ÄHNLICHKEITSANALYSE VON GRUPPENRELATIONEN

VON

HELMUT SCHIEK

in Bonn

Einleitung

In dieser Arbeit wird für eine bestimmte Klasse von Gruppen das Wortproblem gelöst. Wie Novikoff [5] gezeigt hat, ist das Wortproblem für Gruppen in seiner allgemeinsten Form unlösbar; es kann also kein Entscheidungsverfahren geben, das gleichzeitig für *alle* Gruppen anwendbar ist — wohl aber ist ein solches Verfahren möglich für gewisse Klassen von Gruppen. Für Gruppen mit *einer* definierenden Relation hat Magnus [4] das Wortproblem gelöst; in den letzten Jahren hat Tartakowski [6]–[9], englische Übersetzung von [6]–[8] in [10]) für eine große Klasse von Gruppen ein Entscheidungsverfahren angegeben; eine weitere Arbeit stammt von Haken [2].

In der vorliegenden Untersuchung gehen wir aus von einem freien Produkt $\mathfrak{F}_a$ aus freien abelschen Gruppen; wir können $\mathfrak{F}_a$ also ansehen als eine Gruppe, in der gewisse Vertauschungsrelationen als definierende Relationen angenommen werden. Zusätzlich zu diesen Vertauschungsrelationen werden dann noch weitere definierende Relationen eingeführt, die gewissen Bedingungen genügen. Für die so definierte Klasse von Gruppen kann ein Entscheidungsverfahren für das Wortproblem angegeben werden.

Das verwendete Entscheidungsverfahren ist ein Reduktionsverfahren, das uns gestattet, zu jedem Folgewort W_0, das nicht das Leerwort ist (in der betrachteten Gruppe also die Einheit darstellt), ein weiteres Folgewort W_1 anzugeben mit einer geringeren Anzahl von ,,Sektoren" als W_0. Dieses Entscheidungsverfahren beruht auf einem Satz, demzufolge für Gruppen der betrachteten Art das zu einem Folgewort W gehörige (im trivialen Sinne) reduzierte Wort $\overline{W}$ stets ein Teilwort enthält, das gleichzeitig ,,charakteristisches Teilwort" ist eines definierenden Wortes. Das Entscheidende hierbei ist, daß bei dem Reduktionsverfahren von mindestens einem definierenden Wort ein ,,genügend großes" Teilwort stehen bleibt. Der Satz ist also eine Art ,,Erhaltungssatz", ähnlich wie bei Gruppen mit einer definierenden Relation der *Freiheitssatz* von Magnus das Erhaltenbleiben gewisser Erzeugender in dem reduzierten Wort angibt.

Die vorliegende Untersuchung hat eine gewisse Verwandtschaft zu den Arbeiten von Tartakowski [6]–[9], auf die im letzten Paragraphen ausführlich eingegangen wird. Bei Tartakowski werden jedoch keine Vertauschungsrelationen vorausgesetzt, was einem Spezialfall der hier behandelten Theorie entspricht. In diesem Specialfall ergibt ein Vergleich der Klasse von Gruppen, für die nach Tartakowski das Wortproblem lösbar ist, mit der Klasse von Gruppen, für die nach der hier vorliegenden Theorie ein Entscheidungsverfahren existiert, eine Überschneidung, jedoch ist keine der beiden Klassen in der anderen enthalten. Während bei den von Tartakowski behandelten Gruppen das ,,Maß der Überdeckung" von je *zwei* definierenden Relationen eine Bedeutung besitzt (als Maßstab für die ,,Ähnlichkeit" dieser definierenden Relationen), ist es ein Kennzeichen der vorliegenden Arbeit, daß auch die ,,inneren Verknüpfungen" je *dreier* definierender Worte in Betracht gezogen werden.

Nach Fertigstellung der Arbeit konnte Verfasser Einsicht nehmen in eine Zusammenfassung der Untersuchungen von J. L. Britton [1], zu denen bemerkenswerte Beziehungen bestehen (die Untersuchungen von Herrn Britton befinden sich im Druck). Auch Herr Britton betrachtet die inneren Verknüpfungen je dreier definierender Relationen, doch ergibt sich ebenfalls eine Überschneidung der betrachteten Klassen von Gruppen[1].

§ 1. Bezeichnungen und Umformungen

Die in der Einleitung nur angedeutete Problemstellung soll nunmehr in allgemeiner Form entwickelt werden. Wir betrachten zunächst ein freies Produkt aus freien abelschen Gruppen, in das zusätzlich definierende Relationen eingeführt werden. Diese definierenden Relationen sollen gewissen Axiomen genügen. Für die hierdurch gegebene Klasse von Gruppen erweist sich das Wortproblem als lösbar.

Es seien gegeben elementefremde Mengen $\mathfrak{S}_\alpha$ von Buchstaben (α durchlaufe eine Indexmenge $\mathfrak{J}$); $\mathfrak{B}_\alpha$ sei die von $\mathfrak{S}_\alpha$ erzeugte freie abelsche Gruppe und $\mathfrak{F}_a$ sei das freie Produkt aller $\mathfrak{B}_\alpha$ mit $\alpha \in \mathfrak{J}$. Ist $\mathfrak{S}$ die Vereinigungsmenge der $\mathfrak{S}_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{J})$, so kann $\mathfrak{F}_a$ auch aufgefaßt werden als Gruppe mit dem Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ und einer

[1] Wie mir Herr Britton mitteilt, sind jedoch die von ihm verwendeten Beweismethoden *völlig verschieden* von den Beweismethoden der vorliegenden Untersuchung.

gewissen Menge $\mathfrak{V}$ von Vertauschungsrelationen. Zusätzlich zu diesen Vertauschungsrelationen sollen noch weitere definierende Relationen eingeführt werden, die gewissen Bedingungen genügen. Um nun diese Bedingungen und die Operationen in $\mathfrak{F}_a$ formulieren zu können, seien zunächst einige Begriffe aus der Theorie der freien Gruppen verallgemeinert.

Die folgenden Begriffe dienen dazu, die in $\mathfrak{F}_a$ gültigen Vertauschungsoperationen zu beschreiben. Für zwei identische Worte (Übereinstimmung Buchstabe für Buchstabe) schreiben wir $W_1 = W_2$. Zwei Buchstaben a_1 und a_2 aus $\mathfrak{S}$ nennen wir *verwandt* (in Zeichen: $a_1 \triangle a_2$), falls für ein bestimmtes $\alpha \in \mathfrak{J}$ gilt: $a_1^{\pm 1} \in \mathfrak{S}_\alpha$, $a_2^{\pm 1} \in \mathfrak{S}_\alpha$. Zwei Worte W_1 und W_2, die in Buchstabenschreibweise gegeben sind durch:

$$W_1 = a_1 \cdots a_m, \qquad W_2 = b_1 \cdots b_n \qquad (a_i \in \mathfrak{S}^{\pm 1},\ 1 \le i \le m,\ b_j \in \mathfrak{S}^{\pm 1},\ 1 \le j \le n)$$

nennen wir *verwandt* ($W_1 \triangle W_2$), falls gilt: $a_i \triangle b_j$ für alle i und j $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$.

Sind bei einem Wort $W = a_1 \cdots a_m$ $(a_i \in \mathfrak{S}^{\pm 1})$ nicht alle a_i $(1 \le i \le m)$ zueinander verwandt, so existiert eine größte Zahl k mit $1 \le k < m$, so daß alle Buchstaben a_l mit $1 \le l \le k$ zueinander verwandt sind, jedoch a_k zu a_{k+1} nicht verwandt ist. Wir schreiben: $S_1 = a_1 \cdots a_k$ und nennen S_1 den ersten *Sektor* von W (für $a_i \triangle a_j$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$ setzen wir $S_1 = W$). So zerlegt sich W in eine Anzahl von Sektoren: $W = S_1 \cdots S_q$, derart, daß S_i der erste Sektor ist von $S_1 \cdots S_q$ $(1 \le i \le q)$. Wir nennen S_i den i-ten Sektor von W $(1 \le i \le q)$, S_q auch den letzten Sektor von W. Die Anzahl q der Sektoren von W bezeichnen wir mit $\varkappa(W)$; ist W das Leerwort $(W = 1)$, so setzen wir $\varkappa(W) = 0$.

Vermöge der Vertauschungsrelationen aus $\mathfrak{V}$ stellt ein Wort W', das aus W entsteht durch Permutationen der Buchstaben in den einzelnen Sektoren von W, in der Gruppe $\mathfrak{F}_a$ dasselbe Element dar. Folgende beiden Operationen führen daher ein Wort W in ein Wort W' über, das in $\mathfrak{F}_a$ dasselbe Element darstellt: 1) Elementare Umformungen; 2) Permutationen der Buchstaben in den einzelnen Sektoren. Diese beiden Operationen seien als Äquivalenzumformungen bezeichnet. Zwei Worte W_1 und W_2 wollen wir als *äquivalent* bezeichnen (in Zeichen: $W_1 \sim W_2$), wenn sie durch eine Kette von Äquivalenzumformungen auseinander hervorgehen. Gehen zwei Worte W_1 und W_2 durch eine Kette von Operationen der Art 2) auseinander hervor, so nennen wir sie *äquivalent im engeren Sinne* (in Zeichen: $W_1 \approx W_2$). Außer den beiden Umformungen 1) und 2) betrachten wir noch eine dritte Operation: 3) Übergang von $W = a_1 \cdots a_m$ (Buchstabenschreibweise) zu einem Wort W', das aus W entsteht durch zyklische Vertauschung der Buchstaben: $W' = a_i \cdots a_m\, a_1 \cdots a_{m-1}$ (evtl. $W' = W$). Die

Menge aller Worte, die aus W entsteht durch eine Kette von Umformungen der Art 1), 2), 3) bezeichnen wir als *Zyklisches Wort* $Z(W)$[1].

Hiermit wird auch der Begriff *Teilwort* allgemeiner gefaßt. Wir nennen das Wort Y Teilwort des Wortes W, wenn ein $W' \approx W$ existiert mit $W' = X\,Y\,Z$, wobei X und Z geeignete Worte bedeuten. Kann W' speziell so gewählt werden, daß X das Leerwort ist, so nennen wir Y auch *linken Abschnitt* von W; kann W' so gewählt werden, daß Z das Leerwort ist, so nennen wir Y *rechten Abschnitt* von W. Ist in $W' = X\,Y\,Z$ für $X \neq 1$ der erste Sektor von Y nicht verwandt zum letzten Sektor von X und für $Z \neq 1$ der letzte Sektor won Y nicht verwandt zum ersten Sektor von Z, so nennen wir Y *sektoriell abgeschlossen in* W'; diese Definition ist von der Auswahl von $W' \approx W$ unabhängig, gilt daher auch für $W' = W$.

Ist Y gegeben in Sektorenschreibweise durch $Y = S_1 \ldots S_k$ (d.h. für $1 \leq i \leq k$ sei S_i der i-te Sektor von Y), so setzen wir $S_1' = 1$ (1 als Symbol für das Leerwort) falls S_1 verwandt ist zum letzten Sektor von X — andernfalls setzen wir $S_1' = S_1$; wir setzen $S_k' = 1$, falls S_k verwandt ist zum ersten Sektor von Z, andernfalls setzen wir $S_k' = S_k$. Falls $Y_W = S_1'\,S_2 \ldots S_{k-1}\,S_1' \neq 1$ gilt, so ist das Teilwort Y_W von $W = X\,Y\,Z$ sektoriell abgeschlossen in W. Wir setzen $\varkappa_W(Y) = \varkappa(Y_W)$ und es ergibt sich:

$$\varkappa(W) = \varkappa(X) + \varkappa_W(Y) + \varkappa(Z),$$

woraus folgt:

$$\varkappa(W) \leq \varkappa(X) + \varkappa(Y) + \varkappa(Z) \leq \varkappa(W) + 2 \tag{1}$$

Für $\varkappa(X) = 0$ gilt:

$$\varkappa(W) \leq \varkappa(Y) + \varkappa(Z) \leq \varkappa(W) + 1. \tag{1 a}$$

Wir nennen $\varkappa_W(Y)$ die Anzahl der *vollen* Sektoren von Y bezüglich W.

Wir nennen ein Wort W *reduziert,* wenn kein $W' \sim W$ existiert aus weniger Buchstaben als W. Durch endlichmalige Anwendung der Operationen 1) und 2) gelangen wir stets von einem Wort W zu einem reduzierten Wort $W' \sim W$. Durch Permutationen der Buchstaben in den einzelnen Sektoren erhält man aus W' sämtliche reduzierten Worte $W'' \sim W$.

Ist nun außer den Vertauschungsrelationen aus $\mathfrak{V}$ noch eine weitere zusätzliche definierende Relation $R = 1$ gegeben, so können wir das definierende Wort R stets als reduziert voraussetzen und außerdem annehmen, das R Kurzwort ist, d. h. nicht

[1] Man sieht unmittelbar ein, daß es für Untersuchungen von Transformationen vorteilhaft ist, eine zyklische Schreibweise der Worte zu betrachten, so MAGNUS in [3], [4]; TARTAKOWSKI [7] unterscheidet das „zyklische Wort" als graphisches Symbol von dem gewöhnlichen oder „linearen" Wort.

die Form besitzt: $R=aR'a^{-1}$. Ebenso kann angenommen werden, daß alle zu R im engeren Sinne äquivalenten Worte $R'\approx R$ Kurzworte sind.

Wir wollen nun außerdem die Menge der zusätzlichen definierenden Relationen $R=1$ so annehmen, dass die Menge $\mathfrak{R}$ der definierenden Worte R abgeschlossen ist in Bezug auf folgende Operationen:

1) Übergang zum formalinversen Wort R^{-1}.
2) Permutationen der Buchstaben in den einzelnen Sektoren von R.
3) Zyklische Permutation der Buchstaben von R.

Jede dieser Operationen führt ein definierendes Wort R über in ein Folgewort R', d. h. ist $R=1$ eine definierende Relation, so ist $R'=1$ Folgerelation der Relation $R=1$ und der Vertauschungsrelationen. Daher wird an der betrachteten Gruppe nichts geändert, wenn die Menge $\mathfrak{R}$ der zusätzlichen definierenden Worte so angenommen wird, daß sie abgeschlossen ist in Bezug auf die obigen drei Operationen.

Die Menge $\mathfrak{R}$ sei in der angegebenen Art vorausgesetzt. Wir unterwerfen nun $\mathfrak{R}$ noch gewissen Bedingungen; hierzu sei noch der Begriff der Kongruenz erklärt. Sind gegeben zwei Worte W_1 und W_2 in Sektorenschreibweise durch: $W_1=S_1 \ldots S_{k+1}$, $W_2=T \ldots T_{k+1}$, so nennen wir W_1 und W_2 zueinander *kongruent* (in Zeichen: $W_1\simeq W_2$), falls gilt:

$$S_1\approx T_1,\ \ldots,\ S_k\approx T_k,\qquad S_{k+1}\triangle T_{k+1}.$$

Es existiere nun eine (für jede Gruppe feste) Zahl $j\geq 2$ so daß gilt:

AXIOM Z (ZÄHLAXIOM).

$\varkappa(R)>4j-2$ für alle $R\in\mathfrak{R}$.

AXIOM B (BESTIMMUNGSAXIOM).

Seien gegeben in Sektorenschreibweise zwei definierende Worte

$$R_1\in\mathfrak{R},\ R_2\in\mathfrak{R}: R_1=S_1 \ldots S_m,\ R_2=T_1 \ldots T_n$$

und gilt: $S_1 \ldots S_j\simeq T_1 \ldots T_j$, *so folgt*: $R_1\approx R_2$.

In den nächsten Paragraphen werden die Axiome Z und B vorausgesetzt- Später werden noch zwei weitere Axiome eingeführt und es wird gezeigt, daß das Wortproblem lösbar ist für Gruppen, die diesen Axiomen genügen und noch einer gewissen Endlichkeitsbedingung, falls unendlich viele definierende Relationen angenommen werden.

Zur Vorbereitung der Entwicklungen der nächsten Paragraphen betrachten wir eine beliebige Transformierte VRV^{-1} mit $R\in\mathfrak{R}$. Es wird gezeigt, daß sich eine solche Transformierte (bis auf Äquivalenz) stets in einer bestimmten Normalform schreiben läßt.

Zunächst kann V als reduziertes Wort vorausgesetzt werden, denn ist V' reduziert, $V' \sim V$, so gilt: $T = V R V^{-1} \sim V' R V'^{-1}$. Wir zeigen nun weiter, daß sogar T reduziert vorausgesetzt werden kann. Ist etwa in Sektorenschreibweise: $V = U_1 \ldots U_m$, $R = S_1 \ldots S_n$ und ist $T = V R V^{-1}$ nicht reduziert, so folgt, daß entweder im letzten Sektor U_m von V ein Buchstabe enthalten ist, der invers ist zu einem Buchstaben aus S_1 oder daß in S_n ein Buchstabe enthalten ist, der invers ist zu einem Buchstaben aus U_m^{-1} (da ja sowohl R als auch V reduziert vorausgesetzt wurden).

Angenommen, es gelte: $U_m = X_1 a X_2$, $S_1 = Y_1 a^{-1} Y_2$ für geeignete Worte X_1, X_2, Y_1, Y_2. Dann folgt:

$$T = V R V^{-1} \sim V' R' V'^{-1}$$

mit $$V' = U_1 \ldots U_{m-1} X_1 X_2, \quad R' = Y_1 Y_2 S_2 \ldots S_n a^{-1}, \quad R' \in \mathfrak{R}.$$

Enthält S_n einen Buchstaben, der invers ist zu einem Buchstaben von U_m^{-1}, so können wir eine analoge Umformung vornehmen. Durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Buchstaben von V folgt dann die Behauptung.

Ist $W = 1$ eine beliebige Folgerelation, so gilt immer eine Äquivalenz:

$$W \sim \prod_{i=1}^{n} V_i R_i V_i^{-1}, \qquad R_i \in \mathfrak{R},$$

wobei die Transformierten $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ reduziert sind. Es wird nun gezeigt, daß die V_i sogar so gewählt werden können, daß sie kein zu großes Teilwort eines definierenden Wortes $R' \in \mathfrak{R}$ enthalten. Ist R ein definierendes Wort ($R \in \mathfrak{R}$) und sind P, C, Q Teilworte von $R = P C Q$, dann nennen wir C ein *charakteristisches Teilwort* der definierenden Relationen $R \in \mathfrak{R}$, wenn die Sektorengleichung gilt:

$$\varkappa(C) > \varkappa(P^{-1} Q^{-1}) + 2.$$

Ist nun für ein definierendes Wort $R \in \mathfrak{R}$ gegeben ein Wort V mit folgenden Bedingungen:

1) V enthält kein Teilwort, das gleichzeitig charakteristisches Teilwort ist irgend eines definierenden Wortes $R' \in \mathfrak{R}$.
2) $V R V^{-1}$ ist reduziert,

so nennen wir V einen *Rand* von R. Das Wort $T = V R V^{-1}$ nennen wir eine *primäre Transformierte*. Wir zeigen, daß jedes Folgewort äquivalent ist einem Produkt aus primären Transformierten-

Es sei gegeben eine Transformierte $T = V R V^{-1}$, die den obigen Bedingungen gemäß gewählt ist und es sei $V = X C Y$, wobei C charakteristisches Teilwort ist eines definierenden Wortes $R' \in \mathfrak{R}$, $R' = P C Q$. Vermöge der Äquivalenzumformungen:

$$V = X C Y \sim X P^{-1} R' P X^{-1} \cdot X P^{-1} Q^{-1} Y$$

erhalten wir:

$$T = V R V^{-1} \sim T_1 T_2 T_1^{-1}$$

mit

$$T_1 = V_1 R_1 V_1^{-1}, \qquad V_1 = X P^{-1}, \qquad R_1 = R',$$
$$T_2 = V_2 R_2 V_2^{-1}, \qquad V_2 = X P^{-1} Q^{-1} Y, \qquad R_2 = R.$$

T_1 und T_2 brauchen hierbei nicht reduziert zu sein, jedoch existieren nach den obigen Ausführungen reduzierte Transformierte

$$T_1^* = V_1^* R_1^* V_1^{*-1} \sim T_1 \qquad (R_1^* \in \mathfrak{R})$$

und

$$T_2^* = V_2^* R_2^* V_2^{*-1} \sim T_2 \qquad (R_2^* \in \mathfrak{R}).$$

Die Anzahl $\varkappa(V_1^*)$ der Sektoren von V_1^* ist hierbei höchstens so groß wie die Anzahl der Sektoren $\varkappa(V_1)$ des Wortes V_1; ebenso gilt: $\varkappa(V_2^*) \leq \varkappa(V_2)$.

Vermöge Formel (1) und der Voraussetzung $\varkappa(C) > \varkappa(P^{-1} Q^{-1}) + 2$ folgt somit:

$$\varkappa(V_2^*) \leq \varkappa(V_2) = \varkappa(X P^{-1} Q^{-1} Y) \leq \varkappa(X) + \varkappa(P^{-1} Q^{-1}) + \varkappa(Y)$$
$$< \varkappa(X) + \varkappa(Y) + \varkappa(C) - 2 \leq \varkappa(V),$$

also:

$$\varkappa(V_2^*) < \varkappa(V)$$

und ebenso:

$$\varkappa(V_1^*) \leq \varkappa(V_1) = \varkappa(X P^{-1}) < \varkappa(V).$$

Da $\varkappa(V_1^*) < \varkappa(V)$ und $\varkappa(V_2^*) < \varkappa(V)$ gilt, so folgt somit durch vollständige Induktion nach $\varkappa(V)$, daß eine Äquivalenz gilt:

$$V R V^{-1} \sim \prod_{i=1}^{s} V_i R_i V_i^{-1} \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ 1 \leq i \leq s)$$

für geeignete primäre Transformierte $V_i R_i V_i^{-1}$. Jedes Folgewort W schreibt sich daher bis auf Äquivalenz als Produkt primärer Transformierter

$$T_1, \ldots, T_n, \qquad W \sim \prod_{i=1}^{n} T_i, \qquad T_i = V_i R_i V_i^{-1} \qquad (R_i \in \mathfrak{R},\ 1 \leq i \leq n).$$

§ 2. Das reduzierte Produkt

Der Satz, welcher das Reduktionsverfahren gestatten wird zur Entscheidung des Wortproblems, besteht darin, daß in jedem reduzierten Wort W, das äquivalent ist zu einem Produkt aus primären Transformierten, ein Teilwort C enthalten ist, das charakteristisches Teilwort ist eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$.

Zum Beweise dieses Satzes erweist es sich als wesentlich, ein normiertes Verfahren anzugeben, das ein Produkt P mit den Faktoren $W_1, \ldots, W_n$ überführt in ein dazu äquivalentes reduziertes Wort $W \sim P$. Dieses reduzierte Wort W hängt nicht nur ab von dem Wort P, sondern von der Faktordarstellung von P, d. h. von dem zugeordneten n-tupel $\{W_1, \ldots, W_n\}$.

Zur genauen Behandlung seien nun folgende Begriffsbildungen eingeführt: Wir bezeichnen ein geordnetes n-tupel aus n beliebigen Worten $W_1, \ldots, W_n$ als einen (n-gliedrigen) *Vektor* $\mathfrak{V} = \{W_1, \ldots, W_n\}$. Das Wort W_i werde als i-te *Komponente* von $\mathfrak{V}$ bezeichnet; für das Wort $W_1 \ldots W_n$ schreiben wir auch $|\mathfrak{V}|$.

Jedem solchen n-gliedrigen Vektor wird nun im folgenden ein *reduzierter Vektor* $\mathfrak{V}' = \{V_1, \ldots, V_n\}$ zugeordnet, derart, daß $|\mathfrak{V}'|$ ein reduziertes Wort ist mit $|\mathfrak{V}'| \sim |\mathfrak{V}|$; hierbei ist V_i Teilwort eines reduzierten Wortes $W_i' \sim W_i$. Gilt für $i \neq k$ die Äquivalenz $W_i \sim W_k$, so braucht keineswegs zu gelten: $V_i \approx V_k$.

Wir wollen zunächst den Sonderfall behandeln, daß zwei reduzierte Worte W_1 und W_2 gegeben seien; wir definieren nun den Vektor $\{W_1, W_2\}'$.

Zunächst bestehe W_1 und W_2 aus je einem Sektor, in Buchstabenschreibweise: $W_1 = a_1 \ldots a_m$, $W_2 = b_1 \ldots b_n$ (die a_i und die b_j seien Buchstaben aus $\mathfrak{S}^{\pm 1}$). Ist $W_1 W_2$ reduziert, so setzen wir: $\{W_1, W_2\}' = \{W_1, W_2\}$.

Ist $W_1 W_2$ nicht reduziert, so geben wir die Definition von $\{W_1, W_2\}' = \{V_1, V_2\}$ und der *Ergänzung* X von $\{W_1, W_2\}$ mit $W_1 \approx V_1 X$, $W_2 \approx X^{-1} V_2$ durch vollständige Induktion nach $v = m + n \geq 2$.

1) Für $v = 2$ besteht W_1 nur aus einem Buchstaben: $W_1 = a_1$; es gilt: $W_2 = a_1^{-1}$. Wir setzen $V_1 = 1$, $V_2 = 1$, $X = a_1$.

2) Es sei $v > 2$ und wir machen die Induktionsvoraussetzung für alle $v' < v$.

Es existiert dann eine Zahl k mit $1 \leq k \leq m$ und eine Zahl l mit $1 \leq l \leq n$, so daß $a_k = b_l^{-1}$ gilt. Es sei p das größte k mit $1 \leq k \leq m$, so daß a_p zu einem der Buchstaben b_l $(1 \leq l \leq n)$ invers ist und es sei q das kleinste l mit $1 \leq l \leq n$, so daß $a_p = b_q^{-1}$ gilt. Wir setzen nun:

$$W_1^* = a_1 \ldots a_{p-1} a_{p+1} \ldots a_m, \qquad W_2^* = b_1 \ldots b_{q-1} b_{q+1} \ldots b_n:$$

dann folgt: $W_1^* W_2^* \sim W_1 W_2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann bereits definiert $\{W_1^*, W_2^*\}' = \{V_1, V_2\}$ mit der Ergänzung X'. Wir definieren:

$$\{W_1, W_2\}' = \{W_1^*, W_2^*\}' = \{V_1, V_2\}$$

mit der Ergänzung $X = X' a_p$; dann gilt: $W_1 \approx V_1 X$, $W_2 \approx X^{-1} V_2$.

Nunmehr seien W_1 und W_2 zwei beliebige reduzierte Worte, in Sektorenschreibweise gegeben durch: $W_1 = S_1 \ldots S_k$, $W_2 = T_1 \ldots T_l$. Ist $W_1 W_2$ reduziert, so setzen wir: $\{W_1, W_2\}' = \{W_1, W_2\}$; die Ergänzung X von $\{W_1, W_2\}$ ist das Leerwort.

Ist $W_1 W_2$ nicht reduziert, so definieren wir $\{W_1, W_2\}' = \{V_1, V_2\}$ mit der Ergänzung X durch vollständige Induktion nach $w = k + l \geq 2$. Für $w = 2$ wurde die Definition soeben gegeben. Es sei nunmehr $w > 2$ und $\{W_1, W_2\}'$ und die Ergänzung X' von $\{W_1, W_2\}$ für alle $w' < w$ sei bereits definiert.

Es sei $\{S_k, T_1\}' = \{P, Q\}$ mit der Ergänzung Y: $S_k = P Y$, $T_1 = Y^{-1} Q$. Setzen wir nun

$$W_1^* = S_1 \ldots S_{k-1} P, \qquad W_2^* = Q T_2 \ldots T_l,$$

so folgt: $W_1^* W_2^* \sim W_1 W_2$. Ist nunmehr $W_1^* W_2^*$ reduziert, so setzen wir:

$$\{W_1, W_2\}' = \{W_1^*, W_2^*\}, \qquad X = Y.$$

Ist jedoch $W_1^* W_2^*$ nicht reduziert, so muß PQ das Leerwort bedeuten, somit gilt

$$W_1^* = S_1 \ldots S_{k-1}, \qquad W_2^* = T_2 \ldots T_l.$$

In diesem Falle ist $\{W_1^*, W_2^*\}' = \{V_1, V_2\}$ mit der Ergänzung X' definiert nach Induktionsvoraussetzung. Wir setzen:

$$\{W_1, W_2\}' = \{W_1^*, W_2^*\}' = \{V_1, V_2\}, \qquad X = X' S_k.$$

Damit ist $\{W_1, W_2\}'$ allgemein definiert für zwei beliebige reduzierte Worte W_1, W_2 und ebenso die Ergänzung X. Gilt nun $X \approx W_1$, so folgt: $W_2 \approx W_1^{-1} V_2$; wir schreiben: $W_1 < W_2$. Gilt $X \approx W_2^{-1}$, so folgt: $W_1 \approx V_1 W_2^{-1}$; wir schreiben: $W_1 > W_2$. Gilt weder $W_1 < W_2$ noch $W_1 > W_2$, so schreiben wir: $W_1 \| W_2$.

Folgende Definition erweist sich nun für die Entwicklungen der nächsten Paragraphen als zweckmäßig: es sei $\{W_1, W_2\}' = \{V_1, V_2\}$ mit der Ergänzung X und $\varkappa(X) = r$; ist nun der letzte Sektor von V_1 verwandt zum ersten Sektor von V_2, so nennen wir das geordnete Paar $\{W_1, W_2\}$ $(r+1)$-fach *verkettet*, andernfalls r-fach verkettet. Entsprechend werden die Ausdrücke ,,mindestens r-fach verkettet'' und ,,höchstens r-fach verkettet'' definiert.

Vor der allgemeinen Definition des reduzierten Vektors sei nunmehr ein leicht einzusehender Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 1. *Es seien* W_1, W_2, W_3 *beliebige Worte und* W_2 *sei nicht das Leerwort;* P *sei der letzte Sektor von* W_1 *und* Q *sei der erste Sektor von* W_3. *Ist nun* $W_1 W_2$ *reduziert und* $W_2 W_3$ *reduziert, jedoch* $W_1 W_2 W_3$ *nicht reduziert, so folgt:*

a) $\varkappa(W_2) = 1$.

b) $P \triangle W_2 \triangle Q$.

c) PQ *ist nicht reduziert.*

Beweis. Mit den Worten $W_1 W_2$ und $W_2 W_3$ sind auch die Worte W_1, W_2, W_3 reduziert. Ist nun $W = W_1 W_2 W_3$ nicht reduziert, so folgt zunächst: $W_1 \neq 1$, $W_3 \neq 1$. Wir setzen nun in Sektorenschreibweise:

$$W_1 = S_1 \ldots S_k, \qquad W_2 = S_{k+1} \ldots S_l, \qquad W_3 = S_{l+1} \ldots S_m.$$

1) Wäre S_k nicht verwandt zu S_{k+1}, dann wäre mit W_1 und $W_2 W_3$ auch $W_1 W_2 W_3$ reduziert; es folgt: $S_k \triangle S_{k+1}$. Analog folgt: $S_l \triangle S_{l+1}$.

2) Angenommen, es würde gelten: $l > k+1$. Mit $W_1 W_2$ wäre dann auch $S_1 \ldots S_{k+1}$ reduziert und mit $W_2 W_3$ wäre auch $S_{k+2} \ldots S_m$ reduziert. Da S_{k+1} zu S_{k+2} nicht verwandt ist, so wäre somit auch $W_1 W_2 W_3 = S_1 \ldots S_m$ reduziert. Somit folgt: $l = k+1$.

3) Angenommen, $S_k S_{k+1} S_{k+2}$ wäre reduziert. Nun ist für $k > 1$ das Wort $S_1 \ldots S_{k-1}$ reduziert (als Teilwort von W_1); somit ist auch $S_1 \ldots S_{k+2} = W_1 S_{k+1} S_{k+2}$ reduziert (sowohl für $k = 1$ als auch für $k > 1$). Für $m > k+2$ ist auch das Wort $S_{k+3} \ldots S_m$ reduziert als Teilwort von W_3. Es folgt, daß auch $W_1 W_2 W_3 = S_1 \ldots S_m$ reduziert ist. Somit ist $S_k S_{k+1} S_{k+2}$ nicht reduziert.

4) $S_k S_{k+1}$ ist reduziert als Teilwort von $W_1 W_2$ und $S_{k+1} S_{k+2}$ ist reduziert als Teilwort von $W_2 W_3$. Soll nun $S_k S_k S_{k+1}$ nicht reduziert sein, so muß in S_k ein Buchstabe a enthalten sein, der invers ist zu einem Buchstaben a^{-1} von S_{k+2}, d. h. $S_k S_{k+2}$ ist nicht reduziert.

Genügen die drei Worte W_1, W_2, W_3 den Voraussetzungen von Hilfssatz 1, so nennen wir das geordnete Tripel $\{W_1, W_2, W_3\}$ *verschränkt.*

Aufgrund von Hilfssatz 1 können wir nun zu einem beliebigen dreigliedrigen Vektor $\mathfrak{V} = \{W_1, W_2, W_3\}$ aus reduzierten Worten W_i den zugehörigen reduzierten Vektor $\mathfrak{V}'$ definieren.

Es sei

$$\{W, W_2\}' = \{U_1, U_2\}, \qquad \{U_2, W_3\}' = \{V_2, U_3\}.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

I) $U_1 V_2 U_3$ ist reduziert. Dann setzen wir:

$$\{W_1, W_2, W_3\}' = \{U_1, V_2, U_3\}.$$

Es gilt:

$$U_1 V_2 U_3 \sim U_1 U_2 W_3 \sim W_1 W_2 W_3.$$

II) $U_1 V_2 U_3$ ist nicht reduziert; dann folgt aus Hilfssatz 1: $\varkappa(V_2) \leq 1$.

A) $\varkappa(V_2) = 0$. Wir setzen: $\{U_1, U_3\}' = \{V_1, V_3\}$ und $\{W_1, W_2, W_3\}' = \{V_1, 1, V_3\}$. Es gilt: $V_1 V_3 \sim W_1 W_2 W_3$.

B) $\varkappa(V_2) = 1$. Es seien P_1 der letzte Sektor von $U_1 = K P_1$ und P_3 der erste Sektor von $U_3 = P_3 L$. Dann folgt aus Hilfssatz 1: $P_1 \triangle V_2 \triangle P_3$; $P_1 P_3$ ist hierbei nicht reduziert. Wir bilden: $\{P_1, P_3\}' = \{Q_1, Q_3\}$ und setzen

$$V_1 = K Q_1, \qquad V_3 = Q_3 L, \qquad \{W_1, W_2, W_3\}' = \{V_1, V_2, V_3\}.$$

Zunächst gilt:

$$V_1 V_2 V_3 = K Q_1 V_2 Q_3 L \sim K P_1 V_2 P_3 L \sim W_1 W_2 W_3.$$

Mit $\varkappa(P_1 V_2 P_3) = 1$, $\varkappa(V_2) = 1$ folgt auch $\varkappa(Q_1 V_2 Q_3) = 1$. Mit $U_1 V_2$ ist auch $P_1 V_2$ und $Q_1 V_2$ reduziert und mit $V_2 U_3$ ist auch $V_2 P_3$ und $V_2 Q_3$ reduziert. Außerdem ist $Q_1 Q_3$ reduziert, daher folgt aus Hilfssatz 1 c), daß auch $Q_1 V_2 Q_3$ reduziert ist.

Aus $P_1 \triangle Q_1 V_2 Q_3$ folgt, daß mit P_1 auch $Q_1 V_2 Q_3$ nicht verwandt ist zum letzten Sektor von K (für $K \neq 1$) und mit P_3 ist auch $Q_1 V_2 Q_3$ nicht verwandt zum ersten Sektor von L (für $L \neq 1$). Da K reduziert ist (als Teilwort von W_1) und L reduziert ist (als Teilwort von W_3), so ist auch $K Q_1 V_2 Q_3$ reduziert und außerdem ist $Q_1 V_2 Q_3 L$ ebenfalls reduziert; somit ist nach Hilfssatz 1 das Wort $V_1 V_2 V_3 = K Q_1 V_2 Q_3 L$ reduziert.

Im Falle II B) ist nach der obigen Definition das geordnete Tripel $\{U_1, V_2, U_3\}$ verschränkt. Das Reduktionsverfahren, das $\{U_1, V_2, U_3\}$ in $\{U_1, V_2, U_3\}' = \{V_1, V_2, V_3\}$ überführt, nennen wir eine *Verschränkungsreduktion*. Aus der Betrachtung des Falles II B) folgt sofort der häufig benützte

HILFSSATZ 2. *Ist $\{W_1, W_2, W_3\}$ verschränkt, so gilt für*

$$\mathfrak{V}' = \{W_1, W_2, W_3\}' = \{U_1, U_2, U_3\}:$$

a) $U_2 = W_2$, $\varkappa(U_2) = \varkappa(W_2) = 1$.

b) $\varkappa(U_i) \geq \varkappa(W_i) - 1$ $(i = 1, 3)$.

c) *Aus* $\varkappa(U_i) = \varkappa(W_i) - 1$ *folgt*: U_i *ist sektoriell abgeschlossen in* $|\mathfrak{V}'|$ $(i = 1, 3)$.

Die Behauptung c) folgt daraus, daß in diesem Falle $Q_1 = 1$ bzw. $Q_3 = 1$ gilt.

Damit ist allgemein für drei reduzierte Worte W_1, W_2, W_3 der Vektor $\{W_1, W_2, W_3\}'$ definiert. Wir wollen nun für $\mathfrak{V} = \{W_1, \ldots, W_n\}$ den reduzierten Vektor $\mathfrak{V}'$ definieren für beliebige reduzierte Worte $W_1, \ldots, W_n$. Für $n = 1$ setzen wir $\mathfrak{V}' = \mathfrak{V}$; für $n = 2$

und $n=3$ wurde $\mathfrak{V}'$ bereits definiert. Es sei nun $n>3$ und wir machen die Induktionsannahme, daß für alle $s<n$ die Definition bereits gegeben sei.

Für beliebige reduzierte Worte $W_1, \ldots, W_n$ ist somit nach Induktionsvoraussetzung bereits definiert:

$$\{W_1, \ldots, W_{n-1}\}' = \{U_1, \ldots, U_{n-1}\}.$$

Es sei ferner: $\{U_{n-1}, W_n\}' = \{V_{n-1}, U_n\}$. Es gilt dann:

$$U_1 \ldots U_{n-2} V_{n-1} U_n \sim U_1 \ldots U_{n-1} W_n \sim W_1 \ldots W_n.$$

I) $U_1 \ldots U_{n-2} V_{n-1} U_n$ sei reduziert. Dann setzen wir:

$$\{W_1, \ldots, W_n\}' = \{U_1, \ldots, U_{n-2}, V_{n-1}, V_{n-2}, U_n\}.$$

II) $U_1 \ldots U_{n-2} V_{n-1} U_n$ sei nicht reduziert. Nach Hilfssatz I bestehen dann folgende Möglichkeiten:

A) $\varkappa(V_{n-1})=0$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann definiert:

$$\{U_1, \ldots, U_{n-2}, U_n\}' = \{V_1, \ldots, V_{n-2}, V_n\}.$$

Wir setzen: $$\{W_1, \ldots, W_n\}' = \{V_1, \ldots, V_{n-2}, 1, V_n\}.$$

B) $\varkappa(V_{n-1})=1$. Dann ist nach Hilfssatz 1 das Wort V_{n-1} verwandt zum letzten Sektor P_1 von $U_1 \ldots U_{n-2}$ und zum ersten Sektor Q_1 von $U_n = Q_1 U_n'$.

