind, und dass nur diese letzte Tatsache wesentlich in die Schlussweise einging. Dieser Sachverhalt legt es nahe, den Begriff des geschlossenen Zopfes bzw. Schlauchzopfes folgendermassen zu verallgemeinern:

Es sei \mathfrak{B} ein Vollring in der \mathfrak{S}^3 , k eine Knotenlinie im Inneren von \mathfrak{B} , die auf \mathfrak{B} die Umlaufzahl $\alpha > 1$ besitze. Wenn sich \mathfrak{B} längs einer Meridianfläche so zu einem Prisma \mathfrak{P} aufschneiden lässt, dass k dabei in α unverknotete Sehnen von \mathfrak{P} übergeht, so sagen wir, dass

\mathfrak{B} mit k einen verallgemeinerten geschlossenen Zopf darstellt, wenn \mathfrak{B} unverknotet ist, und dass

\mathfrak{B} mit k einen verallgemeinerten Schlauchzopf darstellt, wenn \mathfrak{B} verknotet ist.

Zwei solche Darstellungen, die aus einem Vollring \mathfrak{B}_1 mit der Knotenlinie k_1 bzw. aus einem Vollring \mathfrak{B}_2 mit der Knotenlinie k_2 bestehen, heissen wieder *äquivalent*, wenn es eine s -Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich gibt, die \mathfrak{B}_2 so auf \mathfrak{B}_1 abbildet, dass dabei k_2 in k_1 übergeht. Eine Äquivalenzklasse der Darstellungen von verallgemeinerten geschlossenen Zöpfen bzw. von verallgemeinerten Schlauchzöpfen heisse *verallgemeinerter geschlossener Zopf* bzw. *verallgemeinerter Schlauchzopf*.

Wenn der Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k einen verallgemeinerten geschlossenen Zopf bzw. einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z darstellt und dabei $\alpha > 1$ die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} ist, so bezeichnen wir α als *Fädenzahl* von Z . Als Fädenzahl ist wieder 1 ausgeschlossen, da man sonst orientierte Seelen der betreffenden Vollringe erhielte. In der betrachteten Darstellung von Z wird durch k ein Knoten κ , durch die bezüglich k positiv orientierten Seelen von \mathfrak{B} ein Knoten λ dargestellt. λ heisse wieder *Träger* von Z . Von dem Knoten κ sagen wir, dass er durch Z als *verallgemeinerter geschlossener Zopf* bzw. als *verallgemeinerter Schlauchzopf* dargestellt wird. Die Fädenzahl α und die Knoten κ und λ sind offenbar unabhängig von der Wahl der Darstellung von Z .

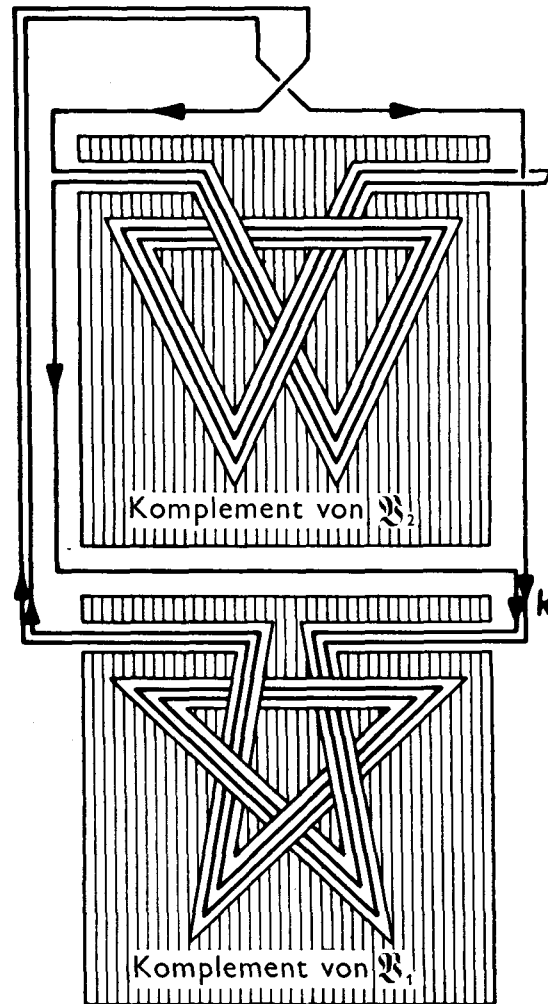


Fig. 29.

