EIN SATZ ÜBER MONOTONE RAUMKURVEN IM R_n MIT EINER ANWENDUNG AUF ELLIPTISCH UND HYPERBOLISCH GEKRÜMMTE OVALE.

Von

JOHANNES HJELMSLEV.

(Herausgegeben von Fr. FABRICIUS-BJERRE.)

Vorwort.

Unter Professor J. HJELMSLEVS hinterlassenen Papieren befandt sich ein Manuskript mit dem Titel: Über monotone Raumkurven. In dieser Arbeit werden die sogenannten stückweise monotonen, ordinären Raumkurven untersucht, und als Hauptresultat wird bewiesen, dass eine geschlossene, punktweise monotone, ordinäre Raumkurve im R_n, derart dass keine n ihrer Punkte demselben R_{n-2} angehören, im ganzen monoton ist. Mit einigen wenigen formalen Änderungen macht dieses Manuskript den ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung aus.

Zusammen mit dem Manuskript fanden sich einige Aufzeichnungen über eine Anwendung der gefundenen Sätze auf andere geometrische Fragen, insbesondere betreffend die bekannten Sätze von BÖHMER und MOHRMANN über elliptisch und hyperbolisch gekrümmte konvexe Kurven und die damit im Zusammenhang stehenden Begriffe der parabolischen Konvexität und Konkavität.[1] Auf grund dieser Aufzeichnungen hat der Herausgeber im zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit eine Darstellung dieser Anwendungen zu geben versucht.

Hjelmslev beabsichtigte durch Einführung eines allgemeineren Kurvenbegriffs, der Kurven endlicher Ordnung, den gefundenen Sätzen (und ihren Anwendungen) einen umfassenderen Gültigkeitsbereich zu geben. Ein Entwurf zur Behandlung dieser Frage fandt sich unter den hinterlassenen Papieren. Die Durchführung der Beweise für den allgemeineren Kurvenbegriff scheint jedoch mit nicht unerheblichen Schwierigkeiten verbunden zu sein. Der Herausgeber hat daher vorgezogen hier nicht auf diese Verallgemeinerung einzugehen.

[1] Vgl. HAUPT [5], insbes. § 6.

I.

Über monotone Raumkurven.

Das Hauptresultat der nachstehenden Untersuchungen ist ein Satz über monotone Raumkurven von folgendem Inhalt:

Wenn eine geschlossene Kurve im n-dimensionalen projektiven Raum punktweise monoton ist und keine n linear abhängigen Punkte enthält, so ist die Kurve im ganzen monoton.

Der Satz gibt ein Hilfsmittel zur Behandlung vieler Einzelfragen innerhalb der Theorie der reellen Kurven, in erster Reihe derjenigen naheliegenden, wiederholt behandelten Probleme, welche an den Minkowski-Böhmerschen Begriff der elliptisch-gekrümmten Ovale anknüpfen, sowie zu weitergehenden analogen Untersuchungen. Aber auch bei der allgemeinen Untersuchung der Singularitäten der Raumkurven dürfte der Satz — und die zum Beweise aufgestellten Hilfssätze — mit Vorteil herangezogen werden können.

Wir wollen hier stets im projektiven Raum (von 2, 3, . . . , n Dimensionen) arbeiten. Metrische Begriffe können natürlich Anwendung finden, wenn es als zweckmässig anzusehen ist, indem man dann jedesmal im vorliegenden projektiven Raum die spezielle Metrik einführt, welche für die in Rede stehenden Aufgaben nutzbar gemacht werden kann. Das bedeutet ja keineswegs eine Spezialisierung des Raumes selbst, sondern nur eine besondere Wahl der Hilfsmittel.

Ein erster Schritt in dieser Richtung findet seinen Ausdruck darin, dass wir eine Ebene (Hyperebene) ω im projektiven Raum als „unendlich ferne Ebene" wählen, alle Punkte von ω als unendlich ferne und Geraden, welche durch denselben unendlich fernen Punkt hindurch gehen, als parallel bezeichnen, u. dgl., kurz: wir führen die aus der affinen Geometrie bekannten Ausdrücke (Halbgerade, Halbebene, Stützgerade, Stützebene, konvexer Körper u. s. w.) ein, als ob ω im gewöhnlichen Sinne unendlich fern wäre. Wir wollen dann sagen, dass ω als *Referenzebene* einer affinen Geometrie benutzt wird, oder: wir arbeiten in einer affinen Geometrie mit ω als Referenzebene.

Dass man auch, wenn nötig, in dieser Ebene ω ein elliptisches Polarsystem als Grundlage einer euklidischen Massbestimmung wählen kann, um dann das bekannte System der euklidischen Terminologie einzuführen, ist klar.

Eine Punktmenge M im R_n soll als *geschränkt* bezeichnet werden, wenn eine Hyperebene R_{n-1} (eine „Schranke") existiert, welche keinen Punkt der Menge enhält. Wenn die Menge ausserdem abgeschlossen ist, was wir hier voraussetzen wollen, so gibt es unendlich viele derartige Hyperebenen, von denen jede als Referenzebene ω für M benutzt werden kann. Diejenigen Punkte des Raumes R_n, welche nicht in solchen Hyperebenen enhalten sind, bilden, falls M zusammenhängend ist, einen konvexen Körper, die konvexe Hülle von M. Die gewöhnliche Terminologie für konvexe Körper lässt sich dann einführen und zwar bezüglich jeder der Referenzebenen.

Mit dem Worte „Bogen" oder „Kurve" bezeichnen wir eine Punktmenge, die als eindeutiges stetiges Bild einer Strecke σ betrachet werden kann; je nachdem die Bilder der Endpunkte der Strecke verschieden sind oder zusammenfallen, spricht man von „Bogen" oder „Kurve" (oder geschlossener Kurve). Eine monotone Punktfolge auf dem Bogen (der Kurve) entspricht einer monotonen Folge auf der Strecke σ.

Bogen und Kurven heissen (wie andere Punktmengen) geschränkt, wenn eine Hyperebene (eine „Schranke") existiert, welche keinen ihrer Punkte enthält. Wie oben erwähnt, kann man dann von einer konvexen Hülle des Bogens (bzw. der Kurve) sprechen. Stützebenen, Halbtangenten u. dgl. sind dabei immer auf die vorliegenden Schranken zu beziehen.

Ein geschränkter Bogen im R_n soll als *monoton* bezeichnet werden, wenn gleichlaufende monotone Folgen von je $n+1$ Punkten auf dem Bogen immer gleichartige Orientierungen im Raume R_n bestimmen.