1) $\varkappa(U_1 \ldots U_{n-2})=1$; es gilt $P_1 = U_1 \ldots U_{n-2}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist dann bereits definiert:

$$\{U_1, \ldots, U_{n-2}, Q_1\}' = \{V_1, \ldots, V_{n-2}, Q_2\}.$$

Wir setzen: $$\{W_1, \ldots, W_n\}' = \{V_1, \ldots, V_n\} \quad \text{mit} \quad V_n = Q_2 U_n'.$$

Analog wie bei $n=3$, Fall II B) zeigt man, daß $V_1 \ldots V_n$ reduziert ist. Es gilt:

$$V_1 \ldots V_n \sim U_1 \ldots U_{n-2} V_{n-1} U_n \sim W_1 \ldots W_n.$$

2) $\varkappa(U_1 \ldots U_{n-2})>1$. Es besteht eine größte Zahl i $(1 \leq i \leq n-2)$ mit

$$\varkappa(U_i \ldots U_{n-2}) > 1.$$

a) Für $i=n-2$ sei Y_1 der letzte Sektor von $U_{n-2} = U_{n-2}' Y_1$. Es gilt: $P_1 = Y_1$. Wir setzen:

$$\{Y_1, Q_1\}' = \{Y_2, Q_2\}, \qquad V_{n-2} = U_{n-2}' Y_2, \qquad V_n = Q_2 U_n',$$

$$\{W_1, \ldots, W_n\}' = \{U_1, \ldots, U_{n-3}, V_{n-2}, V_{n-1}, V_n\}.$$

Wie bei $n=3$, Fall II B) wird gezeigt, daß $U_1 \ldots U_{n-3} V_{n-2} V_{n-1} V_n$ reduziert ist.

b) Für $i < n-2$ sei Y_1 der letzte Sektor von $U_i = U_i' Y_1$. Es gilt:

$$\varkappa(U_{i+1} \dots U_{n-2}) = 1.$$

α) $Y_1 \triangle U_{i+1} \dots U_{n-2}$; es gilt: $P_1 = Y_1 U_{i+1} \dots U_{n-2}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist definiert:

$$\{Y_1, U_{i+1}, \cdots, U_{n-2}, Q_1\}' = \{Y_2, V_{i+1}, \dots, V_{n-2}, Q_2\}.$$

Wir setzen:

$$V_i = U_i' Y_2, \qquad V_n = Q_2 U_n', \qquad \{W_1, \cdots, W_n\}' = \{U_1, \dots, U_{i-1}, V_i, \dots, V_n\}.$$

Wie bei $n=3$, Fall II B) folgt, daß $U_1 \dots U_{i-1} V_i \cdots V_n$ reduziert ist.

β) Y_1 ist nicht verwandt zu $U_{i+1} \dots U_{n-2}$. Wir bilden:

$$\{U_{i+1}, \dots, U_{n-2}, Q_1\}' = \{V_{i+1}, \dots, V_{n-2}, Q_2\}.$$

Wir setzen: $\qquad V_n = Q_2 U_n', \qquad \{W_1, \cdots, W_n\}' = \{U_1, \dots, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n\}.$

Wieder ist das Wort $U_1 \dots U_i V_{i+1} \dots V_n$ reduziert.

Damit ist der Ausdruck $\{W_1, \dots, W_n\}'$ erklärt für beliebige reduzierte Worte $W_1, \dots, W_n$. Wir lassen nunmehr die Voraussetzung fallen, daß die Worte $W_1, \dots, W_n$ reduziert seien.

Zunächst ordnen wir einem beliebigen Wort W ein reduziertes Wort $\overline{W} \sim W$ zu durch folgende Festsetzungen: Für reduziertes W sei $\overline{W} = W$, andernfalls ist $\overline{W}$ folgendermaßen erklärt:

I) Besteht W aus einem Sektor und ist in Buchstabenschreibweise: $W = a_1 \dots a_m$, so ist für den Vektor $\mathfrak{B} = \{a_1, \cdots, a_m\}$ der reduzierte Vektor $\mathfrak{B}'$ definiert. Wir setzen dann: $\overline{W} = |\mathfrak{B}'|$.

II) Ist W gegeben in Sektorenschreibweise durch $W = S_1 \dots S_n$, so setzen wir:

$$\overline{W} = |\{\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_n\}'| \qquad (n > 1).$$

Damit können wir nun auch einem beliebigen n-gliedrigen Vektor $\mathfrak{B} = \{W_1, \dots, W_n\}$ einen reduzierten Vektor $\mathfrak{B}'$ mit reduziertem $|\mathfrak{B}'| \sim |\mathfrak{B}|$ zuordnen durch die Festsetzung:

$$\mathfrak{B}' = \{\overline{W}_1, \dots, \overline{W}_n\}' \qquad (n > 1).$$

Über die reduzierten Vektoren seien nun noch zwei Hilfssätze angegeben, die in den nächsten Paragraphen gebraucht werden:

HILFSSATZ 3. *Für zwei reduzierte Worte* W_1, W_2 *sei* $\{W_1, W_2\}' = \{W_1', W_2'\}$ *mit der Ergänzung* $X: W_1 \approx W_1' X$, $W_2 \approx X^{-1} W_2'$. *Es sei ferner* W_1^* *rechter Abschnitt von*

$W_1 \approx P W_1^*$ und X sei rechter Abschnitt von $W_1^* \approx Q X$. Dann gilt:

$$\{W_1^*, W_2\}' = \{Q, W_2'\}$$

mit der Ergänzung X.

Beweis. Aus $W_1 \approx P W_1^* \approx P Q X$, $W_1 \approx W_1' X$ folgt: $W_1' \approx P Q$; daher ist mit $W_1' W_2'$ auch das Wort $Q W_2'$ reduziert. Aus $W_1^* \approx Q X$, $W_2 \approx X^{-1} W_2'$ folgt dann die Behauptung.

HILFSSATZ 4. *Es sei $\{W_1, W_2\}' = \{W_1', W_2'\}$ mit der Ergänzung X,*

$$\{W_2, W_3\}' = \{W_2^*, W_3^*\} \text{ mit der Ergänzung } Y^{-1} \text{ und } \{W_2', W_3\}' = \{W_2'', W_3'\}.$$

Es sei ferner:

$$\varkappa(X) + \varkappa(Y) \leq \varkappa(W_2) - 1.$$

Dann gilt:

$$W_2 \approx X^{-1} W_2'' Y^{-1}, \qquad W_2' \approx W_2'' Y^{-1}, \qquad W_2^* \approx X^{-1} W_2''$$

mit

$$\varkappa(W_2'') \geq 1, \qquad W_3' = W_3^*.$$

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Formel (1 a) in § 1 gilt: $W_2 \approx X^{-1} W_2'$ mit $\varkappa(W_2') \geq \varkappa(W_2) - \varkappa(X) > \varkappa(Y)$. Da nun Y^{-1} rechter Abschnitt ist von W_2, so folgt aus $\varkappa(W_2') > \varkappa(Y^{-1})$, daß Y^{-1} auch rechter Abschnitt ist von W_2'. Daher existiert ein W_2'' mit $W_2' \approx W_2'' Y^{-1}$. Aus Hilfssatz 3 folgt dann:

$$\{W_2', W_3\}' = \{W_2'', W_3^*\}.$$

Es ergibt sich:

$$W_2 \approx X^{-1} W_2'' Y^{-1} \approx X^{-1} W_2', \qquad W_2' \approx W_2'' Y^{-1}, \qquad \varkappa(W_2'') \geq 1$$

nach § 1, (1).

Anmerkung. Es gilt: $W_1' W_2'' W_3^* \sim W_1 W_2 W_3$. Ist $\{W_1', W_2'', W_3^*\}$ nicht verschränkt, so folgt:

$$\{W_1, W_2, W_3\}' = \{W_1', W_2'', W_3^*\}$$

(speziell gilt dies für $\varkappa(X) + \varkappa(Y) < \varkappa(W_2) - 1$); andernfalls ist Hilfssatz 2 anzuwenden.

§ 3. Formen vom Grade 2

Für die folgenden Untersuchungen ist es wesentlich, festzustellen, auf welche Art sich ein beliebiges Folgewort W darstellen läßt als Produkt von primären Transformierten. Hierzu betrachten wir Vektoren

$$\mathfrak{U} = \{V_1, R_1, V_1^{-1}, \ldots, V_n, R_n, V_{n-1}^{-1}\},$$

wobei die Worte $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ primäre Transformierte darstellen. Zunächst beachten wir, daß durch Angabe der T_i die worte R_i und V_i bereits eindeutig bestimmt sind.

Hilfssatz 5. *R und R' seien zwei definierende Worte: $R \in \mathfrak{R}$, $R' \in \mathfrak{R}$. V sei Rand von R und V' sei Rand von R'. Es gelte: $V R V^{-1} = V' R' V'^{-1}$. Dann folgt: $V = V'$, $R = R'$.*

Beweis. Das Wort $T = V R V^{-1} = V' R' V'^{-1}$ sei gegeben in Sektorenschreibweise durch $T = S_1 \ldots S_m$. Da V linker Abschnitt ist von T, so gilt: $V = S_1 \ldots S_k Z$ für ein gewisses $k < m$ und ein Wort $Z \neq S_{k+1}$ (evtl. gilt: $Z = 1$). Ebenso besitzt V' die Form: $V' = S_1 \ldots S_l Z'$ für ein gewisses $l < m$ und ein $Z' \neq S_{l+1}$.

Es folgt:

$$\begin{aligned} T &= S_1 \ldots S_k Z S'_{k+1} S_{k+2} \ldots S_{m-k-1} S'_{m-k} Z^{-1} S_k^{-1} \ldots S_1^{-1} \\ &= S_1 \ldots S_l Z' S^*_{l+1} S_{l+2} \ldots S_{m-l-1} S^*_{m-l} Z'^{-1} S_l^{-1} \ldots S_1^{-1} \end{aligned}$$

für geeignete Worte $\qquad S'_{k+1}, S'_{m-k}, S^*_{l+1}, S^*_{m-l}$

mit

$$S_{k+1} \approx Z S'_{k+1}, \qquad S_{m-k} \approx S'_{m-k} Z^{-1}, \qquad S_{l+1} \approx Z' S^*_{l+1}, \qquad S_{m-l} \approx S^*_{m-l} Z'^{-1}.$$

Es ergibt sich: $\qquad \{S_{m-k}, S_{k+1}\}' = \{S'_{m-k}, S'_{k+1}\} \quad \text{mit} \quad S'_{k+1} \neq 1$

(da $Z \neq S_{k+1}$ angenommen wurde),

$$\{S_{m-l}, S_{l+1}\}' = \{S^*_{m-l}, S^*_{l+1}\} \quad \text{mit} \quad S^*_{l+1} \neq 1.$$

Wir beweisen zunächst: $k = l$. Wäre etwa $l > k$, so würde einerseits gelten:

$$\{S_{m-k}, S_{k+1}\}' = \{S'_{m-k}, S'_{k+1}\} \quad \text{mit} \quad S'_{k+1} \neq 1,$$

andererseits wäre $S_{m-k} = S_{k+1}^{-1}$, also: $\{S_{m-k}, S_{k+1}\}' = \{1, 1\}$. Es folgt: $l \leq k$; analog beweist man $k \leq l$.

Wir können also annehmen: $l = k$. Wäre nun $V = S_1 \ldots S_k Z$, $V' = S_1 \ldots S_k Z'$ mit $Z \neq Z'$, so würde folgen: $\{S_{m-k}, S_{k+1}\}' = \{S'_{m-k}, S'_{k+1}\}$ mit der Ergänzung

$$Z^{-1} : S_{m-k} = S'_{m-k} Z^{-1}, \qquad S_{k+1} \approx Z S'_{k+1};$$

andererseits wäre $\{S_{m-k}, S_{k+1}\}' = \{S^*_{m-k}, S^*_{k+1}\}$ mit der Ergänzung $Z'^{-1} \neq Z^{-1}$, woraus sich ein Widerspruch ergibt.

Sind nun $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ n primäre Transformierte, so setzen wir zur Abkürzung:

$$\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) = \{V_1, R_1, V_1^{-1}, \ldots, V_n, R_n, V_n^{-1}\};$$

diese Abkürzung ist eindeutig, da nach Hilfssatz 5 die Worte V_i und R_i durch die Worte T_i eindeutig bestimmt sind. Den zu $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ gehörigen reduzierten Vektor $\mathfrak{U}'$ bezeichnen wir in der Regel mit

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\}.$$

Sind mehrere solche Vektoren zu betrachten, so bezeichnen wir die Komponenten des reduzierten Vektors durch einen zweiten Index, also etwa:

$$\mathfrak{U}'_\sigma = \{P_{1,\sigma}, K_{1,\sigma}, Q_{1,\sigma}^{-1}, \ldots, P_{n,\sigma}, K_{n,\sigma}, Q_{n,\sigma}^{-1}\}.$$

Zu einem gegebenen Wort W betrachten wir die Menge aller Vektoren

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$$

mit den primären Transformierten T_i $(1 \leq i \leq n)$, wobei $|\mathfrak{U}| \sim W$ gilt. Diese Menge nennen wir die zu W gehörige *Form* $F(W)$; genau dann ist $F(W)$ die leere Menge, wenn W kein Folgewort ist. Die dem Leerwort zugeordnete Form bezeichnen wir mit $F(1)$.

Wir ordnen nun jeder nicht leeren Form F (und damit auch jedem Folgewort) einen *Grad* zu. Der Form $F(1)$ wird der Grad 0 zugeordnet. Ist $F \neq F(1)$, so bezeichnen wir als Grad von F die kleinste Zahl n, zu der ein Vektor

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n), \qquad \mathfrak{U} \in F$$

mit primären Transformierten $T_1, \ldots, T_n$ existiert. Wir interessieren uns nun im folgenden speziell für Formen F von einem Grad $n > 0$ und deren Vektoren $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$. In diesen Paragraphen untersuchen wir die Formen vom Grad 2. Zur Vorbereitung sei ein Hilfssatz angeführt, der unmittelbar aus Axiom B folgt.

Das Axiom B besagt in anderer Formulierung, daß für zwei definierende Worte $R_1^{-1} \in \mathfrak{R}$, $R_2 \in \mathfrak{R}$, die nicht äquivalent sind $(R_1^{-1} \not\approx R_2)$, das geordnete Paar $\{R_1, R_2\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet ist. Hieraus ergibt sich zusammen mit Formel (1), § 1:

Hilfssatz 6. *Es seien $R_1 \in \mathfrak{R}$, $R_2 \in \mathfrak{R}$ zwei definierende Worte, für die nicht gilt: $R_1^{-1} \approx R_2$; es sei ferner: $\{R_1, R_2\}' = \{K_1, K_2\}$.*

Dann ist K_1 linker Abschnitt von R_1 und K_2 rechter Abschnitt von R_2 und es gilt für $i = 1, 2$:

a) $\varkappa_{R_i}(K_i) \geq \varkappa(R_i) - j + 1$.

b) *Für* $\varkappa(K_i) = \varkappa(R_i) - j + 1$ *ist* K_i *sektoriell abgeschlossen in* $K_1 K_2$.

Wir betrachten nunmehr das Produkt zweier primärer Transformierten

$$T_i = V_i R_i V_i^{-1} \; (i = 1, 2),$$

wobei wir voraussetzen, daß die Form $F(T_1 T_2)$ den Grad 2 besitzt. Wir erhalten:

SATZ I. *In einer Gruppe, die den Axiomen* Z *und* B *genügt, sei* $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; T_2)$ *ein Element einer Form* F *vom Grade* 2 *und der zugehörige normierte reduzierte Vektor sei*

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, P_2, K_2, Q_2^{-1}\}.$$

Dann gilt:

a) $P_1 = V_1$, $Q_2^{-1} = V_2^{-1}$.

b) R_1 *besitzt die Form*: $R_1 \approx K_1 X$ (*für ein geeignetes Wort* X), R_2 *besitzt die Form*: $R_2 \approx Y K_2$ (*für ein geeignetes Wort* Y).

c) *Für* $i = 1, 2$ *gilt*: $\varkappa(K_i) \geq j$. *Aus* $\varkappa(K_i) = j$ *folgt*: $Q_1^{-1} = 1$, $P_2 = 1$, K_i *ist sektoriell abgeschlossen in* R_i *und in* $K_1 K_2$.

d) *Für mindestens ein* K_i $(i = 1, 2)$ *gilt*: $\varkappa_{R_i}(K_i) \geq \varkappa(R_i) - j + 1$.

Beweis. Für $V_1 = 1$, $V_2 = 1$ folgt: $\mathfrak{U}' = \{1, K_1, 1, 1, K_2, 1\}$, wobei K_1 und K_2 den Folgerungen a) und b) von Hilfssatz 6 genügen.

I) $V_1 = 1$, $V_2 \neq 1$.

A) $R_1 > V_2$.

In diesem Falle besitzt R_1 die Form $R_1 \approx R_1' V_2^{-1}$. Hierbei gilt: $\varkappa(R_1') \geq 2j - 1$. Andernfalls würde folgen: $\varkappa(V_2^{-1}) > 2j$, $\varkappa(V_2^{-1}) > \varkappa(R_1') + 2$. Der Rand V_2 von R_2 würde somit ein charakteristisches Teilwort von R_1^{-1} enthalten, was der Definition der primären Transformierten in § 1 widerspricht.

Nun ergibt sich $T_1 T_2 \sim R_1' R_2 V_2^{-1}$; mit $R_1 \approx R_1' V_2^{-1}$ ist auch $V_2^{-1} R_1'$ und $R_1'^{-1} V_2$ ein definierendes Wort aus $\mathfrak{R}$ gemäß der Definition in § 1. Wir vergleichen nun R_2 mit $R_1'^{-1} V_2$ und verwenden Hilfssatz 6.

Angenommen, $\{R_1', R_2\}$ wäre mindestens j-fach verkettet, dann folgt nach Hilfssatz 6: $R_2 \approx R_1'^{-1} V_2$. Hieraus ergibt sich:

$$T_2 = V_2 R_2 V_2^{-1} \sim V_2 R_1'^{-1} \approx R_1^{-1}$$

$$T_1 T_2 = R_1 V_2 R_2 V_2^{-1} \sim 1$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $F(T_1 T_2)$ eine Form vom Grade 2 ist[1]. Daher ist $\{R_1', R_2\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet und es gilt:

$$\{R_1', R_2\}' = \{R_1'', R_2'\}$$

mit einer Ergänzung X mit

$$\varkappa(X) \leq j-1, \qquad R_1' \approx R_1'' X, \qquad R_2 \approx X^{-1} R_2'.$$

Aus $\varkappa(X) = j-1$ folgt: R_1'' ist sektoriell abgeschlossen in $R_1'' R_2'$ und in R_1 (nach Formel (1), § 1) und ebenso ist R_2' sektoriell abgeschlossen in R_2 und in $R_1'' R_2'$.

B) $R_1 < V_2$.

Dieser Fall ist unmöglich nach der Definition der primären Transformierten in § 1, da dann V_2 ein charakteristisches Teilwort von R_1^{-1} enthalten würde.

C) $R_1 \| V_2$.

Es sei $\{R_1, V_2\}' = \{R_1', V_2'\}$ mit der Ergänzung X. Hierbei ist weder R_1' noch V_2' das Leerwort; R_1' besteht aus mindestens $2j-1$ Sektoren (Beweis wie unter A)). Es gilt:

$$T_1 T_2 \sim R_1' V_2' R_2 V_2^{-1}.$$

Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $R_1' V_2' R_2 V_2^{-1}$ ist reduziert. Wir erhalten:

$$\{V_1, R_1, V_1^{-1}, V_2, R_2, V_2^{-1}\}' = \{1, R_1', 1, V_2', R_2, V_2^{-1}\}.$$

2) $R_1' V_2' R_2 V_2^{-1}$ ist nicht reduziert. Dann ist $\{R_1', V_2', R_2 V_2^{-1}\}$ verschränkt. Da $\varkappa(R_2) > 1$ gilt, so erhalten wir durch Verschränkungsreduktion ein R_1'' und ein R_2' mit $R_1' V_2' R_2 V_2^{-1} \sim R_1'' V_2' R_2' V_2^{-1}$. Es folgt:

$$\mathfrak{U}' = \{1, R_1'', 1, V_2', R_2', V_2^{-1}\}.$$

Da $\varkappa(R_1') \geq 2j-1$ gilt, so folgt nach Hilfssatz 2:

$$\varkappa(R_1'') \geq 2j-2 \geq j;$$

für $\varkappa(R_1'') = j$ folgt zudem: R_1'' ist sektoriell abgeschlossen in R_1 und in $R_1'' V_2' R_2'$. Nach Hilfssatz 2 folgt außerdem:

---

[1] Zu diesem Vorgehen vergleiche man auch TARTAKOWSKI [10], *Theorems on Adjacency* I–III, Part I, § 5. TARTAKOWSKI gibt eine Theorie der Komposition zyklischer Worte (vgl. oben, S. 160, Fußnote 1). Die dort abgeleiteten Sätze lassen sich hier allerdings nicht unmittelbar anwenden, da wir von einem freien Produkt aus freien abelschen Gruppen ausgehen.

$$\varkappa(R_2') \geq \varkappa(R_2) - 1 \geq \varkappa(R_2) - j + 1;$$

für $\varkappa(R_2') = \varkappa(R_2) - j + 1$ ist R_2' sektoriell abgeschlossen in R_2 und in $R_1'' \, V_2' \, R_2'$.

II) $V_1 \neq 1$, $V_2 = 1$.

Der Beweis erfolgt analog wie in I).

III) $V_1 \neq 1$, $V_2 \neq 1$.

A) $V_1^{-1} < V_2$.

Es existiert ein Teilwort V_2' von V_2, so daß gilt: $V_2 \approx V_1 V_2'$; somit folgt:

$$T_1 T_2 \sim V_1 (R_1 V_2' R_2 V_2'^{-1}) V_1^{-1}.$$

Nun ist $T_2^* = V_2' R_2 V_2'^{-1}$ ebenfalls eine primäre Transformierte, da mit T_2 auch T_2^* reduziert ist und mit V_2 auch V_2' kein charakteristisches Teilwort enthält. Gemäß I) können wir nun bilden:

$$\{1, R_1, 1, V_2', R_2, V_2'^{-1}\}' = \{1, K_1, 1, P_2, K_2, V_2'^{-1}\}'$$

Das Wort $K_1 P_2 K_2 V_2'^{-1}$ ist somit reduziert; da nun K_1 aus mindestens $j\,(\geq 2)$ Sektoren besteht (nach I)), so folgt nach Hilfssatz 1, daß auch das Wort $V_1 K_1 P_2 K_2 V_2'^{-1}$ reduziert ist, da ja $V_1 K_1$ als Teilwort von T_1 reduziert ist. Da K_2 (nach I)) ebenfalls aus mehr als einem Sektor besteht, so folgt aus Hilfssatz 1, daß auch das Wort $V_1 K_1 P_2 K_2 V_2'^{-1} V_1^{-1}$ reduziert ist, da ja $K_2 V_2'^{-1} V_1^{-1}$ reduziert ist als Teilwort von T_2. Aus $V_2^{-1} \approx V_2'^{-1} V_1^{-1}$ folgt, daß auch $V_1 K_1 P_2 K_2 V_2^{-1}$ reduziert ist und es ergibt sich:

$$\mathfrak{U}' = \{V_1, K_1, 1, P_2, K_2, V_2^{-1}\};$$

die Gültigkeit der Behauptungen des Satzes I für $\mathfrak{U}'$ ergibt sich dann aus der Betrachtung von

$$\{1, R_1, 1, V_2', R_2 \, V_2'^{-1}\}'$$

gemäß Teil I) des Beweises.

B) $V_1^{-1} > V_2$.

Dieser Fall wird analog behandelt wie der Fall A).

C) $V_1^{-1} \parallel V_2$.

Es sei $\{V_1^{-1}, V_2\}' = \{V_1'^{-1}, V_2'\}$ und X sei die Ergänzung: $V_1^{-1} \approx V_1'^{-1} X$, $V_2 \approx X^{-1} V_2'$; hierbei ist weder $V_1'^{-1}$ noch V_2' das Leerwort. Es gilt die Äquivalenz:

$$T_1 T_2 \sim V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2' R_2 V_2^{-1}.$$

Ist $W = V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2' R_2 V_2^{-1}$ reduziert, so folgt nach der Definition in § 2:

$$\mathfrak{U}' = \{V_1, R_1, V_1'^{-1}, V_2', R_2, V_2^{-1}\};$$

der Satz ist damit gültig. Wir setzen nun im folgenden voraus, W sei nicht reduziert.

1) $\varkappa(V_1'^{-1} V_2') > 1$.

Angenommen, sowohl $W_1 = V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2'$ als auch $W_2 = V_1'^{-1} V_2' R_2 V_2^{-1}$ wären reduziert. Da W nicht reduziert sein soll, so folgt nach Hilfssatz 1: $\{V_1 R_1, V_1'^{-1}, V_2' R_2 V_2^{-1}\}$ ist verschränkt, es gilt also: $\varkappa(V_1'^{-1} V_2') = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

a) $W_2 = V_1'^{-1} V_2' R_2 V_2^{-1}$ sei reduziert; dann ist $W_1 = V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2'$ nicht reduziert. Da $V_1'^{-1} V_2'$ und $V_1 R_1 V_1'^{-1}$ reduziert sind, so ist $\{V_1 R_1, V_1'^{-1}, V_2'\}$ verschränkt und es folgt: $\varkappa(V_1'^{-1}) = 1$. Es sei P der letzte Sektor von $R_1 = Z_1 P$ und U der erste Sektor von $V_2' = U Z_2$. Wir bilden: $\{P, U\}' = \{P', U'\}$ mit der Ergänzung Y, $R_1' = Z_1 P'$, $V_2'' = U' Z_2$. Es folgt: $V_1'^{-1} \triangle Y^{-1}$.

Durch Verschränkungsreduktion (§ 2) erhalten wir dann ein reduziertes W_1' mit

$$W_1' = V_1 R_1' V_1'^{-1} V_2'' \sim V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2'.$$

Hierbei gilt $V_2'' \neq 1$, da sonst folgen würde:

$$R_1 \approx R_1' V_2'^{-1}, \quad V_1'^{-1} \triangle V_2', \; \varkappa(V_1'^{-1} V_2') = 1.$$

Nach Hilfssatz 2 folgt: $\varkappa(R_1') \geq \varkappa(R_1) - 1$, wobei für $\varkappa(R_1') = \varkappa(R_1) - 1$ das Wort R_1' sektoriell abgeschlossen ist in R_1 und in $R_1' V_1'^{-1}$.

Mit $V_1'^{-1} V_2' R_2 V_2^{-1}$ ist auch $V_1'^{-1} V_2'' R_2 V_2^{-1}$ reduziert. Angenommen,

$$W' = V_1 R_1' V_1'^{-1} V_2'' R_2 V_2^{-1}$$

sei nicht reduziert. Da nun $V_1 R_1' V_1'^{-1}$ reduziert ist, so folgt: $\{V_1 R_1', V_1'^{-1}, V_2'' R_2 V_2^{-1}\}$ ist verschränkt und $V_1'^{-1}$ ist verwandt sowohl zum letzten Sektor von $V_1 R_1'$ als auch zum ersten Sektor F von $V_2'' R_2 V_2^{-1}$. Da $\varkappa(V_1'^{-1} V_2'') > 1$ gilt, so ist F identisch mit dem ersten Sektor von V_2'' ($F \triangle V_1'^{-1} \triangle Y^{-1}$). Dann wäre aber auch $\{V_1 R_1', V_1'^{-1}, V_2''\}$ verschränkt und $W_1' = V_1 R_1' V_1'^{-1} V_2''$ wäre nicht reduziert im Widerspruch zur obigen Feststellung.

Daher ist W' reduziert und es folgt aus der Definition in § 2:

$$\{V_1, R_1', V_1'^{-1}, V_2'', R_2, V_2^{-1}\}.$$

Der Satz ergibt sich dann aus der obigen Bemerkung über $\varkappa(R_1')$.

b) $V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2'$ sei reduziert. Der Beweis erfogt analog a).

2) $\varkappa(V_1'^{-1} V_2') = 1$.

Ist $W_1 = V_1 R_1 V_1'^{-1} V_2'$ nicht reduziert, so bilden wir wie unter 1 a) durch Verschränkungsreduktion ein reduziertes Wort

$$W_1' = V_1 R_1' V_1'^{-1} V_2'' \sim W_1$$

mit $$R_1 \approx R_1' Y, \qquad V_2' \approx Y^{-1} V_2'', \qquad Y \triangle V_1'^{-1}.$$

Für reduziertes W_1 setzen wir:

$$R_1' = R_1, \qquad V_2'' = V_2', \qquad Y = 1.$$

a) $V_2'' \neq 1$. Ist $V_1'^{-1} V_2'' R_2 V_2^{-1}$ nicht reduziert, so ist $\{V_1'^{-1}, V_2'', R_2 V_2^{-1}\}$ verschränkt. Durch eine Verschränkungsreduktion erhält man ein V_1'' und ein R_2', so daß $W_2' = V_1''^{-1} V_2'' R_2' V_2^{-1}$ reduziert ist. Hierbei gilt: $\varkappa(R_2') \geq \varkappa(R_2) - 1 > 1$ und aus $\varkappa(R_2') = \varkappa(R_2) - 1$ folgt, daß R_2' sektoriell abgeschlossen ist in R_2 und in $V_1''^{-1} V_2'' R_2'$. Ist $V_1'^{-1} V_2'' R_2 V_2^{-1}$ reduziert, so setzen wir:

$$V_1''^{-1} = V_1'^{-1}, \qquad R_2' = R_2.$$

Ist dann $W' = V_1 R_1' V_1''^{-1} V_2'' R_2' V_2^{-1}$ nicht reduziert, so ist $\{V_1 R_1', V_1''^{-1} V_2'', R_2' V_2^{-1}\}$ verschränkt und durch Verschränkungsreduktion erhalten wir ein R_1'' und ein R_2'' mit reduziertem W'',

$$W'' = V_1 R_1'' V_1''^{-1} V_2'' R_2'' V_2^{-1} \sim V_1 R_1' V_1''^{-1} V_2'' R_2' V_2^{-1}.$$

Ist W' reduziert, so setzen wir: $R_1'' = R_1'$, $R_2'' = R_2'$. Nach Hilfssatz 2 folgt: $\varkappa(R_1'') \geq \varkappa(R_1') - 1$ und höchstens dann gilt: $\varkappa(R_1'') = \varkappa(R_1') - 1$, wenn R_1' nicht sektoriell abgeschlossen ist in $R_1' V_1''^{-1}$ (d. h. für $\varkappa(R_1') = \varkappa(R_1)$). Es folgt: $\varkappa(R_1'') \geq \varkappa(R_1) - 1$ und aus $\varkappa(R_1'') = \varkappa(R_1) - 1$ ergibt sich, daß R_1'' sektoriell abgeschlossen ist in R_1 und in $R_1'' V_1''^{-1} V_2'' R_2''$. Analog ergibt sich: $\varkappa(R_2'') \geq \varkappa(R_2) - 1$, wobei $\varkappa(R_2'') = \varkappa(R_2) - 1$ höchstens dann gelten kann, wenn R_2'' sektoriell abgeschlossen ist in R_2 und in $R_1'' V_1''^{-1} V_2'' R_2''$. Es folgt:

$$\mathfrak{U}' = \{V_1, R_1'', V_1''^{-1}, V_2'', R_2'', V_2^{-1}\},$$

wobei $K_1 = R_1''$ und $K_2 = R_2''$ den Bedingungen b), c), d) von Satz I genügt.

b) $V_1'' \neq 1$. Der Beweis erfolgt wie in a).

c) $V_1'' = 1$, $V_2'' = 1$. In diesem Falle gelten die Äquivalenzen:

$$R_1 \approx R_1' V_2', \qquad R_2 \approx V_1'' R_2', \; T_1 T_2 \sim V_1 R_1' R_2' V_2^{-1}.$$

Wir bilden: $$\{R_1', R_2'\}' = \{R_1'', R_2''\}$$

mit der Ergänzung

$$Y^{-1}: R_1 \approx R_1'' Y^{-1} V_2'^{-1}, \qquad R_2 \approx V_1' Y R_2''.$$

Aus $V_2'^{-1} \triangle V_1'$ folgt: $\varkappa(Y^{-1} V_2'^{-1}) = \varkappa(Y^{-1} V_1'^{-1})$.

Würde nun gelten: $\varkappa(Y^{-1} V_2'^{-1}) = \varkappa(V_1' Y) \geq j$,

so würde folgen nach Axiom B:

$$Y^{-1} V_2'^{-1} R_1'' \approx Y^{-1} V_1'^{-1} R_2''^{-1}; \qquad V_2'^{-1} R_1 V_2' \sim V_1'^{-1} R_2^{-1} V_1'.$$

Aus $V_1^{-1} V_2 \sim V_1'^{-1} V_2' \approx V_2' V_1'^{-1}$ folgt:

$$T_1 = V_1 R_1 V_1^{-1} \sim V_2 R_2^{-1} V_2^{-1} = T_2^{-1},$$

was der Voraussetzung widerspricht, daß $F(T_1 T_2)$ eine Form vom Grade 2 ist. Gilt $\varkappa(Y^{-1} V_2'^{-1}) = j - 1$ und ist der letzte Sektor von R_1'' verwandt zum ersten Sektor von R_2'', so folgt nach Axiom B derselbe Schluß.

Es ergibt sich: $\mathfrak{U}' = \{V_1, R_1'', 1, 1, R_2'', V_2^{-1}\}$. Der Satz ist somit richtig nach den oben angegebenen Bemerkungen, denn für $\varkappa(R_1'') = \varkappa(R_1) - j + 1$ ist R_1'' sektoriell abgeschlossen in R_1 und es gilt: $\varkappa(Y^{-1} V_2'^{-1}) = j - 1$; R_1'' ist somit sektoriell abgeschlossen in $R_1'' R_2''$. Für R_2'' gilt eine analoge Aussage.

Damit ist Satz I bewiesen.

Anmerkungen zu Satz I: Außer den in Satz I, a—d aufgeführten Folgerungen ergeben sich noch weitere Tatsachen, die sich aus dem Gang des obigen Beweises ergeben. Da diese später gebraucht werden, seien sie hier zusammengestellt.

1) Q_1^{-1} ist linker Abschnitt von V_1^{-1}, P_2 ist rechter Abschnitt von V_2.

2) Falls $\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1$ nicht gilt, so folgt: $V_1^{-1} < V_2$, wobei $V_1 \approx V_2$ ausgeschlossen ist. Falls $\varkappa_{R_2}(K_2) \geq \varkappa(R_2) - j + 1$ nicht gilt, so folgt:

$$V_1^{-1} > V_2, \; V_1 \not\approx V_2.$$

3) a) Aus $Q_1^{-1} \neq 1$, $K_1 \neq R_1$ folgt: $\varkappa(Q_1^{-1}) = 1$; hierbei ist Q_1^{-1} verwandt zum letzten Sektor von R_1. Es gilt die Sektorenungleichung: $\varkappa(K_1) \geq \varkappa(R_1) - 1$; für $\varkappa(K_1) = \varkappa(R_1) - 1$ ist K_1 sektoriell abgeschlossen in R_1 und in $K_1 Q_1^{-1} P_2 K_2$.

b) Aus $P_2 \neq 1$, $K_2 \neq R_2$ folgt: $\varkappa(P_2) = 1$; P_2 ist verwandt zum ersten Sektor von R_2. Es gilt die Sektorenungleichung:

$$\varkappa(K_2) \geq \varkappa(R_2) - 1;$$

für $\varkappa(K_2) = \varkappa(R_2) - 1$ ist K_2 sektoriell abgeschlossen in R_2 und in $K_1 Q_1^{-1} P_2 K_2$.

4) Für $V_1^{-1} > V_2$ gelten Äquivalenzen:

$$V_1^{-1} \approx Q_1^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}, \qquad R_1 \approx K_1 Y_2^{-1}, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 K_2$$

für geeignete Worte X_2, Y_2. Für $Q_1^{-1} \neq 1$, $Y_2^{-1} \neq 1$ folgt: $Y_2^{-1} \triangle Q_1^{-1}$. Für $V_1^{-1} \lessdot V_2$ gelten Äquivalenzen:

$$V_2 \approx V_1 X_1^{-1} P_2, \qquad R_1 \approx K_1 Y_1 X_1, \qquad R_2 \approx Y_1^{-1} K_2$$

für geeignete Worte X_1, Y_1. Für $P_2 \neq 1$, $Y_1^{-1} \neq 1$ folgt: $P_2 \triangle Y_1^{-1}$.

5) Für $V_1^{-1} \| V_2$ sei vorausgesetzt, daß nicht gleichzeitig gilt: $K_1 = R_1$, $K_2 = R_2$. Es sei $\{V_1^{-1}, V_2\}' = \{V_1'^{-1}, V_2'\}$ gesetzt. Dann existieren folgende Möglichkeiten:

a) $V_1'^{-1} \triangle V_2'$, $R_2 \approx V_1' R_2'$, $R_1 \approx R_1' V_2'^{-1}$ für geeignete Worte R_1', R_2'. In diesem Falle folgen Äquivalenzen:

$$R_1 \approx K_1 X V_2'^{-1}, \qquad R_2 \approx V_1' X^{-1} K_2$$

mit $$X V_2'^{-1} \simeq X V_1'^{-1}, \qquad \varkappa(X V_2'^{-1}) = \varkappa(X V_1'^{-1}) \leq j - 1$$

für ein geeignetes Wort X (evtl. $X = 1$).

b) Falls a) nicht gilt, so sei F der erste Sektor von V_1^{-1} und $\boxminus$ sei der letzte Sektor von V_2 Es folgen die Äquivalenzen: $R_1 \approx K_1 X$, $R_2 \approx X' K_2$ für geeignete Worte X, X'. Für $X \neq 1$ folgt: $X \triangle F$, für $X' \neq 1$ folgt: $X' \triangle \boxminus$. Aus $X \neq 1$, $X' \neq 1$ folgt: $F \triangle \boxminus$ (vgl. auch 3)).

Die für alle folgenden Entwicklungen wesentlichen Aussagen c) und d) in Satz I enthalten Angaben über die Zahl der vollen Sektoren von K_i bezüglich R_i $(i = 1, 2)$. Nach Satz I d) gilt mindestens eine der beiden Aussagen:

$$(K_i) \geq \varkappa(R_i) - j + 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Untersuchen wir nun für ein gegebenes zyklisches Wort $Z(R)$ die Werte $\varkappa(R')$ mit $R' \in Z(R)$, so sehen wir, daß nur zwei Werte auftreten — je nachdem, ob der letzte Sektor von R' verwandt ist zum ersten Sektor oder nicht. Eine definierende Relation $R' = 1$, $R' \in \mathfrak{R}$, $R' = S_1 \ldots S_m$ (Sektorenschreibweise) nennen wir eine Relation *erster* Art, falls S_1 nicht zu S_m verwandt ist; falls jedoch $S_1 \triangle S_m$ gilt, so nennen wir $R' = 1$ eine Relation *zweiter* Art.

Ist $R' = 1$ mit $R' = S_1 \ldots S_m$ eine Relation zweiter Art, so ist $R'' = 1$ mit

$$R'' = S_m S_1 S_2 \ldots S_{m-1}$$

eine Relation erster Art und es gilt: $\varkappa(R') = \varkappa(R'') + 1$. Ist weiter $R^* = 1$ mit

$$R^* = U_1 \ldots U_n$$

eine Relation erster Art und ist $R^{**} = 1$ mit $R^{**} \in Z(R^*)$, $R^{**} \not\approx R^*$ ebenfalls eine Relation erster Art, so gilt für ein gewisses i $(2 \leq i \leq n)$:

$$R^{**} = U_i \ldots U_n U_1 \ldots U_{n-1}, \qquad \varkappa(R^{**}) = \varkappa(R^*).$$

Ist nun $Z = Z(R)$ ein zyklisches Wort und $R' = 1$ mit $R' \in Z(R)$ eine Relation erster Art, so setzen wir: $\varkappa'(R) = \varkappa(Z(R)) = \varkappa(R')$. Diese Definition ist von der Auswahl von R' unabhängig; gilt $R^* \in Z(R)$, so folgt: $\varkappa(R^*) = \varkappa'(R)$, falls $R^* = 1$ eine Relation erster Art ist — andernfalls gilt: $\varkappa(R^*) = \varkappa'(R) + 1$.