Der in Fig. 29 angegebene Knoten ist ein Beispiel dafür, dass die hier gegebenen Definitionen echte Verallgemeinerungen der Definitionen der geschlossenen Zöpfe und Schlauchzöpfe sind. In Fig. 29 ist unten das Komplement eines Vollringes \mathfrak{B}_1 schematisch dargestellt. Die Verknotung von \mathfrak{B}_1 ist durch einen Torusknoten der Umlaufzahl 2 und der Verschlingungszahl 5 (Knoten 5_1 der Alexander-Briggs'schen Tabelle) gegeben. \mathfrak{B}_1 stellt mit der Knotenlinie von Fig. 29 einen verallgemeinerten Schlauchzopf der Fädenzahl 2 dar. \mathfrak{B}_1 ist in Fig. 30 zu einem Prisma aufgeschnitten. Dieser verallgemeinerte Schlauchzopf ist kein Schlauchzopf, da \mathfrak{B}_1 das Komplement des verknoteten Vollringes \mathfrak{B}_2 , das in Fig. 29 oben angegeben ist, im Inneren enthält, und wegen § 23 Hilfssatz 2 ist dies für die Darstellung

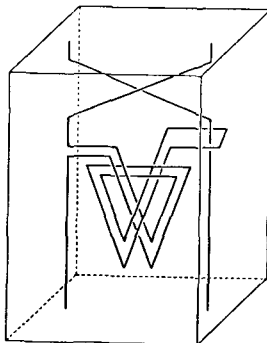


Fig. 30.

eines Schlauchzopfes nicht möglich, da \mathfrak{B}_2 die Knotenlinie nicht-trivial im Inneren enthält. Das letzte folgt wegen des Hilfssatzes von § 15 daraus, dass man aus der Knotenlinie einen Schlingknoten mit einer Kleeblattschlinge als Diagonalknoten erhält, wenn man das Komplement von \mathfrak{B}_1 durch einen unverknoteten Vollring ersetzt.

Die Hilfssätze 1, 2, 3 von § 22 übertragen sich ohne weiteres auf die Darstellungen von verallgemeinerten geschlossenen Zöpfen bzw. von verallgemeinerten Schlauchzöpfen. Es kann entsprechend definiert werden:

Ein verallgemeinerter Schlauchzopf Z und ein verallgemeinerter geschlossener Zopf Z^ heissen einander zugeordnet, wenn es für eine Darstellung von Z durch einen Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k und eine Darstellung von Z^* durch einen Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k^* eine treue Abbildung von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* gibt, die k in k^* überführt.*

Damit überträgt sich auch der Satz von § 22:

Satz 1: *Ein verallgemeinerter Schlauchzopf bestimmt seinen Träger und seinen zugeordneten verallgemeinerten geschlossenen Zopf eindeutig. Zu jedem vom Kreis verschiedenen Knoten λ und jedem verallgemeinerten geschlossenen Zopf Z^* gibt es genau einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z , der λ als Träger und Z^* als zugeordneten verallgemeinerten Zopf besitzt.*

Es soll sich nun darum handeln, die Resultate von § 23 so weit wie möglich zu übertragen. Dabei ist es zweckmässig, etwas anders vorzugehen. Wir benötigen dazu

Hilfssatz 1: *Wird eine Kugel \mathfrak{R}_1 in der \mathfrak{E}^3 semilinear auf eine Kugel \mathfrak{R}_2 in der \mathfrak{E}^3 abgebildet, so gehen unverknotete Sehnen von \mathfrak{R}_1 in unverknotete Sehnen von \mathfrak{R}_2 über.*

Beweis: Wir hatten nur solche s -Abbildungen der \mathfrak{E}^3 auf sich zugelassen, welche die Orientierung erhalten, und einen Knoten als eine Klasse von Knotenlinien definiert, die sich durch solche s -Abbildungen der \mathfrak{E}^3 auf sich in einander überführen lassen. Eine Kreislinie geht aber auch dann in eine Kreislinie über, wenn man die \mathfrak{E}^3 einer orientierungsumkehrenden s -Abbildung unterwirft. Dies folgt daraus, dass bei einer solchen s -Abbildung

ein Elementarflächenstück wieder in ein Elementarflächenstück übergeht und dass der Kreis der einzige Knoten vom Geschlecht null ist.

Die abgeschlossenen Komplemente der Kugeln \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 sind Kugeln $\overline{\mathfrak{R}}_1$ bzw. $\overline{\mathfrak{R}}_2$. Durch eine s -Abbildung von \mathfrak{R}_1 auf \mathfrak{R}_2 wird eine s -Abbildung des Randes von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ auf den Rand von $\overline{\mathfrak{R}}_2$ induziert. Nach § 1 Satz 8 lässt sich eine solche s -Abbildung erweitern zu einer s -Abbildung von $\overline{\mathfrak{R}}_1$ auf $\overline{\mathfrak{R}}_2$. Durch die so auf \mathfrak{R}_1 und $\overline{\mathfrak{R}}_1$ definierten Abbildungen erhält man eine semilineare Abbildung der \mathfrak{S}^3 auf sich, welche die Orientierung erhält oder umkehrt. Hieraus und aus dem zuvor Bemerkten folgt nun die Behauptung, da man aus einer Sehne von \mathfrak{R}_1 , die in \mathfrak{R}_1 unverknotet ist, eine Kreislinie erhält, wenn man die Sehne auf dem Rande von \mathfrak{R}_1 zu einer Knotenlinie schliesst.