Zu dieser Definition soll nun zunächst folgendes bemerkt werden. Wenn jede monotone Folge von $n+1$ Punkten auf dem Bogen eine Orientierung im R_n bestimmen soll, so können diese $n+1$ Punkte nie in einer Hyperebene R_{n-1} enthalten sein; unsere Definition hat mithin zur Folge, dass jede Hyperebene höchstens n Punkte mit dem Bogen gemein hat. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend dafür, dass der oben aufgestellten Definition Genüge geleistet wird.

Wir wollen indes die Möglichkeit nicht ausschliessen, dass Systeme von mehr als n Punkten des Bogens in einer Hyperebene gelegen sind; diese Hyperebene muss aber dann einen ganzen monotonen Bogen enthalten, welcher einen Teilbogen des ursprünglichen Bogens ausmacht. Für einen solchen Bogen wären dann wieder entsprechende Bemerkungen geltend zu machen. Speziell könnte schliesslich z. B. der Fall eintreten, dass unser Bogen ein Polygon ist, dessen Ecken eine monotone Punktreihe bilden.

Der Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit halber wollen wir aber im folgenden unsere Darstellung so beschränken, dass wir im R_n nur solche monotone Bogen in Betracht ziehen, welche keine in R_{n-1} (oder niedriger-dimensionalen Räumen) gelegene Bogen enthalten. Es bleibt dann einer späteren Nachprüfung überlassen, ob und in welchem Umfange die gewonnenen Resultate auch für die ausgeschlossenen Spezialfälle Gültigkeit haben.

Ein Bogen (eine Kurve) soll *monoton in einem inneren Punkte P heissen*, wenn er einen monotonen Teilbogen mit P als innerem Punkt enthält, und monoton in einem *Endpunkte* A, wenn er einen von A ausgehenden monotonen Teilbogen enthält. Ist ein Bogen (eine Kurve) monoton in jedem inneren Punkt und monoton in den Endpunkten, so soll er als *punktweise monoton* bezeichnet werden.

Die wesentliche Grundlage für die Geometrie des monotonen Bogens im R_n ist in meiner Arbeit aus dem Jahre 1914 über monotone Folgen enthalten.[2] Zunächst findet man dort u. a. Beweise für die Existenz einer stetig variierenden Halbtangente nach jeder Seite, einer stetig variierender Schmieghalbebene nach jeder Seite, ferner eines stetig variierenden Schmieghalbraumes von dritter und höherer Ordnung nach jeder Seite. Ausserdem ist eine allgemeine Konstruktion des Bogens mittels Quadraturen angegeben. Diese Methode liefert nicht nur Beispiele, sondern allgemeine Resultate; die Beschränkung auf den affinen Raum ist nach obigen Bemerkungen ohne Belang. Auch für geschlossene Kurven lässt sich die Konstruktion ausführen, wenn man den Satz heranzieht, dass jede Schmieghyperebene die Tangentenfläche in einer monotonen Kurve schneidet.

Im folgenden betrachten wir nur solche monotonen Bogen, welche die folgenden Eigenschaften aufweisen: In jedem inneren Punkt existieren eine Tangente mit zwei entgegengesetzten Halbtangenten, eine Schmiegebene mit einer („inneren") Schmieghalbebene (vorwärts und rückwärts dieselbe) — die entgegengesetzte Halbebene soll gelegentlich als „äussere" Schmieghalbebene bezeichnet werden; ferner ein Schmiegraum R_3 mit zwei entgegengesetzten Schmieghalbräumen (vorwärtsgehend und rückwärtsgehend); ein Schmiegraum R_4 mit einem (inneren) Schmieghalbraum und einem entgegengesetzten (äusseren) Schmieghalbraum u. s. w.

Ein *ebener* monotoner Bogen AB mit bestimmtem Umlaufssinn besitzt eine vordere Halbtangentenfläche Ω, welche von den vorwärtsgehenden (vorderen) Halbtangenten überstrichen wird. Keine zwei dieser Halbtangenten können einen Punkt gemein haben. Durch jeden Punkt der Fläche Ω geht sonach eine und nur eine der in Rede stehenden Halbtangenten. Lässt man einen Punkt P einen stückweise monotonen Bogen MN innerhalb Ω durchlaufen, so wird der Berührungspunkt P_1 der durch P gehenden Halbtangente auf dem vorgelegten Bogen stetig innerhalb eines Teilbogens S_1T_1 variieren (Fig. 1). Dabei ist P_1 durch P eindeutig bestimmt, im allgemeinen aber nicht umgekehrt. Lässt man P_1 einen Bogen innerhalb S_1T_1 monoton durchlaufen, so kann man doch immer einen entsprechenden Punkt P auf dem Bogen MN ein-

[2] Hjelmslev [8].

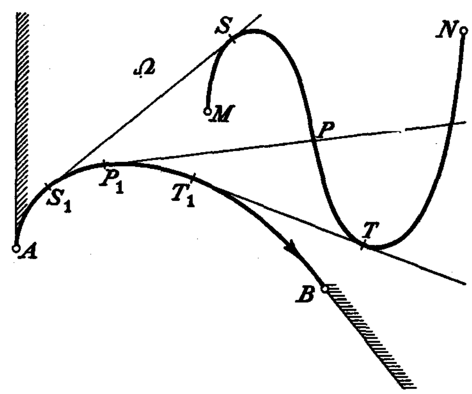

Fig. 1.

deutig so auswählen, dass P die von ihm beschriebene Punktmenge monoton und abteilungsweise stetig mit einer endlichen Anzahl von Sprungstellen auf dem Bogen MN durchläuft.

Diese Betrachtungen sollen im folgenden auf den R_3 und höhere Räume verallgemeinert werden.

Ein orientierter monotoner Bogen AB im R_3 hat eine vordere und eine hintere *Halbtangentenfläche* und einen inneren und einen äusseren *Schmiegbereich*, welcher durch die inneren bzw. äusseren Schmieghalbebenen überstrichen wird. Jeder dieser Bereiche wird von den beiden Halbtangentenflächen und den (inneren bzw. äusseren) Schmieghalbebenen in A und B begrenzt.

Zwei äussere Schmieghalbebenen haben keinen Punkt gemein, zwei innere hingegen eine Strecke, welche verschwindet, wenn die beiden Berührungspunkte gegen einander streben.