Zusatz. Die Einteilung in Relationen erster und zweiter Art gibt Veranlassung, für eine Abschwächung von Axiom B eine Variation von Satz I anzugeben.

Axiom B werde für zwei Relationen zweiter Art $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ in folgender Weise abgeschwächt: Gilt für $R_1 = S_1 \ldots S_m$, $R_2 = T_1 \ldots T_n$:

$$S_1 \ldots S_{j+1} \simeq T_1 \ldots T_{j+1},$$

so folgt:

$$R_1 \approx R_2.$$

Alsdann bleibt Satz I gültig, wenn die Ungleichung in I d) ersetzt wird durch:

$$\varkappa_{R_i}(K_i) \geq \varkappa'(R_i) - j + 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Auf die Frage der Abschwächung von Axiom B wird am Schluß von § 7 und zu Beginn von § 8 noch eingegangen.

§ 4. Monotone Formen

Der letzte Paragraph gab eine Kennzeichnung der Formen vom Grade 2, die nun ausgenützt werden soll zu einer Einteilung der Vektoren $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$.

Es seien $T_1 = V_1 R_1 V_1^{-1}$ und $T_2 = V_2 R_2 V_2^{-1}$ zwei primäre Transformierte, wobei $F(T_1 T_2)$ den Grad 2 besitzen soll. Gemäß Satz I d) gilt mindestens eine der beiden Aussagen:

$$\varkappa_{R_i}(K_i) \geq \varkappa(R_i) - j + 1 \qquad (i = 1, 2).$$

Falls $\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1$ nicht gilt, so folgt nach Anmerkung 2 zu Satz I:

$$V_1^{-1} < V_2, \qquad V_1 \not\approx V_2;$$

falls $\varkappa_{R_2}(K_2) \geq \varkappa(R_2) - j + 1$ nicht gilt, so folgt:

$$V_1^{-1} > V_2, \qquad V_1 \not\approx V_2.$$

Dem geordneten Paar $\{T_1, T_2\}$ sei nun zugeordnet ein geordnetes Paar $\{x_1, x_2\}$ mit $x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$. Wir setzen $x_1 = -1$ für $V_1^{-1} < V_2$, $V_1 \not\approx V_2$, andernfalls setzen wir $x_1 = +1$; wir setzen $x_2 = -1$, falls gilt $V_1^{-1} > V_2$, $V_1 \not\approx V_2$, andernfalls $x_2 = +1$. Wir nennen

$$\sigma(T_1, T_2) = \{x_1, x_2\}$$

die *Signatur* von $\{T_1, T_2\}$. Nach Definition kann $\{-1, -1\}$ nicht als Signatur auftreten, da aus $V_1^{-1} < V_2$, $V_1^{-1} > V_2$ folgt: $V_1 \approx V_2$. Aus $x_1 = +1$ folgt somit:

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1,$$

aus $x_2 = +1$ folgt:

$$\varkappa_{R_2}(K_2) \geq \varkappa(R_2) - j + 1.$$

Sind nun gegeben n primäre Transformierte $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$, derart, daß $F(T_1 \ldots T_n)$ eine Form vom Grade $n > 1$ darstellt, so ist $F(T_k T_{k+1})$ eine Form vom Grade 2 für alle k mit $1 \leq k \leq n-1$. Wir erhalten somit ein geordnetes $(n-1)$-tupel $\mathfrak{C}$ von Signaturen:

$$\mathfrak{C} = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\} \quad \text{mit} \quad \sigma_k = \sigma(T_k, T_{k+1})$$

für alle k mit $1 \leq k \leq n-1$. Wir nennen $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{U})$ die dem Vektor $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ zugeordnete *Signaturenmenge*.

Ein besonders einfacher Fall liegt dann vor, wenn die $\sigma_k = \{x_k, x_{k+1}\}$ sich alle gleichartig verhalten. Gilt für alle k mit $1 \leq k \leq n-1$:

$$\sigma_k = \{+1, x_{k+1}\} \quad (x_{k+1} = \pm 1),$$

so nennen wir $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ einen *L-Vektor*; einen Vektor

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1) = \{V_1, R_1, V_1^{-1}\}$$

($T_1 = V_1 R_1 V_1^{-1}$ sei hierbei eine primäre Transformierte) wollen wir ebenfalls als L-Vektor bezeichnen. Eine Form F vom Grade n nennen wir eine *L-Form*, falls ein L-Vektor $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ mit $\mathfrak{U} \in F$ existiert. Analog definiert man R-Vektoren und R-Formen. L-Formen und R-Formen nennen wir auch *monotone* Formen. Wir untersuchen in diesem Paragraphen die L-Formen, die wir zum Aufbau einer beliebigen Form gebrauchen (für die R-Formen gelten analoge Sätze).

In Analogie zu einer früheren Definition (§ 1) wollen wir ein Teilwort Y eines Wortes $W = XYZ$ als *linksseitig abgeschlossen* in W bezeichnen, falls für $X \neq 1$ der letzte Sektor von X nicht verwandt ist zum ersten Sektor von Y (für $X = 1$ ist Y also stets linksseitig abgeschlossen). Analog definieren wir rechtsseitig abgeschlossen; abgeschlossen schlechthin bedeutet somit: Sowohl linksseitig als auch rechtsseitig abgeschlossen. Es gilt nun:

Hilfssatz 7. *Es seien* $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ *primäre Transformierte und es sei*

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\};$$

ferner sei
$$\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i), \qquad \mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_n).$$

Die Komponente $K_{i,\alpha}$ *von* $\mathfrak{V}'_\alpha$ *sei rechter Abschnitt von* R_i *mit* $\varkappa(K_{i,\alpha}) \geq j$. *Für* $\varkappa(K_{i,\alpha}) = j$ *sei* $K_{i,\alpha}$ *sektoriell abgeschlossen in* R_i *und linksseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{V}'_\alpha|$. *Die Komponente* $K_{i\,\beta}$ *von* $\mathfrak{V}'_\beta$ *sei linker Abschnitt von* R_i *mit* $\varkappa_{R_i}(K_{i,\beta}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1$. *Dann folgt:*

1) R_i *besitzt die Form:* $R_i \approx F K_i \boxminus$ *für geeignete Worte* F *und* $\boxminus$ *mit* $K_{i,\alpha} = K_i \boxminus$ *und* $K_{i,\beta} = F K_i$. *Hierbei gilt:* $\varkappa(K_i) \geq 1$. *Für* $\varkappa(K_i) = 1$ *ist* K_i *sektoriell abgeschlossen in* R_i *und linksseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$.
2) a) *Für alle* k *mit* $1 \leq k \leq i-1$ *gilt:* $P_k = P_{k,\alpha}$, $K_k = K_{k,\alpha}$, $Q_k = Q_{k,\alpha}$, *außerdem:* $P_i = P_{i,\alpha}$.
   b) *Für alle* k *mit* $i+1 \leq k \leq n$ *gilt:* $P_k = P_{k,\beta}$, $K_k = K_{k,\beta}$, $Q_k = Q_{k,\beta}$, *außerdem:* $Q_i = Q_{i,\beta}$.

Beweis. I) Nach Voraussetzung gilt:

$$R_i \approx X^{-1} K_{i,\alpha} \approx K_{i,\beta} Y^{-1}$$

für geeignete X, Y mit $\varkappa(X) + \varkappa(Y) \leq \varkappa(R_i) - 1$. Für $\varkappa(X) + \varkappa(Y) = \varkappa(R_i) - 1$ folgt hierbei: $\varkappa(K_{i,\alpha}) = j$, so daß $K_{i,\alpha}$ nach Voraussetzung linksseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}'_\alpha|$.

II) Setzen wir:

$$W_1 = P_{1,\alpha} K_{1,\alpha} Q_{1,\alpha}^{-1} \ldots P_{i-1,\alpha} K_{i-1,\alpha} Q_{i-1,\alpha}^{-1} P_{i,\alpha},$$
$$W_3 = Q_{i,\beta}^{-1} P_{i+1,\beta} K_{i+1,\beta} Q_{i+1,\beta}^{-1} \ldots P_{n,\beta} K_{n,\beta} Q_{n,\beta}^{-1},$$

so folgt:
$$\{W_1 X, R_i\}' = \{W_1, K_{i,\alpha}\},$$

da $W_1 K_{i,\alpha}$ reduziert ist als Teilwort von $|\mathfrak{V}'_\alpha|$; ebenso folgt:

$$\{R_i, Y W_3\}' = \{K_{i,\beta}, W_3\}.$$

III) Daher folgt nach Hilfssatz 4:

$$R_i \approx X^{-1} K_i Y^{-1}, \qquad K_{i,\alpha} \approx K_i Y^{-1}, \qquad K_{i,\beta} \approx X^{-1} K_i,$$

wobei K_i die erste Komponente darstellt in $\{K_{i,\alpha}, W_3\}'$. Für $\varkappa(K_i) = 1$ folgt nun: $\varkappa(K_{i,\alpha}) = j$, da nach Voraussetzung $\varkappa(X^{-1}) \leq j - 1$ gilt. Somit ist nach I) $W_1 K_i W_3$ reduziert, woraus die Behauptungen folgen nach der Definition von $\mathfrak{U}'$. Analog folgt:

Hilfssatz 7 a: *Die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 seien folgendermaßen abgeändert:*

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\alpha}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1, \qquad \varkappa(K_{i,\beta}) \geq j;$$

für $\varkappa(K_{i,\beta}) = j$ *sei* $K_{i,\beta}$ *rechtsseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{V}'_\beta|$ *und sektoriell abgeschlossen in* R_i. *Unter Beibehaltung der übrigen Voraussetzungen gelten dann wiederum die Folgerungen* 1) *und* 2) *mit folgender Abänderung in* 1): *Für* $\varkappa(K_i) = 1$ *ist* K_i *rechtsseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$ *(statt linksseitig).*

Wir erhalten nunmehr

Satz II. $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ *sei ein L-Vektor mit*

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\},$$

wobei die $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq n)$ *primäre Transformierte bedeuten. Dann folgt:*

a) $Q_1 = V_1$, $Q_n^{-1} = V_n^{-1}$.

b) K_1 *ist linker Abschnitt von* $R_1 \approx K_1 X_1$ *(das Wort* X_1 *geeignet gewählt);* K_n *ist rechter Abschnitt von* $R_n \approx X_n K_n$ *(*X_n *geeignet gewählt).*

c) $\varkappa(K_n) \geq j$. *Für* $\varkappa(K_n) = j$ *folgt:* K_n *ist sektoriell abgeschlossen in* R_n *und linksseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$.

d) $\varkappa(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1$. *Für* $\varkappa(K_1) = \varkappa(R_1) - j + 1$ *folgt:* K_1 *ist sektoriell abgeschlossen in* R_1.

e) *Für alle* i *mit* $2 \leq i \leq n-1$ *gilt:* $\varkappa(K_i) \geq 1$. *Für* $\varkappa(K_i) = 1$ *ist* K_i *sektoriell abgeschlossen in* R_i *und linksseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$.

Beweis. Für $n = 1$ ist der Satz trivial und für $n = 2$ ist er in Satz I enthalten gemäß Anmerkung 2) zu Satz I. Wir setzen voraus: $n > 2$ und machen die Induktionsvoraussetzung für $n - 1$.

Aus der Induktionsvoraussetzung und aus

$$\sigma(T_{n-1}, T_n) = \{+1, x_n\} \ (x_n = \pm 1)$$

folgt dann nach Satz I c) und Anmerkung 2 zu Satz I, daß die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt sind, woraus der Satz folgt.

Zusatz. Ersetzt man in II d) den Ausdruck $\varkappa(R_1)$ durch $\varkappa'(R_1)$, so kann man wieder eine Abschwächung von Axiom B verwenden (vgl. Zusatz zu Satz I, Axiom B_0 in § 7 und den Beginn von § 8).

§ 5. Dreirelationensätze

Für die Untersuchung beliebiger Formen werden zwei weitere Axiome verwendet (von denen das zweite Axiom nur sehr selten gebraucht wird).

Axiom D_1. *Für drei definierende Worte*

$$R_1 \in \mathfrak{R}, \qquad R_2 \in \mathfrak{R}, \qquad R_3 \in \mathfrak{R}$$

mit $R_1 \approx X\,Y R_1'$, $R_2 \approx X\,Y' R_2'$, $R_3 \approx Z R_3'$, $Z \simeq Y'^{-1}\,Y$, $X \neq 1$, $Y \neq 1$, $Y' \neq 1$

elte mindestens eine der beiden Ungleichungen:

$$\varkappa(X\,Y) \geq j, \qquad \varkappa(X\,Y') \geq j.$$

Dann folgt mindestens eine der Aussagen:

a) $X\,Y R_1' \approx X\,Y' R_2'$.

b) $\varkappa(X\,Y) = 1$ (*somit nach Axiom* B: $Y'^{-1} X^{-1} R_2'^{-1} \approx Z R_3'$).

c) $\varkappa(X\,Y') = 1$ (*für* $Z \approx Y'^{-1}\,Y$ *folgt hieraus:* $Y^{-1}\,Y' R_3'^{-1} \approx Y^{-1} X^{-1} R_1'^{-1}$).

Axiom D_2. *Für vier definierende Worte*

$$R_1 \in \mathfrak{R}, \qquad R_2 \in \mathfrak{R}, \qquad R_3 \in \mathfrak{R}, \qquad R_4 \in R$$

mit $R_1 \approx X\,Y R_1'$, $R_2 \approx X\,Y' R_2'$, $R_3 \approx X' Z R_3'$, $R_4 \approx X'\,Y' R_4'$, $Z \simeq Y$, $X' \neq 1$,
$X \neq 1$, $Y \neq 1$, $Y' \neq 1$

gelte sowohl $\varkappa(X\,Y) \geq j$ *als auch* $\varkappa(X\,Y') \geq j$. *Dann folgt mindestens eine der Aussagen:*

a) $\{X,\, X'^{-1}\}$ *ist verkettet.*

b) $\{Y^{-1},\, Y'\}$ *ist verkettet.*

Anmerkungen.

1) In D_1, D_2 kann man bei den Voraussetzungen außerdem noch fordern:

$$\varkappa(X) < j, \qquad \varkappa(Y) < j, \qquad \varkappa(Y') < j,$$

da wir sonst eine der Folgerungen a), b), c) bereits aus Axiom B erhalten; in D_2 kann außerdem noch gefordert werden:

$$\varkappa(X') < j.$$

2) In D_1 wird nicht vorausgesetzt, daß $Y'^{-1}\,Y$ reduziert ist. Da jedoch $Z \simeq Y'^{-1}\,Y$ gilt und Z reduziert ist (als Teilwort von R_3), so ist $Y'^{-1}\,Y$ höchstens dann nicht reduziert, wenn $\varkappa(Y) = 1$ gilt und Y verwandt ist zum letzten Sektor von Y'^{-1}. In

diesem Sonderfalle können wir noch zusätzlich voraussetzen: $\varkappa(Y') > 1$, da andernfalls die Folgerung a) bereits aus Axiom B folgt.

In den Anwendungen werden Axiom D_1 und Axiom D_2 benützt, um einen Widerspruch herzuleiten zur Annahme, daß eine vorgelegte Form einen bestimmten Grad besitzt. Im folgenden seien stets die Axiome Z, B, D_1, D_2 vorausgesetzt. Mittels dieser Axiome läßt sich die Struktur einer beliebigen Form bestimmen.

Es seien nun $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq k+1)$ primäre Transformierte und $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k)$ sei ein L-Vektor. Wir nennen dann $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ einen *L-Wendevektor*, falls gilt:

$$\sigma(T_k, T_{k+1}) = \{-1, +1\}$$

soferne $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ den Grad $k+1$ besitzt. Wir nennen dann $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine *L-Wendeform*, falls $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ *keine* L-Form ist.

Wir betrachten nun den Vektor $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k)$. Für die Komponenten von $\mathfrak{V}'_\sigma$ gilt dann Satz II. Wir setzen zur Abkürzung:

$$T'_i = P_{i,\sigma} K_{i,\sigma} Q_{i,\sigma}^{-1} \quad (1 \leq i \leq k).$$

Nun kann sicherlich nicht gelten: $T'_1 \ldots T'_k < V_{k+1}$, da sonst $K_{1,\sigma}^{-1}$ ein Teilwort von V_{k+1} wäre und nach Satz II d) V_{k+1} somit ein charakteristisches Teilwort von R_1^{-1} als Teilwort enthalten würde, was der Definition in § 1 widerspricht.

Wir definieren nun eine Zahl l, die wir als die *Länge* des L-Wendevektors $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ bezeichnen wollen. Gilt $\mathfrak{S} = Q_{1,\sigma}^{-1} T'_2 \ldots T'_k < V_{k+1}$, so setzen wir $l = 1$. Andernfalls sei l die grösste Zahl mit $1 < l \leq k$, so daß $Q_{l-1,\sigma}^{-1} T'_l \ldots T'_k < V_{k+1}$ *nicht* gilt.

Von Bedeutung sind zunächst die fälle $l = 1$ und $l = 2$, auf welche die übrigen Fälle zurückgeführt werden können. Im folgenden seien eingeführt als einheitliche Bezeichnungen:

$$K = T'_{l+1} \ldots T'_k, \qquad \mathfrak{S} = Q_{l,\sigma}^{-1} K.$$

Wir erhalten zunächst

HILFSSATZ 8. *Es sei $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ ein L-Wendevektor der Länge $l = 1$ und*

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k).$$

Dann gilt für: $\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_{k+1}, K_{k+1}, Q_{k+1}^{-1}\}$

a) $\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$.

b) $\varkappa_{R_1}(K_1) \geq 1$. *Für $\varkappa(K_1) = 1$ ist K_1 sektoriell abgeschlossen in R_1 und rechtsseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{U}'|$.*

c) *Es gelten Äquivalenzen:*

$$R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1}, \qquad K_{1,\sigma} \approx K_1 Y_1 X_1$$

für die Komponente $K_{1,\sigma}$ von $\mathfrak{V}'_\sigma$, $V'_{k+1} \approx X_1^{-1} V''_{k+1}$ *für einen rechten Abschnitt* V'_{k+1} *von* V_{k+1}. *Für* $Y_1 \neq 1$, $V''_{k+1} \neq 1$ *folgt:* $Y_1 \triangle V''_{k+1}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; T_2)$. Nach Satz II gilt:

$K_{1,\sigma} = K_{1,\alpha}$ mit $R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_2^{-1}$, $\varkappa(Y_2^{-1}) \leq j-1$ (für ein passendes Y_2).

Da $l = 1$ angenommen wurde, so folgt:

$$Q_{1,\sigma}^{-1} T'_2 \ldots T'_k = \boxminus < V_{k+1} \approx \boxminus^{-1} V'_{k+1}$$

für ein geeignetes Wort V'_{k+1}. Es ergibt sich:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 K_{1,\alpha} V'_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

I) $K_{1,\alpha} > V'_{k+1}$. Es gelten Äquivalenzen:

$$K_{1,\alpha} \approx R'_1 V'^{-1}_{k+1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R'_1 R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Es sei $\{R'_1, R_{k+1}\}' = \{R''_1, R'_{k+1}\}$ mit der Ergänzung X.

Wäre nun $\{R'_1, R_{k+1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen nach Axiom B:

$$X^{-1} R'_{k+1} \approx X^{-1} R''^{-1}_1 Y_2 V'_{k+1}, \qquad R_{k+1} \sim R'^{-1}_1 R_1^{-1} R'_1.$$

Aus $T_1 \ldots T_k V_{k+1} \sim V_1 R'_1$ folgt somit:

$$(T_1 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_1^{-1}) \sim (V_1 R'_1) R_{k+1} (R'^{-}_1 V_1^{-1}) \sim T_1^{-1},$$

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k;$$

$F(T_1 \ldots T_{k+1})$ wäre keine Form vom Grade $k+1$. Daher ist $\{R'_1, R_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet und es gilt: $\varkappa(X) \leq j-1$.

Das Wort V'^{-1}_{k+1} kann nach § 1 als Teilwort von V_{k+1}^{-1} kein charakteristiches Teilwort eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$ enthalten. Da

$$Y_2^{-1} R''_1 X V'^{-1}_{k+1} \in \mathfrak{R}$$

gilt, so folgt nach Axiom Z:

$$\varkappa(Y_2^{-1} R''_1 X) \geq 2j-1.$$

Nach Axiom B muß gelten: $\varkappa(Y_2^{-1}) \leq j-1$ (sonst wäre $T_1 \sim T_2^{-1}$); es folgt:

$$\varkappa_{R_1}(R''_1 X) \geq j, \; \varkappa_{R_1}(R''_1) \geq 1.$$

Für $\varkappa(R_1'')=1$ folgt: $\varkappa(X)=j-1$; R_1'' ist dann nicht verwandt zum ersten Sektor von R'_{k+1}, da sonst $\{R_1', R_{k+1}\}$ j-fach verkettet wäre. Somit ist $W=V_1 R_1'' R'_{k+1} V_{k+1}^{-1}$ reduziert und für die Komponente $K_{k+1}=R'_{k+1}$ gilt:

$$\varkappa(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1})-j+1.$$

Für $\varkappa(K_{k+1})=\varkappa(R_{k+1})-j+1$ ist K_{k+1} sektoriell abgeschlossen in R_{k+1}.

II) $K_{1,\alpha} \| V'_{k+1}$.

Es sei $\{K_{1,\alpha}, V'_{k+1}\}'=\{R_1', V''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung X. Es folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V''_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}=W.$$

A) Ist W reduziert, so gilt: $K_{k+1}=R_{k+1}$, $K_1=R_1'$. Die Behauptungen a), b), c) folgen wie unter I).

B) Ist W nicht reduziert, so ist $\{V_1 R_1', V''_{k+1}, R_{k+1} V_{k+1}^{-1}\}$ verschränkt. Aus $\varkappa(K_{1,\alpha}) \geq \varkappa(R_1)-j+1$ folgt: $\varkappa(R_1') \geq j$, da sonst V'_{k+1} ein charakteristisches Teilwort von R_1^{-1} enthalten würde. Durch Verschränkungsreduktion erhält man somit ein reduziertes Wort

$$W'=V_1 R_1'' V''_{k+1} R'_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Der Satz folgt dann aus Hilfssatz 2, zusammen mit A).

III) $K_{1,\alpha} < V'_{k+1}$. Dies ist unmöglich, da $\varkappa(K_{1,\alpha}) \geq \varkappa(R_1)-j+1$ gilt und V'_{k+1} als Teilwort von V_{k+1} kein charakteristisches Teilwort eines definierenden Wortes enthalten kann.

Anmerkung. Aus dem Beweis folgt, daß aus $V_1 K_{1,\alpha} > V'_{k+1}$ sich ergibt: $K_{1,\alpha} > V'_{k+1}$ (vgl. II) B) und III)).

Als Vorbereitung für den nächsten Satz betrachten wir eine Verallgemeinerung von Anmerkung 5 zu Satz I. Es sei $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ ein L-Wendevektor mit der Länge $l=2$; es sei außerdem: $\mathfrak{V}_\alpha=\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)$. Wir setzen zur Abkürzung $F=Q_{1,\alpha}^{-1} T_2' \ldots T_k'$ und setzen voraus: $F \| V_{k+1}$. Wir bilden:

$$\{F, V_{k+1}\}'=\{F', V'_{k+1}\}.$$

Für $K_{k+1} \neq R_{k+1}$ sind dann folgende Fälle zu unterscheiden:

α) $K_{1,\alpha} \approx R_1' V'^{-1}_{k+1}$, $R_{k+1} \approx F'^{-1} R'_{k+1}$, $F' \triangle V'_{k+1}$ für geeignete Worte R_1', R'_{k+1}. Es folgt die Äquivalenz:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R'_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Wir bilden $\{R_1', R_{k+1}'\}' = \{R_1'', R_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung X. Es folgen Äquivalenzen:

$$R_1 \approx R_1'' X V_{k+1}'^{-1} Y_2^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx F'^{-1} X^{-1} R_{k+1}''$$

für ein geeignetes Wort Y_2^{-1} mit $R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_2^{-1}$.

Angenommen, $\{R_1', R_{k+1}'\}$ wäre mindestens j-fach verkettet, dann folgt nach Axiom B:

$$X^{-1} R_1''^{-1} Y_2 V_{k+1}' \approx X^{-1} R_{k+1}'' F'^{-1},$$

$$R_1'^{-1} R_1^{-1} R_1' \sim F' R_{k+1} F'^{-1}.$$

Aus $T_1 \dots T_k V_{k+1} \sim V_1 R_1' F'$ folgt dann:

$$(T_1 \dots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \dots T_1^{-1}) \sim (V_1 R_1' F') R_{k+1} (F'^{-1} R_1'^{-1} V_1^{-1}) \sim T_1^{-1},$$

$$T_1 \dots T_{k+1} \sim T_2 \dots T_k$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $F(T_1 \dots T_{k+1})$ eine Form vom Grade $k+1$ ist. Somit ist $\{R_1', R_{k+1}')$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet und es folgt $\varkappa(X) \leq j-1$.

Aus $R_1 \approx R_1'' X V_{k+1}'^{-1} Y_2^{-1}$ folgt dann wie beim Beweis von Hilfssatz 8:

$$\varkappa(R_1'') \geq 1,$$

wobei für $\varkappa(R_1'') = 1$ das Wort R_1'' sektoriell abgeschlossen ist in R_1 und rechtsseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{U}'|$. Daher ist $W = V_1 R_1'' R_{k+1}'' V_{k+1}^{-1}$ reduziert.

β) Falls (α) nicht gilt, so sei Q der letzte Sektor von V_{k+1}. Analog wie bei Anmerkung 5 zu Satz I folgt dann aus Hilfssatz 1: $R_{k+1} \approx X R_{k+1}'$ für ein geeignetes Wort X mit $X \triangle Q$.

HILFSSATZ 9. *Es seien* $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq k+2)$ *primäre Transformierte und die Form* $F(T_1 \dots T_{k+2})$ *besitze den Grad* $k+2$. *Der Vektor*

$$\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \dots; T_{k+1})$$

sei ein L-Wendevektor. Es sei ferner:

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \dots; T_k).$$

Es gelte weder $Q_{1,\sigma}^{-1} T_2' \dots T_k' > V_{k+1}$ *noch* $V_{k+1}^{-1} < V_{k+2}$. *Ist nun*

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \dots, P_{k+2}, K_{k+2}, Q_{k+2}^{-1}\}$$

der reduzierte Vektor von $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \dots; T_{k+2})$, *so folgt:*

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1.$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}(T_{k+1};\, T_{k+2})$. Mit $F = Q_{1,\sigma}^{-1} T_2' \ldots T_k'$ sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

I) Es gelte sowohl $F \| V_{k+1}$ als auch $V_{k+1}^{-1} \| V_{k+2}$. Wir setzen

$$\{F,\, V_{k+1}\}' = \{F',\, V_{k+1}'\} \quad \text{und} \quad \{V_{k+1}^{-1},\, V_{k+2}\}' = \{V_{k+1}^{*-1},\, V_{k+2}^{*}\}.$$

Gemäß den obigen Überlegungen unterscheiden wir für $\mathfrak{B}_\alpha$ die beiden Fälle (α) und (β). Für $\mathfrak{B}_\beta$ unterscheiden wir nach Anmerkung 5 zu Satz I zwei entsprechende Fälle, die wir mit (α') und (β') bezeichnen wollen. Es sind demnach vier Kombinationen zu unterscheiden:

A): (β, β'). Unter Verwendung von Anmerkung 5 zu Satz I und aus den obigen Bemerkungen folgt, daß für $\mathfrak{B}(T_1;\, \ldots;\, T_{k+1})$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt sind. Es ergibt sich eine Äquivalenz:

$$R_{k+1} \approx X_1\, K_{k+1}\, X_2;$$

hierbei gilt für $X_1 \neq 1$, $X_2 \neq 1$:

$$X_1 \triangle X_2, \qquad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - 1.$$

B) (β, α'). Unter Verwendung von Hilfssats 7 folgt:

$$R_{k+1} \approx X_1\, K_{k+1}\, Y_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{*-1}.$$

Für $X_1 \neq 1$ gilt $X_1 \triangle V_{k+2}^{*-1}$; nach Satz I gilt:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{*-1}) \leq j - 1,$$

da sonst $T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$ folgen würde. Hieraus ergibt sich:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{*-1}\, X_1) \leq j - 1.$$

C) (α, β'). Der Beweis erfolgt analog B).

D) (α, α'). Es ergeben sich Äquivalenzen:

$$R_1 \approx K_{1,\alpha}\, Y_1\, V_{k+1}'^{-1},$$

$$R_{k+1} \approx F'^{-1}\, Y_1^{-1}\, K_{k+1}\, Y_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{*-1}$$

mit $$F'^{-1} \triangle V_{k+1}'^{-1} \triangle V_{k+1}^{*} \triangle V_{k+2}^{*-1}, \qquad R_{k+2} \approx V_{k+1}^{*}\, Y_{k+2}\, K_{k+2,\beta}.$$

Angenommen, es würde gelten: $\varkappa(F'^{-1}\, Y_1^{-1}) \geq j$, so würde folgen nach Axiom B:

$$Y_1\, V_{k+1}'^{-1}\, K_{1,\alpha} \approx Y_1\, F'\, V_{k+2}^{*}\, Y_{k+2}\, K_{k+1}^{-1},$$

da für $\varkappa(Y_1) \leq j$ gilt: $Y_1 V'^{-1}_{k+1} \simeq Y_1 F'$. Aus

$$K^{-1}_{1,\alpha} R_1 K_{1,\alpha} \sim (Y_1 F') R^{-1}_{k+1} (F'^{-1} Y_1^{-1})$$

ergibt sich dann:

$$(T_1 \dots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \dots T_1^{-1}) \sim T_1^{-1}.$$

Somit folgt: $$\varkappa(F'^{-1} Y_1^{-1}) \leq j-1.$$

Wie sich aus dem Beweis von Satz I ergibt, folgt ebenso:

$$\varkappa(Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2}) \leq j-1,$$

somit:

$$\varkappa(Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2} F'^{-1}) = \varkappa(Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2}) \leq j-1, \qquad \varkappa(V^{*-1}_{k+2} F'^{-1} Y_1^{-1}) \leq j-1.$$

Würde nun gelten: $\varkappa(Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2} F'^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$, so würde somit folgen: $Y_1 \neq 1$, $Y_{k+2} \neq 1$. Wir beachten nun

$$Y_1 V'^{-1}_{k+1} \simeq Y_1 F' V^*_{k+2} V^{*-1}_{k+1}$$

und vergleichen nach Axiom D_1: $Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2} F'^{-1} Y_1^{-1} K_{k+1}$ mit $Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+1} K^{-1}_{k+2,\beta}$ und $Y_1 V'^{-1}_{k+1} K_{1,\alpha}$; es gilt dann eine der drei Folgerungen:

$$T_{k+1} \sim T^{-1}_{k+2}, \qquad T_1 \dots T_{k+1} \sim T_2 \dots T_k, \qquad \varkappa(Y^{-1}_{k+2} V^{*-1}_{k+2} F'^{-1} Y_1^{-1}) = 1.$$

II) Es gelte:

$$F \lessdot V_{k+1}, \; V^{-1}_{k+1} \parallel V_{k+2}.$$

Es folgen Äquivalenzen:

$$R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_1 X_1, \qquad R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1,\alpha}, \qquad V_{k+1} \approx F^{-1} X_1^{-1} V'_{k+1},$$

wobei für $\varkappa(Y_1) > 0$, $\varkappa(V'_{k+1}) > 0$ folgt: $V'_{k+1} \triangle Y_1$.

Für $\mathfrak{V}'_\beta$ sind wie unter I) die beiden Fälle α' und β' zu unterscheiden (gemäß Anmerkung 5 zu Satz I).

A) Fall α': Es folgen Äquivalenzen:

$$R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_1 X_1, \qquad R_{k+2} \approx V^*_{k+1} Y K_{k+2,\beta}, \qquad R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1} Y^{-1} V^*_{k+2}$$

mit $$Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} \simeq Y^{-1} V^{*-1}_{k+1}.$$

Es gilt: $$\varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2}) = \varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+1}) \leq j-1,$$

da sonst $T_{k+1} \sim T^{-1}_{k+2}$ folgen würde.

Wir zeigen nunmehr, daß ebenso gilt: $\varkappa(Y_1) \leq j-1$. Für $Y_1 \neq 1$, $V'_{k+1} \neq 1$ folgt: $\varkappa(Y_1)=1$ (s. o.). Für $\varkappa(Y_1) \geq j$, $V'_{k+1}=1$ fogt nach Axiom B:

$$R_{k+1} \sim (Y_1^{-1} K_{1,\alpha}^{-1}) R_1^{-1} (K_{1,\alpha} Y_1).$$

Aus $T_1 \ldots T_k V_{k+1} \sim V_1 K_{1,\alpha} Y_1$ folgt dann:

$$(T_1 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_1^{-1}) \sim T_1^{-1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es gilt nun: $V^*_{k+2} \triangle Q$, wobei Q den letzten Sektor von V_{k+1} bedeutet. Es sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $V'_{k+1}=1$, $V_{k+1} \approx F^{-1} X_1^{-1}$, $T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 K_{1,\alpha} K_{k+1,\alpha} V_{k+1}^{-1}$; mit $X_1^{-1} \neq 1$ (sonst wäre $F > V_{k+1}$ im Widerspruch zur Annahme). Für den letzten Sektor Z^{-1} von $X_1^{-1} \approx X_1'^{-1} Z^{-1}$ folgt somit: $Z^{-1} \triangle Q$.

Würde nun gelten: $\varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} Y_1^{-1}) \geq j$, so würde folgen: $Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} \neq 1$, $Y_1 \neq 1$. Nach Axiom D_1 vergleichen wir nun:

$$Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} Y_1^{-1} K_{k+1} \quad \text{mit} \quad Y^{-1} V^{*-1}_{k+1} K^{-1}_{k+2,\beta} \quad \text{und} \quad Y_1 Z X_1' K_{1,\alpha}$$

(da $Y_1 Z \simeq Y_1 V^*_{k+2}$, V^{*-1}_{k+1} gilt). Aus Folgerung a) von Axiom D_1 würde sich ergeben:

$$T_{k+1} \sim T^{-1}_{k+2},$$

aus Folgerung b): $\quad T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k,$

aus Folgerung c): $\quad \varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} Y_1^{-1}) = 1.$

2) $\varkappa(V'_{k+1}) > 0$. Für $\varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} Y_1^{-1}) \geq j$ muß gelten: $\varkappa(Y_1) > 0$. Hieraus folgt:

$$Y_1 \triangle V'_{k+1} \triangle Q \triangle V^*_{k+2}, \qquad \varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2} Y_1^{-1}) = \varkappa(Y^{-1} V^{*-1}_{k+2}) \leq j-1.$$

B) Fall β': Es folgen die Äquivalenzen: $R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_1 X_1$, $R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1} X^{-1}$ mit $X^{-1} \triangle Q$, wobei Q den letzten Sektor von V_{k+1} bedeutet. Soll hierbei gelten: $\varkappa(Y_1^{-1} X^{-1}) \geq j$, so folgt: $Y_1^{-1} \neq 1$.

1) $V'_{k+1}=1$, $V_2 \approx V_1 X_1^{-1}$. In diesem Falle gilt: $X_1 \neq 1$; da sonst $F > V_{k+1}$ folgen würde. Wie unter A), 1) gilt eine Äquivalenz: $X_1^{-1} \approx X_1'^{-1} Z^{-1}$ mit $Z^{-1} \triangle Q$.

Aus $\varkappa(X^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$ folgt eine Äquivalenz:

$$Y_1 X K^{-1}_{k+1} \approx Y_1 Z X_1' K_{1,\alpha},$$

(Axiom B), da $X \triangle Q \triangle Z$, $Y_1 X \simeq Y_1 Z$ gilt. Somit folgt

$$Y_1 R^{-1}_{k+1} Y_1^{-1} \sim K^{-1}_{1,\alpha} R_1 K_{1,\alpha}.$$

Hieraus ergibt sich wie unter A):

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k.$$

2) $V'_{k+1} \neq 1$. Es folgt:

$$Y_1^{-1} \triangle V'_{k+1} \triangle Q \triangle X^{-1}, \qquad \varkappa(X^{-1} Y_1^{-1}) = 1 \leq j-1.$$

III) $F \| V_{k+1}$, $V_{k+1}^{-1} > V_{k+2}$. Der Beweis erfolgt analog II).

IV) $F < V_{k+1}$, $V_{k+1}^{-1} > V_{k+2}$. Es folgen Äquivalenzen:

$$V_{k+1} \approx F^{-1} V'_{k+1} \approx V_{k+2} V^*_{k+1}, \qquad R_1 \approx K_{1,\sigma} Y_2^{-1}.$$

Für $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}(T_1; \ldots; T_{k+2})$ sind nun die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllt, da wir Hilfssats 8 anwenden können auf $\mathfrak{B}(T_1; \ldots; T_{k+1})$. Es sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

A) Es gelte sowohl $V_1 K_{1,\sigma} > V'_{k+1}$ als auch $V_{k+1}^{-1} < T_{k+2}$. Nach Hilfssatz 8, Anmerkung, folgt hieraus die Äquivalenz

$$R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_1 X_1 Y_2^{-1} \quad \text{mit} \quad X_1 = V'^{-1}_{k+1},\ R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1,\alpha}.$$

Zusammen mit Satz I und Hilfssatz 7 ergeben sich hieraus die Äquivalenzen:

$$R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1} Y_{k+2}^{-1},$$
$$R_{k+2} \approx X_{k+2} Y_{k+2} K_{k+2},$$
$$V_{k+1} \approx F^{-1} X_1^{-1} \approx V_{k+2} X_{k+2}.$$

Aus $V_{k+1}^{-1} \approx X_1 F \approx X_{k+2}^{-1} V_{k+2}^{-1}$ ergeben sich nun folgende Möglichkeiten: Für $\varkappa(X_1) = \varkappa(X_{k+2}^{-1})$ folgt:

$$X_1 \simeq X_{k+2}^{-1}.$$

Für $\varkappa(X_1) > \varkappa(X_{k+2}^{-1})$ folgt:

$$X_1 \approx X_{k+2}^{-1} X'_1,\ X'_1 \neq 1.$$

Für $\varkappa(X_{k+2}^{-1}) > \varkappa(X_1)$ folgt:

$$X_{k+2}^{-1} \approx X_1 X'^{-1}_{k+2}, \qquad X'_{k+2} \neq 1.$$

Aus $\varkappa(Y_1) \geq j$ würde nun folgen: $T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k$ und aus $\varkappa(Y_{k+2}) \geq j$ würde folgen: $T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$. Aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$ folgt daher: $Y_1 \neq 1$, $Y_{k+2} \neq 1$.

1) Aus $X_1 \approx X_{k+2}^{-1} X'_1$ und aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$ folgt nach Axiom D_1 durch Vergleich von $Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1} K_{k+1}^{-1}$ mit $Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1} K_{k+2}^{-1}$ und $Y_1 X_{k+2}^{-1} X'_1 Y_2^{-1} K_{1,\alpha}$:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) = 1$$

(aus D_1 a) und D_1 b) folgen Widersprüche).