Hilfssatz 2: *Stellt der Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie k einen verallgemeinerten Schlauchzopf bzw. einen verallgemeinerten geschlossenen Zopf der Fädenzahl $\alpha > 1$ dar, so hat \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung α . Ist m' eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in nur α Punkten trifft, und schneidet man \mathfrak{B} längs m' zu einem Prisma \mathfrak{P}' auf, so zerfällt k in α Sehnen von \mathfrak{P}' , die entweder alle von der Dach- zur Bodenfläche oder alle von der Boden- zur Dachfläche führen.*

Beweis: Die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} ist α , und diese ist nach § 9 Hilfssatz 1 nicht grösser als die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k . Andererseits lässt sich \mathfrak{B} so zu einem Prisma aufschneiden, dass dabei k in α unverknotete Sehnen des Prismas zerfällt. Das bedeutet insbesondere, dass es eine Meridianfläche von \mathfrak{B} gibt, die k in nur α Punkten trifft. Die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist also nicht grösser als α und muss somit gleich α sein.

Die zweite Behauptung des Hilfssatzes folgt daraus, dass die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} gleich dem Betrag der algebraischen Schnittzahl von k mit m' auf \mathfrak{B} ist. m' muss also von k in allen α Schnittpunkten im gleichen Sinne durchsetzt werden.

Hilfssatz 3: *Der Vollring \mathfrak{B} stelle mit der Knotenlinie k einen verallgemeinerten Schlauchzopf bzw. einen verallgemeinerten geschlossenen Zopf der Fädenzahl α dar. Ist dann m' eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in nur α Punkten trifft, so geht k bei Aufschneiden von \mathfrak{B} längs m' zu einem Prisma \mathfrak{P}' in α unverknotete Sehnen von \mathfrak{P}' über.*

Beweis: Nach Voraussetzung lässt sich \mathfrak{B} längs einer Meridianfläche m so zu einem Prisma \mathfrak{P} aufschneiden, dass k in α unverknotete Sehnen von \mathfrak{P} zerfällt. Wir werden von \mathfrak{P} schrittweise zu \mathfrak{P}' übergehen.

Es kann angenommen werden, dass der Durchschnitt von m und m' nur aus doppel-punktfreien, paarweise punktfremden Schnittlinien besteht, die k nicht treffen und die zum Teil geschlossen sind, zum Teil auf dem Rande von \mathfrak{B} entspringen und enden. Zu m und m' gibt es nämlich sicher eine dritte Meridianfläche m'' von \mathfrak{B} , die m und m' nur in solchen Schnittlinien trifft und die mit k ebenfalls nur α Punkte gemein hat. Man kann

dann die zu beweisende Aussage hintereinander auf die beiden Meridianflächen m, m'' und die beiden Meridianflächen m', m'' anwenden. Die im Weiteren benutzten Prismen sollen in einem 3-Simplex der \mathbb{S}^3 liegen.

Bei Aufschneiden von \mathfrak{B} zu \mathfrak{B} geht m in Dach- und Bodenfläche von \mathfrak{B} über, die wir mit m_1 bzw. m_2 bezeichnen. Elementarflächenstücke auf m bezeichnen wir beim Übergang von \mathfrak{B} zu \mathfrak{B} entsprechend mit Indices, je nachdem wir sie für \mathfrak{B} auf m_1 oder m_2 betrachten. Alle übrigen Bezeichnungen werden auf \mathfrak{B} und auf \mathfrak{B} gleich gewählt.

Da \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung α hat, muss m' mit k mindestens α Schnittpunkte gemein haben. Die gemeinsamen Punkte von k und m' sind also Schnittpunkte.

Unter den geschlossenen Schnittlinien von m und m' , falls solche vorhanden sind, betrachten wir eine innerste s' auf m' , die auf m' ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e' berandet. Dabei wählen wir s' so, dass e' möglichst wenig, etwa $\beta \geq 0$, Schnittpunkte mit k besitzt. Auf m berandet s' ein Elementarflächenstück e , das k ebenfalls in β Punkten trifft. Dies ergibt sich wie im Beweis von § 15 Satz 1:

Sei β_1 die Anzahl der gemeinsamen Punkte von k und e . Da e' ausser seinem Rande s' keine Schnittlinien von m und m' enthält, erhält man aus m eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , wenn man e durch e' ersetzt. Diese Meridianfläche muss k in mindestens α Punkten treffen, da α die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist. Daraus ergibt sich, dass e höchstens β Punkte mit k gemein haben kann, also $\beta_1 \leq \beta$.

Sei nun s'' eine auf e innerste Schnittlinie von m und m' (dabei kann $s' = s''$ sein), die auf e ein von weiteren Schnittlinien freies Elementarflächenstück e_1 berandet. Auf e_1 liegen $\beta_2 \leq \beta_1$ Schnittpunkte von m und k . Nun berandet s'' auf m' ein Elementarflächenstück e'_1 , das β_3 Punkte mit k gemein habe. Dabei ist $\beta_3 \leq \beta_2$, denn man erhält aus m' eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , wenn man e'_1 durch e_1 ersetzt, und diese muss k in mindestens α Punkten, also in mindestens so vielen Punkten wie m' treffen. Eine auf e'_1 innerste Schnittlinie von m und m' berandet auf e'_1 ein Elementarflächenstück, das $\beta_4 \leq \beta_3$ Punkte mit k gemein hat. Nach Wahl von s' ist $\beta \leq \beta_4$. Wir erhalten $\beta \leq \beta_4 \leq \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1 \leq \beta$ und damit $\beta = \beta_1$.