Lässt man in einem der Schmiegbereiche einen Punkt P einen stückweise monotonen Bogen MN, welcher keinen Punkt mit der Begrenzung des Schmiegbereichs gemein hat, monoton durchlaufen, wobei die Anfangslage M von P einer Schmieghalbebene μ mit dem Berührungspunkt M_1 auf dem Bogen AB angehört, so lässt sich zu jeder Lage von P in eindeutiger und stetiger Korrespondenz mit P ein entsprechender Punkt P_1 auf dem Bogen AB derart angeben, dass die Schmieghalbebene ω in P_1 (in dem in Rede stehenden Schmiegbereich) durch P geht. Die Punkte P_1 füllen dann auf AB einen Teilbogen S_1T_1 aus. Jedem Punkt P auf dem Bogen MN entspricht in der vorgeschriebenen Weise eindeutig ein Punkt P_1 auf dem Bogen S_1T_1, im allgemeinen jedoch nicht umgekehrt; einem Punkt P_1 entsprechen mehrere Punkte P. Unter diesen können wir aber immer einen bestimmten derart auswählen, dass jedem Teilbogen von S_1T_1, welcher von P_1 monoton durchlaufen wird, eine Punktmenge auf dem Bogen MN als Ort von P entspricht, welche monoton und abteilungsweise stetig, mit einer endlichen Anzahl von Sprungstellen auf MN verläuft.

Für höhere Räume können ähnliche Betrachtungen angestellt werden: ein orientierter monotoner Bogen AB im R_n hat eine vordere und eine hintere Halbtangentenfläche (Schmiegbereich erster Ordnung), einen inneren und einen äusseren Schmieghalbebenenbereich (Schmiegbereich zweiter Ordnung), einen vorderen und einen hinteren Schmieghalbraumbereich dritter Ordnung (Schmiegbereich dritter Ordnung), einen inneren und einen äusseren Schmieghalbraumbereich vierter Ordnung u. s. w. bis zur $(n-1)$ten Ordnung.

In einem Schmiegbereich $(n-1)$ter Ordnung gilt auch Analoges für die Korrespondenz zwischen Punkten P und P_1, von welchen P einen Bogen MN im Schmiegbereich durchläuft, während P_1 den Berührungspunkt eines stetig variierenden Schmieghalbraums durch P bezeichnet. Die betreffenden Betrachtungen beruhen nämlich nur darauf, dass einer stetigen Änderung von P eine stetige Änderung von P_1 zugewiesen werden kann.

In einer Arbeit aus dem Jahre 1911[3] habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Wenn für einen ebenen ordinären Bogen AB ohne Doppelpunkte die Halbtangente in A durch B geht und die Gerade AB keine anderen Punkte als A und B mit dem Bogen gemein hat, so besitzt der Bogen wenigstens e i n e n Wendepunkt.*

Unter einem „ordinären" Bogen versteht man dabei einen Bogen, der in jedem Punkt eine eindeutige Tangente mit entgegengesetzten Halbtangenten hat; es wurden aber keine anderen Voraussetzungen (über Stetigkeit der Tangente oder dergl.) gemacht.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit diesen Satz heranziehen, beschränken uns jedoch auf den hier allein in Betracht kommenden Sonderfall, wo der Bogen als stückweise monoton vorausgesetzt wird, und können dann die folgende für unsere Zwecke besonders geeignete Betrachtung anstellen.

Von A aus grenzen wir einen monotonen Bogen AC derart ab, dass die Tangente in C und somit jede Tangente des Bogens AC die Strecke AB trifft. Die Tangente in einem Punkt P des Bogens AC muss dann auch den Restbogen PCB wenigstens einmal schneiden. Zunächst nehmen wir an, dass nur ein Schnittpunkt vorhanden sei, und dass dies für jeden Punkt P des Bogens AC gelte (Fig. 2). Bewegt sich P stetig und monoton von A bis C, so bewegt sich der entsprechende Punkt P_1 stetig und monoton auf dem Bogen BC von B bis zu einem Punkte D und liegt stets auf der vorwärtsgehenden Halbtangente von AC, weil P_1 immer von P verschieden bleibt, da keine

[3] HJELMSLEV [7].

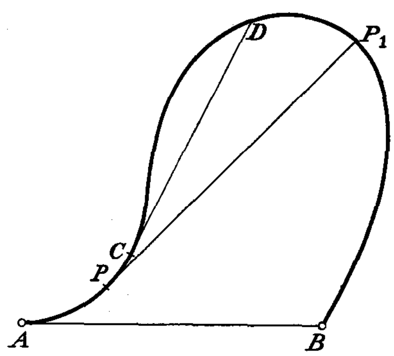

Fig. 2.

Doppelpunkte auf dem ganzen Bogen AB vorhanden sind. Hierdurch ist aber ein Teilbogen CD ausgeschnitten, der dieselben Eigenschaften wie der ursprüngliche Bogen AB besitzt: Die Halbtangente in C geht durch E, und die Bewegung der Punkte P und P_1 kann dann über C bzw. D hinaus in entgegengesetzter Richtung ungehindert fortgesetzt werden. Wenn nun die vorläufig gemachte Annahme, dass die Tangente in P den Bogen stets nur noch in einem Punkt P_1 trifft, immer erfüllt bleibt, so ergibt die Fortsetzung der Betrachtung, dass ein gemeinsamer Grenzpunkt für die von P und P_1 beschriebenen Reihen existieren muss, und in diesem Punkt ist unser Bogen nicht mehr monoton. Es gibt also hier einen Wendepunkt w. z. b. w.

Wenn nun aber im Gegensatz zu der gemachten Voraussetzung die Korrespondenz nicht eindeutig ist, so kann man unsere Betrachtung folgendermassen abändern:

Es lässt sich jedenfalls ein monotoner (oder punktweise monotoner) Bogen AQ vom ganzen Bogen AB derart abgrenzen, dass die Tangente in einem inneren Punkte P des Bogens AQ den Restbogen QB eindeutig schneidet, während die Tangenten in Q ausser dem Schnittpunkt Q_1' (als Grenzlage von P_1, wenn P nach Q strebt) noch einen Punkt Q_1 mit dem Restbogen QB gemein hat, wo sie dann den Restbogen berühren muss (Fig. 3). (Von weiteren gemeinsamen Punkten können wir absehen, da die Methode nötigenfalls noch einmal Anwendung finden könnte.)

Wenn nun unser Bogen in Q noch monoton ist, können wir P und P_1 ihre Bewegung in der Weise fortsetzen lassen, dass P_1 weiter über Q_1' hinaus in stetiger monotoner Weise längs des Bogens $Q_1'Q_1$ fortschreitet. Ob die Bewegung sich auf diese Weise derart durchführen lässt, dass P_1 den ganzen Bogen $Q_1'Q_1$ durchläuft und P dementsprechend einen monotonen oder punktweise monotonen Bogen QR hin und zurück, vielleicht mit mehreren Umkehrungen, durchläuft, wird nun davon abhängen, ob man von Q aus auf dem Restbogen QB einen monotonen (oder punktweise monotonen) Bogen QR

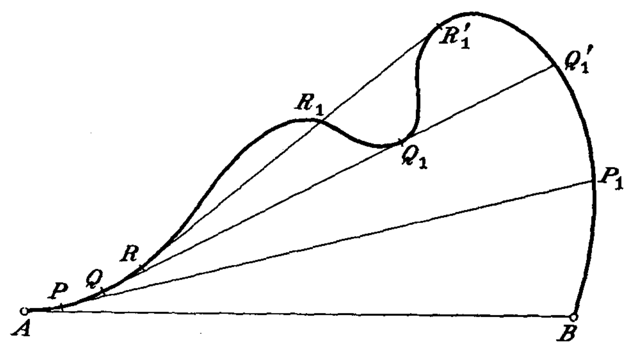

Fig. 3.