2) Aus $X_{k+2}^{-1} \approx X_1 X_{k+2}'^{-1}$ und $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$ folgt nach Axiom D_1 durch Vergleich von $Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1} K_{k+1}$ mit $Y_{k+2}^{-1} X_1 X_{k+2}'^{-1} K_{k+2}^{-1}$ und $Y_1 X_1 Y_2^{-1} K_{1,\alpha}$ wie oben:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) = 1.$$

3) Bei $X_1 \simeq X_{k+2}^{-1}$ vergleichen wir wie oben $Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1} K_{k+1}$ mit

$$Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1} K_{k+2}^{-1} \quad \text{und} \quad Y_1 X_1 Y_2^{-1} K_{1,\alpha}.$$

B) Es gelte: $V_1 K_{1,\sigma} > V_{k+1}$, jedoch nicht: $V_{k+1}^{-1} < T_{k+2}$. Es folgen Äquivalenzen:

$$R_1 \approx K_{1,\alpha} Y_1 X_1 Y_2^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1} Y_{k+2}^{-1}, \qquad R_{k+2} \approx X'_{k+2} Y_{k+2} K_{k+2},$$
$$X_{k+2} \approx X'_{k+2} Z, \qquad V_{k+1}^{-1} \approx X_{k+2}^{-1}, \qquad V_{k+2}^{-1} \approx Z^{-1} X_{k+2}'^{-1} V_{k+2}^{-1}.$$

Hierbei ist $Z \neq 1$. Soll nun gleichzeitig gelten: $Y_{k+2} \neq 1$, so folgt:

$$\varkappa(Z) = 1, \qquad \varkappa(Y_{k+2}^{-1}) = 1, \qquad Y_{k+2}^{-1} \triangle Z.$$

Aus $\varkappa(Y_1^{-1}) \geq j$ würde folgen: $T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k$. Aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1}) \geq j$ würde folgen: $T_{k+1}^{-1} \sim T_{k+2}$. Aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1})$ folgt somit

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1}) > 0, \qquad \varkappa(Y_1^{-1}) > 0, \qquad Y_{k+2}^{-1} \triangle Z \triangle Q,$$

wobei Q den letzten Sektor von V_{k+1} bedeutet. Aus $V_{k+1} \approx F^{-1} X_1^{-1}$ folgt dann, daß Y_{k+2}^{-1} verwandt ist zum ersten Sektor Z' von $X_1 \approx Z' X_1'$. Aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) \geq j$ folgt somit:

$$\varkappa(Y_1) = j - 1, \qquad Y_1 Z \simeq Y_1 Y_{k+2}.$$

Durch Vergleich von $Y_1 Z' X_1' Y_2^{-1} K_{1,\alpha}$ mit $Y_1 Y_{k+2} K_{k+2}^{-1}$ folgt dann nach Axiom B:

$$K_{1,\alpha}^{-1} R_1 K_{1,\alpha} \sim Y_1 R_{k+1}^{-1} Y_1^{-1}, \; T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k.$$

C) Es gilt $V_{k+1}^{-1} < T_{k+2}$, jedoch nicht $V_1 K_{1,\sigma} > V_{k+1}$. Der Beweis erfolgt analog B).

D) Es gilt weder $V_1 K_{1,\sigma} > V_{k+1}$ noch $V_{k+1}^{-1} < T_{k+2}$. Durch Kombination der in B) und C) angestellten Überlegungen folgt dann aus

$$R_{k+1} \approx Y_1^{-1} K_{k+1} Y_{k+2}^{-1}, \qquad \varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) \geq j:$$
$$\varkappa(Y_1^{-1}) = 1, \qquad \varkappa(Y_{k+2}^{-1}) = 1,$$

wobei Y_{k+2}^{-1} verwandt ist zum ersten Sektor von V_{k+1}^{-1} und Y_1^{-1} verwandt ist zum letzten Sektor von V_{k+1}. Es folgt:

$$Y_{k+2}^{-1} \triangle Y_1^{-1}, \quad \varkappa(Y_{k+2}^{-1} Y_1^{-1}) = 1 < j.$$

Damit ist Hilfssatz 9 bewiesen. Sofort einzusehen ist:

Hilfssatz 10. *Es sei* $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}(T_1;\ldots;T_{k+1})$ *ein L-Wendevektor mit der Länge* l *und es sei* $\mathfrak{V}_s=\mathfrak{V}(T_s;T_{s+1})$ $(l\leq s\leq k-1)$. *Dann gilt für die Komponente* $K_{s+1,s}$ *von* $\mathfrak{V}_s'$: $\varkappa_{R_{s+1}}(K_{s+1,s})<\varkappa(R_{s+1})-j+1$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}_\alpha=\mathfrak{V}(T_1;\ldots;T_k)$. Angenommen, Hilfssatz 10 würde nicht gelten, dann würde folgen für R_{s+1} eine Äquivalenz:

$$R_{s+1}\approx F\,K_{s+1,\alpha}\,\boxminus \quad \text{mit} \quad \varkappa(F)\leq j-1, \quad \varkappa(\boxminus)\leq j-1$$

(vgl. den Beweis zu Satz II und Hilfssatz 7 a); für $s=k-1$ ist $\boxminus=1$).

Hieraus folgt: $\varkappa(\boxminus F)\leq 2j-2$, d.h. $K_{s+1,\alpha}$ ergibt sich als charakteristisches Teilwort von R_{s+1}. Dann kann aber $l\leq s$ nicht gelten, da sonst V_{k+1} das charakteristische Teilwort $K_{s+1,\alpha}^{-1}$ enthalten würde, was der Definition in § 1 widerspricht.

Hilfssatz 11. *Es sei* $\mathfrak{U}=\mathfrak{V}(T_1;\ldots;T_{k+1})$ *ein L-Wendevektor mit der Länge* $l=2$ *und dem reduzierten Vektor* $\mathfrak{U}'=\{P_1,K_1,Q_1^{-1},\ldots,P_{k+1},K_{k+1},Q_{k+1}^{-1}\}$. *Es sei* $\mathfrak{V}_\alpha=\mathfrak{V}(T_1;\ldots;T_k)$ *und* $T_i'=P_{i,\alpha}K_{i,\alpha}Q_{i,\alpha}^{-1}$ $(1\leq i\leq k)$.

Ferner gelte:

α) $$V_1^{-1}>V_2, \qquad V_1^{-1}<T_2, \qquad K_{1,\alpha}\neq R_1,$$

β) $$T_2'\ldots T_k'>V_{k+1}.$$

Dann folgt:

a) $\varkappa(K_1)\geq\varkappa(R_1)-j+1$. *Für* $\varkappa(K_1)=\varkappa(R_1)-j+1$ *ist* K_1 *sektoriell abgeschlossen in* R_1 *und rechtsseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$. K_1 *ist linker Abschnitt von* R_1.

b) $\varkappa(K_{k+1})\geq\varkappa(R_{k+1})-j+1$. *Für* $\varkappa(K_{k+1})=\varkappa(R_{k+1})-j+1$ *ist* K_{k+1} *sektoriell abgeschlossen in* R_{k+1} *und linksseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$. K_{k+1} *ist rechter Abschnitt von* R_{k+1}.

Beweis. Aus der Annahme α) folgen die Äquivalenzen:

$$R_1\approx R_1'\,Y_2^{-1}, \qquad V_1^{-1}\approx X_2^{-1}\,V_2^{-1}, \qquad R_2\approx X_2\,Y_2\,R_2'\,Y_3^{-1}$$

für $R_1'=K_{1,\alpha}$, $R_2'=K_{2,\alpha}$ und geeignete Worte X_2, Y_2, Y_3. Für $k=2$ ist hierbei $Y_3=1$. Aus $K_{1,\alpha}\neq R_1$ folgt: $\varkappa(Y_2)>0$; ferner gilt: $\varkappa(Y_2)<j$, da sonst $T_1\sim T_2^{-1}$ folgen würde.

Da $l=2$ ist, so gilt für einen geeigneten rechten Abschnitt V_{k+1}' von $V_{k+1}\approx\boxminus^{-1}\,V_{k+1}'$ mit $\boxminus=Q_{2,\alpha}^{-1}\,T_3'\ldots T_k'$:

$$T_1\ldots T_{k+1}\sim V_1\,R_1'\,R_2'\,V_{k+1}'\,R_{k+1}\,V_{k+1}^{-1}.$$

Aus der Voraussetzung β) folgt: $R_2'\approx R_2''\,V_{k+1}'^{-1}$ für ein geeignetes R_2'' mit $R_2''\neq 1$ (da sonst $l=1$ folgen würde).

I) $R_2'' \lessdot R_{k+1}$, $R_{k+1} \approx R_2''^{-1} R_{k+1}'$. Es folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}.$$

Wir bilden: $\{R_1', R_{k+1}'\}' = \{R_1'', R_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung Z. Es ergeben sich die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} T_1 \ldots T_{k+1} &\sim V_1 R_1'' R_{k+1}'' V_{k+1}^{-1}, \\ R_1 &\approx R_1'' Z Y_2^{-1}, \\ R_2 &\approx X_2 Y_2 R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}, \\ R_{k+1} &\approx R_2''^{-1} Z^{-1} R_{k+1}''. \end{aligned}$$

Wäre $\{R_1', R_{k+1}'\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen nach Axiom B:

$$Y_2^{-1} R_2 Y_2 \sim R_2'' R_{k+1}^{-1} R_2''^{-1}, \qquad R_1 \sim (Y_2 R_2'') R_{k+1}^{-1} (R_2''^{-1} Y_2^{-1}).$$

Somit ergeben sich aus $R_2' \approx R_2'' V_{k+1}'^{-1}$ die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) T_1 (T_2 \ldots T_k) &\sim (\boxminus^{-1} R_2'^{-1} Y_2^{-1}) \; R_1 (Y_2 R_2' \boxminus) \\ &\sim (\boxminus^{-1} V_{k+1}') R_{k+1}^{-1} (V_{k+1}'^{-1} \boxminus) \approx T_{k+1}^{-1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine Form vom Grade $k+1$ ist.

Aus $\varkappa(R_2'') \geq j$ würde folgen nach Axiom B:

$$R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1} X_2 Y_2 \approx R_2'' R_{k+1}''^{-1} Z, \qquad (Y_2^{-1} X_2^{-1}) R_2 (X_2 Y_2) \sim R_2'' R_{k+1}^{-1} R_2''^{-1}.$$

Es folgt für $k > 2$:

$$\begin{aligned} (T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) &\sim (V_2 X_2 Y_2 R_2'') R_{k+1} (R_2''^{-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}), \\ T_2 \ldots T_{k+1} &\sim T_3 \ldots T_k. \end{aligned}$$

Für $k = 2$ folgt $T_2 \sim T_3^{-1}$.

Würde nun gelten: $\varkappa(Z Y_2^{-1}) \geq j$, so würde folgen:

$$0 < \varkappa(Y_2^{-1}) < j, \qquad 0 < \varkappa(Z) < j, \qquad 0 < \varkappa(R_2'') < j \qquad (k = 2, \text{ s. o.}).$$

Hieraus folgt nach Axiom D_1 ein Widerspruch (Vergleich von $Y_2 Z^{-1} R_1''$ mit $Y_2 R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1} X_2$ und $R_2''^{-1} Z^{-1} R_{k+1}''$). Es gilt somit:

$$\varkappa(Z Y_2^{-1}) \leq j - 1;$$

für $\varkappa(Z Y_2^{-1}) = j - 1$ ist R_1'' sektoriell abgeschlossen in $R_1'' R_{k+1}''$.

Würde gelten: $\varkappa(R_2''^{-1} Z^{-1}) \geq j$, so würde folgen: $0 < \varkappa(Z^{-1}) < j$, $0 < \varkappa(R_2''^{-1}) < j$. Außerdem gilt: $0 < \varkappa(Z^{-1}) < j$ (s. o.). Nach Axiom D_1 ergibt sich nun ein Widerspruch (Vergleich von $R_2''^{-1} Z^{-1} R_{k+1}''$ mit $R_2''^{-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V_{k+1}'$ und $Y_2 Z^{-1} R_1''^{-1}$). Es folgt: $\varkappa(R_2''^{-1} Z^{-1}) < j$ und ebenso folgt für $\varkappa(R_2''^{-1} Z^{-1}) = j - 1$: R_{k+1}'' ist sektoriell abgeschlossen in $R_1'' R_{k+1}''$.

II) $R_2'' \| R_{k+1}$. Es sei $\{R_2'', R_{k+1}\}' = \{R_2^{(3)}, R_{k+1}'\}$ mit der Ergänzung Z. Aus $\varkappa(Z) \geq j$ folgt nach Axiom B:

$$Z^{-1} R_{k+1}' \approx Z^{-1} R_2^{(3)-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V_{k+1}',$$

$$R_{k+1} \sim (Z^{-1} R_2^{(3)-1} Y_2^{-1} X_2^{-1}) R_2^{-1} (X_2 Y_2 R_2^{(3)} Z);$$

für $k > 2$ ergibt sich: $T_2 \ldots T_{k+1} \sim T_3 \ldots T_k$. Für $k = 2$ folgt: $T_2 \sim T_3^{-1}$. Folglich gilt: $\varkappa(Z) \leq j - 1$; für $\varkappa(Z) = j - 1$ ist R_{k+1}' sektoriell abgeschlossen in $R_2^{(3)} R_{k+1}'$. Es gilt somit:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1.$$

Es folgt die Äquivalenz: $T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R_2^{(3)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1} = W$. Ist W reduziert, so gilt: $K_1 = R_1' = K_{1,\alpha}$, $K_{k+1} = R_{k+1}'$, woraus der Satz folgt.

Ist W nicht reduziert, so folgt nach Hilfssatz 1: $\varkappa(R_2^{(3)}) = 1$. Durch Verschränkungsreduktion erhalten wir ein reduziertes $W' \sim W$ mit $W' = V_1 R_1'' R_2^{(3)} R_{k+1}'' V_{k+1}^{-1}$. Der Satz folgt dann nach den obigen Ergebnissen über W aus Hilfssatz 2.

III) $R_2'' > R_{k+1}$. Wie in II) zeigt man, daß $\{R_2'', R_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet sein kann. Daher kann $R_2'' > R_{k+1}$ nicht gelten.

Damit ist Hilfssatz 11 bewiesen.

Anmerkungen.

1) Falls $R_2'' < R_{k+1}$ gilt und $Z \neq 1$ ist, so folgt nach Axiom D_1

$$\varkappa(Y_2 R_2'') < j \quad \text{für} \quad R_2 \approx X_2 Y_2 R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3$$

(Vergleich von $Y_2 R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1} X_2$ mit $Y_2 Z^{-1} R_1''^{-1}$ und $Z R_2'' R_{k+1}'^{-1}$).

2) Ebenso folgt: $\varkappa(Y_2 R_2'') < j$ für

$$R_2'' \approx R_2^{(3)} E,\ R_{k+1} \approx E^{-1} F^{-1} R_{k+1}' \quad \text{mit} \quad R_2^{(3)} \triangle F, \quad E^{-1} F^{-1} \simeq R_2''^{-1},$$

wobei F verwandt ist zum letzten Sektor von R_1'.

Durch kleine Variationen des obigen Beweisganges lassen sich gewisse Abschwächungen der Voraussetzungen von Hilfssatz 11 erreichen. Sowohl die in Hilfssatz 11, als auch die in den Anmerkungen 1) und 2) enthaltenen Folgerungen bleiben bestehen bei folgenden Abschwächungen:

Hilfssatz 11'. *Die Forderung $V_1^{-1} < T_2$ in α) wird ersetzt durch „für geeignete Worte A und A' gilt: $R_2 \approx A R_2'$, $V_1 \approx V_2 A'$ mit $A \simeq A'$“.*

Hilfssatz 11''. *Im Falle* II $(R_2'' \| R_{k+1})$ *können die Voraussetzungen*

$$V_1^{-1} < T_2,\ K_{1,\alpha} \neq R_1$$

beide gleichzeitig gestrichen werden.

HILFSSATZ 12. *Gegeben seien $k+2$ primäre Transformierte*

$$T_i = V_i R_i V_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq k+2),$$

wobei $F(T_1 \ldots T_{k+2})$ eine Form vom Grade $k+2$ ist. Es sei

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+2}), \qquad \mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1}), \qquad \mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}(T_2; \ldots; T_{k+1}).$$

Der Vektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ genüge den Voraussetzungen von Hilfssatz 11. *Ferner sei $K_{k+1,\varkappa} \neq K_{k+1,\lambda}$. Dann folgt aus $\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2,\sigma}) < \varkappa(R_{k+2}) - j + 1$:*

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\sigma}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1.$$

HILFSSATZ 12′. *Dieselben Folgerungen gelten, wenn die abgeschwächten Voraussetzungen von Hilfssatz 11′ bzw. Hilfssatz 11″ erfüllt sind.* (Der Beweis erfolgt durch eine leichte Variation des Beweises von Hilfssatz 12.)

Beweis von Hilfssatz 12. Es sei $\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_{k+1}; T_{k+2})$ Aus Hilfssatz 11 b) und aus Satz I ergibt sich unter Verwendung von Hilfssatz 7 a): $K_{k+2,\sigma} = K_{k+2,\beta}$. Nach Voraussetzung gilt: $\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2,\sigma}) < \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$. Dann folgen nach Satz I (Anmerkungen 2 und 4) Äquivalenzen:

$$R_{k+1} \approx K_{k+1,\beta} Y_{k+2}^{-1}, \qquad R_{k+2} \approx X_{k+2} Y_{k+2} K_{k+2,\beta}, \qquad V_{k+1}^{-1} \approx V_{k+1}^{*-1} X_{k+2}^{-1} V_{k+2}^{-1}$$

mit
$$V_{k+1}^{*-1} = Q_{k+1,\beta}^{-1} \quad \text{und} \quad \varkappa(X_{k+2} Y_{k+2}) \geq j.$$

Für $Y_{k+2} \neq 1$, $V'_{k+1} \neq 1$ gilt: $Y_{k+2} \triangle V'_{k+1}$.

Unter Benutzung der Bezeichnungen von Hilfssatz 11 folgen die weiteren Äquivalenzen:

$$R_1 \approx R'_1 Y_2^{-1}, \qquad V_1^{-1} \approx X_2^{-1} V_2^{-1},$$

$$R_2 \approx X_2 Y_2 R''_2 V'^{-1}_{k+1} Y_3^{-1}, \qquad R''_2 \neq 1,$$

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R'_1 R''_2 R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

I) $K_2 = 1$. Aus dem Beweise von Hilfssatz 11 folgt, daß

$$R''_2 \lessdot R_{k+1}, \; R_{k+1} \approx R''^{-1}_2 R'_{k+1}$$

gelten muß. Wir setzen $\{R'_1, R'_{k+1}\}' = \{R''_1, R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Z. Unter Anwendung von Hilfssatz 7 und unter Beachtung von $Z \neq 1$ (da $K_{k+1,\varkappa} \neq K_{k+1,\lambda}$ vorausgesetzt ist) ergeben sich dann folgende Folgerungen:

A) $V^*_{k+1} = 1$, $V_{k+1}^{-1} \approx X_{k+2}^{-1} V_{k+2}^{-1}$. In diesem Falle ist sowohl X_{k+2} als auch V'_{k+1} rechter Abschnitt von $V_{k+1} \approx \boxminus^{-1} V'_{k+1} \approx V_{k+2} X_{k+2}$.

1) $\varkappa(X_{k+2}) < \varkappa(V'_{k+1})$. Es folgt:

$$V'_{k+1} \approx V''_{k+1} X_{k+2}, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 R''_2 X^{-1}_{k+2} V''^{-1}_{k+1} Y_3^{-1}.$$

Aus $\varkappa(X_{k+2} Y_{k+2}) \geq j$ ergibt sich nach Axiom D_1 ein Widerspruch durch Vergleich von

$$X_{k+2} Y_{k+2} K_{k+2,\beta} \quad \text{mit} \quad X_{k+2} R''^{-1}_2 Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V''_{k+1} \quad \text{und} \quad Y^{-1}_{k+2} R''^{-1}_2 Z^{-1} R^{(3)}_{k+1}.$$

Die Folgerung b) von Axiom D_1 ergibt nämlich: $T_{k+1} \sim T^{-1}_{k+2}$, die Folgerung c) ergibt:

$$\varkappa(X_{k+2} Y_{k+2}) = 1.$$

Aus Folgerung a) von Axiom D_1 folgt:

$$X_{k+2} Y_{k+2} K_{k+2,\beta} \approx X_{k+2} R''^{-1}_2 Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V''_{k+1},$$

somit:

$$W_1 = Y_{k+2} K_{k+2,\beta} \approx R''^{-1}_2 Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V''_{k+1} = W_2.$$

Dies bedeutet aber, daß der erste Sektor von W_1 äquivalent ist zum ersten Sektor von W_2.

Würde nun gelten: $\varkappa(Y_{k+2}) > 1$, $\varkappa(R''^{-1}_2) > 1$, so wäre der erste Sektor von R''^{-1}_2 äquivalent zum ersten Sektor von Y_{k+2} und $Y^{-1}_{k+2} R''^{-1}_2$ wäre nicht reduziert; dies widerspricht aber der Definition von

$$R_{k+1} \in \Re, \; R_{k+1} \approx R''^{-1}_2 R''_{k+1} Y^{-1}_{k+2}.$$

Für $\varkappa(R''^{-1}_2) > 1$, $\varkappa(Y_{k+2}) = 1$ würde die Äquivalenz gelten:

$$R''^{-1}_2 \approx Y_{k+2} R^{(3)-1}_2,$$

daher wäre $Y^{-1}_{k+2} R''^{-1}_2$ nicht reduziert. Aus $\varkappa(R''_2) = 1$, $\varkappa(Y_{k+2}) > 1$ folgt ebenso eine Äquivalenz:

$$Y_{k+2} \approx R''^{-1}_2 Y'_{k+2}.$$

Für $\varkappa(R''_2) > 0$, $\varkappa(Y_{k+2}) > 0$ folgt somit: $R''_2 \vartriangle Y_{k+2}$, daher:

$$\varkappa(Y^{-1}_{k+2} R''^{-1}_2 Z^{-1}) = \varkappa(R''^{-1}_2 Z^{-1}) < j \quad \text{(Hilfssatz 11).}$$

2) $\varkappa(X_{k+2}) > \varkappa(V'_{k+1})$, $X_{k+2} \approx X'_{k+2} V'_{k+1}$, $R_{k+2} \approx X'_{k+2} V'_{k+1} Y_{k+2} K_{k+2,\beta}$. Es gilt:

$$\varkappa(Y_2 R''_2 V'^{-1}_{k+1} Y_3^{-1}) \geq 2j - 1;$$

da $Z \neq 1$ ist, so folgt nach Hilfssatz 11, Anmerkung 1):

$$\varkappa(V'^{-1}_{k+1} Y_3^{-1}) \geq j.$$

Für $k = 2$ folgt:

$$Y_3 = 1, \qquad V'_{k+1} R''^{-1}_2 Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 \approx V'_{k+1} Y_{k+2} K_{k+2,\beta} X_{k+2} \quad \text{(Axiom B),}$$

worauf wie unter 1) verfahren wird. Für $k > 2$ gilt:

a) Für $Q_{2,\alpha}^{-1}=1$ folgt nach Satz II und nach Hilfssatz 10:

$$V_2^{-1}\approx X_3^{-1}\,V_3^{-1},\quad R_3\approx X_3\,Y_3\,K_{3,\alpha}\,Q\quad\text{mit}\quad \varkappa(X_3\,Y_3)\geq j.$$

Da sowohl $K_{3,\alpha}^{-1}\,V'_{k+1}$ als auch $X_{k+2}\approx X'_{k+2}\,V'_{k+1}$ rechter Abschnitt ist von $V_{k+1}\approx \boxminus^{-1}\,V'_{k+1}$, so gilt für den letzten Sektor P von $K_{3,\alpha}^{-1}\approx K'\,P$ und den letzten Sektor P' von $X'_{k+2}\approx X''_{k+2}\,P'$: $P\triangle P'$.

Unter Beachtung von $\varkappa(Y_3\,V'_{k+1})\geq j$ vergleichen wir nach Axiom D_1:

$$Y_3\,V'_{k+1}\,R_2''^{-1}\,Y_2^{-1}\,X_2^{-1}$$

mit $$Y_3\,P^{-1}\,K'^{-1}\,Q\,X_3\quad\text{und}\quad V'^{-1}_{k+1}\,P'^{-1}\,X''^{-1}_{k+2}\,K^{-1}_{k+2,\beta}\,Y^{-1}_{k+2}.$$

Aus D_1 a) und aus D_1 c) folgt ein Widerspruch und nach D_1 b) folgt:

$$V'^{-1}_{k+1}\,P'^{-1}\,X''^{-1}_{k+2}\,K^{-1}_{k+2,\beta}\,Y^{-1}_{k+2}\approx V'^{-1}_{k+1}\,Y_3^{-1}\,X_2\,Y_2\,R_2''.$$

Somit ist $\{Y^{-1}_{k+2},\,R_2''^{-1}\}$ verkettet. Aus

$$R_{k+1}\approx R_2''^{-1}\,Z^{-1}\,R^{(3)}_{k+1}\,Y^{-1}_{k+2}$$

folgt dann (da R_{k+1} reduziert ist):

$$Y_{k+2}\triangle R_2'',\qquad \varkappa(Y^{-1}_{k+2}\,R_2''^{-1}\,Z^{-1})=\varkappa(R_2''^{-1}\,Z^{-1})\leq j-1\quad\text{(Hilfssatz 11).}$$

b) $Q_{2,\alpha}^{-1}\neq 1$, somit $\varkappa(Y_3)\leq 1$ und für $Y_3\neq 1$: $Y_3\triangle Q_{2,\alpha}^{-1}$. Aus

$$V_{k+1}\approx\boxminus^{-1}\,V'_{k+1}\approx K^{-1}\,Q_{2,\alpha}\,V'_{k+1},\qquad X_{k+2}\approx X'_{k+2}\,V'_{k+1},\qquad K^{-1}\,Q_{2,\alpha}\approx X'_{k+2}$$

ergibt sich somit, daß der letzte Sektor P' von $X'_{k+2}\approx X''_{k+2}\,P'$ verwandt ist zu Y_3. Für $\varkappa(Y_3)=1$ folgt:

$$V'^{-1}_{k+1}\,Y_3^{-1}\simeq V'^{-1}_{k+1}\,P'^{-1}.$$

Da oben gezeigt wurde, daß $\varkappa(V'^{-1}_{k+1}\,Y_3^{-1})\geq j$ gilt, so folgt somit sowohl für $\varkappa(Y_3)=0$ als auch für $\varkappa(Y_3)=1$ nach Axiom B durch Vergleich von

$$V'^{-1}_{k+1}\,Y_3^{-1}\,X_2\,Y_2\,R_2''\quad\text{mit}\quad V'^{-1}_{k+1}\,P'^{-1}\,X''^{-1}_{k+2}\,K^{-1}_{k+2,\beta}\,Y^{-1}_{k+2}$$

die Äquivalenz:

$$(\xi)\;R_2''^{-1}\,Y_2^{-1}\,X_2^{-1}\,Y_3\,V'_{k+1}\approx Y_{k+2}\,K_{k+2,\beta}\,X_{k+2}.$$

Aus $R_{k+1}\approx R_2''^{-1}\,Z^{-1}\,R^{(3)}_{k+1}\,Y^{-1}_{k+2}$ folgt, daß $Y^{-1}_{k+2}\,R_2''^{-1}$ reduziert ist. Wie unter 1) folgt hieraus zusammen mit der Äquivalenz (ξ), daß $R_2''\triangle Y_{k+2}$ gelten muß, so daß folgt:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1})=\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\sigma})\geq\varkappa'(R_{k+1})-j+1.$$

3) $\varkappa(X_{k+2}) = \varkappa(V'_{k+1})$. Es folgt:

$$X_{k+2}^{-1} \simeq V'^{-1}_{k+1},$$

da sowohl X_{k+2} als auch V'_{k+1} rechter Abschnitt ist von V_{k+1}. Aus $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1}) \geq j$ folgt dann nach Axiom D_1 durch Vergleich von $Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1} K_{k+2,\beta}^{-1}$ mit $Y_{k+2}^{-1} R_2''^{-1} Z^{-1} R_{k+1}^{(3)}$ und $R_2'' V'^{-1}_{k+1} Y_3^{-1} X_2 Y_2$:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} R_2''^{-1}) = 1, \qquad \varkappa(Y_{k+2}^{-1} R_2''^{-1} Z^{-1}) = \varkappa(R_2''^{-1} Z^{-1}) \leq j-1 \quad \text{(Hilfssatz 11).}$$

B) $V_{k+1}^{*} \neq 1$. Für $Y_{k+2} = 1$ ergibt sich: $K_{k+1,\sigma} = K_{k+1}$, d. h. für $K_{k+1,\sigma}$ gilt:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\sigma}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$$

nach Hilfssats 11. Für $Y_{k+2} \neq 1$ ergibt sich: $Y_{k+2} \triangle V_{k+1}^{*}$. Das Wort Y_{k+2} ist daher verwandt zum ersten Sektor von V_{k+1}^{-1}, also auch verwandt zum letzten Sektor P von $V'_{k+1} \approx V''_{k+1} P$. Es folgt:

$$R_2 \approx X_2 Y_2 R_2'' P^{-1} V''^{-1}_{k+1} Y_3^{-1} \quad \text{mit} \quad Y_2 R_2'' P^{-1} \simeq Y_2 R_2'' Y_{k+2}.$$

Würde nun in $R_{k+1} \approx R_2''^{-1} Z^{-1} R_{k+1}^{(3)} Y_{k+2}^{-1}$ gelten:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} R_2''^{-1} Z^{-1}) \geq j,$$

so würde nach Axiom D_1 ein Widerspruch folgen durch Vergleich von

$$Z R_2'' Y_{k+2} R_{k+1}^{(3)-1} \quad \text{mit} \quad Z Y_2^{-1} R_1'' \quad \text{und} \quad Y_2 R_2'' P^{-1} V''^{-1}_{k+1} Y_3^{-1} X_2 \qquad (Y_{k+2} \triangle P).$$

II) $K_2 \neq 1$.

Es sei $\{R_2'', R_{k+1}\}' = \{R_2^{(3)}, R'_{k+1}\}$ mit der Ergänzung E. Wie unter I) zeigt man, daß $\varkappa(E) < j$ gilt. Es folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R_2^{(3)} R'_{k+1} V_{k+1}^{-1} = W.$$

Wäre W reduziert, so würde $K_{k+1,\varkappa} = K_{k+1,\lambda}$ gelten im Widerspruch zur Voraussetzung. Daher existiert nach Hilfssatz 2 ein reduziertes

$$W' \sim W, \qquad W' = V_1 R_1'' R_2^{(3)} R''_{k+1} V_{k+1}^{-1}, \qquad R'_{k+1} \approx F^{-1} R''_{k+1}, \qquad F \triangle R_2^{(3)},$$

wobei F verwandt ist zum letzten Sektor von R_1'. Es folgt:

$$E^{-1} F^{-1} \simeq R_2''^{-1}.$$

Nach Anmerkung 2 zu Hilfssatz 11 folgt:

$$\varkappa(Y_2 R_2'') \leq j-1.$$

Es gilt: $\varkappa(Y_2 R_2'' V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}) \geq 2j-1, \qquad \varkappa(V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}) \geq j,$

somit nach Axiom B: $V'_{k+1} \neq 1$ (sonst wäre $T_2 \sim T_3^{-1}$) und $X'_{k+2} \neq 1$ (sonst wäre $T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$).

A) $V^*_{k+1} = 1$.

1) Existiert ein gemeinsamer rechter Abschnitt Q von

$$V'_{k+1} \approx V''_{k+1} Q \quad \text{und} \quad X_{k+2} \approx X'_{k+2} Q$$

mit $Q \neq 1$ und gilt:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} E^{-1} F^{-1}) \geq j,$$

so vergleichen wir nach Axiom D_1:

$$Y_{k+2}^{-1} E^{-1} F^{-1} K_{k+1,\sigma} \quad \text{mit} \quad Y_{k+2}^{-1} Q^{-1} X_{k+2}'^{-1} K_{k+2,\sigma}^{-1} \quad \text{und} \quad Q R_2''^{-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V''_{k+1}.$$

Aus D_1 a) und aus D_1 c) folgt ein Widerspruch und nach D_1 b) folgt:

$$Q R_2''^{-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V''_{k+1} \approx Q\, Y_{k+2} K_{k+2,\sigma} X'_{k+2}.$$

Somit ist $\{Y_{k+2}^{-1}, R_2''^{-1}\}$ verkettet und aus $R_2''^{-1} \simeq E^{-1} F^{-1}$ folgt, daß auch $\{Y_{k+2}^{-1}, E^{-1} F^{-1}\}$ verkettet ist. Außerdem gilt: $\varkappa(E^{-1} F^{-1}) = 1$, da sonst R_{k+1} nicht reduziert wäre. Es folgt:

$$\varkappa(Y_{k+2}^{-1} E^{-1} F^{-1}) = \varkappa(Y_{k+2}^{-1}) \leq j-1.$$

2) Existiert kein solches Q, so folgt aus $V'_{k+1} \neq 1$ (s. o.) und aus $X_{k+2} \neq 1$ für den letzten Sektor P von V_{k+1}: sowohl X_{k+2} als auch V'_{k+1} ist ein echtes Teilwort von P: $X_{k+2} \neq P$, $V'_{k+1} \neq P$. Es folgt: $Y_3 \neq 1$, $k > 2$.

a) Für $Q_{2,\alpha} \neq 1$ folgt somit: $Y_3 \triangle Q_{2,\alpha}$; somit ist Y_3 verwandt zum ersten Sektor von $K = Q_{2,\alpha}^{-1} T'_3 \ldots T'_k$. Aus $V_{k+1} \approx K^{-1} V'_{k+1}$, $V'_{k+1} \neq P$ folgt dann:

$$Y_3 \triangle Q_{2,\alpha} \triangle V'_{k+1}, \; \varkappa(V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}) = 1$$

im Widerspruch zu oben.

b) Für $Q_{2,\alpha} = 1$, $K = T'_3 \ldots T'_k$, $V_{k+1} \approx K^{-1} V'_{k+1}$ folgt aus $V'_{k+1} \neq P$: V'_{k+1} ist verwandt zum ersten Sektor von K. Ist P' der erste Sektor von

$$K_{3,\alpha} \approx P' K' \qquad (\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)),$$

so folgt somit: $\qquad V'_{k+1} \triangle P', \qquad Y_3 V'_{k+1} \simeq Y_3 P'.$

Aus $\varkappa(Y_3 V'_{k+1}) \geq j$ folgt somit: $T_2 \sim T_3^{-1}$ nach Axiom B, da $R_3 \approx X_3 Y_3 P' K' Y_4^{-1}$ gilt.

B) $V^*_{k+1} \neq 1$.

Es folgt: $Y_{k+2} \triangle V^*_{k+1}$ (s. o.).

1) Für $\varkappa(V'_{k+1}) \geq j-1$ existiert ein L mit $V'_{k+1} \approx L\, V''_{k+1}$, $\varkappa(V''_{k+1}) = j-1$. Ist P der letzte Sektor von $V''_{k+1} \approx V^{(3)}_{k+1} P$, so folgt:

$$P \triangle V^*_{k+1} \triangle Y_{k+2}.$$

Aus $\varkappa(X_{k+2}\, Y_{k+2}) \geq j$ folgt:

$$X_{k+2} \approx X'_{k+2}\, V^{(3)}_{k+1}.$$

Für $\varkappa(E\, V''^{-1}_{k+1}) < j$ folgt:

$$E \triangle P \triangle Y_{k+2}, \qquad \varkappa(Y^{-1}_{k+2}\, E^{-1}\, F^{-1}) = \varkappa(E^{-1}\, F^{-1}) \leq j-1.$$

Aus $\varkappa(E\, V''^{-1}_{k+1}) \geq j$ folgt nach Axiom D_1 ein Widerspruch (Vergleich von

$$E\, V''^{-1}_{k+1}\, L^{-1}\, Y^{-1}_3\, X_2\, Y_2\, F' \quad \text{mit} \quad E\, Y_{k+2}\, K^{-1}_{k+1,\sigma}\, F \quad \text{und} \quad V^{(3)}_{k+1}\, Y_{k+2}\, K_{k+2,\sigma}\, X'_{k+2};$$

man beachte: $R''_2 \approx F'\, E$, $F' \triangle F$).

2) Für $\varkappa(V'^{-1}_{k+1}) \leq j-2$ folgt aus $\varkappa(V'^{-1}_{k+1}\, Y^{-1}_3) \geq j$:

$$\varkappa(Y_3) \geq 2, \qquad k > 2, \qquad Q_{2,\alpha} = 1.$$

Aus $\varkappa(X_{k+2}\, Y_{k+2}) \geq j$, $V^*_{k+1} \triangle Y_{k+2}$ folgt:

$$X_{k+2}\, Y_{k+2} \approx L\, Q \quad \text{mit} \quad Q \simeq V'_{k+1},\ \varkappa(L) > 2.$$

Somit ist der letzte Sektor P von $L \approx L'\, P\, (L' \neq 1)$ gleichzeitig der letzte Sektor von K^{-1}. Da nun der erste Sektor P'^{-1} von $K_{3,\alpha} \approx P'^{-1}\, K'$ ($K_{3,\alpha} \neq 1$ nach Satz II) linker Abschnitt ist von K, so ist P' rechter Abschnitt von $P \approx M\, P'$. Es folgt:

$$X_{k+2}\, Y_{k+2} \approx L'\, M\, P'\, Q \quad \text{mit} \quad Q \simeq V'_{k+1}.$$

Aus $\varkappa(Y_3\, V'_{k+1}) \geq j$ folgt somit nach Axiom D_1 ein Widerspruch (Vergleich von

$$Y_3\, V'_{k+1}\, R''^{-1}_2\, Y^{-1}_2\, X^{-1}_2 \quad \text{mit} \quad Y_3\, P'^{-1}\, K'\, Y^{-1}_4\, X_3 \quad \text{und} \quad P'\, Q\, K_{k+2,\sigma}\, L'\, M).$$

Damit ist Hilfssatz 12 bewiesen.

§ 6. Wendeformen

In diesem Paragraphen soll die Struktur der Wendeformen geklärt werden. Es seien gegeben die primären Transformierten

$$T_i = V_i\, R_i\, V_i^{-1} \quad (1 \leq i \leq k+1).$$

$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\,(T_1;\ \ldots;\ T_{k+1})$ sei ein L-Wendevektor mit der Länge $l \geq 2$. Die Länge $l = 1$ ist behandelt in Hilfssatz 8, während wir den Fall $l > 2$ vermöge Hilfssatz 7 zurückführen können auf $l = 2$. Wir behandeln nun $l = 2$ unter der zusätzlichen Annahme, daß $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine L-Wendeform ist, so daß also $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ keine L-Form darstellt. Es gilt:

HILFSSATZ 13. *Für die primären Transformierten* $T_i = V_i R_i V_i^{-1}$ $(1 \leq i \leq k+1)$ *sei* $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ *ein L-Wendevektor mit der Länge* $l = 2$ *und* $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ *sei eine L-Wendeform. Dann gilt in* $\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_{k+1}, K_{k+1}, Q_{k+1}^{-1}\}$ *für die Komponenten* K_1 *und* K_{k+1}:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1, \ \varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1.$$

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k)$ und $\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_2; T_3)$. Nach Hilfssatz 10 und Satz I (Anmerkungen 1, 2, 4) gelten dann Äquivalenzen:

$$V_2^{-1} \approx Q_{2,\beta}^{-1} X_3^{-1} V_3^{-1}, \qquad R_2 \approx R_2' Y_3^{-1}, \qquad R_3 \approx X_3 Y_3 R_3'$$

mit $$R_2' = K_{2,\beta}, \ R_3' = K_{3,\beta} \quad \text{und} \quad \varkappa(X_3 Y_3) \geq j.$$

Für $Y_3 \neq 1$, $Q_{2,\alpha} \neq 1$ folgt: $$Q_{2,\alpha} \triangle Y_3.$$

I) $K_2 = 1$.