e und e' beranden zusammen eine Kugel \mathfrak{K} , die auf \mathfrak{B} liegt. Bei Übergang von \mathfrak{B} zu \mathfrak{B} wird die entsprechende Kugel \mathfrak{K} auf \mathfrak{B} berandet von e' und einem auf m_1 oder m_2 , etwa auf m_2 , liegenden Elementarflächenstück e_2 . Man kann nun durch ein Elementarflächenstück f' , das m' nicht und k in genau β Punkten trifft und dessen Rand s_0 auf m_2 liegt, \mathfrak{K} so in zwei Kugeln $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ zerlegen, dass \mathfrak{K} von \mathfrak{K}_2 umfasst wird. Man wähle etwa f' hinreichend nahe an e' . s_0 berandet auf m_2 ein Elementarflächenstück f_2 , das e_2 umfasst. Durch k werden β Sehnen in \mathfrak{K}_2 gebildet, die je einen Schnittpunkt von k und f' mit einem solchen von k und e_2 verbinden, und diese Sehnen sind nach § 5 Hilfssatz 6 unverknotet in \mathfrak{K}_2 , da die

Sehnen von \mathfrak{B} unverknotet sind und der Kreis nur als Produkt von Kreisen dargestellt werden kann. In \mathfrak{R}_1 werden α unverknotete Sehnen durch k gebildet, die je einen Punkt von m_1 mit einem Punkte von $m_2 - f_2 + f'$ verbinden. Schneiden wir nun \mathfrak{B} längs $m - f + f'$ zu einem Prisma \mathfrak{B}'' auf, so wird dieses durch ein Elementarflächenstück, das dem Elementarflächenstück f entspricht, in zwei Kugeln $\mathfrak{R}_1'', \mathfrak{R}_2''$ zerlegt. Diese Kugeln sind semilineare Bilder von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 vermöge der zu \mathfrak{B} und \mathfrak{B}'' gehörigen Abbildungen von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}'' auf \mathfrak{B} . Die Sehnen, die in ihnen von k gebildet werden, sind unverknotet nach Hilfssatz 1, da die entsprechenden Sehnen von \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 dort unverknotet sind. Nach § 5 Hilfssatz 6 setzen sich die Sehnen von \mathfrak{R}_1'' und \mathfrak{R}_2'' zu unverknoteten Sehnen von \mathfrak{B}'' zusammen und zwar wieder zu α Sehnen nach Hilfssatz 2. Die Anzahl der Schnittlinien von m' und $m - f + f'$ ist nach Konstruktion um mindestens 1 kleiner als diejenige von m' und m . Statt \mathfrak{B}'' schreiben wir wieder \mathfrak{B} und m statt $m - f + f'$.

Das eben beschriebene Verfahren kann nun solange fortgesetzt werden, bis alle geschlossenen Schnittlinien von m und m' beseitigt sind. Die nicht-geschlossenen lassen sich der Reihe nach entsprechend beseitigen. Es tritt nur an die Stelle von e ein Elementarflächenstück, das sich aus einem durch eine Schnittlinie von m abgeschnittenen Elementarflächenstück und einem solchen auf dem Rande von \mathfrak{B} zusammensetzt. Schliesslich sind dann alle Schnittlinien von m und m' verschwunden, und es folgt die Behauptung aus Hilfssatz 1 und § 5 Hilfssatz 6 wie oben, wenn man \mathfrak{B} längs m bzw. m' zu einem Prisma \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}' aufschneidet und die Zerlegung von \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}' durch m bzw. m' in zwei Kugeln betrachtet.

Wir übertragen nun die Betrachtungen von § 23. Das Analogon zu § 23 Hilfssatz 1 ist:

Hilfssatz 4: *Der Knoten κ werde durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf Y mit dem Träger λ und der Fädenzahl α dargestellt. Wenn sich λ durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z mit dem Träger μ und der Fädenzahl β darstellen lässt, so lässt sich κ auch durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z' darstellen, der μ als Träger hat und die Fädenzahl $\alpha\beta$ besitzt.*

Beweis: Z werde dargestellt durch den Vollring \mathfrak{B} mit der Knotenlinie l . \mathfrak{U} sei ein Vollring, der l zur orientierten Seele hat und im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Ein solcher Vollring existiert nach § 10 Hilfssatz 1. Es kann angenommen werden, dass \mathfrak{U} mit einer Knotenlinie k im Inneren von \mathfrak{U} den verallgemeinerten Schlauchzopf Y darstellt und l eine bezüglich k positiv orientierte Seele von \mathfrak{U} ist. Nach Hilfssatz 2 ist α die Ordnung von \mathfrak{U} in bezug auf k , β die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf \mathfrak{U} . Nach § 9 Satz 3 hat \mathfrak{B} in bezug auf k die Ordnung $\alpha\beta$, und nach § 9 Satz 4 hat k auch die Umlaufzahl $\alpha\beta$ auf \mathfrak{B} . Eine bezüglich l positiv orientierte Seele von \mathfrak{B} ist auch positiv orientiert bezüglich k und stellt den Knoten μ dar.