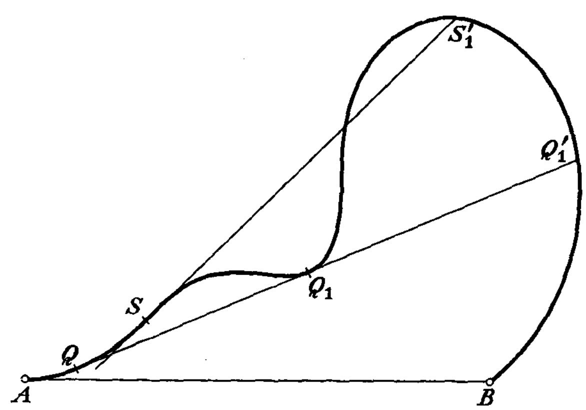

Fig. 4.

abtragen kann, dessen Tangenten den ganzen Bogen $Q_1'Q_1$ überstreichen. Ist das aber nicht möglich, so gibt es einen grössten monotonen (bzw. punktweise monotonen) Bogen QS als Ort für P und einen entsprechenden Bogen $Q_1'S_1'$ als Ort für P_1 derart, dass P_1 nicht S_1' überschreiten kann, d. h. in S muss unser Bogen einen Wendepunkt aufweisen (Fig. 4).

Tritt aber dieser Fall nicht ein, so können P_1 und P ungehindert ihre Bewegung fortsetzen, bis P_1 nach Q_1 und P nach Q zurückkehrt (Fig. 3). Bei dieser stetigen Bewegung geht die Halbtangente $P(P_1)$ des Bogens in die Halbtangente $Q(Q_1)$ über. Es hat sich so herausgestellt, dass ein Teilbogen QQ_1 existiert, der in den ursprünglichen Bogen AB eingeschachtelt ist und die Eigenschaft hat: dieHalbtangente in Q geht durch Q_1, und die Verbindungslinie der Endpunkte QQ_1 hat keine anderen Punkte mit dem Bogen gemein.

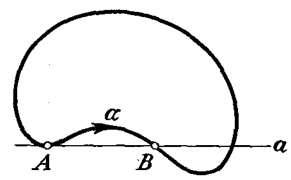

Fig. 5.

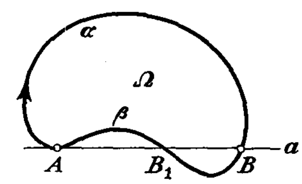

Fig. 6.

Auf diese Weise könnte man dann fortfahren. Es ergibt sich so, dass die Einschachtelung entweder einmal abbricht, weil der Bogen $AQ\ldots$ bis zu einem Punkt gelangt, wo der Bogen AB nicht mehr monoton ist, also einen Wendepunkt aufweist, oder sie kann ins Unendliche fortgesetzt werden. Das würde aber bedeuten, dass die von P und P_1 beschriebenen Reihen einen gemeinsamen Grenzpunkt haben, und in diesem Punkt wäre der Bogen AB nicht monoton. Auch in diesem Falle hat sich dann die Existens eines Wendepunktes als notwendig erwiesen.

Wir gehen nun daran, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2. *Wenn in der projektiven Ebene eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne Doppelpunkte einen Konvexpunkt A enthält, dessen Tangente einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat (und ausserdem vielleicht andere Punkte), so muss jedenfalls einer der beiden Teilbogen AB mindestens einen Wendepunkt enthalten.*

Hat die Tangente a in A mehrere Punkte B mit der Kurve gemein, so nehmen wir — einem gewissen Umlaufssinn auf der Kurve entsprechend — den auf A folgenden Punkt B. Man hat dann einen Bogen AB, welcher keine anderen Punkte mit a gemein hat als A und B. Dieser Bogen α ist geschränkt bezüglich einer Referenzlinie in der Nähe von a.

Wenn nun die Halbtangente von α in A den Punkt B enthält (Fig 5), haben wir den Fall des Satzes 1., und der Bogen α besitzt dann einen Wendepunkt.

Wenn hingegen die Halbtangente in A den Punkt B nicht enthält (Fig 6), betrachten wir den Bereich Ω, welcher von dem Bogen α und seiner Sehne begrenzt wird. Der Restbogen $BA=\beta$ kann nun entweder ganz in diesem Bereich Ω enthalten sein (vielleicht mit einem oder mehreren Punkten auf der Sehne AB) oder teilweise innerhalb und teilweise ausserhalb Ω liegen (da der Punkt A ein Konvexpunkt ist, muss β jedenfalls Punkte innerhalb Ω haben). Im letzteren Fall muss er die Sehne AB schneiden, weil er keinen von A und B verschiedenen Punkt mit α gemein hat (Doppelpunkte waren ja ausgeschlossen). Es entsteht so in allen Fällen ein Teilbogen AB_1 von β, dessen Halbtangente in A durch B_1 geht, und der keinen von A und B_1

verschiedenen Punkt mit a gemein hat. Wenn β insbesondere ganz im Inneren von Ω enthalten ist, erfüllt er selbst die Bedingung, dass die Halbtangente in A durch B geht, und dass er keinen von A und B verschiedenen Punkt mit a gemein hat. Der Bogen enthält also in allen Fällen einen Wendepunkt.

Unser Satz 2 ist hiermit vollständig bewiesen. Der Beweis wurde in der projektiven Ebene durchgeführt.

Aus dem Beweisgang fliesst die folgende wichtige Tatsache:

Satz 3. *Wenn in der projektiven Ebene eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne Doppelpunkte einen Konvexpunkt A enthält, dessen Tangente a wenigstens einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat, so muss die Tangente a jedenfall einen solchen Teilbogen AB_1 von der Kurve abschneiden, dass man durch A eine Gerade g legen kann, welche keinen anderen Punkt als A mit dem Teilbogen gemein hat.*

Aus Satz 2 lässt sich ferner unmittelbar der folgende Satz ableiten:

Satz 4. *In der projektiven Ebene ist jede geschlossene, punktweise monotone, ordinäre Kurve ohne Doppelpunkte notwendig im ganzen monoton.*

Aus Satz 2 folgt nämlich, dass die Kurve mit keiner ihrer Tangenten einen anderen Punkt als den Berührungspunkt gemein haben kann. Und hieraus folgt ferner, dass die Kurve mit keiner Geraden mehr als zwei Punkte gemein haben kann.