A) $V_1^{-1} < T_2$, $V_1^{-1} > V_2$.

Wir erhalten Äquivalenzen:

$$R_1 \approx R_1' Y_2^{-1} V_1^{-1} \approx X_2^{-1} V_2^{-1}, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 R_2'$$

mit $R_1' = K_{1,\alpha}$ mit reduziertem $V_1 R_1' R_2' V_2^{-1}$ und $\varkappa(Y_2) < j$. Nach Satz II ist $K_{2,\alpha} = R_2''$ linker Abschnitt von $R_2' \approx R_2'' Y_3^{-1}$ (für $k = l = 2$ gilt: $Y_3^{-1} = 1$); es folgt:

$$\varkappa_{R_2}(R_2'' \geq 1.$$

Aus $l = 2$ folgt eine Äquivalenz

$$V_{k+1} \approx \boxminus^{-1} V_{k+1}' \quad \text{mit} \quad \boxminus = Q_{2,\alpha}^{-1} P_{3,\alpha} K_{3,\alpha} Q_{3,\alpha}^{-1} \ldots P_{k,\alpha} K_{k,\alpha} Q_{k,\alpha}^{-1}.$$

Da $K_2 = 1$ gelten soll, so folgt:

$$R_2'' < V_{k+1}' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Nun kann $R_2'' < V_{k+1}'$ nicht gelten, da sonst $l = 1$ folgen würde $(Q_{2,\alpha}^{-1} = 1)$.

1) $$R_2'' > V_{k+1}', \qquad R_2'' \approx R_2^{(3)} V_{k+1}'^{-1} \quad \text{mit} \quad R_2^{(3)} \neq 1,$$

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R_2^{(3)} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Aus $K_2 = 1$ folgt: $$R_2^{(3)} < R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Wir setzen: $\{R_2^{(3)}, R_{k+1}\}' = \{R_2^{(4)}, R_{k+2}'\}$ mit der Ergänzung Z. Wäre nun $\{R_2^{(3)}, R_{k+1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen nach Axiom B:

$$R_{k+1} \sim (X_2 Y_2 R_2^{(3)}) R_2^{-1} (R_2^{(3)-1} Y_2^{-1} X_2^{-1}),$$

$$(T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}, \quad T_2 \ldots T_{k+1} \sim T_3 \ldots T_k.$$

Daher ist $\{R_2^{(3)}, R'_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet und es gilt:

$$\varkappa(R'_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1 > 1.$$

Nach Hilfssatz 1 folgt somit aus $R_2^{(3)} < R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$:

$$R_2^{(3)} < R_{k+1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} R'_{k+1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R'_1 R'_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Wir setzen: $\{R'_1, R'_{k+1}\}' = \{R''_1, R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Y_{k+1}, somit:

$$R_1 \approx R''_1 Y_{k+1} Y_2^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} Y_{k+1}^{-1} R''_{k+1}.$$

Wir können voraussetzen: $\varkappa(Y_{k+1}) \leq j-1$, da sonst folgen würde:

$$R_2^{(3)} R_{k+1} R_2^{(3)-1} \sim (Y_{k+1}^{-1} R_1''^{-1}) R_1^{-1} (R''_1 Y_{k+1}), \qquad (T_1 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_1^{-1}) \sim T_1^{-1}.$$

Ebenso können wir voraussetzen: $\varkappa(Y_2^{-1}) \leq j-1$, da sonst folgen würde: $T_1 \sim T_2^{-1}$. Außerdem gilt: $R_2^{(3)} \neq 1$, da sonst $R''_2 < V'_{k+1}$, $l=1$ folgen würde.

a) $Y_2 \neq 1$.

In diesem Falle sind für $\mathfrak{U}$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 11 erfüllt und es gilt:

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1, \qquad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

b) $Y_2 = 1$.

Es folgt:

$$R_2 \approx X_2 R_2^{(3)} V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}, \qquad T_2 \ldots T_k V_{k+1} \sim V_2 X_2 R_2^{(3)},$$

$$(T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim V_2 X_2 (R'_{k+1} R_2^{(3)-1}) X_2^{-1} V_2^{-1} = W,$$

$$W \sim V_1 R^*_{k+1} V_1^{-1}, \qquad R^*_{k+1} = R'_{k+1} R_2^{(3)-1} \in Z(R_{k+1}).$$

Da das Wort V_1 nach Konstruktion kein charakteristisches Teilwort enthält irgend eines definierendes Wortes $R \in \mathfrak{R}$, so existiert nach § 1 eine primäre Transformierte $T^*_{k+1} = V^*_{k+1} R^{**}_{k+1} V_{k+1}^{*-1}$ mit $R^{**}_{k+1} \in Z(R_{k+1})$, wobei V^*_{k+1} linker Abschnitt ist von V_1. Wir werden nun T^*_{k+1} bestimmen und ableiten, daß gilt:

$$\sigma(T^*_{k+1}, T_2) = \{+1, x_2\} \quad (x_2 = \pm 1).$$

Angenommen, $V_2 X_2 R'_{k+1}$ sei nicht reduziert. Wir bilden dann $\{X_2, R'_{k+1}\}' = \{X'_2, R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Z. Dann folgt:

$$R_2 \approx X'_2 Z R_2^{(3)} V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} Z^{-1} R''_{k+1}.$$

Angenommen nun, es würde gelten: $\varkappa(Z R_2^{(3)}) \geq j$; dann würde folgen nach Axiom B:

$$R_{k+1} \sim (R_2^{(3)-1} X_2^{-1}) R_2^{-1} (X_2 R_2^{(3)}), \qquad (T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}.$$

Daher gilt: $\varkappa(Z R_2^{(3)}) \leq j-1$. Für $\varkappa(Z R_2^{(3)}) = j-1$ ist zudem der letze Sektor von X_2' nicht verwandt zum ersten Sektor von R_{k+1}''.

In $R_2 \approx X_2' Z R_2^{(3)} V_{k+1}'^{-1} Y_3^{-1}$ gilt:

$$\varkappa(Y_3^{-1} X_2' Z R_2^{(3)}) \geq 2j-1,$$

denn sonst wäre $V_{k+1}'^{-1}$ charakteristisches Teilwort von R_2. Es gilt außerdem:

$$\varkappa(Y_3^{-1}) \leq j-1,$$

denn sonst würde folgen: $T_2 \sim T_3^{-1}$. Somit ergibt sich:

$$\varkappa(X_2' Z R_2^{(3)}) \geq j;$$

zusammen mit $\varkappa(Z R_2^{(3)}) \leq j-1$ folgt hieraus:

$$\varkappa_{R_2}(X_2') \geq 1.$$

Für $\varkappa(X_2') = 1$ gilt:
$$\varkappa(Z R_2^{(3)}) = j-1$$

und der letzte Sektor von X_2' ist nicht verwandt zum ersten Sektor von R_{k+1}''. Daher ist $V_2 X_2' R_{k+1}''$ reduziert.

Es folgt:
$$W \sim V_2 X_2' (R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1}) X_2'^{-1} V_2^{-1} = W'.$$

Aus $R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1} \in Z(R_{k+1})$ folgt, daß $R_{k+1}'' R^{(3)-1} Z^{-1}$ reduziert ist. Aus

$$\varkappa(R_2^{(3)-1} Z^{-1}) \leq j-1$$

folgt:
$$\varkappa(R_{k+1}'') \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Da $V_2 X_2'$ reduziert ist als Teilwort von T_2, so folgt somit nach Hilfssatz 1, daß auch

$$W_1 = V_2 X_2' R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1}$$

reduziert ist.

Nun ist $R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2'^{-1}$ reduziert als Teilwort von T_2^{-1}. Angenommen nun, $R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2'^{-1}$ wäre nicht reduziert. Dann ist $\{R_{k+1}'', R_2^{(3)-1} Z^{-1}, X_2'^{-1}\}$ verschränkt, da $R_2^{(3)} \neq 1$ ist (sonst wäre $l=1$). Aus $\varkappa(R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2'^{-1}) \geq j$ (s. o.) folgt dann:

$$\varkappa(X_2'^{-1}) \geq 2, \qquad \varkappa(R_2^{(3)-1} Z^{-1}) = 1,$$

wobei also $R_2^{(3)-1} Z^{-1}$ verwandt ist zum ersten Sektor von $X_2'^{-1}$. Durch Verschränkungsreduktion erhalten wir ein X_2'' und ein $R_{k+1}^{(3)}$ mit

$$R_{k+1}'' \approx R_{k+1}^{(3)} Y, \qquad X_2'^{-1} \approx Y^{-1} X_2''^{-1}, \qquad Y \triangle R_2^{(3)-1} Z^{-1}$$

mit reduziertem

$$W_0 = R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2''^{-1} \sim R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2'^{-1} \quad \text{mit} \quad \varkappa_{W_0}(X_2''^{-1}) \geq 1.$$

Daher ist auch

$$W_0' = R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1} X_2''^{-1} V_2^{-1}$$

reduziert und ebenso

$$(Y R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1}) X_2''^{-1} V_2' = W_2',$$

da $Y R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1} \in Z(R_{k+1})$ gilt.

Nun wurde oben gezeigt, dass

$$W_1 = V_2 X_2' R_{k+1}'' R_2^{(3)-1} Z^{-1} \approx V_2 X_2'' (Y R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1}) Y$$

reduziert ist und somit auch

$$W_1' = V_2 X_2'' (Y R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1}).$$

Da W_1' und W_2' reduziert sind, so ist auch reduziert:

$$W'' = V_2 X_2'' (Y R_{k+1}^{(3)} R_2^{(3)-1} Z^{-1}) X_2''^{-1} V_2^{-1}.$$

Es folgt: $$W'' \sim (T_2; \ldots; T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}).$$

W'' ist somit eine primäre Transformierte

$$T_{k+1}^* = V_{k+1}^* R_{k+1}^* V_{k+1}^{*-1} \quad \text{mit} \quad V_{k+1}^* = V_2 X_2''.$$

Da $V_{k+1}^{*-1} > V_2$ gilt, so folgt:

$$\sigma(T_{k+1}^*, T_2) = \{+1, x_2\} \ (x_2 = \pm 1).$$

Da $V_1^{-1} \approx X_2^{-1} V_2^{-1}$, $V_1^{-1} > V_{k+1}^*$ gilt, so folgt:

$$\sigma(T_1, T_{k+1}^*) = \{+1, x_{k+1}\} \ (x_{k+1} = \pm 1).$$

Nun gilt: $$T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_1 T_{k+1}^* T_2 \ldots T_k.$$

Da nun oben gezeigt wurde, daß $\mathfrak{B}(T_1; T_{k+1}^*; T_2; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist, so ist $F(T_1 T_{k+1}^* T_2 \ldots T_k) = F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine L-Form im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine L-Wendeform ist.

Fall I A 1 b) ist also unmöglich.

2) $R_2'' \parallel V_{k+1}'$.

Wir setzen: $\{R_2'', V_{k+1}'\}' = \{R_2^{(3)}, V_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung Z. Es folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' R_2^{(3)} V_{k+1}'' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Da nun gelten soll: $R_2'' < V_{k+1}' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$, so folgt:

$$R_2^{(3)} < V_{k+1}'' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Da $V''_{k+1} \neq 1$ ist, so ist somit $\{R_2^{(3)}, V''_{k+1}, R_{k+1} V_{k+1}^{-1}\}$ verschränkt. Nach Hilfssatz 2 folgt somit:

$$\varkappa(R_2^{(3)}) = 1 \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} R'_{k+1}.$$

Es ergibt sich:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R'_1 V''_{k+1} R'_{k+1} V_{k+1}^{-1} = W.$$

Ist W reduziert, so gilt: $K_1 = R'_1 = K_{1,\alpha}$, $K_{k+1} = R'_{k+1}$ und der Satz ergibt sich aus Satz II und aus Hilfssatz 2.

Ist W nicht reduziert, so sind folgende Unterfälle zu unterscheiden:

a) $\qquad R'_1 > V''_{k+1}, \qquad R'_1 \approx R''_1 V''^{-1}_{k+1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R''_1 R'_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$

Wir bilden: $\{R''_1, R'_{k+1}\}' = \{R_1^{(3)}, R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Y_{k+1}. Es folgt:

$$R_1 \approx R_1^{(3)} Y_{k+1} V''^{-1}_{k+1} Y_2^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} Y_{k+1}^{-1} R''_{k+1}.$$

Aus $R_2^{(3)} \triangle V''_{k+1}$ folgt: $\qquad \varkappa(R_2^{(3)}) = 1.$

Aus $\varkappa(Y_{k+1}) \geq j$ würde folgen: $\quad T_1 \ldots T_{k+1} \sim T_2 \ldots T_k.$

Da nun gilt: $\qquad Y_{k+1} R_2^{(3)} \simeq Y_{k+1} V''^{-1}_{k+1},$

so folgt aus Axiom B für $\varkappa(Y_{k+1} R_2^{(3)}) = \varkappa(Y_{k+1} V''^{-1}_{k+1}) \geq j$ ein Widerspruch. Aus $\varkappa(Y_{k+1} V''^{-1}_{k+1} Y_2^{-1}) \geq j$ folgt nach Axiom D_1 ebenfalls ein Widerspruch.

b) $R'_1 \parallel V''_{k+1}$.

Mit $\{R'_1, V''_{k+1}\}' = \{R''_1, V_{k+1}^{(3)}\}$ (Ergänzung L) folgt:

$$L \triangle V''_{k+1} \triangle R_2^{(3)}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} R'_{k+1}, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 R_2^{(3)} Z Y_3^{-1}.$$

Aus $\varkappa(L Y_2^{-1}) \geq j$ folgt nach Axiom B:

$$T_2 \sim T_1^{-1}.$$

Der Satz folgt dann unter Verwendung von Hilfssatz 2.

c) $R'_1 < V''_{k+1}$ ist unmöglich.

B) $V_1^{-1} < T_2$ gelte nicht, jedoch: $V_1^{-1} > V_2$.

Es folgt: $\qquad V_1^{-1} \approx V_1'^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}$

mit $\qquad V'_1 = Q_{1,\alpha} \neq 1, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 R'_2, \qquad R_1 \approx R'_1 Y_2^{-1}, \qquad R'_1 = K_{1,\alpha}.$

Aus $Y_2 \neq 1$ folgt:

$$V_1 \triangle Y_2.$$

Es gilt: $T'_2 \ldots T'_k < T_{k+1}$, jedoch nicht $Q_{1,\alpha}^{-1} T'_2 \ldots T'_k < V_{k+1}$ $(l = 2)$.

Nach dem Beweis von Satz II folgt für die Komponente $K_{2,\alpha}$: $R_2' \approx K_{2,\alpha} Y_3^{-1}$ für ein passendes Y_3 (für $k=l=2$ gilt: $Y_3=1$). Aus $K_2=1$ folgt:

$$K_{2,\alpha} = R_2'' < V_{k+1}' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

1) $R_2'' < V_{k+1}'$. Es folgt:

$$V_{k+1}' \approx R_2''^{-1} V_{k+1}'', \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1'^{-1} V_{k+1}'' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Nun kann $V_1'^{-1} < V_{k+1}''$ nicht gelten, da sonst $l=1$ wäre.

a) $V_1'^{-1} > V_{k+1}''$.

Es folgt:

$$V_1'^{-1} \approx V_1''^{-1} V_{k+1}''^{-1} \quad \text{mit} \quad V_1'' \neq 1$$

(da sonst $l=1$ folgen würde). Somit gilt:

$$V_1^{-1} \approx V_1''^{-1} V_{k+1}''^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1''^{-1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1},$$

$$(T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim (V_2 X_2 Y_2 V_{k+1}'') R_{k+1} (V_{k+1}''^{-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}) = W.$$

α) $Y_2 = 1$. In diesem Falle enthält $V_2 X_2 V_{k+1}''$ (als Teilwort von V_1) kein Teilwort, das gleichzeitig charakteristisches Teilwort ist eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$. Somit existiert nach § 1 eine primäre Transformierte

$$T_{k+1}^* = V_{k+1}^* R_{k+1}^* V_{k+1}^{*-1} \sim W.$$

Wir bestimmen nun T_{k+1}^* und zeigen, daß V_2 linker Abschnitt ist von V_{k+1}^*.

Aus $R_2 \approx X_2 R_2'' Y_3^{-1}$ ($Y_3 = 1$ für $k=l=2$), $R_2'' < V_{k+1}'$ folgt:

$$\varkappa(Y_3^{-1} X_2) \geq 2j - 1.$$

Dann folgt aus $\varkappa(Y_3^{-1}) \leq j-1$ (sonst wäre $T_2 \sim T_3^{-1}$):

$$\varkappa(X_2) \geq j.$$

Nun ist $V_2 X_2 V_{k+1}''$ reduziert als Teilwort von V_1 und ebenso $V_{k+1}'' R_{k+1}$ (als Teilwort von T_{k+1}). Angenommen nun, $W_1 = V_2 X_2 V_{k+1}'' R_{k+1}$ wäre nicht reduziert. Es sei zunächst $V_{k+1}'' \neq 1$. Dann ist $\{V_2 X_2, V_{k+1}'', R_{k+1}\}$ verschränkt. Wir erhalten durch Verschränkungsreduktion ein $W_1' \sim W_1$ mit $W_1' = V_2 X_2' V_{k+1}'' R_{k+1}'$, wobei nach Hilfssatz 2 gilt:

$$\varkappa_{W'_1}(X_2') \geq j - 1 \geq 1, \qquad X_2 \approx X_2' Z_1, \qquad R_{k+1} \approx Z_1^{-1} R_{k+1}'$$

für ein Z_1 mit $\varkappa(Z_1) = 1 \leq j-1$.

Für $V_{k+1}'' = 1$ betrachten wir

$$T_2 \ldots T_k \sim V_2 X_2 R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Nun ist $\{X_2, R_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet, denn sonst würde folgen:

$$R_{k+1} \sim X_2^{-1} R_2^{-1} X_2, \qquad (T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}.$$

Es sei $\{X_2, R_{k+1}\}' = \{X_2', R_{k+1}'\}$ mit der Ergänzung Z_1, dann ergibt sich somit ein reduziertes $W_1' \sim W_1$ mit

$$W_1' = V_2 X_2' R_{k+1}', \qquad \varkappa_{W'_1}(X_2') \geq 1, \qquad X_2 \approx X_2' Z_1, \qquad R_{k+1} \approx Z_1^{-1} R_{k+1}', \qquad \varkappa(Z_1) \leq j-1.$$

Wir erhalten somit stets ein reduziertes $W_1' \sim W_1$ mit

$$W_1' = V_2 X_2' V_{k+1}'' R_{k+1}', \qquad \varkappa_{W'_1}(X_2') \geq 1.$$

Nun gilt für $W_2 = Z_1^{-1} V_{k+1}''^{-1} X_2'^{-1} V_2^{-1}$:

$$W_2 \approx V_{k+1}''^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}$$

(für $Z_1 \neq 1$, $V_{k+1}'' \neq 1$ gilt: $Z_1 \triangle V_{k+1}''$).

Es sei zunächst $Z_1 \neq 1$. Da nun $R_{k+1}' Z_1^{-1}$ und $Z_1^{-1} V_{k+1}''^{-1} X_2'^{-1} V_2^{-1}$ reduziert sind, so ist

$$R_{k+1}' Z_1^{-1} V_{k+1}''^{-1} X_2'^{-1} V_2^{-1}$$

höchstens dann nicht reduziert, wenn $\{R_{k+1}', Z_1^{-1}, V_{k+1}''^{-1} X_2'^{-1} V_2^{-1}\}$ verschränkt ist und aus $\varkappa_{W'_1}(X_2') \geq 1$ folgt, daß dann auch $\{R_{k+1}', Z_1^{-1}, V_{k+1}''^{-1} X_2'^{-1}\}$ verschränkt ist. Nach Hilfssatz 2 und Hilfssatz 1 existiert dann ein reduziertes

$$T_{k+1}^* = V_{k+1}^* R_{k+1}^* V_{k+1}^{*-1} \sim W$$

mit $\quad V_{k+1}^* = V_2 X_2'', \qquad R_{k+1}^* = Z_2^{-1} R_{k+1}' Z_1^{-1}, \qquad R_{k+1}' \approx R_{k+1}'' Z_2^{-1}, \qquad X_2'^{-1} \approx Z_2 X_2''^{-1}$

(da ja $R_{k+1}' V_{k+1}''^{-1}$ reduziert ist als Teilwort von T_{k+1}).

Für $Z_1 = 1$, d. h. für ein reduziertes $V_2 X_2 V_{k+1}'' R_{k+1}$ betrachten wir

$$R_{k+1} X_2^{-1} V_2^{-1} \quad \text{mit} \quad \varkappa(X_2^{-1}) \geq j \quad \text{(s. o.)}.$$

Ist nun $\{R_{k+1}, X_2^{-1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so folgt:

$$R_{k+1}^{-1} \sim X_2^{-1} R_2^{-1} X_2, \qquad (T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2, \qquad T_{k+1}^* \approx T_2.$$

Ist dagegen $\{R_{k+1}, X_2^{-1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet, so bilden wir:

$$\{R_{k+1}, X_2^{-1}\}' = \{R_{k+1}', X_2'^{-1}\}, \qquad R_{k+1} \approx R_{k+1}' Z_2^{-1}, \qquad X_2^{-1} \approx Z_2 X_2'^{-1} \quad \text{mit} \quad \varkappa_{W'_1}(X_2').$$

Wie oben folgt dann, daß $W' \sim W$ reduziert ist mit

$$W' = V_2 X_2' (Z R_{k+1}') X_2'^{-1} V_2^{-1}.$$

In jedem Falle folgt also:

$$\sigma(T_1, T_{k+1}^*) = \{+1, x_{k+1}\} \qquad (x_{k+1} = \pm 1),$$

da $V_2 X_2'$ Teilwort ist von V_1; ebenso folgt:

$$\sigma(T_{k+1}^*, T_2) = \{+1, x_2\} \qquad (x_2 = \pm 1).$$

Somit ist $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ keine L-Wendeform im Widerspruch zur Voraussetzung.

β) $Y_2 \neq 1$. Es folgt: $Y_2 \triangle V_1'^{-1}$. Es gilt somit:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1''^{-1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$$

mit $$\varkappa(V_1''^{-1}) = 1, \qquad R_1 \approx R_1' Y_2^{-1}, \qquad Y_2^{-1} \triangle V_1''^{-1},$$

$\beta\alpha$) Wir betrachten zunächst den Fall $V_1''^{-1} < R_{k+1} \approx V_1'' R_{k+1}'$. Es sei

$$\{R_1', R_{k+1}'\}' = \{R_1'', R_{k+1}''\}$$

mit der Ergänzung E. Nach Axiom B gilt dann:

$$\varkappa(E\, Y_2^{-1}) = \varkappa(E\, V_1''^{-1}) \leq j - 1,$$

denn sonst würde folgen:

$$(T_k^{-1} \ldots T_2^{-1})\, T_1 (T_2 \ldots T_k) \sim T_{k+1}^{-1}.$$

Somit gilt für $K_1 = R_1''$:

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1 \quad \text{und} \quad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

$\beta\beta$) $V_1''^{-1} \parallel R_{k+1}$.

Es sei $$\{V_1''^{-1}, R_{k+1}\}' = \{V_1^{(3)-1}, R_{k+1}'\}$$

mit der Ergänzung E. Aus

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1^{(3)-1} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1} = W$$

und $$\varkappa(V_1'') = 1,\ \varkappa(E) = 1,\ \varkappa(Y_2) = 1$$

folgt der Satz für reduziertes W. Für nichtreduziertes W folgt er durch Verschränkungsreduktion nach Hilfssatz 2.

$\beta\gamma$) $V_1''^{-1} > R_{k+1}$ ist unmöglich nach der Definition von V_1^{-1} (§ 1).

b) Für $V_1'^{-1} \parallel V_{k+1}''$, $\{V_1'^{-1}, V_{k+1}''\}' = \{V_1''^{-1}, V_{k+1}^{(3)}\}$ folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1''^{-1} V_{k+1}^{(3)} R_{k+1} V_{k+1}^{-1} = W.$$

Der Satz ist richtig für reduziertes W, da dann $K_1 = R_1'$, $K_{k+1} = R_{k+1}$ gilt.

α) Betrachten wir zunächst den Sonderfall:

$$V_1''^{-1} \triangle V_{k+1}^{(3)}, \qquad R_1' \approx R_1'' V_{k+1}^{(3)-1}, \qquad R_{k+1} \approx V_1'' R_{k+1}',$$

$$W \sim V_1 R_1'' R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}, \qquad \{R_1'', R_{k+1}'\}' = \{R_1^{(3)}, R_{k+1}''\}$$

mit der Ergänzung O. Es folgt:

$$\varkappa(O\, V_{k+1}^{(3)-1}\, Y_2^{-1}) = \varkappa(O\, V_{k+1}^{(3)-1}) = \varkappa(V_1''\, O^{-1}) \leq j-1$$

nach Axiom B (sonst wäre: $(T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_1^{-1}$).

β) Die übrigen Fälle werden behandelt nach dem Muster von Fall III C beim Beweis von Satz I, wobei zu beachten ist, daß für $\varkappa(R_1') = \varkappa(R_1) - 1$ das Wort R_1' sektoriell abgeschlossen ist in $R_1'\, V_1''^{-1}\, V_{k+1}^{(3)}\, R_{k+1}\, V_{k+1}^{-1}$.

c) $V_1'^{-1} < V_{k+1}''$ ist unmöglich, da dann $l = 1$ wäre.

2) $R_2'' > V_{k+1}'$.

Es folgt:

$$R_2'' \approx R_2^{(3)}\, V_{k+1}'^{-1}, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1\, R_1'\, V_1'^{-1}\, R_2^{(3)}\, R_{k+1}\, V_{k+1}^{-1}.$$

Aus $K_2 = 1$ folgt:

$$R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1}\, R_{k+1}', \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1\, R_1'\, V_1'^{-1}\, R_{k+1}'\, V_{k+1}^{-1}.$$

a) $Y_2 = 1$. Es folgt:

$$(T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim V_2\, X_2\, (R_{k+1}'\, R_2^{(3)-1})\, X_2^{-1}\, V_2^{-1} = W.$$

Da $V_2 X_2$ Teilwort ist von V_1, so folgt, daß eine primäre Transformierte $T_{k+1}^* \sim W$ existiert.

Nun gilt in $R_2 \approx X_2\, R_2^{(3)}\, V_{k+1}'^{-1}\, Y_3^{-1}$:

$$\varkappa(Y_3^{-1}\, X_2\, R_2^{(3)}) \geq j, \qquad \varkappa(Y_3^{-1}) \leq j-1, \qquad \varkappa(X_2\, R_2^{(3)}) \geq j.$$

Wäre nun $\{X_2\, R_2^{(3)}, R_{k+1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen:

$$(T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}.$$

Setzen wir nun: $\{X_2, R_{k+1}'\}' = \{X_2', R_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung Z_1, so folgt daher aus $\varkappa(X_2\, R_2^{(3)}) \geq j$:

$$\varkappa(X_2') \geq 1,$$

wobei für $\varkappa(X_2') = 1$ das Wort X_2' rechtsseitig abgeschlossen ist in $X_2'\, R_{k+1}''$.

Es folgt, daß das Wort $V_2\, X_2'\, (R_{k+1}''\, R_2^{(3)-1}\, Z^{-1})$ reduziert ist. Nun ist sowohl $R_{k+1}''\, R_2^{(3)-1}\, Z^{-1} \in Z(R_{k+1})$ als auch $R_2^{(3)-1}\, Z^{-1}\, X_2'^{-1}\, V_2^{-1}$ reduziert (Teilwort von T_2); somit ist $R_{k+1}''\, R_2^{(3)-1}\, Z^{-1}\, X_2'^{-1}\, V_2^{-1}$ höchstens dann nicht reduziert, wenn $\varkappa(R_2^{(3)-1}\, Z^{-1}) = 1$ gilt. Durch Verschränkungsreduktion erhalten wir nach Hilfssatz 2 und der Bedingung für $\varkappa(X_2')$ (s. o.):

$$T_{k+1}^* = V_2\, X_2''\, (R_{k+1}^*)\, X_2''^{-1}\, V_2^{-1}$$

mit geeignetem X_2'' und $R_{k+1}^* \in Z(R_{k+1})$ (analog Fall I B 1 a α).

Ist zwar $V_2 X_2 R'_{k+1} R_2^{(3)-1}$ reduziert, jedoch nicht $R'_{k+1} R_2^{(3)-1} X_2^{-1} V_2^{-1}$, so ist für $R_2^{(3)} \neq 1$ das Wort $\{R'_{k+1}, R_2^{(3)-1}, X_2^{-1} V_2^{-1}\}$ verschränkt und wir schließen wie oben (unter Benützung der Bedingung für $\varkappa(X'_2)$). Für $R_2^{(3)} = 1$ sei zunächst $\{R_{k+1}, X_2^{-1}\}$ mindestens j-fach verkettet. Dann folgt: $T^*_{k+1} \approx T_2$ (analog Fall I B 1 a α). Ist jedoch $\{R_{k+1}, X_2^{-1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet, so benützen wir die Bedingung

$$\varkappa(X_2) = \varkappa(X_2 R_2^{(3)}) \geq j$$

und schließen wie unter I B 1 a α.

Sowohl für $T^*_{k+1} \approx T_2$ als auch in den übrigen Fällen gilt für $T^*_{k+1} = V^*_{k+1} R^*_{k+1} V^{*-1}_{k+1}$:

$$V^*_{k+1} \approx V_2 X''_2$$

für ein geeignetes X''_2, wobei V^*_{k+1} Teilwort ist von V_1. Es folgt:

$$\sigma(T_1, T^*_{k+1}) = \{+1, x_{k+1}\} \quad (x_{k+1} = \pm 1), \qquad \sigma(T^*_{k+1}, T_2) = \{+1, x_2\} \quad (x_2 = \pm 1)$$

und $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ erweist sich als eine L-Form im Widerspruch zur Voraussetzung.

Fall I B 2 a ist daher unmöglich.

b) $Y_2 \neq 1$. Es folgt:

$$Y_1 \triangle V_1'^{-1}, \qquad \varkappa(V_1'^{-1}) = 1$$

Es ergibt sich: $$R'_1 V_1'^{-1} \simeq R_1.$$

Wäre nun $\{R'_1 V_1'^{-1}, R'_{k+1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen:

$$(T_1 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_1^{-1}) \sim T_1^{-1}.$$

Setzen wir: $L = R'_1 V_1'^{-1}$, $\{L, R'_{k+1}\}' = \{L'_1 R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Z, so folgt:

$$\varkappa(Z) \leq j - 1.$$

α) $V_1'^{-1}$ sei rechter Abschnitt von $Z \approx Z' V_1'^{-1}$. Es folgt:

$$R_1 \approx R''_1 Z' Y_2^{-1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} V_1'^{-1} Z'^{-1} R''_{k+1}$$

mit $$R''_1 = L' \quad \text{und} \quad \varkappa(Z' Y_2^{-1}) = \varkappa(Z' V_1'^{-1}) = \varkappa(Z) \leq j - 1.$$

Aus $\varkappa(R_2^{(3)-1} V_1'^{-1} Z'^{-1}) \geq j$ würde nun folgen: $R_2^{(3)-1} \neq 1$; außerdem gilt: $V_1'^{-1} Z'^{-1} \neq 1$. Nach Axiom D_1 würde sich dann ein Widerspruch ergeben durch Vergleich von

$$R_2^{(3)-1} V'_1 Z'^{-1} R''_{k+1} \quad \text{mit} \quad R_2^{(3)-1} Y_2^{-1} X_2^{-1} Y_3 V'_{k+1} \quad \text{und} \quad Z' Y_2^{-1} R''_1,$$

da $$Z' V_1'^{-1} Y_2^{-1} \simeq Z' Y_2^{-1} \text{ gilt } (Y_2 \triangle V'_1).$$

β) Ist $V_1'^{-1}$ nicht rechter Abschnitt von Z, so folgt:

$$\varkappa(Z)=1, \qquad Z \mathbin{\triangle} V_1' \mathbin{\triangle} Y_2, \qquad R_2^{(3)-1} Z' \simeq R_2^{(3)-1} Y_2^{-1}.$$

Es gilt:
$$R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} Z^{-1} R_{k+1}''.$$

Aus $\varkappa(R_2^{(3)-1} Z^{-1}) \geq j$ würde folgen:

$$(T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}.$$

3) $R_2'' \parallel V_{k+1}'$.

Es sei $\{R_2'', V_{k+1}'\}' = \{R_2^{(3)}, V_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung I. Da $K_2=1$ ist, so gilt:

$$R_2^{(3)} \mathbin{\triangle} V_{k+1}'', \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1} R_{k+1}', \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1'^{-1} V_{k+1}'' R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}$$

mit
$$R_1 \approx R_1' Y_2^{-1}.$$

a) Für $V_1'^{-1} > V_{k+1}''$, $V_1'^{-1} \approx V_1''^{-1} V_{k+1}''^{-1}$ folgt:

$$V_1^{-1} \approx V_1''^{-1} V_{k+1}''^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}$$

α) $Y_2=1$. Es folgt:

$$(T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim V_2 X_2 V_{k+1}'' (R_{k+1}' R_2^{(3)-1})\, V_{k+1}''^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1} = E,$$

wobei $V_2 X_2 V_{k+1}''$ Teilwort ist von V_1.

Aus $R_2 \approx X_2 R_2^{(3)} I Y_3^{-1}$ folgt nun:

$$\varkappa(Y_3^{-1} X_2 R_2^{(3)}) \geq 2j-1$$

(sonst würde V_{k+1} das charakteristische Teilwort I^{-1} enthalten),

$$\varkappa(Y_3^{-1}) \leq j-1$$

(sonst wäre $T_2 \sim T_3^{-1}$),

$$\varkappa(X_2 R_2^{(3)}) \geq j \geq 2.$$

Aus $R_2^{(3)} \mathbin{\triangle} V_{k+1}''$ folgt, daß höchstens dann $\varkappa(X)=1$ gelten kann, wenn X_2 nicht verwandt ist zu $R_2^{(3)}$ (und damit auch nicht verwandt zu V_{k+1}''). Es folgt also stets:

$$\varkappa_{X_2 V_{k+1}''}(X_2) \geq 1.$$

Folgende Worte sind nun reduziert:

$$R_{k+1}' R_2^{(3)-1}, \qquad V_{k+1}'' R_{k+1}', \qquad R_2^{(3)-1} V_{k+1}''^{-1}$$

(p. d., da $R_2^{(3)} \mathbin{\triangle} V_{k+1}''$ gilt). Aus $\varkappa(R_{k+1}') > 1$ folgt dann nach Hilfssatz 1, dass auch reduziert sind:

$$V''_{k+1}\,R'_{k+1}\,R_2^{(3)-1}, \qquad R'_{k+1}\,R_2^{(3)-1}\,V''^{-1}_{k+1}$$

und somit auch

$$V''_{k+1}\,R'_{k+1}\,R_2^{(3)-1}\,V''^{-1}_{k+1}.$$

Da $V''_{k+1} \neq 1$ ist p. d., so ist also E höchstens dann nicht reduziert, wenn mindestens eines der beiden Tripel verschränkt ist:

$$\{V_2\,X_2,\ V''_{k+1},\ R'_{k+1}\,R_2^{(3)-1}\}, \qquad \{R'_{k+1}\,R_2^{(3)-1},\ V''^{-1}_{k+1},\ X_2^{-1}\,V_2^{-1}\}.$$

Da $\varkappa(X_2) \geq j$ gilt, so erhält man hieraus durch Verschränkungsreduktion nach bekanntem Muster eine primäre Transformierte

$$T^*_{k+1} = V^*_{k+1}\,R^*_{k+1}\,V^{*-1}_{k+1} \quad \text{mit} \quad V_1^{-1} > V^*_{k+1},\ V^{*+1}_{k+1} > V_2,$$

wodurch sich ein Widerspruch ergibt zur Annahme, daß $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ eine L-Wendeform ist.

Fall I B 3 a α) ist daher unmöglich.

β) $Y_2 \neq 1$. Es folgt:

$$V_1'^{-1} \triangle Y_2, \qquad V_1'^{-1} \triangle V''_{k+1} \triangle R_2^{(3)} \triangle Y_2, \qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1\,R_1'\,V_1''^{-1}\,R'_{k+1}\,V^{-1}_{k+1} = W.$$

Für $\varkappa(R'_{k+1}) = \varkappa(R_{k+1}) - 1$ folgt nun, daß W reduziert ist $(R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1}\,R'_{k+1})$ nach Hilfssatz 1.

Nun sei W nicht reduziert.

$\beta\alpha$) Für

$$V_1''^{-1} < R'_{k+1} \approx V_1''\,R''_{k+1}, \qquad R_{k+1} \approx R_2^{(3)-1}\,V_1''\,R''_{k+1}, \qquad \varkappa(R_2^{(3)-1}\,V_1'') = 1$$

sei $\{R_1',\ R''_{k+1}\}' = \{R_1'',\ R^{(3)}_{k+1}\}$ mit der Ergänzung E.

Es folgt:

$$\varkappa(E\,Y_2^{-1}) = \varkappa(R_2^{(3)-1}\,V_1''\,E^{-1}) \leq j-1,$$

denn aus $R_1 \simeq R_1'\,Y_2^{-1}$ würde sich ergeben nach Axiom B:

$$(T_2 \ldots T_k)\,T_{k+1}\,(T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_1^{-1}.$$

$\beta\beta$) $V_1''^{-1} \,\|\, R'_{k+1}$. Der Beweis erfolgt nach Hilfssatz 2.

$\beta\gamma$) $V_1''^{-1} > R'_{k+1}$ ist unmöglich.

Damit gilt für a):

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1, \qquad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

b) $V_1'^{-1} \parallel V_{k+1}''$, $\{V_1'^{-1}, V_{k+1}''\}' = \{V_1''^{-1}, V_{k+1}^{(3)}\}$. Es folgt:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1''^{-1} V_{k+1}^{(3)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}.$$

α) Im Sonderfall

$$V_1''^{-1} \triangle V_{k+1}^{(3)}, \qquad R_1' \approx R_1'' V_{k+1}^{(3)-1}, \qquad R_{k+1}' \approx V_1'' R_{k+1}'', \{R_1'', R_{k+1}''\}' = \{R_1^{(3)}, R_{k+1}^{(3)}\}$$

mit der Ergänzung O folgt nach Axiom B:

$$\varkappa (O V_{k+1}^{(3)-1} Y_2^{-1}) = \varkappa (O V_{k+1}^{(3)-1}) = \varkappa (R_2^{(3)-1} V_1'' O^{-1}) \leq j-1.$$

Die übrigen Fälle sind nach dem Muster von Fall III C beim Beweis von Satz I zu behandeln (zu beachten ist hierbei, daß für

$$\varkappa (R_1') = \varkappa (R_1) - 1$$

das Wort R_1' sektoriell abgeschlossen ist in

$$R_1' V_1''^{-1} V_{k+1}^{(3)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1};$$

für

$$\varkappa (R_{k+1}') = \varkappa (R_{k+1}) - j + 1$$

ist R_{k+1}' sektoriell abgeschlossen in

$$V_1 R_1' V_1''^{-1} V_{k+1}^{(3)} R_{k+1}').$$

c) $V_1'^{-1} < V_{k+1}'' \approx V_1' V_{k+1}^{(3)}$, $\qquad T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_{k+1}^{(3)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1} = W.$

Es folgt:

$$V_{k+1}'' \triangle R_2^{(3)-1} \triangle V_1'^{-1}.$$

Ist W nicht reduziert, so folgt:

$$\varkappa (R_1') = \varkappa (R_1),$$

da sonst R_1' sektoriell abgeschlossen wäre in $R_1' V_{k+1}^{(3)} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$.