Es sei nun \mathfrak{u} eine Meridianfläche von \mathfrak{B} , die k in genau $\alpha\beta$ Punkten trifft. Nach § 9

Hilfssatz 2 und 5 kann n so gewählt werden, dass der Durchschnitt von n mit U aus β paarweise disjunkten Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_β von U besteht, die k in je α Punkten treffen. Durch diese Meridianflächen wird U in β Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_\beta$ zerlegt. k bildet in jeder dieser Kugeln \mathfrak{R}_i je α Sehnen, die in \mathfrak{R}_i unverknotet sind. Schneidet man nämlich U längs m_1 zu einem Prisma \mathfrak{P} auf, so zerfällt k nach Hilfssatz 3 in α unverknotete Sehnen von \mathfrak{P} , die je einen Punkt der Dachfläche von \mathfrak{P} mit einem Punkt der Bodenfläche verbinden. \mathfrak{P} wird durch Elementarflächenstücke m'_2, \dots, m'_β , die den Meridianflächen m_2, \dots, m_β von U entsprechen, in β Kugeln $\mathfrak{R}'_1, \mathfrak{R}'_2, \dots, \mathfrak{R}'_\beta$ zerlegt, die den Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_\beta$ von U entsprechen. Jede der α Sehnen von \mathfrak{P} wird von einem Elementarflächenstück m'_i ($i = 2, \dots, \beta$) in mindestens einem Punkt geschnitten, da jede Sehne einen Punkt der Dachfläche von \mathfrak{P} mit einem Punkt der Bodenfläche verbindet, und auch nur in einem Punkt, da m'_i nur insgesamt α Schnittpunkte mit den α Sehnen von \mathfrak{P} aufweist. Aus § 5 Hilfssatz 6 folgt, dass jede Sehne von \mathfrak{P} in \mathfrak{R}'_i eine unverknotete Sehne bildet, und nach Hilfssatz 1 sind auch die von k in \mathfrak{R}_i gebildeten Sehnen unverknotet in \mathfrak{R}_i .

Wir können eine Seele l_0 von U wählen, die jede der Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_β in genau einem Punkte trifft. l_0 werde so orientiert, dass l_0 auf U zu l homolog ist. \mathfrak{P} stellt mit l_0 denselben verallgemeinerten Schlauchzopf Z dar wie \mathfrak{P} mit l , denn nach § 6 Hilfssatz 1 gibt es eine s -Abbildung der \mathbb{C}^3 auf sich, die l in l_0 überführt und auf dem Komplement von U , insbesondere also auf dem Rande von \mathfrak{P} , die Identität ist.

Wir schneiden nun \mathfrak{P} längs n zu einem Prisma \mathfrak{Q} auf. Nach Hilfssatz 2 und 3 zerfällt dabei l_0 in β unverknotete Sehnen von \mathfrak{Q} , die je einen Punkt der Dachfläche von \mathfrak{Q} mit einem Punkt der Bodenfläche verbinden. Den Kugeln \mathfrak{R}_i entsprechen auf \mathfrak{Q} Kugeln \mathfrak{R}''_i , die je eine der aus l_0 entstandenen Sehnen von \mathfrak{Q} enthalten. Da die in \mathfrak{R}''_i liegende Sehne von \mathfrak{Q} unverknotet in \mathfrak{Q} ist, ist sie nach § 8 Hilfssatz 2 auch unverknotet in \mathfrak{R}''_i , und das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}''_i in bezug auf \mathfrak{Q} ist ein unverknoteter Vollring nach § 8 Hilfssatz 1. k zerfällt in \mathfrak{Q} in $\alpha\beta$ Sehnen von \mathfrak{Q} , von denen je α in einer Kugel \mathfrak{R}''_i liegen. Diese Sehnen sind nach Hilfssatz 1 unverknotet in \mathfrak{R}''_i , da die entsprechenden Sehnen von \mathfrak{R}_i in \mathfrak{R}_i unverknotet sind. Da nun das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}''_i in bezug auf \mathfrak{Q} ein unverknoteter Vollring ist, sind die Sehnen von \mathfrak{R}''_i nach § 8 Hilfssatz 1 auch unverknotet in \mathfrak{Q} . k zerfällt also in \mathfrak{Q} in $\alpha\beta$ unverknotete Sehnen von \mathfrak{Q} , woraus sich die Behauptung ergibt.

Wie das oben angeführte Beispiel für einen verallgemeinerten Schlauchzopf zeigt (Fig. 29, 30), lässt sich § 23 Hilfssatz 2 nicht vollständig übertragen. Der jetzt vorliegende Sachverhalt wird durch die Hilfssätze 5, 6 charakterisiert.

Hilfssatz 5: *Durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k werde ein verallgemeinerter Schlauchzopf Z^* der Fädenzahl $\alpha > 1$ dargestellt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring im Inneren*

von \mathfrak{B}^* , der k nicht-trivial im Inneren enthält. Dann stellt \mathfrak{B} mit k einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z dar. Die Fädenzahl γ von Z ist Teiler von α . Für $\gamma = \alpha$ ist $Z = Z^*$, für $\gamma < \alpha$ stellt \mathfrak{B}^* mit einer orientierten Seele von \mathfrak{B} einen verallgemeinerten Schlauchzopf der Fädenzahl $\beta = \alpha\gamma^{-1}$ dar.