Der Satz geht auf *Möbius* zurück und ist später mehrmals bewiesen worden.

Im *Raume R_3* wollen wir nun ähnliche Sätze aufstellen und schicken zu diesem Zwecke einige allgemeine Bemerkungen voraus. Wenn wir im folgenden von einer *ordinären Raumkurve* sprechen, verstehen wir darunter eine Raumkurve, wo jeder Punkt eine eindeutige Tangente mit entgegengesetzten Halbtangenten und eine eindeutige Schmiegebene mit zusammenfallenden Schmieghalbebenen aufweist. Eine stückweise monotone ordinäre Raumkurve kann somit keine anderen Singularitäten aufweisen als *Scheitelpunkte* (Scheitel oder auch Wendepunkte), d. h. Punkte, wo die Schmiegebene (lokale) *Stützebene* ist.

Durch Zentralprojektion von einem Kurvenpunkt aus wird eine stückweise monotone ordinäre Kurve in eine ebene Kurve abgebildet, welche auch stückweise monoton ist. Hat die Raumkurve keine *Trisekanten,* d. h. Geraden, welche 3 Punkte der Raumkurve enthalten, so hat die Zentralprojektion keine Doppelpunkte. Hierbei wird zu den Trisekanten auch jede „berührende Trisekante" gerechnet, d. h. eine Tangente, welche durch einen Kurvenpunkt ausserhalb des Berührungspunkts hindurchgeht, speziell auch eine Gerade, welche einen Doppelpunkt mit einem anderen Punkt der Kurve verbindet und auch eine Tangente in einen Doppelpunkt. Die Zentralprojektion der Raumkurve kann dann keine Spitzen enthalten und ist somit auch eine ordinäre Kurve.

Dem Satz 1 entspricht nun folgender Satz im Raume:

Satz 5. *Wenn für einen stückweise monotonen, ordinären Bogen AB im R_3 ohne Trisekanten die Schmieghalbebene in A durch B hindurchgeht, und wenn die Schmiegebene in A keine anderen Punkte als A und B mit der Kurve gemein hat, so muss der Bogen wenigstens einen Scheitel besitzen.*

Die Tangente a in A geht nicht durch B, weil der Bogen keine Trisekanten hat. Die Halbebene $a(B)$ ist die Schmieghalbebene in A. — Von A aus schneiden wir (bekannten Eigenschaften des monotonen Bogens zufolge) einen monotonen Teilbogen AC auf AB derart ab, dass die Schmiegebene in C und somit jede Schmiegebene des Bogens AC die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus trifft. Die Schmiegebene in einem Punkt P des Bogens AC muss dann notwendig den Restbogen PCB in wenigstens einem Punkte P_1 treffen. Zunächst nehmen wir an, dass nur ein Punkt P_1 vorhanden ist, und dass dies für jeden Punkt P des Bogens AC gilt. Bewegt sich P stetig und monoton von A bis C, so bewegt sich der entsprechende Punkt P_1 stetig und monoton auf dem Bogen BC von B bis zu einem Punkt D and liegt stets in der vorderen Schmieghalbebene in P, denn P_1 kann nie die Tangente in P überschreiten, weil Trisekanten — auch berührende Trisekanten sowie Doppelpunkte — ausgeschlossen sind.

Hierdurch wird ein Teilbogen CD ausgeschnitten, der dieselben Eigenschaften wie der ursprüngliche Bogen AB hat: Die Schmieghalbebene in C geht durch D, und die Bewegung der beiden Punkte P und P_1 kann dann, wenn C kein Scheitel ist, weiter über C bzw. D hinaus (in entgegengesetzter Richtung auf dem Bogen) fortgesetzt werden. Wenn nun die vorläufig gemachte Annahme, dass die Schmiegebene in P nur noch in einem weiteren Punkt P_1 trifft, noch immer zutrifft, ersieht man, wenn man auf die angegebene Weise nicht unmittelbar zu einem Scheitel gelangt, dass ein gemeinsamer Grenzpunkt der von P und P_1 beschriebenen Reihen existieren muss, und in diesem Punkt Q ist der Bogen AB nicht mehr monoton. Es gibt in der Tat in der nächsten Umgebung von Q entsprechende Lagen von P und P_1, d. h. jeder kleine Teilbogen mit Q als innerem Punkt wird von gewissen Ebenen in 4 Punkten geschnitten werden können. Der Punkt Q ist somit ein Scheitel, w. z. b. w.

Wenn nun aber die Korrespondenz $P \rightarrow P_1$ im Gegensatz zu der bisher gemachten Voraussetzung nicht eindeutig ausfällt, so können wir die Betrachtung in folgender Weise abändern:

Es lässt sich jedenfalls ein monotoner (oder punktweise monotoner) Bogen AQ derart abgrenzen, dass die Schmiegebene in jedem inneren Punkt P des Bogens AQ den Restbogen QB eindeutig schneidet, während hingegen die Schmiegebene in Q ausser dem Schnittpunkt Q_1' (als Grenzlage von P_1, wenn P nach Q strebt) noch einen anderen Punkt Q_1 mit dem Restbogen QB gemein hat, wo sie dann den Restbogen berühren (stützen) muss. (Von weiteren gemeinsamen Punkten können wir absehen, da die unten verwendete Methode nötigenfalls noch einmal benutzt werden kann.)

Wenn wir unseren Bogen in Q fortwährend als monoton voraussetzen, können wir die beiden Punkte P und P_1 ihre Bewegung in der Weise fortsetzen lassen, dass P_1 in stetiger monotoner Weise längs des Bogens $Q_1'Q_1$ weiter über Q_1' hinaus fortschreitet. Ob die Bewegung sich in dieser Weise so durchführen lässt, dass P_1 den ganzen Bogen $Q_1'Q_1$ und P dementsprechend einen monotonen (oder punktweise monotonen) Bogen QR hin und zurück, vielleicht mit mehreren Umkehrungen, durchläuft, wird nun davon abhängen, ob man von Q aus auf dem Restbogen QB einen monotonen (oder punktweise monotonen) Bogen QR abtragen kann, dessen Schmiegebenen den ganzen Bogen $Q_1'Q_1$ überstreichen. Ist das aber nicht möglich, so gibt es einen grössten monotonen (oder punktweise monotonen) Bogen QS als Ort für P und einen entsprechenden Bogen $Q_1'S_1'$ als Ort für P_1 derart, dass P_1 nicht S_1' überschreiten kann, d. h. in S muss unser Bogen einen Scheitel aufweisen.