α) $R_1' > V_{k+1}^{(3)}$, $R_1' \approx R_1'' V_{k+1}^{(3)-1}$, $\{R_1'', R_{k+1}'\}' = \{R_1^{(3)}, R_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung O. Es folgt nach Axiom B:

$$\varkappa (O V_{k+1}^{(3)-1} Y_2^{-1}) = \varkappa (O V_{k+1}^{(3)-1}) = \varkappa (R^{(3)-1} O^{-1}) \leq j-1.$$

In den übrigen Fällen folgt der Satz nach Hilfssatz 2.

C) $V_1^{-1} \parallel V_2$.

Für $\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)$ folgt für $k=2$ nach Satz I, Anmerkung 2:

$$\varkappa_{R_2} (K_{2,\alpha}) \geq \varkappa (R_2) - j + 1.$$

Für $k>2$ können wir auf $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; T_2; T_3)$ Hilfssatz 9 anwenden, da $V_2 \approx V_3$ ausgeschlossen ist nach Hilfssatz 10 und Satz I, Anmerkung 2. Wir erhalten:

$$\varkappa_{R_2}(K_{2,\sigma}) \geq \varkappa'(R_2) - j + 1.$$

Nach Satz II folgt:

$$K_{2,\alpha} = K_{2,\sigma}.$$

Wir untersuchen nunmehr

$$K_{2,\alpha} \boxminus V_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1} \sim K_{2,\alpha} V'_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$$

mit
$$\boxminus = Q_{2,\alpha}^{-1} P_{3,\alpha} K_{3,\alpha} Q_{2,\alpha}^{-1} \ldots P_{k,\alpha} K_{k,\alpha} Q_{k,\alpha}^{-1}.$$

Diese Untersuchung verläuft analog wie in Hilfssatz 8 (es kommt nur darauf an, daß gilt: $\varkappa_{R_2}(K_{2,\alpha}) \geq \varkappa'(R_2) - j + 1$).

1) Für $K_{2,\alpha} > V'_{k+1}$ (entsprechend Fall I von Hilfssatz 8),

$$K_{2,\alpha} \approx R'_2 V'^{-1}_{k+1}, \qquad R_2 \approx P R'_2 V_{k+1}^{-1} Q$$

(P, Q, R'_2 geeignet gewählt) ergibt sich analog:

$$\varkappa(Q P R'_2) \geq 2j - 1$$

und aus $\varkappa(QP) \leq j - 1$ folgt somit:

$$\varkappa(R'_2) \geq j.$$

$\{R'_2, R_{k+1}\}$ ist höchstens $(j-1)$-fach verkettet.

Für $\mathfrak{V}_\tau = \{K_{2,\alpha}, V_2^{-1}, V_3, R_3, V_3^{-1}, \ldots, V_{k+1}, R_{k+1}, V_{k+1}^{-1}\}$ ergibt sich somit:

$$\varkappa(K_{k+1,\tau}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1,$$

wobei für $\varkappa(K_{k+1,\tau}) = \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$ das Wort $K_{k+1,\tau}$ sektoriell abgeschlossen ist in R_{k+1} und linksseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{V}'_\tau|$. Ferner gilt: $\varkappa(K_{2,\tau}) \geq 1$, wobei für $\varkappa(K_{2,\tau}) = 1$ das Wort $K_{2,\tau}$ sektoriell abgeschlossen ist in R_2 und rechtsseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{V}'_\tau|$.

Somit ist das Wort

$$W = P_{1,\alpha} K_{1,\alpha} Q_{1,\alpha}^{-1} P_{2,\alpha} K_{2,\tau} Q_{2,\tau}^{-1} P_{3,\tau} K_{3,\tau} Q_{3,\tau}^{-1} \ldots P_{k+1,\tau} K_{k+1,\tau} Q_{k+1,\tau}^{-1}$$

reduziert und es gilt für die Komponenten von $\mathfrak{U}'$:

$$\begin{array}{lll} P_1 = P_{1,\alpha}, & K_1 = K_{1,\alpha}, & Q_1 = Q_{1,\alpha}, \\ P_2 = P_{2,\alpha}, & K_2 = K_{2,\tau}, & Q_2 = Q_{2,\tau}, \\ P_3 = P_{3,\tau}, & K_3 = K_{3,\tau}, & Q_3 = Q_{3,\tau}, \ldots, \\ P_{k+1} = P_{k+1,\tau}, & K_{k+1} = K_{k+1,\tau}, & Q_{k+1} = Q_{k+1,\tau} \end{array}$$

im Widerspruch zur Annahme $K_2 = 1$. (Die hier angestellten Überlegungen werden gebraucht bei Fall II A 2 a, da dann $K_2 \neq 1$ angenommen wird.)

2) $K_{2,\alpha} \| V'_{k+1}$ wird analog wie Fall II von Hilfssatz 8 behandelt, wobei sich dann die bei 1) angestellten Überlegungen anschließen.

II) $K_2 \neq 1$.

Es sei

$$\mathfrak{V}_\gamma = \mathfrak{V}(T_1;\, T_2), \qquad \mathfrak{V}_\delta = \{K_{2,\gamma},\, V_2^{-1},\, V_3,\, R_3,\, V_3^{-1},\, \ldots,\, V_{k+1},\, R_{k+1},\, V_{k+1}^{-1}\}.$$

Nun kann sicherlich $K_{2,\gamma} < V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1}$ nicht gelten, denn sonst wäre $K_2 = 1$. Dann gilt aber auch: $K_{2,\delta} \neq 1$, wie sich aus den Definitionen in § 2 ergibt. Setzen wir nun:

$$W_1 = P_{1,\gamma} K_{1,\gamma} Q_{1,\gamma}^{-1} P_{2,\gamma}, \qquad W_3 = Q_{2,\delta}^{-1} P_{3,\delta} K_{3,\delta} Q_{3,\delta}^{-1} \ldots P_{k+1,\delta} K_{k+1,\delta} Q_{k+1,\delta}^{-1},$$

so folgt:

$$T_1 T_2 \sim W_1 K_{2,\gamma} V_2^{-1} \quad \text{(nach Satz I a)}, \qquad T_1 V_2 R_2 \sim W_1 K_{2,\gamma}.$$

Da nach der Definition in § 2 das Wort $K_{2,\delta}$ linker Abschnitt ist von $K_{2,\gamma}$, so folgt ebenso:

$$K_{2,\gamma} V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1} \sim K_{2,\delta} W_3,$$

also:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim (T_1 V_2 R_2)(V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1}) \sim W_1 K_{2,\gamma} V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1} \sim W_1 K_{2,\delta} W_3.$$

Nun ist $W_1 K_{2,\delta}$ reduziert als Teilwort von $W_1 K_{2,\gamma}$ (und damit als Teilwort von $|\mathfrak{V}'_\gamma|$), ebenso ist $K_{2,\delta} W_3$ reduziert als Teilwort von $|\mathfrak{V}'_\delta|$ und es gilt: $K_{2,\delta} \neq 1$. Falls $W_1 K_{2,\delta} W_3$ nicht reduziert ist, so existiert ein W'_1 und ein W'_3, so daß sich durch Verschränkungsreduktion ein reduziertes $W'_1 K_{2,\delta} W'_3 \sim W_1 K_{2,\delta} W_3$ ergibt. Nach den Definitionen in § 2 folgt: $K_2 = K_{2,\delta}$.

Mit $\mathfrak{V}_\tau = \{K_{2,\gamma},\, V_2^{-1},\, V_3,\, R_3,\, V_3^{-1},\, \ldots,\, V_k,\, R_k,\, V_k^{-1}\}$ ergibt sich ebenso:

$$K_{2,\alpha} = K_{2,\tau} \qquad (\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1;\, \ldots;\, T_k)).$$

Nun folgt nach der Annahme $l = 2$:

$$Q_{2,\tau}^{-1} P_{3,\tau} K_{3,\tau} Q_{3,\tau}^{-1} \ldots P_{k,\tau} K_{k,\tau} Q_{k,\tau}^{-1} < V_{k+1}.$$

Mit
$$V'_2 = Q_{2,\tau}, \qquad K = T'_3 \ldots T'_k = P_{3,\tau} K_{3,\tau} Q_{3,\tau}^{-1} \ldots P_{k,\tau} K_{k,\tau} Q_{k,\tau}^{-1},$$
$$R'_2 = K_{2,\gamma}, \qquad R''_2 = K_{2,\tau} = K_{2,\alpha}$$

gilt somit:

$$R'_2 V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1} \sim R''_2 V_2'^{-1} T'_3 \ldots T'_k T_{k+1} \sim R''_2 V'_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

A) $R_2'' > V_{k+1}'$, $R_2'' \approx R_2^{(3)} V_{k+1}'^{-1}$. Es folgt:

$$R_2' V_2^{-1} T_3 \ldots T_{k+1} \sim R_2^{(3)} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Wir bilden: $\{R_2^{(3)}, R_{k+1}\}' = \{R_2^{(4)}, R_{k+1}'\}$ mit der Ergänzung X. Wäre nun $\{R_2^{(3)}, R_{k+1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so würde folgen nach Axiom B:

$$(T_2 \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_2^{-1}) \sim T_2^{-1}.$$

Das Wort $R_2^{(4)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}$ ist reduziert und es gilt:

$$K_{2,\delta} = R_2^{(4)}, \; K_{k+1,\delta} = R_{k+1}'.$$

Somit folgt:
$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\delta}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1) $W = P_{1,\gamma} K_{1,\gamma} Q_{1,\gamma}^{-1} P_{2,\gamma} K_{2,\delta} Q_{2,\delta}^{-1} P_{3,\delta} K_{3,\delta} Q_{3,\delta}^{-1} \ldots P_{k+1,\delta} K_{k+1,\delta} Q_{k+1,\delta}^{-1}$ ist reduziert. Dann folgt nach § 2:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_{1,\gamma}, & K_1 &= K_{1,\gamma}, & Q_1 &= Q_{1,\gamma}, \\ P_2 &= P_{2,\gamma}, & K_2 &= K_{2,\delta}, & Q_2 &= Q_{2,\delta}, \\ P_{k+1} &= P_{k+1,\delta}, & K_{k+1} &= K_{k+1,\delta}, & Q_{k+1} &= Q_{k+1,\delta}. \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1,$$

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

2) W ist nicht reduziert. Dann ist $R_2^{(4)} = K_{2,\delta}$ weder linksseitig noch rechtsseitig abgeschlossen in W. Es folgt somit: $\varkappa(X) \leq j-2$, da für $\varkappa(X) = j-1$ das Wort R_{k+1}' linksseitig abgeschlossen wäre in W (und daher $R_2^{(4)}$ rechtsseitig abgeschlossen in W).

a) $V_1^{-1} > V_2$ gelte nicht. Aus $\sigma(T_1, T_2) = \{+1, x_2\}$ $(x_2 = \pm 1)$ folgt dann $V_1^{-1} \| V_2$. Es gelten die Überlegungen von I C, aus denen sich ergibt:

$$K_2 \neq 1, \qquad \varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1, \qquad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

b) Aus $V_1^{-1} > V_2$ folgen Äquivalenzen:

$$V_1^{-1} \approx V_1'^{-1} X_2^{-1} V_2^{-1}, \qquad R_1 \approx R_1' Y_2^{-1}, \qquad R_2 \approx X_2 Y_2 R_2'$$

mit
$$R_1' = K_{1,\gamma}, \qquad R_2' = K_{2,\gamma}, \qquad V_1' = Q_{1,\gamma}.$$

Für $Y_1 \neq 1$, $V_1' \neq 1$ folgt: $Y_2 \triangle V_1'$.

Es folgt die Äquivalenz:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim V_1 R_1' V_1'^{-1} R_2^{(4)} R_{k+1}' V_{k+1}^{-1} = W.$$

Hierbei gilt:
$$\varkappa(R_1') \geq \varkappa(R_1) - j + 1.$$

Für $\varkappa(R_1') = \varkappa(R_1) - j + 1$ ist R_1' sektoriell abgeschlossen in R_1 und rechtsseitig abgeschlossen in W. Ebenso gilt:

$$\varkappa(R_{k+1}') \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Für $\varkappa(R_{k+1}') = \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$ ist hierbei R_{k+1}' sektoriell abgeschlossen in R_{k+1} und linksseitig abgeschlossen in W.

Ist nun W nicht reduziert, so ist $\{V_1 R_1' V_1'^{-1}, R_2^{(4)}, R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}\}$ verschränkt und wir erhalten durch Verschränkungsreduktion ein reduziertes $W' \sim W$. Der Satz folgt dann aus Hilfssatz 2 und den obigen Überlegungen.

B) $R_2'' \parallel V_{k+1}'$.

Wir bilden: $\{R_2'', V_{k+1}'\}' = \{R_2^{(3)}, V_{k+1}''\}$. Es folgt:

$$R_2'' V_2'^{-1} T_3' \ldots T_k' T_{k+1} \sim R_2^{(3)} V_{k+1}'' R_{k+1} V_{k+1}^{-1} = W_2 \quad \text{mit} \quad R_2^{(3)} \neq 1,\ V_{k+1}'' \neq 1.$$

Ist $R_2^{(3)} V_{k+1}'' R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$ nicht reduziert, so erhalten wir ein reduziertes $W_2' \sim W_2$ durch Verschränkungsreduktion:

$$W_2' \sim R_2^{(4)} V_{k+1}'' R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}.$$

Ist $W_1 = V_1 R_1' V_1'^{-1} W_2'$ reduziert, so erhalten wir:

$$K_1 = K_{1,\gamma}, \qquad K_{k+1} = R_{k+1}'$$

und der Satz ist richtig. Ist W nicht reduziert, so ist $\{V_1 R_1' V_1'^{-1}, R_2^{(4)}, V_{k+1}'' R_{k+1}' V_{k+1}^{-1}\}$ verschränkt und wir erhalten durch Verschränkungsreduktion ein reduziertes $W' \sim W$. Der Satz folgt dann aus Hilfssatz 2 und den Aussagen über $\varkappa(R_1')$ und $\varkappa(R_{k+1}')$ analog wie in A 2.

C) $R_2'' < V_{k+1}'$ kann nicht gelten, da sonst $K_2 = 1$ folgen würde.

Anmerkung. Die Ungleichungen

$$\text{a)} \quad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1,$$

$$\text{b)} \quad \varkappa_R\,(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1$$

brauchen also höchstens dann nicht zu gelten, wenn eine primäre Transformierte

$$T_{k+1}^* \sim (T_2 \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \cdots T_2^{-1})$$

existiert, so daß $\mathfrak{V}(T_1; T^*_{k+1}; T_2; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist (es sind dies die Fälle I A 1 b, I B 1 a α, I B 2 a, I B 3 a α; nach Satz II gilt jedoch die Ungleichung b) auch dann).

Satz III. *Es sei* $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ *ein L-Wendevektor und* $F(T_1 \ldots T_{k+1})$ *eine L-Wendeform. Dann gilt für die Komponenten von*

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_{k+1}, K_{k+1}, Q_{k+1}^{-1}\}:$$

A) *Für* $l > 1$ *gilt:*

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq \varkappa(R_1) - j + 1,$$

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

B) *Für* $l = 1$ *gilt:*

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1,$$

$$\varkappa_{R_1}(K_1) \geq 1.$$

Für $\varkappa(K_1) = 1$ *ist* K_1 *rechtsseitig abgeschlossen in* $|\mathfrak{U}'|$.

Beweis.

A) Für $l > 1$ betrachten wir $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1})$ und wenden hierauf Hilfssatz 13 an. Es sei ferner: $\mathfrak{V}_\tau = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{l-1})$.

Nach Satz II ist nun $K_{l-1,\tau} V_{l-1}^{-1}$ rechter Abschnitt von $|\mathfrak{V}'_\tau|$ und es gilt:

$$\varkappa(K_{l-1,\tau}) \geq j.$$

Für $\varkappa(K_{l-1,\tau}) = j$ ist $K_{l-1,\tau}$ sektoriell abgeschlossen in R_{l-1} und linksseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{V}'_\tau|$. Andererseits gilt nach Hilfssatz 13:

$$\varkappa_{R_{l-1}}(K_{l-1,\sigma}) \geq \varkappa(R_{l-1}) - j + 1.$$

Daher können wir Hilfssatz 7 anwenden und es folgt:

$$P_s = P_{s,\sigma}, \qquad K_s = K_{s,\sigma}, \qquad Q_s = Q_{s,\sigma}, \qquad (l \leq s \leq k+1), \qquad Q_{l-1} = Q_{l-1,\alpha},$$

ferner:

$$P_s = P_{s,\tau}, \qquad K_s = K_{s,\tau}, \qquad Q_s = Q_{s,\tau}, \qquad (1 \leq s \leq l-2),$$

$$P_{l-1} = P_{l-1,\tau}, \qquad R_{l-1} \approx X K_{l-1} Y$$

mit

$$K_{l-1} Y \approx K_{l-1,\tau} \quad \text{und} \quad X K_{l-1} \approx K_{l-1,\sigma}.$$

Somit gilt nach Hilfssatz 13:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1}) = \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\sigma}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Nach Satz II folgt:

$$\varkappa_{R_1}(K_1) = \varkappa_{R_1}(K_{1,\tau}) \geq \varkappa(R_1) - j + 1.$$

B) Die Behauptung B von Satz III ist gegeben durch Hilfssatz 8.

Anmerkung. Im Falle A) beachte man für $\mathfrak{V}_\sigma$ die Anmerkung zu Hilfssatz 13.

§ 7. Konstruktion beliebiger Formen

In diesem Paragraphen gelingt es, mittels Satz III und unter Benützung der Hilfssätze aus § 5 die Struktur einer beliebigen Form zu bestimmen. Es wird bewiesen, daß sich in einer beliebigen Form F vom Grade $n > 0$ stets ein Vektor $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ finden läßt mit $\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\}$, so daß ein i existiert, so daß K_i ein Teilwort von R_i darstellt mit $R_i \approx X K_i Y$, $\varkappa(YX) \leq 2j - 2$. Eine solche Zahl i wird nachstehend definiert als „Index" der Form F.

Zu einer gegebenen Form F vom Grade $n > 0$ betrachten wir die Menge $\mathfrak{L}$ aller Zahlen k, die folgenden Bedingungen genügen: Es existiere ein Vektor

$$\mathfrak{U}^* \in F, \qquad \mathfrak{U}^* = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k; T_{k+1}^*; \ldots; T_n^*),$$

so daß für *jeden* Vektor

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}\{P_1; \ldots, T_k; T_{k+1}; \ldots; T_n\} \in F$$

für $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)$ und $\mathfrak{V}_\tau = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ gilt:

J_1) $K_{k,\sigma}$ ist rechter Abschnitt von R_k mit $\varkappa_{R_k}(K_{k,\sigma}) \geq \varkappa(R_k) - j + 1$.

J_2) Für $k < n$ folgt mindestens eine der beiden Aussagen:

a) $K_{k+1,\tau}$ ist rechter Abschnitt von R_{k+1} mit $\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\tau}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$.

b) $K_{k,\tau}$ ist Teilwort von R_k mit $\varkappa_{R_k}(K_{k,\tau}) \geq \varkappa'(R_k) - j + 1$.

Für die Zahl 1 ist J_1 trivialerweise erfüllt und für die Zahl n ist J_2 trivialerweise erfüllt. Vermöge Satz I gilt dann: $1 \in \mathfrak{L}$. Es existiert somit zu jeder Form F vom Grade $n > 0$ eine größte Zahl $i \in \mathfrak{J}$, die wir als den *Index* von F bezeichnen wollen. Genügt ein Vektor $\mathfrak{U} \in F$ zusammen mit dem Index i den Bedingungen J_1, J_2 (für $k = i$), so nennen wir $\mathfrak{U}$ einen *Indexvektor* der Form F. Mit $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$ ist auch jeder Vektor $\mathfrak{V}(T; \ldots; T_i; T_{i+1}^*; \ldots; T_n^*) \in F$ ein Indexvektor.

Hilfssatz 14. *Es sei F eine Form vom Grade n und vom Index i und $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ sei ein Indexvektor von F mit den primären Transformierten*

$$T_s = V_s R_s V_s^{-1} \quad (1 \leq s \leq n), \quad \textit{mit} \quad i < k \leq n,$$

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k) \quad \textit{und} \quad \mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_{k-1}; T_k).$$

Gilt dann; $K_{k,\sigma} = K_{k,\alpha}$, *dann folgt;* $V_{k-1}^{-1} > V_k$.

Beweis. Wir nehmen an, es gelte nicht: $V_{k-1}^{-1} > V_k$. Wir können ferner voraussetzen: $i < n$. Für $k = n$ würde nach Satz I die Zahl $k > i$ den Bedingungen J_1, J_2 genügen, was der Definition von i widerspricht. Wir nehmen nun an, es sei $k < n$ und es gäbe einen Vektor der geforderten Art. Wir betrachten nun $\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_k; T_{k+1})$.

I) $V_k^{-1} < V_{k+1}$ sei nicht erfüllt.

Da weder $V_{k-1}^{-1} > V_k$ gilt noch $V_k^{-1} < V_{k+1}$, so können wir auf

$$\mathfrak{V}_\tau = \mathfrak{V}(T_{k-1}; T_k; T_{k+1})$$

Hilfssatz 9 anwenden und es ergibt sich für $K_{k,\tau}$:

$$\varkappa_{R_k}(K_{k,\tau}) \geq \varkappa'(R_k) - j + 1.$$

Für $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)$

und $$\mathfrak{U}_\xi = \{V_1, R_1, V_1^{-1}, \ldots, V_{k-1}, R_{k-1}, V_{k-1}^{-1}, V_k, R_k\}$$

gilt nun: ist $K_{k,\xi}$ die letzte Komponente von $\mathfrak{U}'_\xi$ und ist $|\mathfrak{U}'_\xi| = W_1 K_{k,\xi}$, so ist nach der Definition in § 2 das Wort $K_{k,\sigma}$ Teilwort von $K_{k,\xi}$, und $K_{k,\xi}$ ist rechter Abschnitt von R_k. Da nun $V_{k-1}^{-1} > V_k$ nicht erfüllt ist, so folgt nach Satz I und der Voraussetzung:

$$\varkappa_{R_k}(K_{k,\sigma}) = \varkappa_{R_k}(K_{k,\alpha}) = \varkappa(R_k) - j + 1;$$

somit gilt auch:

$$\varkappa_{R_k}(K_{k,\xi}) \geq (R_k) - j + 1.$$

Nun ist $K_{k,\xi} V_k^{-1}$ reduziert als Teilwort von T_k und ebenso $W_1 K_{k,\xi} = |\mathfrak{U}'_\xi|$; daher folgt nach Hilfssatz 1: $W_1 K_{k,\xi} V_k^{-1}$ ist reduziert. Es ergibt sich somit:

$$K_{k,\xi} = K_{k,\sigma}, \; Q_{k,\sigma}^{-1} = V_k^{-1}.$$

Ist nun $\mathfrak{V}_\varrho = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$, so ergibt sich daher nach der Definition in § 2 die Komponente $K_{k,\varrho}$ von $\mathfrak{V}'_\varrho$ als erste Komponente von $\{K_{k,\sigma}, V_k^{-1}, V_{k+1}, R_{k+1}, V_{k+1}^{-1}\}'$. Setzt man:

$$\mathfrak{U}_\eta = \{V_{k-1}, R_{k-1}, V_{k-1}^{-1} V_k, R_k\}$$

und ist $K_{k,\eta}$ die letzte Komponente von $\mathfrak{U}'_\eta$, so folgt analog wie oben:

$$K_{k,\eta} = K_{k,\alpha}.$$

Daher ist nach § 2 die Komponente $K_{k,\tau}$ definiert als erste Komponente in

$$\{K_{k,\alpha},\ V_k^{-1},\ V_{k+1},\ R_{k+1},\ V_{k+1}^{-1}\}'$$

und es folgt aus $K_{k,\alpha} = K_{k,\sigma}$:

$$K_{k,\tau} = K_{k,\varrho}.$$

Daher ergibt sich: $$\varkappa_{R_k}(K_{k,\varrho}) \geq \varkappa'(R_k) - j + 1.$$

II) Es gelte: $V_k^{-1} < V_{k+1}$.

In diesem Falle folgt für $\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_k;\ T_{k+1})$ nach Satz I:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\beta}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Für $K_{k,\beta}$ gilt ferner nach Satz I: $\varkappa(K_{k,\beta}) \geq j$; für $\varkappa(K_{k,\beta}) = j$ ist $K_{k,\beta}$ rechtsseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{V}'_\beta|$. Aus

$$\varkappa(K_{k,\sigma}) = \varkappa(K_{k,\alpha}) \geq \varkappa(R_k) - j + 1$$

folgt daher nach Hilfssatz 7 a für $\mathfrak{V}_\varrho = \mathfrak{V}(T_1;\ \ldots;\ T_{k+1})$:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\varrho}) = \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\beta}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Aus $\varkappa_{R_k}(K_{k,\sigma}) = \varkappa_{R_k}(K_{k,\alpha})$ folgt, daß die Zahl $k > i$ die Bedingung J_1 erfüllt und aus den obigen Überlegungen folgt, daß k auch die Bedingung J_2 erfüllt. Dies widerspricht aber der Definition von i.

Damit ist Hilfssatz 14 bewiesen.

Anmerkung. Speziell folgt: ist $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1;\ \ldots;\ T_n)$ ein Indexvektor aus F mit den primären Transformierten $T_s = V_s R_s V_s^{-1}$ $(1 \leq s \leq n)$, so gilt:

$$V_i^{-1} > V_{i+1}.$$

Denn für $\mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}(T_1;\ \ldots;\ T_i)$ folgt:

$$\varkappa(K_{i,\lambda}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1,$$

da i der Index ist und für $\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_i;\ T_{i+1})$ folgt:

$$\varkappa(K_{i,\alpha}) \geq j,$$

wobei für $\varkappa(K_{i,\alpha}) = j$ das Wort $K_{i,\alpha}$ rechtsseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}'_\alpha|$. Daher folgt nach Hilfssatz 7 a für $\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1;\ \ldots;\ T_{i+1})$:

$$K_{i+1,\sigma} = K_{i+1,\alpha},$$

so daß wir Hilfssatz 14 anwenden können.

Hilfssatz 15. *Es sei F eine Form vom Grade n und vom Index $i < n$. Dann existiert kein Indexvektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$, so daß für ein k mit $i+1 \leq k \leq n-1$ der Vektor $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ einen L-Wendevektor darstellt mit der Länge 1, wobei $F(T_i \ldots T_{k+1})$ eine L-Wendeform ist.*

Beweis. Angenommen, es würde ein solcher Vektor $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ existieren. Wir betrachten dann

$$\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1}),$$

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i) \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_\tau = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{i+1}),$$

ebenso

$$\mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k) \quad \text{und} \quad \mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1}).$$

Die primären Transformierten T_s $(1 \leq s \leq n)$ seien gegeben durch $T_s = V_s R_s V_s^{-1}$.

Da nach Hilfssatz 14, Anmerkung gilt: $V_i^{-1} > V_{i+1}$, so folgt: $k > i$. Setzen wir nun $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}(T_i; T_{i+1})$, so gilt somit nach Hilfssatz 10 für die Komponente $K_{i+1,i}$ von $\mathfrak{V}_i'$:

$$\varkappa(K_{i+1,i}) < \varkappa(R_{i+1}) - j + 1.$$

Da i der Index ist, so folgt somit nach der Bedingung J_2:

$$\varkappa(K_{i,\tau}) \geq \varkappa'(R_i) - j + 1.$$

Außerdem gilt nach Satz I:

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,i}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1.$$

Ebenso gilt:

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\sigma}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1,$$

da i der Index ist. Nach Hilfssatz 7 folgt somit für $\mathfrak{V}_\tau = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{i+1})$:

$$Q_{i,\tau}^{-1} = Q_{i,i}^{-1}, \qquad P_{i+1,\tau} = P_{i+1,i}, \qquad K_{i+1,\tau} = K_{i+1,i} \qquad Q_{i+1,\tau}^{-1} = Q_{i+1,i}^{-1} = V_{i+1}^{-1}.$$

Somit gilt:

$$\varkappa(K_{i+1,\tau}) = \varkappa(K_{i+1,i}) \geq j.$$

Für $\varkappa(K_{i+1,\tau}) = j$ ist $K_{i+1,\tau}$ linksseitig abgeschlossen in $|\mathfrak{V}_\tau'|$. Der Vektor

$$\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$$

ist ein L-Wendevektor, daher ist $\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k)$ und damit auch

$$\mathfrak{V}_\varrho = \mathfrak{V}(T_{i+1}; \ldots; T_k)$$

ein L-Vektor. Nach Satz II gilt daher:

$$\varkappa_{R_{i+1}}(K_{i+1,\varrho}) \geq \varkappa(R_{i+1}) - j + 1.$$

Somit können wir Hilfssatz 7 anwenden.

Es folgt nach Hilfssatz 7 und nach Satz II für $\mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_k)$:

$$P_{s,\varkappa} = P_{s,\tau}, \quad K_{s,\varkappa} = K_{s,\tau}, \quad Q_{s,\varkappa} = Q_{s,\tau} \quad (1 \leq s \leq i), \quad P_{i+1,\varkappa} = P_{i+1,\tau};$$
$$P_{t,\varkappa} = P_{t,\varrho} = P_{t,\alpha}, \quad K_{t,\varkappa} = K_{t,\varrho} = K_{t,\alpha}, \quad Q_{t,\varkappa} = Q_{t,\varrho} = Q_{t,\alpha} \quad (i+2 \leq t \leq k).$$

Nach Satz II folgt außerdem:

$$Q_{i,\varkappa}^{-1} = Q_{i,\tau}^{-1} = Q_{i,i}^{-1} = Q_{i,\alpha}^{-1}, \qquad P_{i+1,\alpha} = P_{i+1,\tau} = P_{i+1,i} = P_{i+1,\alpha}.$$

Betrachten wir

$$\mathfrak{V}_\mu = \{V_i, R_i, V_i^{-1}, V_{i+1}, R_{i+1}\};$$

die letzte Komponente von $\mathfrak{V}'_\mu$ sei $K_{i+1,\mu}$. Wie in Teil I) des Beweises zu Hilfssatz 14 zeigt man: $K_{i+1,\mu} = K_{i+1,i}$ (da $\varkappa(K_{i+1,i}) \geq j > 1$ und somit auch $\varkappa(K_{i+1,\mu}) \geq j$ gilt). Ist $\mathfrak{V}_\nu = \{V_1, R_1, V_1^{-1}, \ldots, V_{i+1}, R_{i+1}\}$ und ist $K_{i+1,\nu}$ die letzte Komponente von $\mathfrak{V}'_\nu$, so zeigt man analog, daß gilt: $K_{i+1,\nu} = K_{i+1,\tau}$.

Nun ist $K_{i+1,\alpha}$ gegeben als erste Komponente von

$$\{K_{i+1,\mu}, V_{i+1}^{-1}, V_{i+2}, R_{i+2}, V_{i+2}^{-1}, \ldots, V_k, R_k, V_1^{-1}\}'$$

und $K_{i+1,\varkappa}$ ist gegeben als erste Komponente von

$$\{K_{i+1,\nu}, V_{i+1}^{-1}, V_{i+2}, R_{i+2}, V_{i+2}^{-1}, \ldots, V_k, R_k, V_k^{-1}\}'.$$

Nach den obigen Ergebnissen gilt aber: $K_{i+1,\tau} = K_{i+1,i}$, somit: $K_{i+1,\mu} = K_{i+1,\nu}$ und daher: $K_{i+1,\varkappa} = K_{i+1,\alpha}$ (da $K_{i+1,\nu} = K_{i+1,i}$, $K_{i+1,\mu} = K_{i+1,i}$ gilt).

Es folgt die Äquivalenz:

$$T_1 \ldots T_k \sim W_1 K_{i,\tau} Q_{i,\alpha}^{-1} T'_{i+1} \ldots T'_k \quad \text{mit} \quad T'_s = P_{s,\alpha} K_{s,\alpha} Q_{s,\alpha}^{-1} \quad (i+1 \leq s \leq k).$$

Da nun der L-Wendevektor $\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ die Länge 1 haben soll, so folgt:

$$V_{k+1} \approx \mathfrak{S}^{-1} V'_{k+1} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{S} = Q_{i,\alpha}^{-1} T'_{i+1} \ldots T'_k$$

(V'_{k+1} geeignet gewählt). Es ergibt sich:

$$T_1 \ldots T_{k+1} \sim W_1 K_{i,\tau} V'_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}$$

(W_1 geeignet gewählt). Hierbei gilt: $\varkappa(K_{i,\tau}) \geq \varkappa'(R_i) - j + 1$, da i der Index ist.

Für $R_i' = K_{i,\tau}$ bilden wir nun: $\{R_i', V_{k+1}'\}' = \{R_i'', V_{k+1}''\}$ mit der Ergänzung Z. Nach Definition ist $R_i' = K_{i,\tau}$ Teilwort von $R_i \approx X R_i' Y \approx X R_i'' Z Y$ (X, Y geeignet gewählt). Nunmehr gilt:

$$\varkappa(Y X R_i'') \geq 2j - 1,$$

denn aus $\varkappa(Y X R_i'') \geq 4j - 2$ (Axiom Z) würde sonst folgen: $\varkappa(Z) > 2j$ und Z wäre ein charakteristisches Teilwort von R_i, was nach § 1 unmöglich ist, da Z ein Teilwort von V_{k+1}^{-1} ist. Nach J_2 gilt außerdem: $\varkappa(YX) \leq j - 1$; es folgt: $\varkappa(R_i'') \geq j$. $R_i' < V_{k+1}'$ kann also nicht gelten. Für $R_i' > V_{k+1}'$, $R_i' \approx R_i'' V_{k+1}'^{-1}$ folgt, daß $\{R_i'', R_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet ist, denn sonst würde sich ergeben:

$$(T_i \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_i^{-1}) \sim T_i^{-1}.$$

Für die Komponente $K_{i,\lambda}$ von $\mathfrak{V}_\lambda'$ gilt somit: $\varkappa(K_{i,\lambda}) \geq 1$, wobei für $\varkappa(K_{i,\lambda}) = 1$ das Wort $K_{i,\lambda}$ rechtsseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}_\lambda'|$. Für $R_i' \parallel V_{k+1}'$ folgt dies ebenfalls nach Hilfssatz 2, da $\varkappa(K_{i,\lambda}) \geq \varkappa(R_i'') - 1$ gilt und für $\varkappa(K_{i,\lambda}) = \varkappa(R_i'') - 1$ das Wort $K_{i,\lambda}$ rechtsseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}_\lambda'|$.

Somit ist nach Hilfssatz 1 das Wort $L_1 K_{i,\lambda} L_2$ reduziert mit

$$L_2 = Q_{i,\beta}^{-1} P_{i+1,\beta} K_{i+1,\beta} Q_{i+1,\beta}^{-1} \ldots P_{k+1,\beta} K_{k+1,\beta} Q_{k+1,\beta}^{-1}$$

und $$L_1 = P_{1,\tau} K_{1,\tau} Q_{1,\tau}^{-1} \ldots P_{i-1,\tau} K_{i-1,\tau} Q_{i-1,\tau}^{-1} P_{i,\tau}.$$

Es folgt: $$L_1 K_{i,\lambda} L_2 = |\mathfrak{V}_\lambda'|,\quad K_{k+1,\lambda} = K_{k+1,\beta}.$$

Nach Hilfssatz 8 folgt somit:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\lambda}) = \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\beta}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Es ergibt sich: $k + 1 < n$, da sonst die Zahl $k + 1 > i$ den Bedingungen J_1, J_2 genügen würde, was der Definition von i widerspricht.

Wir betrachten nun den Vektor $\mathfrak{V}_{k+1} = \mathfrak{V}(T_{k+1}; T_{k+2})$. Nach Satz I gilt:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,k+1}) \geq j,$$

wobei für $\varkappa(K_{k+1\ k+1}) = j$ das Wort $K_{k+1,k+1}$ rechtsseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}_{k+1}'|$. Somit ergibt sich nach Hilfssatz 7 a für den Vektor $\mathfrak{V}_\eta = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+2})$:

$$Q_{k+1,\eta} = Q_{k+1,k+1}, \qquad P_{k+2,\eta} = P_{k+2,k+1}, \qquad K_{k+2,\eta} = K_{k+2,k+2},$$
$$Q_{k+2,\eta} = Q_{k+2,k+1} = V_{k+2}.$$

Wir zeigen nun, daß die Zahl $k + 1$ den Bedingungen J_1, J_2 genügt. Für

$$\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2,k+1}) \geq \varkappa(R_{k+2}) - j + 1$$

folgt nun: $$\varkappa (K_{k+2,\eta}) \geq \varkappa (R_{k+2}) - j + 1.$$

Wir nehmen daher an, es gelte:

$$\varkappa_{R_{k+2}} (K_{k+2,\, k+1}) < \varkappa (R_{k+2}) - j + 1$$

(sonst wäre J_1, J_2 erfüllt).

Dann folgt nach Satz I:

$$V_{k+1}^{-1} > V_{k+2}, \qquad V_{k+1} \not\approx V_{k+2};$$

$V_{k+1}^{-1} < V_{k+2}$ kann somit nicht gelten. Außerdem folgt nach Satz I:

$$\varkappa_{R_{k+1}} (K_{k+1,\, k+1}) \geq \varkappa (R_{k+1}) - j + 1.$$

Wir betrachten nun den Vektor $\mathfrak{V}_\gamma = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+2})$.

I) Falls $$\boxminus = Q_{i,\alpha}^{-1} T'_{i+1} \ldots T'_k > V_{k+1}$$

nicht gilt mit $$T'_s = P_{s,\alpha} K_{s,\alpha} Q_{s,\alpha}^{-1} \quad (i+1 \leq s \leqq k),$$

so sind für $\mathfrak{V}_\gamma$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 erfüllt. Es ergibt sich:

$$\varkappa (K_{k+1,\gamma}) \geq \varkappa' (R_{k+1}) - j + 1.$$

Für

$$\mathfrak{V}_\beta = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1}), \qquad \mathfrak{V}_\gamma = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+2}), \qquad \mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1}),$$
$$\mathfrak{V}_\eta = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+2})$$

folgt nun aus $K_{k+1,\lambda} = K_{k+1,\beta}$ analog wie oben:

$$K_{k+1,\gamma} = K_{k+1,\eta}$$

(da $\varkappa (K_{k+1,\lambda}) \geq \varkappa (R_{k+1}) - j + 1$ gilt). Es folgt:

$$\varkappa (K_{k+1,\eta}) \geq \varkappa' (R_{k+1}) - j + 1.$$

Der Vektor $\mathfrak{V}_\eta$ genügt somit der Bedingung J_2 und der Vektor $\mathfrak{V}_\lambda$ genügt der Bedingung J_1, was der Definition von i widerspricht.

II) Für $\boxminus > V_{k+1}$ folgt: $V_{k+1} \approx \boxminus^{-1}$, da ja außerdem $\boxminus < V_{k+1}$ gilt. Es ergibt sich:

$$T_i \ldots T_{k+1} \sim V_i K_{i,\alpha} R_{k+1} V_{k+1}^{-1}.$$

Da $V_{k+1}^{-1} > V_{k+2}$ gilt (s. o.), so können wir setzen:

$$V_{k+1}^{-1} \approx \boxminus \approx V_{k+1}^{*-1} X_{k+2}^{-1} V_{k+2}^{-1},$$

$$R_{k+2} \approx X_{k+2}\, Y_{k+2}\, R'_{k+2}, \qquad R_{k+1} \approx R'_{k+1}\, Y'_{k+2}$$

mit
$$R'_{k+1} = K_{k+1,\,k+1}, \qquad R'_{k+2} = K_{k+2,\,k+1}.$$

Hierbei gilt: $\varkappa(Y_{k+2}^{-1}) \leq j-1$, da sonst $T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$ folgen würde.