Beweis: Man kann den Beweis von § 23 Hilfssatz 2 bis auf den dritten Schritt, der hier durch die Voraussetzungen gegenstandslos ist, fast wörtlich übertragen. Es kann jedoch unter Benutzung von Hilfssatz 3 und früherer Resultate ein einfacherer Beweis gegeben werden.

Nach Hilfssatz 2 hat \mathfrak{B}^* in bezug auf k die Ordnung α . Sei β die Ordnung von \mathfrak{B}^* in bezug auf \mathfrak{B} und γ die Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k . Nach § 9 Satz 3 ist $\alpha = \beta\gamma$. Ferner sei γ' die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} und β' die Umlaufzahl einer orientierten Seele von \mathfrak{B} auf \mathfrak{B}^* . Da α die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B}^* ist, gilt $\alpha = \beta'\gamma'$ nach § 9 Satz 4 und damit $\beta\gamma = \beta'\gamma'$. Nach § 9 Hilfssatz 1 ist $\beta' \leq \beta$ und $\gamma' \leq \gamma$, woraus wegen $\beta\gamma = \beta'\gamma'$ folgt $\beta = \beta'$ und $\gamma = \gamma'$.

Es sei nun m^* eine Meridianfläche von \mathfrak{B}^* , die k in genau α Punkten trifft. Nach § 9 Hilfssatz 2 und 5 kann m^* so gewählt werden, dass der Durchschnitt von m^* mit \mathfrak{B} nur aus β Meridianflächen m_1, m_2, \dots, m_β von \mathfrak{B} besteht, die k in je γ Punkten treffen. Schneidet man \mathfrak{B}^* längs m^* zu einem Prisma \mathfrak{P} auf, so zerfällt \mathfrak{B} in β Kugeln $\mathfrak{K}'_1, \mathfrak{K}'_2, \dots, \mathfrak{K}'_\beta$ auf \mathfrak{P} und k in α unverknotete Sehnen von \mathfrak{P} , die nach Hilfssatz 2 je einen Punkt der Dachfläche mit je einem Punkt der Bodenfläche von \mathfrak{P} verbinden. Jede der Kugeln \mathfrak{K}'_i ($i = 1, 2, \dots, \beta$) enthält je γ solcher Sehnen. Daraus folgt, dass jede der Kugeln \mathfrak{K}'_i mit der Dachfläche und der Bodenfläche von \mathfrak{P} je ein Elementarflächenstück gemein hat, das einer Meridianfläche von \mathfrak{B} entspricht.

Jede der γ Sehnen von \mathfrak{K}'_i ist unverknotet in \mathfrak{P} und damit nach § 8 Hilfssatz 2 auch unverknotet in \mathfrak{K}'_i , und nach § 8 Hilfssatz 1 ist das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}'_i bezüglich \mathfrak{P} ein unverknoteter Vollring.

Betrachten wir nun den Fall $\beta = 1$ (vgl. 4. Schritt des Beweises von § 23 Hilfssatz 2). Sei a eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , welche die auf m^* liegende Meridianfläche m_1 von \mathfrak{B} in nur einem Punkte trifft. Ihr entspricht in \mathfrak{P} eine unverknotete Sehne a' von \mathfrak{K}'_1 . Da das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{K}'_1 in bezug auf \mathfrak{P} ein unverknoteter Vollring ist, ist a' nach § 8 Hilfssatz 1 auch unverknotet in \mathfrak{P} und daher a nach § 6 Hilfssatz 2 auch orientierte Seele von \mathfrak{B}^* . \mathfrak{B} und \mathfrak{B}^* sind also gleich verknotet, und \mathfrak{B}^* hat in bezug auf \mathfrak{B} die Ordnung 1. Nach § 10 Hilfssatz 2 gibt es eine s -Abbildung der \mathbb{S}^3 auf sich, welche \mathfrak{B}^* in \mathfrak{B} überführt und ausserhalb einer beliebig kleinen Umgebung des abgeschlossenen Komplements von \mathfrak{B} bezüglich \mathfrak{B}^* , also insbesondere auf k , die Identität ist. Daraus folgt, dass \mathfrak{B} mit k denselben verallgemeinerten Schlauchzopf darstellt wie \mathfrak{B}^* mit k .

Sei nun $\beta > 1$. Den Kugeln \mathfrak{R}'_i auf \mathfrak{P} entsprechen Kugeln \mathfrak{R}_i in \mathfrak{B}^* , die sich zu \mathfrak{B} zusammensetzen. Sei a eine orientierte Seele von \mathfrak{B} , die in jeder Kugel \mathfrak{R}_i je eine unverknotete Sehne a_i bildet. Einer solchen Sehne a_i entspricht nach Hilfssatz 1 in \mathfrak{R}'_i eine unverknotete Sehne a'_i von \mathfrak{R}'_i . Da das abgeschlossene Komplement von \mathfrak{R}'_i bezüglich \mathfrak{P} ein unverknoteter Vollring ist, ist a'_i auch unverknotet in \mathfrak{P} . Daraus folgt, dass \mathfrak{B}^* mit a einen verallgemeinerten Schlauchzopf der Fädenzahl β darstellt.