Tritt aber dieser Fall nicht ein, so können also P_1 und P ungehindert ihre Bewegung fortsetzen, bis P_1 nach Q_1 und P nach Q zurückkehrt. Bei dieser stetigen Bewegung geht die Schmieghalbebene $p(P_1)$ in die Schmieghalbebene $q(Q_1)$ über. Es hat sich so herausgestellt, dass ein Teilbogen QQ_1 existiert, der in den ursprünglichen Bogen AB eingeschachtelt ist und dieselben Eigenschaften hat: die Schmieghalbebene in Q geht durch Q_1, und die Schmiegebene $q(Q_1)$ hat keine anderen Punkte als Q und Q_1 mit dem Bogen gemein.

Auf diese Weise könnte man dann fortfahren. Es ergibt sich so, dass diese Einschachtelung entweder einmal abbricht, weil der Bogen $AQ\ldots$ an einen Punkt gelangt, wo der Bogen AB nicht mehr monoton ist, oder sie kann ins Unendliche fortgesetzt werden. Dass würde aber bedeuten, dass die von P und P_1 beschriebenen Reihen einen Grenzpunkt haben, und in diesem Punkt wäre der Bogen nicht mehr monoton. Auch in diesem Fall hat sich dann die Existenz eines Scheitels als notwendig erwiesen.

Dem Satz 2 enstprechend stellen wir im R_3 den folgenden Satz auf:

Satz 6. *Wenn im projektiven Raume R_3 eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne Trisekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmiegebene einen* *anderen Punkt B mit der Kurve gemein hat (ausserdem möglicherweise weitere Punkte), so muss jedenfalls einer der beiden Teilbogen AB einen Scheitel besitzen.*

Hat die Schmiegebene α in A mehrere Punkte B mit der Kurve gemein, so nehmen wir, einem willkürlich gewählten Umlaufssinn auf der Kurve entsprechend, denjenigen, der A am nächsten liegt. Man hat dann einen Bogen AB, welcher keine anderen Punkte mit α gemein hat als A und B. In ähnlicher Weise finden wir, dem entgegengesetzen Umlaufssinn entsprechend, einen anderen Teilbogen AB_1, welcher dieselbe Bedingung erfüllt. Wenn nur ein Punkt B vorhanden ist, fällt B_1 mit B zusammen.

Wir projizieren nun unsere Kurve $\varkappa$ mittels Zentralprojektion vom Punkte A aus auf eine Ebene μ. Die Bildpunkte von A, B und B_1 seien A', B' und B_1'. Die Bildkurve $\varkappa'$ in μ ist eine ebene geschlossene stückweise monotone Kurve; sie hat keine Doppelpunkte oder Spitzen, weil die Raumkurve keine Trisekanten besitzt. Sie hat in A' einen Konvexpunkt, dessen Tangente a', die Spur von α in μ, durch die Punkte B' und B_1' hindurchgeht. Wir wissen dann (Satz 3, S. 68) von den beiden Bogen $A'B'$ und $A'B_1'$, dass man in der Ebene μ durch den Punkt A' eine von a' verschiedene Gerade g' ziehen kann, welche mit wenigstens einem der beiden Bogen keinen anderen Punkt als A' gemein hat. Dass bedeutet aber für unsere Raumkurve $\varkappa$, dass eine Ebene $\gamma = AA'g'$ durch die Tangente a in A existiert, welche keine anderen Punkte als A mit dem Teilbogen AB (oder AB_1) gemein hat. Es lässt sich sodann eine Referenzebene in der Nähe von γ einführen, welche zu dem Teilbogen AB fremd ist, und danach können wir behaupten, dass γ eine Stützebene des Teilbogens ist. Die Schmieghalbebene in A geht also durch B, und die Bedingungen des Satzes 5 sind erfüllt. Der Teilbogen AB muss somit notwendig einen Scheitel besitzen.

Gleichzeitig haben wir das folgende Resultat gewonnen:

Satz 7. *Wenn im projektiven Raume R_3 eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Raumkurve ohne Trisekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmiegebene einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat, so muss diese Schmiegebene jedenfalls einen solchen Teilbogen AB_1 von der Kurve abschneiden, dass man durch die Tangente in A eine Ebene legen kann, welche keinen von A verschiedenen Punkt mit dem Teilbogen gemein hat.*

Es folgt nun

Satz 8. *Jede geschlossene, punktweise monotone, ordinäre Raumkurve im R_3, welche keine Trisekanten besitzt, ist im ganzen monoton.*

Keine Schmiegebene kann nämlich die Kurve in einem anderen Punkt als dem Berührungspunkt treffen (weil sonst Scheitel vorkommen würden), und die Kurve wird sonach mittels Zentralprojektion von jedem ihrer Punkte aus in eine geschlossene punktweise monotone, doppeltpunktfreie ebene Kurve übergeführt.

Es macht nunmehr keine Schwierigkeiten die vorstehenden Sätze auf höhere Räume auszudehnen. Zunächst die Verallgemeinerung der Sätze 1 und 5 auf den projektiven Raum R_4:

Satz 9. *Wenn der Schmieghalbraum eines stückweise monotonen, ordinären Bogens AB ohne 4-Sekanten im Punkte A durch B hindurchgeht, und der Schmiegraum in A keine anderen Punkte als A und B mit dem Bogen gemein hat, so muss der Bogen wenigstens einen Wendepunkt besitzen.*

Zur Erklärung der hier vorkommenden Ausdrücke soll folgendes bemerkt werden:

Ein Bogen soll hier als *ordinär* bezeichnet werden, wenn in jedem inneren Punkte 1) die Halbtangenten entgegengesetzt sind, 2) die Schmieghalbebenen zusammenfallen und 3) die Schmieghalbräume entgegengesetzt sind. Die einzigen singulären Punkte (d. h. Punkte, wo der Bogen nicht monoton ist) sind solche, wo die Schmiegräume die Umgebung des Berührungspunktes durchschneiden. Diese Punkte sollen *Wendepunkte* heissen.

Unter einer 4-Sekante wird eine Ebene verstanden, welche den Bogen in 4 Punkten trifft, Grenzfälle mitgerechnet (Schmiegsekante und Berührungssekante, sowie doppelte Berührungssekante).

Der Beweis des Satzes 9 ist so unmittelbar analog dem Beweis der Sätze 1 und 5, dass eine ausführliche Durchführung sozusagen nur eine wörtliche Abschrift dieser Beweise bedeuten würde. Ich begnüge mich deshalb mit diesem Hinweis.