Nach Hilfssatz 14, Anmerkung, gilt: $V_i^{-1} > V_{i+1}$. Es folgen daher Äquivalenzen:

$$R_i \approx K_{i,\,\alpha}\, Y_{i+1}, \qquad V_i^{-1} \approx Q_{i,\,\alpha}^{-1}\, X_{i+1}^{-1}\, V_{i+1}^{-1}, \qquad R_{i+1} \approx X_{i+1}\, Y_{i+1}\, K_{i+1,\,\alpha}\, Y_{i+2}^{-1}$$

(für $k = i+1$ gilt: $Y_{i+2} = 1$); hierbei ist $K_{i+1,\,\alpha} \neq 1$ nach Satz II.

Nun folgt wie oben: $K_{k+1,\,\eta} = K_{k+1,\,\gamma}$

für
$$\mathfrak{V}_\eta = \mathfrak{V}(T_1;\, \ldots;\, T_{k+2}), \qquad \mathfrak{V}_\gamma = \mathfrak{V}(T_i;\, \ldots;\, T_{k+2}).$$

Somit kann nicht gelten: $\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\,\gamma}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1$, da sonst $k+1$ den Bedingungen J_1, J_2 genügen würde. Das wäre insbesondere dann der Fall, wenn $\{K_{i,\,\alpha},\, R_{k+1}\}$ unverkettet wäre, denn dann würde folgen: $K_{k+1,\,\eta} = K_{k+1,\,\gamma} = K_{k+1,\,k+1}$.

Wir nehmen daher an: $\{K_{i,\,\alpha},\, R_{k+1}\}' = \{R_i'',\, R'_{k+1}\}$ mit der Ergänzung $Z \neq 1$. Es folgt: $\varkappa(Z) \leq j-1$, da sonst nach Axiom B gelten würde:

$$(T_i\, \ldots\, T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1}\, \ldots\, T_i^{-1}) \sim T_i^{-1}.$$

Aus Hilfssatz 4 folgt dann eine Äquivalenz: $R_{k+1} \approx Z^{-1}\, R''_{k+1}\, Y_{k+2}^{-1}$ (das Wort W_1 in Hilfssatz 4 bedeutet hier: $K_{i,\,\alpha}$, W_2: R_{k+1}, W_3: $V_{k+1}^{-1}\, R_{k+2}$). Es folgt:

$$T_i\, \ldots\, T_{k+1} \sim V_i\, R_i''\, R''_{k+1}\, V_{k+1}^{*-1}\, R'_{k+2}\, V_{k+2}^{-1}.$$

Es wird also vorausgesetzt, daß $\varkappa(Y_{k+2}^{-1}\, Z^{-1}) \geq j$ gilt. Hieraus folgt auch:

$$Y_{k+2} \neq 1.$$

A) $Y_{i+1} = 1$.

Es folgt: $(T_{i+1}\, \ldots\, T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1}\, \ldots\, T_{i+1}^{-1}) \sim (V_{i+1}\, X_{i+1})\, R_{k+1}\, (X_{i+1}^{-1}\, V_{i+1}^{-1}) = W$

mit
$$V_i^{-1} > V_{i+1}\, X_{i+1}, \qquad R_{i+1} \approx X_{i+1}\, K_{i+1,\,\alpha}\, Y_{i+2}^{-1} \qquad (Y_{i+2}^{-1} = 1 \text{ für } k = i+1).$$

Es ergibt sich:
$$\varkappa(Y_{i+2}^{-1}\, X_{i+1}) \geq 2j-1$$

(da sonst V_{k+1}^{-1} das charakteristische Teilwort $K_{i+1,\,\alpha}$ von R_{i+1} enthalten würde),

$$\varkappa(Y_{i+2}^{-1}) \leq j-1$$

(sonst würde folgen: $T_{i+1} \sim T_{i+2}^{-1}$), somit:

$$\varkappa(X_{i+1}) \geq j.$$

Bilden wir nun: $\{X_{i+1}, R_{k+1}\}' = \{X'_{i+1}, R^{(3)}_{k+1}\}$ mit der Ergänzung U, so folgt, daß $\{X_{i+1}, R_{k+1}\}$ höchstens $(j-1)$-fach verkettet ist (da sonst gelten würde:

$$(T_{i+1} \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_{i+1}^{-1}) \sim T_{i+1}^{-1}, \qquad T_{i+1} \ldots T_{k+1} \sim T_{i+2} \ldots T_k).$$

Wir zeigen nun, daß eine primäre Transformierte $\tilde{T}_{k+1} = \tilde{V}_{k+1}\, \tilde{R}_{k+1}\, \tilde{V}_{k+1}^{-1}$ existiert mit

$$\tilde{T}_{k+1} \sim W \sim (T_{i+1} \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_{i+1}^{-1}), \qquad V_i^{-1} > \tilde{V}_{k+1}$$

und für $k > i+1$ mit: $\tilde{V}_{k+1} > V_{i+1}$.

Ist zunächst $U \neq 1$, so folgt:

$$W \sim (V_{i+1}\, X'_{i+1})\, R^{(3)}_{k+1}\, U^{-1}\, (X'^{-1}_{i+1}\, V_{i+1}^{-1});$$

hierbei ist $W_1 = V_{i+1}\, X'_{i+1}\, R^{(3)}_{k+1}\, U^{-1}$ reduziert und $W_2 = U^{-1}\, X'^{-1}_{i+1}\, V_{i+1}^{-1} \approx X_{i+1}^{-1}\, V_{i+1}^{-1}$ ebenfalls reduziert. Falls $V_{i+1}\, X'_{i+1}\, R^{(3)}_{k+1}\, U^{-1}\, X'^{-1}_{i+1}\, V_{i+1}^{-1}$ nicht reduziert ist, so folgt die Behauptung durch Verschränkungsreduktion nach Hilfssatz 2.

Ist jedoch $U = 1$, so bilden wir $\{R_{k+1}, X_{i+1}^{-1}\}' = \{R^{(4)}_{k+1}, X''^{-1}_{i+1}\}$ mit der Ergänzung Q. Ist $\{R_{k+1}, X_{i+1}^{-1}\}$ mindestens j-fach verkettet, so folgt diesmal (nach Axiom B):

$$(T_{i+1} \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_{i+1}^{-1}) \sim T_{i+1},$$

also $\tilde{V}_{k+1} \approx V_{i+1}$, woraus $V_i^{-1} > \tilde{V}_{k+1}$, und für $k > i+1$ auch $\tilde{V}_{k+1}^{-1} > V_{i+2}$ folgt. Im anderen Falle ist $(V_{i+1}\, X''_{i+1})\, Q\, R^{(4)}_{k+1}\, (X''^{-1}_{i+1}\, V_{i+1}^{-1})$ reduziert, da ja $V_{i+1}\, X''_{i+1}\, Q\, R^{(4)}_{k+1}$ reduziert ist nach Voraussetzung (als Teilwort von $V_{i+1}\, X_{i+1}\, R_{k+1}$).

Es würde also folgen: $T_{i+1} \ldots T_{k+1} \sim T_i\, T^*_{k+1}\, T_{i+1} \ldots T_k$ und $F(T_{i+1} \ldots T_{k+1})$ wäre eine L-Form und keine L-Wendeform im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher ist $Y_{i+1} = 1$ unmöglich.

B) $Y_{i+1} \neq 1$.

1) $V^*_{i+1} = 1$, $V_{k+1}^{-1} \approx \mathfrak{S} \approx X_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{-1}$.

Aus der Äquivalenz $R_{i+1} \approx X_{i+1}\, K_{i+1,\alpha}\, Y_{i+2}^{-1}$ folgt:

$$\varkappa\,(Y_{i+1}\, K_{i+1,\alpha}\, Y_{i+2}^{-1}) \geq 2j - 1$$

(da sonst X_{i+1} charakteristisches Teilwort von R_{i+1} wäre, was der Definition von V_i^{-1} nach § 1 widerspricht),

$$\varkappa\,(K_{i+1,\alpha}\, Y_{i+1}^{-1}) \geq j$$

(da $\varkappa\,(Y_{i+1}) \leq j-1$ gilt).

a) $Q_{i,\alpha} = 1$. In diesem Falle ist $K_{i+1,\alpha}$ linker Abschnitt von $\mathfrak{S} \approx X_{k+2}^{-1}\, V_{k+2}^{-1}$.

α) $\varkappa(X_{k+2}^{-1}) > \varkappa(K_{i+1,\alpha})$, $\quad X_{k+2}^{-1} \approx K_{i+1,\alpha} X_{k+2}'^{-1}$, $\quad R_{k+2} \approx X_{k+2}' K_{i+1,\alpha}^{-1} Y_{k+2} R_{k+2}'^{-1}$.

$\alpha\alpha$) Für $Y_{i+2} = 1$ (also speziell für $k = i+1$) folgt:

$$\varkappa(K_{i+1,\alpha}^{-1}) \geq j.$$

Nach Axiom B folgt dann

$$K_{i+1,\alpha}^{-1} Y_{k+2} R_{k+2}' X_{k+2}' \approx K_{i+1,\alpha}^{-1} Y_{i+1}^{-1} X_{i+1}^{-1}.$$

Da $Y_{k+2} \neq 1$, $Y_{i+1} \neq 1$ gilt, so folgt, daß $\{Y_{i+1}, Y_{k+2}\}$ verkettet ist. Es existiert daher ein rechter Abschnitt P von $Y_{i+1} \approx LP$ und ein linker Abschnitt Q von $Y_{k+2} \approx QM$ mit $P \triangle Q$. Der Widerspruch folgt dann nach Axiom D_1 durch Vergleich von

$$Z Q M R_{k+1}''^{-1} \quad \text{mit} \quad Z Y_{i+1}^{-1} K_{i,\alpha} \quad \text{und} \quad Y_{i+1} K_{i+1,\alpha} X_{i+1}$$

(da $Y_{i+1} \simeq Y_{i+1} Q$ gilt). Man beachte hierzu auch die Anmerkung 2 zu Axiom D_1.

$\alpha\beta$) Für $Y_{i+2} \neq 1$ (somit $k > i+1$) folgt unter Voraussetzung von $Q_{i+1,\alpha}^{-1} = 1$ ein Widerspruch nach dem Muster von Fall 1 A 2 a beim Beweis von Hilfssatz 12 (man zeigt zunächst wie dort, daß der letzte Sektor P von $K_{i+2,\alpha}^{-1} = K' P$ verwandt ist zum letzten Sektor P' von $X_{k+2}' \approx X_{k+2}'' P'$).

Für $Q_{i+1,\alpha}^{-1} \neq 1$ zeigt man wie bei Fall I A 2 b von Hilfssatz 12 für den letzten Sektor P' von $X_{k+2}' \approx X_{k+2}'' P'$:

$$P' \triangle Y_{i+2}^{-1}.$$

Es ergibt sich: $$\varkappa(K_{i+1,\alpha}) \geq j-1$$

und aus $\varkappa(Y_{i+2}^{-1}) \leq j-1$ folgt:

$$\varkappa(Y_{i+1} K_{i+1,\alpha}) \geq j.$$

Für $X_{k+2} \approx X_{k+2}'' P' K_{i+1,\alpha}^{-1}$ folgt dann nach Axiom B:

$$K_{i+1,\alpha} P'^{-1} X_{k+2}''^{-1} R_{k+2}'^{-1} Y_{k+2}^{-1} \approx K_{i+1,\alpha} Y_{i+2}^{-1} X_{i+1} Y_{i+1}.$$

Hieraus folgt weiter, daß $\{Y_{i+1}, Y_{k+2}\}$ verkettet ist, worauf wir wie unter $\alpha\alpha$) verfahren.

β) $\varkappa(X_{k+2}^{-1}) < \varkappa(K_{i+1,\alpha})$, $\quad K_{i+1,\alpha} \approx X_{k+2}^{-1} R_{i+1}''$. Wir vergleichen nach Axiom D_2:

$$Y_{k+2}^{-1} Z^{-1} R_{k+1}'$$

mit $$Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1} R_{k+2}'^{-1} Y_{i+1} Z^{-1} K_{i,\alpha}^{-1}, \qquad Y_{i+1} Z^{-1} K_{i,\alpha}^{-1}$$

und $$Y_{i+1} X_{k+2}^{-1} R_{i+1}'' Y_{i+2}^{-1} X_{i+1}.$$

Ist nun $\{Y_{i+1}, Y_{k+2}\}$ verkettet, so folgt der Widerspruch wie unter $\alpha\alpha$). Ist dagegen $\{Z, X_{k+2}^{-1}\}$ verkettet, so existiert ein rechter Abschnitt P von $Z \approx Z' P$ und ein linker Abschnitt Q^{-1} von $X_{k+2}^{-1} \approx Q^{-1} X'^{-1}_{k+2}$ mit $P \triangle Q$. Wir vergleichen dann nach Axiom D_1 $Y_{k+2}^{-1} P^{-1} Z'^{-1} R'_{k+1}$

mit $$Y_{k+2}^{-1} X_{k+2}^{-1} R'^{-1}_{k+2} Y_{i+1} Z^{-1} K_{i,\alpha}^{-1} \quad \text{und} \quad X_{k+2} Y_{i+1}^{-1} X_{i+1}^{-1} Y_{i+2} R''^{-1}_{i+1}$$

(es gilt: $X_{k+2} P^{-1} \simeq X_{k+2}$). Aus der Annahme

$$\varkappa (Y_{k+2}^{-1} P^{-1} Z'^{-1}) \geq j > 1$$

folgt dann: $$T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}.$$

γ) $\varkappa (X_{k+2}^{-1}) = \varkappa (K_{i+1,\alpha})$, $\qquad X_{k+2}^{-1} \simeq K_{i+1,\alpha}$.

Mit $\{Z, X_{k+2}^{-1}\}$ ist auch $\{Z, K_{i+1,\alpha}\}$ verkettet. Dieser Fall wird daher analog behandelt wie β).

b) $Q_{i,\alpha} \neq 1$. Es folgt: $Q_{i,\alpha} \triangle Y_{i+1}$; $Q_{i,\alpha}^{-1}$ ist somit verwandt zum ersten Sektor von $\boxminus \approx V_{k+1}^{-1}$, d. h. verwandt zum ersten Sektor P' von $X_{k+2}^{-1} \approx P' X'^{-1}_{k+2}$.

Aus $\varkappa (Z Y_{k+2}) \geq j$ folgt nun nach Axiom D_1 durch Vergleich von

$$Z Y_{k+2} R''^{-1}_{k+1} \quad \text{mit} \quad Z Y_{i+1}^{-1} R''_i \quad \text{und} \quad Y_{k+2}^{-1} P' X'^{-1}_{k+2} R'^{-1}_{k+2}$$

eine der Aussagen:

a) $T_i \ldots T_{k+1} \sim T_{i+1} \ldots T_k$,

b) $T_{k+1} T_{k+2} \sim 1$,

c) $\varkappa (Z Y_{k+2}) = 1$.

In jedem Falle folgt ein Widerspruch.

2) $V_{k+1}^* \neq 1$.

Es folgt: $Y_{k+2} \triangle V_{k+1}^*$; Y_{k+2} ist somit verwandt zum ersten Sektor von $V_{k+1}^{-1} \approx \boxminus$. Somit gilt: $\varkappa (Z) = j - 1$.

a) $Q_{i,\alpha} = 1$.

Y_{k+2} ist verwandt zum ersten Sektor P von $K_{i+1,\alpha} \approx P K'$. Aus $\varkappa (Z Y_{k+2}) \geq j$ folgt dann ein Widerspruch nach Axiom D_1 durch Vergleich von

$$Z Y_{k+2} R'^{-1}_{k+1} \quad \text{mit} \quad Z Y_{i+1}^{-1} R''_i \quad \text{und} \quad Y_{i+1} P K' Y_{i+2}^{-1} X_{i+1}:$$

Es folgt nämlich mindestens eine der drei Aussagen:

$$(T_i \ldots T_k) T_{k+1} (T_k^{-1} \ldots T_i^{-1}) \sim T_i^{-1}, \qquad T_i \ldots T_{k+1} \sim T_{i+1} \ldots T_k,$$
$$T_{i+1} \sim T_{i+2}^{-1}, \qquad \varkappa (Z Y_{k+2}) = 1.$$

b) $Q_{i,\alpha} \neq 1$.

Es folgt: $Y_{i+1} \triangle Q_{i,\alpha} \triangle Y_{k+2}$ (da $Q_{i,\alpha}^{-1}$ Teilwort ist des ersten Sektors von $\boxminus$). Es ergibt sich:

$$Z\,Y_{k+2} \simeq Z\,Y_{i+1}^{-1}$$

und hieraus folgt aus $\varkappa(Z\,Y_{k+2}) \geq j$:

$$Z\,Y_{k+2}\,R_{k+1}'^{-1} \approx Z\,Y_{i+1}^{-1}\,R_i'',$$

was einen Widerspruch ergibt.

Es kann also kein Vektor $\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$ existieren, der den geforderten Bedingungen genügt.

Anmerkung. Nach dem Beweise ist es also nur dann möglich, daß $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ einen L-Wendevektor darstellt mit der Länge $l = 1$, wenn Fall II A eintritt, so daß gilt: $V_{k+1} \approx \boxminus^{-1}$, $Y_{i+1}^{-1} = 1$. In diesem Falle folgt:

$$T_i \ldots T_{k+1} \sim T_i\,T_{k+1}^*\,T_{i+1} \ldots T_k$$

mit

$$T_{k+1}^* \sim (T_{i+1} \ldots T_k)\,T_{k+1}\,(T_k^{-1} \ldots T_{i+1}^{-1}),$$

wobei $\mathfrak{V}(T_i; T_{k+1}^*; T_{i+1}; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist.

HILFSSATZ 16. *Es sei F eine Form vom Grade $n > 0$ und vom Index $i < n$. Dann existiert kein Indexvektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$, so daß für ein k mit $i+1 \leq k \leq n-1$ der Vektor $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ ein L-Wendevektor ist mit einer Länge $l' \geq 2$, wobei*

$$F(T_i; \ldots; T_{k+1})$$

eine L-Wendeform darstellt.

Beweis. Wir nehmen an, es gäbe einen solchen Indexvektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$.

Es sei:

$$T_s = V_s\,R_s\,V_s^{-1} \quad (1 \leq s \leq n).$$

Wir setzen:

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1}),$$

$$\mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1}),$$

$$\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i).$$

Die Länge des L-Wendevektors sei mit l' bezeichnet. Wir setzen

$$l = l' + i - 1.$$

Wir setzen ferner:

$$\mathfrak{B}_\eta = \mathfrak{B}(T_1; \ldots; T_{l-1}),$$
$$\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B}(T_i; \ldots; T_{l-1}),$$
$$\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1}),$$
$$\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_k).$$

Nach Satz III A gilt nun für die Komponente $K_{i,\sigma}$ von $\mathfrak{B}'_\sigma$:

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\sigma}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1.$$

Andererseits gilt: $$\varkappa_{R_i}(K_{i,\alpha}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1 > j,$$

da i den Index bedeutet. Somit folgt nach Hilfssatz 7:

$$K_{k+1,\varkappa} = K_{k+1,\sigma},$$

also nach Satz III A:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\varkappa}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Hieraus ergibt sich: $k+1 < n$, da sonst $k+1 > i$ den Bedingungen J_1, J_2 genügen würde.

Wir setzen nun weiterhin als Abkürzung:

$$\mathfrak{B}_{k+1} = \mathfrak{B}(T_{k+1}; T_{k+2}),$$
$$\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}(T_1; \ldots; T_{k+2}),$$
$$\mathfrak{B}_\mu = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+2}).$$

Da nach Satz I gilt: $\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,k+1}) \geq j$, so folgt nach Hilfssatz 7 a:

$$K_{k+2,\tau} = K_{k+2,k+1}.$$

Daher muß gelten: $$\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2,k+1}) < \varkappa(R_{k+2}) - j + 1,$$

da sonst $k+1 > i$ den Bedingungen J_1, J_2 genügen würde. Es folgt nach Satz I:

$$V_{k+1}^{-1} > V_{k+2}, \qquad \varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1$$

mit $$V_{k+1} \not\approx V_{k+2}.$$

Für $\mathfrak{B}'_\alpha$ gilt: $$\varkappa_{R_i}(K_{i,\alpha}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1.$$

Andererseits folgt nach Satz II:

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\xi}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1.$$

Daher folgt nach Hilfssatz 7:

$$K_{l-1,\eta} = K_{l-1,\xi},$$

also nach Satz II (da $\mathfrak{V}_\xi$ ein L-Vektor ist):

$$\varkappa_{R_{l-1}}(K_{l-1,\eta}) \geq j,$$

wobei für $\varkappa(K_{l-1,\eta}) = j$ das Wort $K_{l-1,\eta}$ linksseitig abgeschlossen ist in $|\mathfrak{V}'_\eta|$.

Da $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_l)$ ein L-Vektor ist, so gilt:

$$\sigma(T_{l-1}, T_l) = \{+1, x_l\}, \qquad (x_l = \pm 1),$$

also für $\mathfrak{V}_{l-1} = \mathfrak{V}(T_{l-1}; T_l)$:

$$\varkappa_{R_{l-1}}(K_{l-1,l-1}) \geq \varkappa(R_{l-1}) - j + 1.$$

Daher folgt nach Hilfssatz 7 für $\mathfrak{V}_\varepsilon = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_l)$:

$$K_{l,\varepsilon} = K_{l,l-1}.$$

Nach Hilfssatz 14 muß somit gelten:

$$V_{l-1}^{-1} > V_l.$$

Der Vektor $\mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1})$ ist ein L-Wendevektor mit der Länge 2. Da $F(T_{l-1} \ldots T_{k+1})$ eine L-Wendeform ist, so ist Satz III A anwendbar; es folgt:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\lambda}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Daher gilt nach Hilfssatz 7 für $\mathfrak{V}_\varkappa = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$:

$$K_{k+1,\lambda} = K_{k+1,\varkappa} = K_{k+1,\sigma}$$

(s. o.), also:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\lambda}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1.$$

Da nun für $\mathfrak{V}_{k+1} = \mathfrak{V}(T_{k+1}; T_{k+2})$ oben gezeigt wurde:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,k+1}) \geq \varkappa(R_{k+1}) - j + 1,$$

so folgt nach Hilfssatz 7:

$$K_{l-1,\mu} = K_{l-1,\lambda}, \qquad K_{k+2,\mu} = K_{k+2,k+1}.$$

Oben wurde bereits gezeigt, daß gilt:

$$V_{l-1}^{-1} > V_l, \qquad V_{k+1}^{-1} > V_k, \qquad V_{k+1} \not\approx V_{k+2},$$

$$\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2,k+1}) < \varkappa(R_{k+2}) - j + 1.$$

Genügt nun der Vektor $\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1})$ den Voraussetzungen von Hilfssatz 11 (bzw. 11′, bzw. 11″), so können wir Hilfssatz 12 (bzw. Hilfssatz 12′) anwenden und wir erhalten die Ungleichung:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\mu}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1. \tag{U}$$

Aus $\quad K_{l-1,\mu} = K_{l-1,\lambda}, \qquad \varkappa_{R_{l-1}}(K_{l-1,\mu}) \geq \varkappa(R_{l-1}) - j + 1, \qquad \varkappa_{R_{l-1}}(K_{l-1,\eta}) \geq j$

(s. o.) folgt dann nach Hilfssatz 7 für $\mathfrak{B}_\tau = \mathfrak{B}(T_1; \ldots; T_{k+2})$:

$$K_{k+1,\tau} = K_{k+1,\mu},$$

also:

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1,\tau}) \geq \varkappa'(R_{k+1}) - j + 1.$$

Die Zahl $k+1 > i$ würde also den Bedingungen J_1, J_2 genügen.

Aus der Ungleichung (U) folgt somit ein Widerspruch. Wir zeigen nunmehr, daß (U) nicht nur erfüllt ist, falls $\mathfrak{B}_\lambda$ den Bedingungen von Hilfssatz 11 (bzw. 11′, bzw. 11″) genügt, sondern auch in den restlichen Fällen; hierbei ergeben sich nur Varianten des seitherigen Beweisganges. Für die Diskussion der möglichen Fälle verwenden wir im folgenden die Unterteilung von Hilfssatz 13. Ebenso übernehmen wir die Bezeichnungen von Hilfssatz 13, wobei jedoch die Indizes 1 bzw. 2 durch $l-1$ bzw. $l-2$ ersetzt werden (in Übereinstimmung mit der Indizesbezeichnung in

$$\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1})).$$

Wir können hierbei die Fälle ausschließen, in denen eine primäre Transformierte

$$T^*_{k+1} \sim (T_l \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_l^{-1})$$

existiert, so daß

$$\mathfrak{B}(T_{l-1}; T^*_{k+1}; T_l; \ldots; T_k)$$

ein L-Vektor ist, da dann auch

$$\mathfrak{B}(T_i; \ldots; T_{l-1}; T^*_{k+1}; T_l; \ldots; T_k)$$

ein L-Vektor wäre, was der Voraussetzung widerspricht, daß

$$F(T_i \ldots T_{k+1}) = F(T_i \ldots T_{l-1}\, T^*_{k+1}\, T_l \ldots T_k)$$

eine L-Wendeform ist. Ebenso braucht der Fall nicht berücksichtigt zu werden, daß für $\mathfrak{B}_\omega = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_k)$ gilt:

$$V_{k+1}^{-1} \approx \mathsf{B} = Q_{l,\omega}^{-1}\, T'_{l+1} \ldots T'_k < V_{k+1}$$

(es folgt hieraus $l<k$, da $\sigma(T_k, T_{k+1})=\{-1, +1\}$ gilt) und gleichzeitig für $\mathfrak{V}_{l-1}=\mathfrak{V}(T_{l-1}; T_l)$:

$$K_{l-1, l-1}=R_{l-1}.$$

Aus der Anmerkung zu Hilfssatz 15 folgt dann ebenso, daß $F(T_i \ldots T_{k+1})$ eine L-Form ist.

Da oben gezeigt wurde, daß für $\mathfrak{V}_{k+1}=\mathfrak{V}(T_{k+1}; T_{k+2})$ gilt:

$$\varkappa_{R_{k+2}}(K_{k+2, k+1})<\varkappa\,(R_{k+2})-j+1,$$

$$V_{k+1}^{-1}>V_{k+2}, \qquad V_{k+1}\not\approx V_{k+2},$$

so folgen nach Satz I die Äquivalenzen:

$$R_{k+1}\approx K_{k+1, k+1}\, Y_{k+2}^{-1},$$

$$V_{k+1}^{-1}\approx V_{k+1}^{*-1}\, X_{k+2}^{-1}\, Y_{k+2}^{-1},$$

$$R_{k+2}\approx X_{k+2}\, Y_{k+2}\, K_{k+2, k+1}$$

mit

$$\varkappa\,(X_{k+2}\, Y_{k+2})\geq j.$$

Aus $Y_{k+2}=1$ würde folgen:

$$K_{k+2, k+1}=R_{k+1}.$$

Somit wäre mit

$$R_{k+1}\, V_{k+1}^{*-1}\, K_{k+2, k+1}\, V_{k+2}^{-1}$$

(Teilwort von $|\mathfrak{V}'_{k+1}|$) auch das Wort $K_{k+1, \lambda}\, W_2$ mit

$$W_2=V_{k+1}^{*-1}\, K_{k+2, k+1}\, V_{k+2}^{-1}$$

reduziert, da $K_{k+1, \lambda}$ rechter Abschnitt ist von R_{k+1}. Setzen wir:

$$W_1=P_{l-1, \lambda}\, K_{l-1, \lambda}\, Q_{l-1, \lambda}^{-1} \ldots P_{k, \lambda}\, K_{k, \lambda}\, Q_{k, \lambda}^{-1}\, P_{k+1, \lambda}$$

(Teilwort von $|\mathfrak{V}'_\lambda|$), so ist nach Hilfssatz 1 mit $W_1\, K_{k+1, \lambda}$ und $K_{k+1, \lambda}\, W_2$ auch $W_1\, K_{k+1, \lambda}\, W_2$ reduziert, da $\varkappa\,(K_{k+1, \lambda})>1$ gilt. Es folgt:

$$T_{l-1} \ldots T_{k+2}\sim W_1\, K_{k+1, \lambda}\, W_2, \qquad K_{k+1, \mu}=K_{k+1, \lambda},$$

so daß die Ungleichung (U) erfüllt ist, da

$$\varkappa_{R_{k+1}}(K_{k+1, \lambda})\geq\varkappa\,(R_{k+1})-j+1$$

gilt (s. o.).

Wir können also voraussetzen: $Y_{k+2} \neq 1$. Für $V^*_{k+2} \neq 1$ folgt dann nach Satz I, Anmerkung 3a: $Y_{k+2} \triangle V^*_{k+1}$, so daß also Y_{k+2} verwandt ist zum letzten Sektor von V_{k+1}.

In der Einteilung nach Hilfssatz 13 ist auf die Fälle I B 2 b und II A Hilfssatz 12′ anwendbar; außerdem gilt: $V_{l-1}^{-1} > V_l$ (s. o.). In der folgenden Untersuchung wird in der 1., 2. und 3. Abteilung für

$$\mathfrak{B}_\lambda = \mathfrak{B}(T_{l-1}; \ldots; T_{k+1}) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_\psi = \mathfrak{B}(T_l; \ldots; T_{k+1})$$

vorausgesetzt:

$$K_{k+1,\lambda} \neq K_{k+1,\psi}.$$

1. Abteilung

Es gelte weder $V_{l-1}^{-1} < T_l$ noch $K_{k+1,\mu} = K_{k+1,\psi}$.

Fall I B 1 a βα

Es gelten Äquivalenzen:

$$R_{k+1} \approx V''_{l-1} R''_{k+1} Y_{k+2}^{-1},$$

$$R_{k+2} \approx X_{k+2} Y_{k+2} R'_{k+2};$$

hierbei ist der letzte Sektor P von V_{k+1} verwandt zum ersten Sektor von R_{k+1}.

Für $V^*_{k+1} = 1$, $V_{k+1} \approx V_{k+2} X_{k+2}$ folgt somit für den letzten Sektor P' von X_{k+2}:

$$P' \triangle P$$

(es ist $X_{k+2} \neq 1$, denn sonst würde folgen: $\varkappa(Y_{k+2}) \geq j$, $T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$ nach Axiom B). Für $V^*_{k+1} \neq 1$, $V_{k+1} \approx V_{k+2} X_{k+2} V^*_{k+1}$ folgt:

$$V^*_{k+1} \triangle Y_{k+2};$$

ist hierbei P' der letzte Sektor von $X_{k+2} Y_{k+2}$, so folgt: $P' \triangle P$.

Aus $V''_{l-1} \triangle P$ folgt somit in beiden Fällen für $\varkappa(Y_{k+2}^{-1} V''_{l-1}) \geq j$:

$$T_{k+1} \sim T_{k+2}^{-1}$$

nach Axiom B.

Fall I B 1 b

Es folgt eine Äquivalenz:

$$T_{l-1} \ldots T_{k+1} \sim V_{l-1} R'_{l-1} V''^{-1}_{l-1} V^{(3)}_{k+1} R_{k+1} V_{k+1}^{-1} = W.$$

α) Für
$$V''_{l-1} \triangle V^{(3)}_{k+1},$$
$$R'_{l-1} \approx R''_{l-1} V^{(3)-1}_{k+1},$$
$$R_{k+1} \approx V''_{l-1} R'_{k+1}$$
folgt:
$$W \sim V_{l-1} R''_{l-1} R'_{k+1} V^{-1}_{k+1}$$

Es sei $\{R''_{l-1}, R'_{k+1}\}' = \{R^{(3)}_{l-1}, R''_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Z. Dann folgen Äquivalenzen:
$$R_{l-1} \approx R^{(3)}_{l-1} Z V^{(3)-1}_{k+1} Y_l^{-1},$$
$$R_{k+1} \approx V''_{l-1} Z^{-1} R''_{k+1} Y^{-1}_{k+2}.$$

Hierbei gilt: $V''_{l-1} \triangle P$, wobei P den letzten Sektor von V_{k+1} bedeutet.

Für $V^*_{k+1} \neq 1$ folgt:
$$Y_{k+2} \triangle V^*_{k+1} \triangle V^{(3)}_{k+1} \triangle V''_{l-1},$$
also:
$$\varkappa (Y^{-1}_{k+2} V''_{l-1} Z^{-1}) = \varkappa (V''_{l-1} Z^{-1}) \leq j - 1 \qquad \text{(s. o.)}.$$

Für $V^*_{k+1} = 1$ folgt:
$$X_{k+2} \approx X'_{k+2} P' \quad \text{mit} \quad P' \triangle P.$$

Aus $\varkappa (Y^{-1}_{k+2} V''_{l-1} Z^{-1}) \geq j$ würde folgen nach Axiom D_1, daß sich ein Widerspruch ergibt zur Annahme, daß $F(T_1 \ldots T_{k+2})$ den Grad $k+2$ besizt (Vergleich von
$$Y^{-1}_{k+2} V''_{l-1} Z^{-1} R''_{k+1} \quad \text{mit} \quad Y^{-1}_{k+2} P'^{-1} X'^{-1}_{k+2} R'^{-1}_{k+2} \quad \text{und} \quad Z V^{(3)-1}_{k+1} Y_l^{-1} R^{(3)}_{l-1};$$
es gilt: $Y_l \triangle V''_{l-1} \triangle P' \triangle V^{(3)}_{k+1}$).

β) Falls α) nicht gilt, so folgt gemäß Hilfssatz 2 eine Äquivalenz:
$$R_{k+1} \approx X^{-1} R''_{k+1} Y^{-1}_{k+2},$$
wobei X verwandt ist zum letzten Sektor von V_{k+1}. Für $V^*_{k+1} \neq 1$ folgt:
$$Y_{k+2} \triangle X, \; \varkappa (Y^{-1}_{k+2} X^{-1}) = 1 < j.$$
Für $V^*_{k+1} = 1$ folgt:
$$X_{k+2} \approx X'_{k+2} P' \quad \text{mit} \quad P' \triangle P,$$
woraus sich für $\varkappa (Y^{-1}_{k+2} X^{-1}) \geq j$ wie unter I B 1 a $\beta\alpha$) ein Widerspruch ergibt.

Fall I B 3 b

Bei Fall I B 3 gilt eine Äquivalenz:
$$T_{l-1} \ldots T_{k+1} \sim V_{l-1} R'_{l-1} V'^{-1}_{l-1} V''_{k+1} R'_{k+1} V^{-1}_{k+1}$$

mit
$$R_{l-1} \approx R'_{l-1}\, Y_l^{-1} \quad (\text{evtl. gilt } Y_l = 1)$$
$$R_{k+1} \approx R_l^{(3)-1}\, R_{k+1} \quad (R_l^{(3)} \neq 1),$$
$$R_l^{(3)} \triangle V''_{k+1}.$$

Für $V^*_{k+1} \neq 1$ gilt:
$$Y_{k+2} \triangle V^*_{k+1} \triangle V''_{k+1} \triangle R_l^{(3)}.$$

Es braucht nur der Fall betrachtet zu werden, daß $V'^{-1}_{l-1} \parallel V''_{k+1}$ gilt (Fall I B 3 b). Es sei
$$\{V'^{-1}_{l-1},\ V''_{k+1}\}' = V''^{-1}_{l-1},\ V^{(3)}_{k+1}\}.$$

Es folgt:
$$T_{l-1}\ \ldots\ T_{k+2} \sim V_{l-1}\, R'_{l-1}\, V''^{-1}_{l-1}\, V^{(3)}_{k+1}\, R''_{k+1}\, V^{*-1}_{k+1}\, R'_{k+2}\, V^{-1}_{k+2} = W$$

mit
$$R_{k+1} \approx R_l^{(3)-1}\, R''_{k+1}\, Y^{-1}_{k+2},$$
$$R_{k+2} \approx X_{k+2}\, K_{k+2,\mu}\, Y^{-1}_{k+2}.$$

Analog Fall I B 1 a $\beta\alpha$ folgt:
$$\varkappa\,(Y^{-1}_{k+2}\, R_l^{(3)-1}) < j.$$

Wir brauchen also nur den Fall zu betrachten, daß W nicht reduziert ist. Analog Fall III C beim Beweise von Satz I erhalten wir folgende Fallunterscheidungen:

α) $R'_{l-1} \approx R''_{l-1}\, V^{(3)-1}_{k+1}$, $\quad R'_{k+1} \approx V''_{l-1}\, R''_{k+1}$, $\quad V''_{l-1} \triangle V^{(3)}_{k+1} \triangle R_l^{(3)}$.

Es sei $\{R''_{l-1},\ R''_{k+1}\}' = \{R^{(3)}_{l-1},\ R^{(3)}_{k+1}\}$ mit der Ergänzung Z, dann folgt:
$$W \sim W' = V_{l-1}\, R^{(3)}_{l-1}\, R^{(3)}_{k+1}\, V^{*-1}_{k+1}\, R'_{k+2}\, V^{-1}_{k+2}$$

mit
$$R_{k+1} \approx R_l^{(3)-1}\, V''_{l-1}\, Z^{-1}\, R^{(3)}_{k+1}\, Y^{-1}_{k+2}.$$

Für $V^*_{k+1} \neq 1$ gilt: $Y_{k+2} \triangle R_l^{(3)}$ (s. o.), also:
$$\varkappa\,(Y^{-1}_{k+2}\, R_l^{(3)-1}\, V''_{l-1}\, Z^{-1}) = \varkappa\,(R_l^{(3)-1}\, V''_{l-1}\, Z^{-1}) \leq j-1.$$

Für $V^*_{k+1} = 1$ folgt: $X_{k+2} \approx X'_{k+2}\, P'$ mit $P' \triangle V''_{k+1} \triangle R_l^{(3)}$, somit:
$$Z\, V''^{-1}_{l-1}\, R_l^{(3)}\, P'^{-1} \simeq Z\, V^{(3)-1}_{k+1}.$$

Nach Axiom D_1 folgt dann:
$$\varkappa\,(Y^{-1}_{k+2}\, R_l^{(3)-1}\, V''_{l-1}\, Z^{-1}) < j$$
(analog I B 1 b α).

β) Falls α) nicht gilt, so zeigt die Diskussion der verschiedenen Fälle (analog Fall III C beim Beweise von Satz I), daß alsdann für $\mathfrak{V}_\mu = \mathfrak{V}\,(T_{l-1};\ \ldots;\ T_{k+2})$ folgt:

$$R_{k+1} \approx X\, K_{k+1,\mu}\, Y_{k+2}^{-1},$$

wobei X verwandt ist zum letzten Sektor von V_{k+1}. Für $V_{k+1}^{*} \neq 1$ folgt somit:

$$Y_{k+2} \triangle X, \qquad \varkappa\,(Y_{k+2}^{-1}\, X) = 1 < j.$$

Für $V_{k+1}^{*} = 1$ folgt: $X_{k+2} \approx X'_{k+2}\, P'$ mit $P' \triangle X$. Analog Fall I B 1 a $\beta\alpha$ folgt nach Axiom B:

$$\varkappa\,(Y_{k+2}^{-1}\, X) < j.$$

Fall II B

Es folgt:

$$T_{l-1} \,\ldots\, T_{k+1} \sim V_{l-1}\, R'_{l-1}\, V'^{-1}_{l-1}\, R_l^{(3)}\, V''_{k+1}\, R_{k+1}\, V_{k+1}^{-1} = W.$$

Für nicht reduziertes W erhält man ein reduziertes $W' \sim W$ und mit

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}\,(T_1;\, \ldots\, ;\, T_{k+2})$$

folgt nach Hilfssatz 2:

$$R_{k+1} \approx X\, K_{k+1,\sigma}\, Y_{k+2}^{-1},$$

wobei für $X \neq 1$ gilt: $X \triangle V''_{k+1}$. Der Fall wird analog behandelt wie Fall I B 1 a $\beta\alpha$.