Wir schneiden nun \mathfrak{B} längs m_1 zu einem Prisma \mathfrak{P}'' auf. \mathfrak{P}'' wird durch Elementarflächenstücke, die den Meridianflächen m_2, \dots, m_β von \mathfrak{B} entsprechen, in β Kugeln $\mathfrak{R}''_1, \mathfrak{R}''_2, \dots, \mathfrak{R}''_\beta$ zerlegt, die den Kugeln $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_\beta$ auf \mathfrak{B} entsprechen. k zerfällt in γ Sehnen von \mathfrak{P}'' , die je einen Punkt der Dachfläche von \mathfrak{P}'' mit einem Punkt der Bodenfläche von \mathfrak{P}'' verbinden, denn es wird m_1 von k in allen Schnittpunkten im gleichen Sinne durchsetzt, da die Umlaufzahl von k auf \mathfrak{B} gleich der Ordnung von \mathfrak{B} in bezug auf k ist. Jede Sehne von \mathfrak{P}'' bildet also je eine Sehne in \mathfrak{R}''_i und zwar eine unverknotete nach Hilfssatz 1, da die entsprechenden Sehnen von \mathfrak{R}'_i in \mathfrak{R}'_i unverknotet sind. Aus § 5 Hilfssatz 6 folgt, dass die Sehnen von \mathfrak{P}'' unverknotet sind. Es kann nun nicht $\gamma = 1$ sein, da sonst k nur eine unverknotete Sehne von \mathfrak{P}'' entspräche und somit k nach § 6 Hilfssatz 2 orientierte Seele von \mathfrak{B} wäre, während doch k nicht-trivial in \mathfrak{B} liegen sollte. Es ist also $\gamma > 1$, und \mathfrak{B} stellt mit k einen verallgemeinerten Schlauchzopf der Fädenzahl γ dar. Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 6: *Durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k werde ein verallgemeinerter Schlauchzopf Z^* der Fädenzahl $\alpha > 1$ dargestellt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k im Inneren enthält und dessen abgeschlossenes Komplement im Inneren von \mathfrak{B}^* enthalten ist. Dann ist k nullhomolog auf \mathfrak{B} .*

Beweis: Nach § 15 Satz 1 gibt es eine Meridianfläche m^* von \mathfrak{B}^* , die den Rand von \mathfrak{B} nicht und k in genau α Punkten trifft. Schneidet man \mathfrak{B}^* längs m^* zu einem Prisma \mathfrak{P} auf, so zerfällt k nach Hilfssatz 3 in α unverknotete Sehnen k'_i ($i = 1, 2, \dots, \alpha$) von \mathfrak{P} , die wegen Hilfssatz 2 je einen Punkt der Dachfläche mit einem Punkt der Bodenfläche von \mathfrak{P} verbinden. Verbindet man nun den Endpunkt der Sehne k'_i in der Bodenfläche von \mathfrak{P} durch eine Strecke u'_i mit dem Punkte der Bodenfläche, der unter dem Anfangspunkt von k'_i liegt, so erhält man aus k'_i und u'_i dadurch, dass man den Anfangspunkt von u'_i von der Bodenfläche ins Innere von \mathfrak{P} abhebt, eine unverknotete Sehne k''_i von \mathfrak{P} , der nach § 6 Hilfssatz 2 eine orientierte Seele a''_i von \mathfrak{B}^* entspricht. Dann entspricht aber auch $k'_i u'_i$ eine orientierte Seele a'_i von \mathfrak{B}^* , da sich die Deformation von $k'_i u'_i$ in eine Deformation von a'_i auf \mathfrak{B}^* überträgt. Die Bilder der Strecken u'_i auf m^* bilden eine 1-Kette u . Nach § 15 Satz 2 ist jede Seele a'_i von \mathfrak{B}^* auf \mathfrak{B} nullhomolog. Man bemerkt: Der 1-Zyklus k auf \mathfrak{B} lässt sich durch Hinzunahme einer 1-Kette u auf m^* in einen 1-Zyklus überführen, der auf \mathfrak{B}

nullhomolog ist. u ist als Differenz zweier 1-Zyklen ein 1-Zyklus, und u ist nullhomolog auf \mathfrak{B} , da u auf dem Elementarflächenstück m^* im Inneren von \mathfrak{B} liegt. Damit folgt, dass k nullhomolog auf \mathfrak{B} ist.

Hilfssatz 7: *Durch den Vollring \mathfrak{B}^* mit der Knotenlinie k werde ein verallgemeinerter Schlauchzopf Z^* dargestellt. \mathfrak{B} sei ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält und auf dem k nicht nullhomolog ist. Dann lässt sich durch eine s -Abbildung der \mathfrak{E}^3 auf sich, die auf k die Identität ist, \mathfrak{B} entweder in einen Vollring überführen, der im Inneren von \mathfrak{B}^* liegt, oder in einen Vollring überführen, der \mathfrak{B}^* umfasst.*

Der Beweis ergibt sich wie bei § 23 Hilfssatz 3 durch Anwendung von § 18 Satz 1. Fall 3 dieses Satzes scheidet hierbei wegen Hilfssatz 6 durch die Voraussetzung aus, dass k nicht nullhomolog auf \mathfrak{B} ist. Dass Fall 4 von § 18 Satz 1 nicht eintreten kann, ergibt sich wegen Hilfssatz 5 fast wörtlich wie im Beweise von § 23 Hilfssatz 3.