Der folgende Satz ist den Sätzen 2 und 6 analog:

Satz 10. *Wenn im projektiven R_4 eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne 4-Sekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmiegraum einen anderen Punkt B mit der Kurve gemein hat (ausserdem möglicherweise andere Punkte), so muss jedenfalls einer der beiden Teilbogen AB einen Wendepunkt aufweisen.*

Hat der Schmiegraum α in A mehrere Punkte mit der Kurve gemein, so nehmen wir, einem willkürlich gewählten Umlaufssinn auf der Kurve entsprechend, denjenigen, der A am nächsten liegt. In ähnlicher Weise finden wir, dem entgegengesetzten Umlaufssinn entsprechend, einen anderen Teilbogen AB_1.

Wir projizieren nun unsere Kurve $\varkappa$ mittels Zentralprojektion vom Punkte A aus auf einen Raum R_3. Die Bildkurve $\varkappa'$ im R_3 ist eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne Trisekanten, weil die Kurve $\varkappa$ keine 4-Sekanten hat. Die Bildpunkte von A, B, B_1 seien A', B', B_1'. In A' hat $\varkappa'$ einen Monoton-Punkt, dessen Schmiegebene α' die Spur von α in R_3 ist und durch die Punkte B' und B_1' hindurchgeht. Nach Satz 7 wissen wir dann, dass man durch die Tangente von $\varkappa'$ in A' eine Ebene γ legen kann, welche wenigstens mit einem der beiden Bogen $A'B'$ und $A'B_1'$ keine anderen Punkte als A' gemein hat. Gehen wir auf die Kurve $\varkappa$ zurück, so bedeutet das aber, dass man durch die Schmiegebene in A einen Raum von drei Dimensionen legen kann, welcher wenigstens mit einem der Teilbogen AB und AB_1 keinen anderen Punkt als A gemein hat. Dieser Teilbogen muss aber dann nach Satz 9 einen Wendepunkt besitzen, w. z. b. w.

Gleichzeitig haben wir das Analogon zu den Sätzen 3 und 7 gewonnen:

Satz 11. *Wenn im projektiven R_4 eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Raumkurve ohne 4-Sekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmiegraum α einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat, so muss der Schmiegraum α jedenfalls einen solchen Teilbogen AB_1 von der Kurve abschneiden, dass man durch die Schmiegebene in A einen Raum (Hyperebene) γ legen kann, welcher keinen von A verschiedenen Punkt mit dem Teilbogen gemein hat.*

Es folgt dann unser Hauptresultat für R_4:

Satz 12. *Jede geschlossene, punktweise monotone, ordinäre Kurve im projektiven R_4, welche keine 4-Sekanten besitzt, ist im ganzen monoton.*

Der Beweis ist sehr einfach. Die Kurve kann mit einem beliebigen ihrer Schmiegräume keinen anderen Punkt als den Berührungspunkt gemein haben; sonst wäre ja nach Satz 10 ein Wendepunkt vorhanden. Die Kurve geht infolgedessen mittels Zentralprojektion auf einen R_3 von jedem ihrer Punkte aus in eine monotone Kurve über und kann somit von keiner Hyperebene in mehr als 4 Punkten geschnitten werden.

Und nun gehen wir daran, die allgemeinen Sätze zu formulieren:

Satz 13. *Wenn die Schmieghalbhyperebene in A eines stückweise monotonen ordinären Bogens AB im R_n ohne n-Sekanten durch B geht und die Schmieghyperebene in A keine anderen Punkte als A und B mit dem Bogen gemein hat, so muss der Bogen wenigstens einen Hyperoskulationspunkt besitzen.*

Hierzu folgende Bemerkungen:

Ein Bogen in R_n soll *ordinär* heissen, wenn in jedem Punkte 1) die Halbtangenten entgegengesetzt sind, 2) die Schmieghalbebenen zusammenfallen, 3) die Schmieghalbräume R_r zusammenfallen oder entgegengesetzt sind, je nachdem r gerade oder ungerade ist. Punkte, wo der Bogen nicht monoton ist, sind solche, wo die Schmieghyperebene die Umgebung des Berührungspunktes durchschneidet oder stützt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Diese Punkte sollen *Hyperoskulationspunkte* (oder *Wendepunkte*) heissen. — Unter einer n-Sekante wird ein R_{n-2} verstanden, welcher den Bogen in n Punkten trifft, Grenzfälle mitgerechnet.

Satz 14. *Wenn im projektiven R_n eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Raumkurve ohne n-Sekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmieghyperebene einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat, so muss jedenfalls einer der beiden Teilbogen AB einen Hyperoskulationspunkt aufweisen.*

Satz 15. *Wenn im projektiven R_n eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Raumkurve ohne n-Sekanten einen Monoton-Punkt A enthält, dessen Schmieghyperebene a einen weiteren Punkt B mit der Kurve gemein hat, so muss die Schmieghyperebene a jedenfalls einen solchen Teilbogen AB_1 von der Kurve abschneiden, dass man durch den Schmiegraum R_{n-2} in A eine Hyperebene legen kann, welche keinen von A verschiedenen Punkt mit dem Teilbogen gemein hat.*

Satz 16. *Jede geschlossene, punktweise monotone, ordinäre Raumkurve im projektiven Raume R_n, welche keine n-Sekanten besitzt, ist im ganzen monoton.*

Was die Beweise der Sätze 13, . . . , 16 anbetrifft, können wir uns nach den vorstehenden ausführlichen Anweisungen kurz fassen:

Der Satz 13 wird ganz analog den Sätzen 1, 5, 9 bewiesen.

Der Satz 14 wird mittels Induktion bewiesen, indem man voraussetzt, dass die Sätze schon für die Dimensionszahl n—1 bewiesen sind. Man wendet eine Zentralprojektion von A aus an und benutzt zunächst Satz 15 für die Dimensionszahl n—1 und nachher Satz 13. Satz 15 kommt gleichzeitig heraus.

Schliesslich wird Satz 16 dadurch bewiesen, dass jede Schmieghyperebene nur ihren Berührungspunkt mit der Kurve gemein haben kann, da sonst ein Hyperoskulationspunkt vorhanden wäre.

II.