2. Abteilung

Es gelte wohl $V_{l-1}^{-1} < T_l$, $K_{k+1,\lambda} \neq K_{k+1,\varphi}$ jedoch nicht $T'_l \,\ldots\, T'_k > V_{k+1}$.

Fall I A 2

Es folgt:

$$T_{l-1} \,\ldots\, T_{k+1} \sim V_{l-1}\, R'_{l-1}\, R_l^{(3)}\, V''_{k+1}\, R_{k+1}\, V_{k+1}^{-1} \sim V_{l-1}\, R'_{l-1}\, V''_{k+1}\, R'_{k+1}\, V_{k-1}^{-1}$$

mit $$R_{k+1} \approx R_l^{(3)-1}\, R'_{k+1}, \qquad R_l^{(3)} \triangle V''_{k+1} \triangle P,$$

wobei P den letzten Sektor von V_{k+1} bedeutet.

a) $R'_{l-1} > V''_{k+1}$, $\qquad R'_{l-1} \approx R''_{l-1}\, V''^{-1}_{k+1}$.

Wir setzen $$\{R''_{l-1},\, R'_{k+1}\}' = \{R_{l-1}^{(3)},\, R''_{k+1}\}$$

mit der Ergänzung Z. Es folgen die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} T_{l-1} \,\ldots\, T_{k+1} &\sim V_{l-1}\, R_{l-1}^{(3)}\, R''_{k+1}\, V_{k+1}^{-1}, \\ R_{l-1} &\approx R_{l-1}^{(3)}\, Z\, V''^{-1}_{k+1}\, Y_l^{-1}, \\ R_{k+1} &\approx R_l^{(3)-1}\, Z^{-1}\, K_{k+1,\mu}\, Y_{k+2}^{-1}. \end{aligned}$$

Für $V^*_{k+1} \neq 1$ folgt:

$$Y_{k+2} \triangle V^*_{k+1} \triangle V''_{k+1} \triangle R^{(3)}_l,$$

$$\varkappa (Y^{-1}_{k+2} R^{(3)-1}_l Z^{-1}) = \varkappa (R^{(3)-1}_l Z^{-1}) \leq j - 1$$

(Satz III A).

Für $V^*_{k+1} = 1$ gilt:

$$X_{k+2} \approx X'_{k+2} P' \quad \text{mit} \quad P' \triangle P \triangle R^{(3)}_l.$$

Aus $\varkappa (Y^{-1}_{k+2} R^{(3)-1}_l Z^{-1}) \geq j$ folgt ein Widerspruch nach Axiom D_1 (Vergleich von

$$Y^{-1}_{k+2} R^{(3)-1}_l Z^{-1} K_{k+1,\mu} \quad \text{mit} \quad Y^{-1}_{k+2} P'^{-1} X'^{-1}_{k+2} R''^{-1}_{k+2} \quad \text{und} \quad Z V''^{-1}_{k+1} Y^{-1}_l R^{(3)}_{l-1}).$$

b) $R'_{l-1} \| V''_{k+1}$.

Es folgt:

$$T_{l-1} \ldots T_{k+1} \sim V_{l-1} R''_{l-1} V^{(3)}_{k+1} R'_{k+1} V^{-1}_{k+1}.$$

Setzen wir $W_1 = V_{l-1} R''_{l-1}$, $W_2 = R'_{k+1} V^{-1}_{k+1}$, so ist $W_1 V^{(3)}_{k+1}$ reduziert und ebenso $V^{(3)}_{k+1} W_2$. Ist nun $W = W_1 V^{(3)}_{k+1} W_2$ nicht reduziert, so gilt nach Hilfssatz 2:

$$R_{k+1} \approx R^{(3)-1}_l Q K_{k+1,\mu} Y^{-1}_{k+2} \quad \text{mit} \quad Q \triangle R^{(3)-1}_l.$$

Für $V^*_{k+1} \neq 1$ folgt:

$$Y^{-1}_{k+2} \triangle R^{(3)-1}_l, \quad \varkappa (Y^{-1}_{k+2} R^{(3)-1}_l Q) = 1 < j.$$

Für $V^*_{k+1} = 1$ folgt: $\qquad \varkappa (Y^{-1}_{k+2} R^{(3)-1}_l Q) \leq j - 1$

nach Axiom B analog Fall I B 1 a $\beta\alpha$.

Fall II B

Der Fall wird behandelt wie Fall II B in der 1. Abteilung ($V'_{l-1} = 1$ gesetzt).

3. Abteilung

Es gelte sowohl $V^{-1}_{l-1} < T_l$ als auch $T'_l \ldots T'_k > V_{k+1}$, $K_{k+1,\lambda} \neq K_{k+1,\psi}$ und außerdem

$$K_{l-1,\omega} = R_{l-1} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{V}_\omega = \mathfrak{V}(T_{l-1}; \ldots; T_k).$$

In der Einteilung gemäß Hilfssatz 13 wird Fall I A 2 behandelt wie in der 2. Abteilung ($R'_{l-1} = R_{l-1}$ gesetzt). Im Falle II ist Hilfssatz 12′ anwendbar.

4. Abteilung

$K_{k+1,\lambda} = K_{k+1,\psi}$.

Unter Verwendung von Hilfssatz 7 und Hilfssatz 7 a folgt nach dem Muster der obigen Beweise: $K_{k+1,\tau} = K_{k+1,\varepsilon}$. In diesem Falle wird die Ungleichung (U) bewiesen, indem man $\mathfrak{V}_\varepsilon$ betrachtet (Hilfssatz 15, Fall II).

Anmerkung

Existiert also ein solcher Vektor $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ mit einer Länge $l' \geq 2$, so existiert für ein s mit $i+1 \leq s \leq k$ eine primäre Transformierte

$$T^*_{k+1} \sim (T_s \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_s^{-1}),$$

so daß $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{s-1}; T^*_{k+1}; T_s; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist.

Damit erhalten wir:

Satz IV. *Ist F eine Form vom Grade n und vom Index $i < n$, dann existiert ein Indexvektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$, so daß $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_n)$ ein L-Vektor ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i; T^*_{i+1}; \ldots; T^*_n)$ ein Indexvektor von F. Dann betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$ aller Indexvektoren $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i; T_{i+1}; \ldots; T_n) \in F$.

Angenommen nun, es würde kein Vektor $\mathfrak{V} \in \mathfrak{M}$ existieren, so daß $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_n)$ ein L-Vektor ist. Dann existiert zu jedem solchem Vektor $\mathfrak{V} \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n)$ eine Zahl

$$k' = k'(\mathfrak{V}), \qquad i+1 \leq k' \leq n-1,$$

so daß zwar $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist, jedoch nicht mehr $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ (da $\mathfrak{V}(T_i; T_{i+1})$ nach Hilfssatz 14 ein L-Vektor ist). Innerhalb der Menge $\mathfrak{K}$ der Zahlen $k'(\mathfrak{V})$ mit $\mathfrak{V} \in \mathfrak{M}$ existiert eine größte Zahl, die wir mit $k = k(\mathfrak{M})$ bezeichnen wollen.

Zu diesem maximalen k existiert somit ein Indexvektor $\mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in \mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{k+1})$ ein L-Wendevektor ist. Nach Hilfssatz 15 und Hilfssatz 16 kann aber $\mathfrak{V}$ weder die Länge $l = 1$ noch eine Länge $l \geq 2$ besitzen, es sei denn, es existiere eine Zahl s mit $i+1 \leq s \leq k$ und eine primäre Transformierte

$$T^*_{k+1} \sim (T_s \ldots T_k)\, T_{k+1}\, (T_k^{-1} \ldots T_s^{-1}),$$

so daß $\mathfrak{V}(T_{s-1}; T^*_{k+1}; T_s; \ldots; T_k)$ und damit auch $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_{s-1}; T^*_{k+1}; T_s; \ldots; T_k)$ ein L-Vektor ist. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß k maximal gewählt ist.

Satz V. *Es sei F eine Form vom Grade n und vom Index $i < n$. Dann existiert ein Indexvektor*

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$$

mit

$$\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\},$$

so daß für $\mathfrak{V}_\omega = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{i+1})$ gilt:

$$K_i = K_{i,\omega}.$$

Beweis. Wir wählen den Indexvektor

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F$$

gemäß Satz IV; dann ist $\mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_n)$ ein L-Vektor. Setzen wir nun

$$\mathfrak{V}_\sigma = \mathfrak{V}(T_i; \ldots; T_n)$$

und

$$\mathfrak{V}_\alpha = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_i),$$

so gilt nach Satz II und nach J_1:

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\sigma}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1,$$

$$\varkappa_{R_i}(K_{i,\alpha}) \geq \varkappa(R_i) - j + 1.$$

Wir können daher Hilfssatz 7 anwenden und es ergibt sich:

$$R_i \approx X\,K_i\,Y$$

mit

$$K_{i,\alpha} \approx K_i\,Y, \qquad K_{i,\sigma} \approx X\,K_i, \qquad \varkappa(X) \leq j-1, \qquad \varkappa(Y) \leq j-1.$$

Setzen wir ferner $\mathfrak{V}_i = \mathfrak{V}(T_i; T_{i+1})$, so folgt nach Satz II:

$$K_{i,\alpha} = K_{i,\tau}.$$

Wir können nunmehr auf $\mathfrak{V}_\alpha$, $\mathfrak{V}_\tau$ und $\mathfrak{V}_\omega = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_{k+1})$ wiederum Hilfssatz 7 anwenden und erhalten:

$$R_i \approx X\,K_{i,\omega}\,Y, \qquad K_i = K_{i,\omega}.$$

Es gilt somit:

THEOREM A. *Aus den Axiomen Z, B, D_1, D_2 ergibt sich für ein Folgewort W, das nicht äquivalent 1 ist ($W \neq 1$): jedes reduzierte Wort W', $W' \sim W$, enthält ein Teilwort K_i, das gleichzeitig Teilwort ist eines definierenden Wortes*

$$R_i \in \mathfrak{R} \quad \textit{mit} \quad R_i = X\,K_i\,Y, \quad \varkappa(X) \leq j-1, \quad \varkappa(Y) \leq j-1.$$

Beweis. Aus $W \neq 1$ folgt: $W' \neq 1$. Die Form $F = F(W)$ besitzt daher einen Grad $n > 0$; der Index von F sei i. Wir betrachten nun einen Indexvektor

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n) \in F.$$

Für $i = n$ folgt der Satz unmittelbar aus der Definition von i (Bedingung J_1); für $i < n$ folgt der Satz aus Satz V.

Zusatz. Wie man unmittelbar erkennt, läßt sich Theorem A auch ableiten, wenn man anstelle von Axiom B ein etwas schwächeres Axiom B_0 verwendet (vgl. hierzu den Zusatz zu Satz I und den Zusatz zu Satz II).

Axiom B_0.

Es seien gegeben zwei definierende Relationen

$$R_1 = 1, \quad R_1 \in \mathfrak{R}, \qquad R_2 = 1, \quad R_2 \in \mathfrak{R}.$$

Es sei

$$\{R_1, R_2\}' = \{R_1', R_2'\}.$$

Dann gilt:

1) $\varkappa_{R_i}(R_i') \geq \varkappa'(R_i) - j + 1 \quad (i = 1, 2)$.

2) *Gilt für irgendein* i $(i = 1, 2)$: $\varkappa_{R_i}(R_i') = \varkappa'(R_i) - j + 1$, *dann ist* R_1' *(und damit auch* R_2'*) sektoriell abgeschlossen in* $R_1' R_2'$.

§ 8. Das Wortproblem

In diesem Paragraphen wird für die betrachtete Klasse von Gruppen die Lösung des Wortproblems angegeben (insoweit zusätzlich noch eine gewisse Endlichkeitsbedingung erfüllt ist). Theorem A liefert ein einfaches Entscheidungsverfahren. Es sei $W = 1$ eine Folgerelation der durch die Menge $\mathfrak{R}$ gegebenen zusätzlichen definierenden Relationen und der im freien Produkt $\mathfrak{F}_a$ geltenden Vertauschungsrelationen (§ 1). Dann ist die Form $F(W)$ nicht leer, so daß ein Grad n von F definiert ist.

Für $W \sim 1$ ist das Problem trivial. Für $W \nsim 1$ (W nicht äquivalent 1) gilt: $n > 0$ und es existiert nach Theorem A ein Vektor

$$\mathfrak{U} \in F, \qquad \mathfrak{U} = \mathfrak{V}(T_1; \ldots; T_n), \qquad T_k = V_k R_k V_k^{-1} \, (1 \leq k \leq n),$$

so daß in dem reduzierten Vektor $\mathfrak{U}' = \{P_1, K_1, Q_1^{-1}, \ldots, P_n, K_n, Q_n^{-1}\}$ für ein bestimmtes i mit $1 \leq i \leq n$ die Komponente K_i ein charakteristisches Teilwort von R_i darstellt.

Es folgt:

$$|\mathfrak{U}'| = X K_i Y, \qquad R_i = P K_i Q, \qquad W = W_0 \sim \prod_{k=1}^{n} T_k \sim |\mathfrak{U}'| W_0'$$

für geeignete Worte X, Y, P, Q mit

$$\varkappa(K_i) > \varkappa(P^{-1} Q^{-1}) + 2.$$

Mit W_0 ist auch W_0' und $W_1 = X P^{-1} Q^{-1} Y$ Folgewort und zwar gilt:

$$\varkappa(W_1) < \varkappa(W_0') \leq \varkappa(W_0).$$

Durch Fortsetzung dieses Reduktionsverfahrens gelangen wir daher schließlich zum Leerwort.

Ist nun umgekehrt ein beliebiges Wort $W = W_0$ gegeben, so gelangen wir durch ein finites Verfahren zu einem reduzierten Wort $W_0' \sim W_0$ (z. B. $W_0' = \overline{W}_0$). Es sei $\mathfrak{W}(W)$ die (endliche) Menge aller $W_0'' \approx W_0' \sim W_0$. Angenommen, es existiere ein $W_0'' \in \mathfrak{W}(W)$ mit $W_0'' = X K_i Y$, so daß K_i ein charakteristisches Teilwort des definierenden Wortes $R_i \in \mathfrak{R}$ darstellt: $R_i = P K_i Q$ mit $\varkappa(K_i) > \varkappa(P^{-1} Q^{-1}) + 2$. Dann können wir versuchen, mit $W_1 = X P^{-1} Q^{-1} Y$ dieses Verfahren fortzusetzen. Ist W ein Folgewort, so gelangen wir schließlich zum Leerwort; umgekehrt erkennt man leicht, daß W ein Folgewort ist, falls sich das Verfahren fortsetzen läßt bis zum Leerwort.

Die Durchführbarkeit des Reduktionsverfahrens ist also notwendig und hinreichend dafür, daß das Wort W ein Folgewort ist; hierbei muß allerdings sichergestellt sein, daß jeder einzelne Schritt dieses Verfahrens finit ist. Hierzu genügt die an die Menge $\mathfrak{R}$ zu stellende Forderung:

Axiom F (*Axiom der Finitheit*).

1) *Das Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ soll explizit gegeben sein.*
2) *Die Menge $\mathfrak{R}$ soll explizit gegeben sein, d. h. für ein beliebiges Wort R aus Buchstaben von $\mathfrak{S}^{\pm 1}$ soll durch ein (finites) Entscheidungsverfahren feststellbar sein, ob $R \in \mathfrak{R}$ gilt oder nicht.*
3) *Ist C ein beliebiges Wort (aus Buchstaben von $\mathfrak{S}^{\pm 1}$), so soll (finit) entscheidbar sein, ob Relationen $R \in \mathfrak{R}$ existieren, welche C als charakteristisches Teilwort enthalten; eine dieser Relationen soll angebbar sein durch ein finites Verfahren.*[1]

Nach den vorhergehenden Untersuchungen gilt nun:

Theorem B. *Genügt die Menge $\mathfrak{R}$ den Axiomen Z, B (bzw. B_0), D_1, D_2 und F, so ist das Wortproblem lösbar durch das oben angegebene Verfahren.*

Offen bleibt hierbei die Frage, ob eine Gruppe, die anderweitig gegeben ist, sich in einer solchen Form schreiben läßt, daß die geforderten Bedingungen erfüllt sind (Isomorphieproblem).

Was die Frage der Entbehrlichkeit der Axiome betrifft, so kann durch ein Gegen-

[1] Es liegt nicht im Rahmen dieser Arbeit, genau zu klären, was unter „explizit gegeben" und „finit" zu verstehen ist; gemeint ist ein konstruktives Verfahren, das in endlich vielen Schritten die Entscheidung liefert und in jedem Einzelfall auch wirklich durchführbar ist. Die Forderung 3) wird erst durch das verwendete Verfahren erforderlich, während 1) und 2) bereits durch die Problemstellung gefordert werden.

beispiel gezeigt werden, daß die Axiome Z und B (zusammen mit F) nicht hinreichen, das Wortproblem durch das oben angegebene Reduktionsverfahren zur Entscheidung zu bringen.[1] Wir konstruieren im folgenden in einer Gruppe (vermittels acht primärer Transformierten) ein reduziertes Folgewort, das kein Teilwort enthält, das gleichzeitig charakteristisches Teilwort ist eines definierenden Wortes (solche Folgeworte sind relativ „selten").

Die Mengen $\mathfrak{S}_\alpha$ sollen hierbei nur aus einem Buchstaben bestehen, so daß sich $\mathfrak{F}_\alpha$ als freie Gruppe mit dem Erzeugendensystem $\mathfrak{S}$ erweist. Die Menge $\mathfrak{S}$ bestehe aus 75 Elementen und zwar aus den Erzeugenden:

$$a_\alpha (1 \leq a \leq 15); \quad b_\beta (4 \leq \beta \leq 12); \quad c_\gamma (4 \leq \gamma \leq 12); \quad d_1, d_2, d_3,$$

sowie

$$d_\delta (7 \leq \delta \leq 12); \quad e_\varepsilon (1 \leq \varepsilon \leq 15); \quad f_\zeta (10 \leq \zeta \leq 15); \quad g_{10}, g_{11}, g_{12}; \quad h_\eta (7 \leq \eta \leq 15).$$

Die Menge $\mathfrak{R}$ bestehe aus den definierenden Worten $R_i^{\pm 1}$ sowie denjenigen Worten, die hieraus durch zyklische Permutation der Buchstaben entstehen; hierbei sei:

$$\begin{aligned}
R_1 &= a_1 \ldots a_{15}, \\
R_2 &= a_9^{-1} a_8^{-1} a_7^{-1} b_4 \ldots b_{12} c_6^{-1} c_5^{-1} c_4^{-1}, \\
R_3 &= a_{12}^{-1} a_{11}^{-1} a_{10}^{-1} c_4 \ldots c_{12} d_9^{-1} d_8^{-1} d_7^{-1}, \\
R_4 &= d_1 d_2 d_3 a_{15}^{-1} a_{14}^{-1} a_{13}^{-1} d_7 \ldots d_{12} e_9^{-1} e_8^{-1} e_7^{-1}, \\
R_5 &= e_1 \ldots e_{15}, \\
R_6 &= e_{12}^{-1} e_{11}^{-1} e_{10}^{-1} d_{12}^{-1} d_{11}^{-1} d_{10}^{-1} c_{12}^{-1} c_{11}^{-1} c_{10}^{-1} f_{10} \ldots f_{15}, \\
R_7 &= f_{12}^{-1} f_{11}^{-1} f_{10}^{-1} c_9^{-1} c_8^{-1} c_7^{-1} b_{12}^{-1} b_{11}^{-1} b_{10}^{-1} g_{10} g_{11} g_{12} h_9^{-1} h_8^{-1} h_7^{-1}, \\
R_8 &= e_{15}^{-1} e_{14}^{-1} e_{13}^{-1} f_{15}^{-1} f_{14}^{-1} f_{13}^{-1} h_7 \ldots h_{15}.
\end{aligned}$$

Da in den R_i $(1 \leq i \leq 8)$ jeder Sektor nur aus einem Buchstaben besteht, so genügt $\mathfrak{R}$ den in § 1 angegebenen Bedingungen. Die Menge $\mathfrak{R}$ genügt den Axiomen Z und B für $j = 4$; da $\varkappa(R_i) = 15 > 4j - 2$ gilt für $1 \leq i \leq 8$, so ist Axiom Z erfüllt — die Gültigkeit von Axiom B läßt sich kombinatorisch nachprüfen.

Wir definieren die primären Transformierten

$$T_i = V_i R_i V_i^{-1} \qquad (1 \leq i \leq 8)$$

mit

---

[1] Obwohl das Vierrelationenaxiom D_2 nur gebraucht wird beim Beweis von Hilfssatz 15, II B 1 a, Unterfall β und γ, sowie (darauf aufbauend) beim Beweis von Hilfssatz 16, 4. Abteilung, hat Verf. den Eindruck gewonnen, daß dieses Axiom zum Beweise von Theorem A tatsächlich nötig ist. Verf. hofft, darauf noch zurückkommen zu können (Zusatz bei der Korrektur).

$$V_1 = e_1 \ldots e_6\, d_1\, d_2\, d_3,$$
$$V_2 = e_1 \ldots e_6\, d_1\, d_2\, d_3\, a_{15}^{-1} \ldots a_{10}^{-1},$$
$$V_3 = e_1 \ldots e_6\, d_1\, d_2\, d_3\, a_{15}^{-1}\, a_{14}^{-1}\, a_{13}^{-1},$$
$$V_4 = e_1 \ldots e_6,$$
$$V_5 = 1,$$
$$V_6 = e_{15}^{-1}\, e_{14}^{-1}\, e_{13}^{-1},$$
$$V_7 = e_{15}^{-1}\, e_{14}^{-1}\, e_{13}^{-1}\, f_{15}^{-1}\, f_{14}^{-1}\, f_{13}^{-1},$$
$$V_8 = 1.$$

Es ergibt sich das reduzierte Folgewort

$$W \sim T_1 \ldots T_8,$$
$$W = e_1 \ldots e_6\, d_1\, d_2\, d_3\, a_1 \ldots a_6\, b_4 \ldots b_9\, g_{10}\, g_{11}\, g_{12}\, h_{10} \ldots h_{15}.$$

W enthält kein Teilwort, das gleichzeitig charakteristisches Teilwort ist eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$.

Ein Sonderfall liegt dann vor, wenn jedes $\mathfrak{S}_\alpha (\alpha \in \mathfrak{J})$ nur aus einem einzigen Buchstaben besteht, so daß sich $\mathfrak{F}_a$ als die von $\mathfrak{S}$ erzeugte freie Gruppe $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}$ erweist. Jeder Sektor S eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$ besitzt dann die Form:

$$S = a \ldots a, \qquad a \in \mathfrak{S}^{\pm 1}.$$

In diesem Falle können keine Verschränkungsreduktionen auftreten und die Hilfssätze 1 und 2 brauchen nicht mehr berücksichtigt zu werden. Aus diesem Grunde kann nunmehr auch $j = 1$ zugelassen werden, wie man leicht einsieht.

In diesem Falle ist es möglich, eine Variation des angegebenen Verfahrens anzuwenden, indem man das Reduktionsverfahren nicht auf die Anzahl der Sektoren $\varkappa(W)$ eines Wortes W, sondern auf die Anzahl der Buchstaben $l(W)$ von W anwendet. Da alsdann die Formel (1) von § 1 nicht mehr berücksichtigt zu werden braucht, so kann Axiom Z abgeschwächt werden, so daß wir nur zu fordern brauchen: $l(R) > 4j - 4$ für jedes $R \in \mathfrak{R}$. Entsprechend definieren wir als charakteristisches Teilwort eines definierenden Wortes $R \in \mathfrak{R}$ ein solches Teilwort C, für das gilt:

$$R = P\,C\,Q, \qquad l(C) > l(P^{-1}Q^{-1}).$$

Mit dieser Abänderung wird dann der Begriff der primären Transformierten analog definiert wie in § 1.

Bei dieser Variation des Verfahrens ergibt sich für $j=1$ aus Axiom B für ein definierendes Wort $R \in \mathfrak{R} : R = A \dots A$, wobei $A = b_1 \dots b_s$ ein *einfaches* Wort darstellt, worunter wir verstehen wollen: es gibt kein Paar (k, l) von natürlichen Zahlen mit $k \neq l$, so daß gilt: $a_k = a_l^{\pm 1}$. Für folgende Klasse von Gruppen ist dann das Wortproblem lösbar: Es seien gegeben das Erzeugendensystem

$$\mathfrak{S} = \{a_1, \dots, a_{n_1},\ b_1, \dots, b_{n_2}, \dots\}$$

und die definierenden Worte

$$R_1 = A^{\varepsilon_1} = A \dots A, \quad A = a_1 \dots a_{n_1}, \qquad R_2 = B^{\varepsilon_2}, \quad B = b_1 \dots b_{n_2}.$$

Die hierdurch definierte Gruppe genügt dann den Axiomen (die Menge $\mathfrak{R}$ wird wieder durch einen Abschließungsprozeß erhalten).

Die vorliegende Theorie kann ohne besondere Schwierigkeiten in zwei Richtungen verallgemeinert werden. Einmal braucht man für die Erzeugenden aus $\mathfrak{S}_\alpha$ nicht zu fordern, daß alle miteinander vertauschbar sind, sondern nur gewisse unter ihnen (dies erfordert eine leichte Abänderung der Definitionen $\sim$ und $\approx$). Zum anderen kann man für die Erzeugenden $a \in \mathfrak{S}$ noch Relationen $a^\alpha = 1$ einführen.

Die hier behandelte Klasse von Gruppen besitzt Beziehungen zu den bei Tartakowski ([6]–[9], englische Übersetzung von [6]–[8] in [10]) betrachteten Gruppen und noch engere Beziehungen zu Gruppen, die in den (sich im Druck befindlichen) Untersuchungen von Britton [1] betrachtet werden. In beiden Fällen ergibt sich eine Überschneidung, so daß keine Klasse in der anderen enthalten ist.

In den Arbeiten von Tartakowski werden Gruppen behandelt, die dem bereits angegebenen Spezialfall entsprechen, daß jedes Erzeugendensystem $\mathfrak{S}_\alpha$ nur aus einem Buchstaben besteht, so daß sich $\mathfrak{F}_a$ als die von $\mathfrak{S}$ erzeugte freie Gruppe erweist und jeder Sektor eine Potenz einer Erzeugenden bedeutet. Hierbei wird $\mathfrak{S}$ als endlich vorausgesetzt, obenso wie die Menge $\mathfrak{R}$, die nur implizit definiert wird durch die Angabe der „Basis“ (siehe unten). Für die Erzeugenden aus $\mathfrak{S}$ können dann noch zusätzlich „formale Ordnungen“ eingeführt werden.

Um eine Angabe der Klasse von Gruppen zu ermöglichen, für die nach Tartakowski das Wortproblem lösbar ist und um gleichzeitig einen Vergleich mit den Klassen der oben entwickelten Theorie herbeizuführen, müssen wir uns also auf den angegebenen Spezialfall beschränken, daß jeder Sektor S die Form besitzt: $S = a \dots a$. Die bei Tartakowski verwendeten Begriffe werden — soweit möglich — in den Begriffen der obigen Theorie wiedergegeben. Die Klasse von Gruppen, für die nach Tartakowski das Wortproblem lösbar ist, besitzt mit der Klasse von Gruppen, für die nach der obigen Theorie ein Entscheidungsverfahren existiert, einen nichtleeren Durchschnitt — jedoch ist keine der beiden Klassen in der anderen enthalten. Die bei Tartakowski behandelten Gruppen sind die Gruppen mit einer „δ-Basis ($\delta < \frac{1}{8}$) und die Gruppen mit „k-reduzierbarer Basis" ($k \geq 7$); nach der obigen Theorie können jedoch gewisse Klassen von Gruppen behandelt werden mit $k \geq 5$ und solche mit einer δ-Basis, die beliebig nahe an den Wert $\frac{1}{4}$ herankommt. Die genaue Abgrenzung der nach der obigen Theorie zu behandelnden Gruppen ist aber nur durch das Axiomensystem gegeben, sie kann durch die bei Tartakowski entwickelten Begriffe nicht beschrieben werden.

Unter einer *Basis* $R_1, \ldots, R_n$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ versteht Tartakowski folgendes: Es seien $R_1, \ldots, R_n$ definierende Worte derart, daß aus $R_1, \ldots, R_n$ die Menge $\mathfrak{R}$ entsteht durch Anwendung der Operationen:

1) Übergang zu formalinversen Worten;

2) Übergang zu zyklisch permutierten Worten (vgl. hierzu die Operationen in § 1 — infolge der speziellen Wahl entfällt hier die dritte Operation: Vertauschung von Buchstaben innerhalb der Sektoren). Die definierenden Worte R_i $(1 \leq i \leq n)$ seien außerdem so gewählt, daß der letzte Sektor von R_i nicht verwandt ist zum ersten Sektor.

Unter einer *k-reduzierbaren Basis* versteht nun Tartakowski folgendes: es sei gegeben ein beliebiges $R \in \mathfrak{R}$ (das zunächst festgehalten wird) und ein $R_1 \in \mathfrak{R}$ mit $R_1 \not\approx R^{-1}$. Gilt nun $R \approx R' \boxminus$ mit $R_1 \approx \boxminus^{-1} R_1'$, so nennt Tartakowski den Übergang von $R R_1$ zu $R' R_1'$ eine Reduktion und R' die zugehörige „Komponente" von R ($R' R_1'$ braucht nicht reduziert zu sein). Ist nun gegeben ein weiteres definierendes Wort $R_2 \in \mathfrak{R}$ mit $R_2^{-1} \not\approx \boxminus R_1'$, so kann eine weitere Reduktion stattfinden durch Übergang von $R' R_2$ zu $R'' R_2'$ mit $R' \approx R'' H$, $R_2 \approx H^{-1} R_2'$. Es kann vorkommen, daß nach ν solchen Reduktionen die Komponente $R^{(\nu)}$ von R das Leerwort darstellt. Das kleinste ν, das in der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorkommen kann, sei mit k bezeichnet. Es existieren also in diesem Falle ein geeignetes $R \in \mathfrak{R}$ und ausserdem k definierende Worte $R_i \in \mathfrak{R}$ $(1 \leq i \leq k)$ mit den angegebenen Nebenbedingungen, so daß nach k sukzessiven Reduktionen das Wort $R^{(k)}$ das Leerwort darstellt. Tartakowski bezeichnet dann $\mathfrak{G}$ als Gruppe mit k-reduzierbarer Basis.

Für $k \geq 9$ wird nun in Tartakowski [7] die Lösung des Wortproblems angegeben und in Tartakowski [8] auch für $k = 8$ und $k = 7$. In der oben entwickelten Theorie ist nun auch für gewisse Klassen von Gruppen mit $k = 5$ und $k = 6$ die Lösung des

Wortproblems enthalten. Folgendes Beispiel einer Gruppe mit 5-reduzierbarer Basis erfüllt die Axiome Z, B, D_1, D_2 und F für $j=4$:

$$\mathfrak{S}=\{a_1, \ldots, a_{15}, b_4, \ldots, b_{15}, c_4, \ldots, c_{15}, d_4, \ldots, d_{15}, e_4, \ldots, e_{15}, f_4, \ldots, f_{15}\}$$

(75 Erzeugende). Als Basis seien gegeben die 6 definierenden Worte $R_1, \ldots, R_6$ mit

$$\begin{aligned}
R_1 &= a_1 \ldots a_{15},\\
R_2 &= a_1 a_2 a_3 b_4 \ldots b_{15},\\
R_3 &= a_4 a_5 a_6 c_4 \ldots c_{15},\\
R_4 &= a_7 a_8 a_9 d_4 \ldots d_{15},\\
R_5 &= a_{10} a_{11} a_{12} e_4 \ldots e_{15},\\
R_6 &= a_{13} a_{14} a_{15} f_4 \ldots f_{15}.
\end{aligned}$$

Die Gültigkeit der Axiome Z, B, D_1, D_2, F für $\mathfrak{R}$ läßt sich leicht nachprüfen, da die $R_i\,(1 \leq i \leq 6)$ einfache Worte darstellen (s. o.) und $\{R^{-1}, R'\}$ unverkettet ist, sobald R in dem zyklischen Wort $Z(R_s)$ und R' in $Z(R_t)$ enthalten ist mit $s \neq t$, $s \neq 1$, $t \neq 1$.

Allgemein lassen sich für $j \geq 4$ Gruppen konstruieren mit 5-reduzierbarer Basis, die den Axiomen Z, B, D_1, D_2, F genügen und für $j \geq 3$ solche mit 6-reduzierbarer Basis (für $j \geq 4$ gilt: $5(j-1) \geq 4j-1$ und für $j \geq 3$ gilt: $6(j-1) \geq 4j$). Um Gruppen mit 5-reduzierbarer Basis anzugeben, wählen wir etwa die $R_i \in \mathfrak{R}$ $(1 \leq i \leq 6)$ als einfache Worte mit $\varkappa(R_i) \geq 4j-1$ und zwar so, daß für

$$s \neq t, \qquad s \neq 1, \qquad t \neq 1, \qquad R \in Z(R_s), \qquad R' \in Z(R_t)$$

das geordnete Paar $\{R^{-1}, R'\}$ unverkettet ist. Es sei

$$\begin{aligned}
R_1 &= A_1 \ldots A_5, & R_2 &= A_1 R_2', & R_3 &= A_2 R_3',\\
R_4 &= A_3 R_4', & R_5 &= A_4 R_5', & R_6 &= A_5 R_6',
\end{aligned}$$

wobei $A_1, \ldots, A_5$, $R_2', \ldots, R_6'$, Worte darstellen mit

$$A_i = a_{i,1} \ldots a_{i,l_i},$$

$$l_i \leq j-1, \quad \sum_{i=1}^{s} l_i = \varkappa(R_1) \geq 4j-1.$$

Analog lassen sich Gruppen mit 6-reduzierbarer Basis angeben. Dies sind natürlich nicht sämtliche Gruppen mit 5-reduzierbarer und 6-reduzierbarer Basis, die den

Axiomen Z, B, D_1, D_2, F genügen; es lassen sich leicht auch Beispiele bilden, bei denen $\{R^{-1}, R'\}$ verkettet ist für gewisse $R \in Z(R_s)$, $R' \in Z(R_t)$ $s \neq 1$. $t \neq 1$, $s \neq t$.

Unter einer *δ-Basis* $R_1, \ldots, R_n$ versteht Tartakowski folgendes: Wir setzen

$$\varkappa(R_i) = \lambda_i \, (1 \leq i \leq n).$$

Für ein $R \in Z(R_k^{\pm 1})$, $R^* \in Z(R_l^{\pm 1})$, $R^{-1} \not\approx R^*$ mit

$$\{R, R^*\}' = \{R', R^{*\prime}\}$$

mit der Ergänzung

$$X, R \approx R' X, \qquad R^* \approx X^{-1} R^{*\prime},$$

setzen wir

$$\varkappa_{R_k}(X) = \lambda_{R, R^*}$$

und

$$\delta = \max_{\substack{R \in \mathfrak{R} \\ R^* \in \mathfrak{R}}} \left[\frac{\lambda_{R, R^*}}{\lambda_k}, \frac{\lambda_{R, R^*}}{\lambda_l} \right].$$

R und R^* durchlaufen hierbei also die ganze Menge $\mathfrak{R}$ (mit der Nebenbedingung $R^{-1} \not\approx R^*$); ferner seien k und l so gewählt, daß

$$R \in Z(R_k), \qquad R^* \in Z(R_l)$$

gilt. Tartakowski nennt dann $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit einer δ-Basis.

Für $\delta < \frac{1}{8}$ ist bei Tartakowski [7] die Lösung des Wortproblems angegeben. In der oben entwickelten Theorie ist nun auch die Lösung des Wortproblems enthalten für gewisse Klasse von Gruppen mit einer δ_j-Basis, $\delta_j = \frac{1}{4} - \varepsilon_j$, $\varepsilon_j > 0$, wobei ε_j bei wachsendem j beliebig klein gemacht werden kann. Beispiele hierfür sind für jedes j sehr leicht zu finden, auch solche mit k-reduzierbarer Basis für $k = 5$ und $k = 6$.

Aus den Untersuchungen von Herrn Britton [1], von denen Verf. eine Zusammenfassung der Ergebnisse einsehen konnte, ist ebenfalls ersichtlich, daß dem Wert $\frac{1}{4}$ eine besondere Bedeutung zukommt, wenn neben der Ähnlichkeit von je zwei definierenden Relationen auch die inneren Verknüpfungen von je dreien betrachtet werden. Jedoch ergibt sich auch hier eine Überschneidung der beiderseitigen Klassen von Gruppen.

Abschließend wollen wir ein gemeinsames Kennzeichen der obigen Arbeiten angeben. Man definiert zunächst aus den definierenden Worten durch einen Abschließungsprozeß eine Menge $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0$ analog § 1 (evtl. kann anstelle der dritten Operation — Vertauschung innerhalb der einzelnen Sektoren — auch eine andere Operation verwendet werden).

Man bildet nun beliebige Produkte $R_1 R_2$ mit $R_1 \in \mathfrak{R}$, $R_2 \in \mathfrak{R}$ (und die zugehörigen reduzierten Worte). Indem man nun diese Produkte zu $\mathfrak{R}_0$ hinzunimmt und den

Abschließungsprozeß wiederholt, kommt man zu einer Menge $\mathfrak{R}_1$. Durch Wiederholung dieses Verfahrens läßt sich zu jeder natürlichen Zahl i eine Menge $\mathfrak{R}_i$ angeben.

Das Problem lautet nun, Axiome anzugeben, die sich auf die Mengen $\mathfrak{R}_i$ beziehen, derart, daß das Wortproblem lösbar wird. In den obigen Arbeiten wird dies dadurch erreicht, daß die Axiome festlegen, daß bei der Bildung der Worte von $\mathfrak{R}_i$ keine zu großen „Absorptionen" auftreten — es bleiben also von einzelnen Faktoren genügend große Teilworte erhalten. Auf Grund dieser Einschränkung der Absorptionen kann dann bewiesen werden, daß jedes reduzierte Folgewort ein genügend großes Teilwort eines definierenden Wortes als Teilwort enthält.

Literaturverzeichnis

[1]. J. L. Britton, Solution of the word problem for certain types of groups. Erscheint in *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 3 (1956).

[2]. H. Haken, Zum Identitätsproblem bei Gruppen. *Math. Zeitschr.*, 56 (1952), 335–362.

[3]. W. Magnus. Diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation. *Journal f. d. r. u. a. Math.* 163 (1930), 141–165.

[4]. ——, Das Identitätsproblem für Gruppen mit einer definierenden Relation. *Math. Ann.*, 106 (1932), 295–307.

[5]. P. S. Novikoff. Über die algorithmische Unlösbarkeit des Identitätsproblems. *Trudy Mat. Inst. Steklow.* 44 (1955) (Russisch).

[6]. V. A. Tartakowski, Die Siebmethode in der Gruppentheorie. *Mat. Sbornik, N. S.*, 25 (67) (1949), 3–50 (Russisch).

[7]. ——, Anwendung der Siebmethode zur Lösung des Wortproblems für gewisse Typen von Gruppen. *Mat. Sbornik, N. S.*, 25 (67) (1949) 251–274 (Russisch).

[8]. ——, Lösung des Wortproblems für Gruppen mit einer k-reduzierbaren Basis für $k > 6$. *Iswestija Akad. Nauk, SSSR, Ser. mat.*, 13 (1949), 483–494 (Russisch).

[9]. ——, Über primitive Komposition. *Mat. Sbornik, N. S.*, 30 (72) (1952), 39–52 (Russisch).

Die englische Übersetzung der Arbeiten [6]–[8] von Tartakowski ist enthalten in:

[10]. *American Mathematical Society*, Translation No. 60.