Hilfssatz 8: *Ein Knoten, der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, kann nicht durch zwei verschiedene verallgemeinerte Schlauchzöpfe der gleichen Fädenzahl dargestellt werden.*

Der Beweis von § 23 Hilfssatz 4 überträgt sich fast wörtlich.

Hilfssatz 9: *Der Knoten κ lasse sich durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z mit der Fädenzahl α und dem Träger λ darstellen. Ist \mathfrak{B} ein Vollring, der mit der Knotenlinie k den (orientierten) Begleitknoten λ von κ darstellt, so stellt \mathfrak{B} mit k den verallgemeinerten Schlauchzopf Z dar.*

Der Beweis von § 23 Hilfssatz 5 überträgt sich wegen Hilfssatz 7 ohne weiteres.

Sei nun κ ein Knoten, der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, k eine Knotenlinie, die κ darstellt. Wir wollen weiterhin unter den Begleitknoten von κ nur solche zulassen, die man durch Vollringe erhalten kann, welche k nicht-trivial im Inneren enthalten und auf denen k nicht nullhomolog ist, also nicht die Umlaufzahl null hat. Dies sind gerade die orientierten Begleitknoten von κ , während die nicht-orientierten ausscheiden. Unter dieser Einschränkung erhält man aus den Hilfssätzen 4, 5, 7, 8, 9 fast wörtlich wie in § 23 die folgenden Sätze:

Satz 2: *Ein Knoten κ , der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt unter seinen orientierten Begleitknoten einen einzigen maximalen λ' . Dieser ist Träger eines verallgemeinerten Schlauchzopfes Z' , welcher der einzige verallgemeinerte Schlauchzopf kleinster Fädenzahl ist, durch den sich κ darstellen lässt. κ ist durch λ' und den verallgemeinerten geschlossenen Zopf Z^* , der Z' zugeordnet ist, umkehrbar eindeutig bestimmt.*

Folgerung: Jeder Knoten, der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, ist Primknoten.

Satz 3: Ein Knoten κ , der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt eine Darstellung durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf Z'' grösster Fädenzahl. Der Träger λ'' von Z'' ist unter den Begleitknoten von κ der kleinste, der als Träger einer Darstellung von κ als verallgemeinerter Schlauchzopf auftreten kann. Ein orientierter Begleitknoten μ von κ ist entweder Begleitknoten von λ'' oder Träger eines verallgemeinerten Schlauchzopfes, durch den κ dargestellt werden kann. Im letzten Falle ist μ entweder gleich λ'' oder ein Knoten, der sich durch einen verallgemeinerten Schlauchzopf mit dem Träger λ'' darstellen lässt.

Satz 4: Ein Knoten, der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, besitzt nur eine solche Darstellung genau dann, wenn sein maximaler orientierter Begleitknoten nicht als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellbar ist.

Satz 5: Ein Knoten κ , der sich als verallgemeinerter Schlauchzopf darstellen lässt, kann nur durch endlich viele verallgemeinerte Schlauchzöpfe dargestellt werden. Werden diese verallgemeinerten Schlauchzöpfe nach aufsteigender Fädenzahl geordnet, so sind ihre Träger als Begleitknoten von κ streng absteigend geordnet.

Literatur.

- [1] ALEXANDER, J. W.: *A lemma on systems of knotted curves*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA Bd. 9 (1923) S. 93.
- [2] —, *On the subdivision of a 3-space by a polyhedron*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA Bd. 10 (1924) S. 6.
- [3] ARTIN, E.: *Theorie der Zöpfe*. Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 4 (1926) S. 47.
- [4] BURAU, W.: *Kennzeichnung der Schlauchknoten*. Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 9 (1933) S. 125.
- [5] DEHN, M.: *Die beiden Kleeblattschlingen*. Math. Ann. Bd. 75 (1914) S. 402.
- [6] GRAEUB, W.: *Die semilinearen Abbildungen*. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1950, math.-nat. Klasse, 4. Abh.
- [7] REIDEMEISTER, K.: *Knotentheorie*, Berlin 1932.
- [8] SCHREIER, O.: *Über die Gruppen $A^a B^b = I$* . Abh. Math. Sem. Hamburg Bd. 3 (1924) S. 167.
- [9] SCHUBERT, H.: *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten*. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1949, math.-nat. Klasse, 3. Abh.
- [10] SEIFERT, H.: *Topologie dreidimensionaler gefaseter Räume*. Acta Math. Bd. 60 (1933) S. 147.
- [11] —, *Über das Geschlecht von Knoten*. Math. Ann. Bd. 110 (1935) S. 571.
- [12] —, *Schlingknoten*. Math. Z. Bd. 52 (1949) S. 62.
- [13] —, *On the homology invariants of knots*. Quart. J. Math. Oxford (2) Bd. 1 (1950) S. 23.
- [14] —, *Schlauchknoten*. Unveröffentlicht.