Anwendungen auf elliptisch und hyperbolisch gekrümmte Ovale

Der Kurvenbegriff, mit dem wir im vorstehenden gearbeitet haben, ist der der stückweise monotonen, ordinären Raumkurven im R_n. Die Punkte einer solchen Kurve sind ordinäre Punkte (Monotonpunkte) und möglicherweise singuläre Punkte, wobei jedoch nur Wendepunkte (Hyperoskulationspunkte) in Betracht kommen. Wendepunkte können nur in endlicher Anzahl auftreten, da man von einem Häufungspunkt von Wendepunkten aus nicht nach beiden Seiten einen monotonen Bogen abgrenzen kann. Die Kurve besteht daher aus einer endlichen Anzahl punktweise (lokal) monotoner Bogen, die in Wendepunkten zusammenstossen. Nun kann ein punktweise monotoner Bogen stets in eine endliche Anzahl monotoner Bogen (von n^{ter} Ordnung) zerlegt werden, woraus folgt, dass eine stückweise monotone, ordinäre (geschlossene oder offene) Kurve im R_n aus einer endlichen Anzahl monotoner Bogen besteht, die in ordinären oder Wendepunkten zusammenstossen.

Da jeder einzelne monotone Bogen von n^{ter} Ordnung und Klasse ist, ist die Kurve im ganzen von endlicher Ordnung und Klasse. Die einzelnen Punkte haben die Ordnung n oder $n+1$, je nachdem sie ordinär oder singulär sind.

Im folgenden werden wir (projektive) *Ovale* betrachten, die durch eine passende Abbildung in stückweise monotone, ordinäre (geschlossene) Raumkurven in einem R_n übergeführt werden können. Da wir uns mit den Eigenschaften dieser Ovale in bezug auf verschiedene Scharen von Kegelschnitten zu beschäftigen haben, werden wir wie in einer früheren Arbeit[4] die projektive Ebene π auf eine *Veronesesche Fläche* π' im projektiven R_5 abbilden. Bezeichnen (y_0, y_1, y_2) projektive Koordinaten in π und $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,)$ projektive Koordinaten im R_5, so ist die Abbildung bestimmt durch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = y_1 y_2 : y_2 y_0 : y_0 y_1 : y_0^2 : y_1^2 : y_2^2.$$

Bei dieser Abbildung werden die Geraden der Ebene in die Kegelschnitte auf π' und die Kegelschnitte der Ebene in die Schnittkurven der Fläche mit Hyperebenen R_4 des R_5 übergeführt. Diese Schnittkurven sind geschlossene monotone Kurven 4. Ordnung (Elementarkurven) in dem betreffenden R_4. Betrachtet man einen R_3 als Schnitt zweier Hyperebenen, so sieht man, dass ein R_3, der keinen Kegelschnitt von π' enthält, die Fläche in höchstens 4 Punkten, nämlich den den Schnittpunkten zweier Kegelschnitte in π entsprechenden, trifft. Die Veronesesche Fläche ist also von der Ordnung 4. Dass ein R_3 speziell einen der Kegelschnitte von π' enthält, bedeutet, dass die beiden Kegelschnitte in π in Geradenpaare ausarten, die eine Gerade gemeinsam haben. Der R_3 hat dann mit π' ausser dem Kegelschnitt höchstens einen Punkt, nämlich den dem Schnittpunkt der beiden anderen Geraden entsprechenden, gemein.

Einer ebenen Kurve, die von einem Kegelschnitt in höchstens p Punkten geschnitten wird (die von der *konischen Ordnung* p ist), entspricht auf π' eine Raumkurve der *linearen Ordnung* p. Insbesondere entspricht einem *konischen Elementarbogen*, d. h.

[4] Fabricius-Bjerre [4], § 6.

einem konvexen Bogen der konischen Ordnung 5, ein monotoner Bogen auf π' (l. c. S. 22). Ein Oval k der zu betrachtenden Art setzt sich somit aus einer endlichen Anzahl konischer Elementarbogen zusammen. Von dem Oval k wird ferner gefordert (l. c. S. 22, Bedingung III), *dass ein (eigentlicher) Kegelschnitt c durch 5 Punkte von k gegen einen bestimmten eigentlichen Kegelschnitt konvergiert, wenn zwei oder mehr der 5 Punkte auf beliebige Weise gegen denselben Grenzpunkt konvergieren.* Hierdurch wird sichergestellt, dass das Bild k' von k auf π' eine ordinäre Raumkurve ist, dass also keine anderen singulären Punkte als Wendepunkte vorkommen (l. c. S. 23).

Lässt man insbesondere alle 5 Punkte von k gegen denselben Grenzpunkt P streben, so konvergiert der Kegelschnitt c gegen den *Schmiegkegelschnitt* von k im Punkte P. Dieser berührt entweder fünfpunktig und durchsetzt k oder sechspunktig und ist dann (lokaler) Stützkegelschnitt (P ist *sextaktischer* Punkt), je nachdem der P entsprechende Punkt P' auf k' ordinär oder Wendepunkt ist. Der Schmiegkegelschnitt in P wird auf die Schnittkurven von π' mit dem oskulierenden R_4 von k' in P' abgebildet.

Die Ovale, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen, setzen sich also aus endlich vielen konischen Elementarbogen zusammen, die in Punkten der konischen Ordnungen 5 oder 6 an einander grenzen. In jedem Punkt existiert ein Schmiegkegelschnitt, der stetig mit diesem Punkt variiert.

Ovale mit diesen Eigenschaften werden als *einfache Ovale* bezeichnet.

Das Bild k' eines einfachen Ovals ist somit eine stückweise monotone, ordinäre (geschlossene) Kurve im R_5. Sie kann keine 5-Sekanten haben, d. h. kein R_3 trifft k' in mehr als 4 Punkten. Wie oben erwähnt hat nämlich ein R_3, falls er keinen Kegelschnitt von π' enthält, höchstens 4 Punkte mit π', also umsomehr mit k' gemein. Enthält ein R_3 speziell einen Kegelschnitt von π', so hat er höchstens 3 Punkte mit k' gemein, da k von der dem Kegelschnitt entsprechenden Geraden der Ebene π in höchstens 2 Punkten geschnitten wird, und ausser deren Bildpunkten trifft der R_3 die Fläche in höchstens noch einem Punkt.

Ein Schmiegkegelschnitt eines einfachen Ovals k in einem Punkt P durchsetzt k im allgemeinen und hat daher mindestens einen weiteren Punkt Q mit k gemein. Indem man zu k' übergeht und Satz 14 (für $n=5$) anwendet, sieht man, dass wenigstens einer der Bogen PQ einen sextaktischen Punkt enthält. Es ist übrigens bekannt (Mukhopadhyaya), dass ein Oval mindestens 6 sextaktische Punkte besitzt. In der angeführten Arbeit [4] ist bewiesen, dass ein einfaches Oval der konischen Ordnung 6 genau 6 sextaktische Punkte hat (und aus 6 konischen Elementarbogen besteht).

Offenbar ist jedes einfache Oval von *endlicher* (und zwar *gerader*) *konischer Ordnung.* Haben ein Oval k und ein Kegelschnitt c keinen gemeinsamen Punkt, so haben

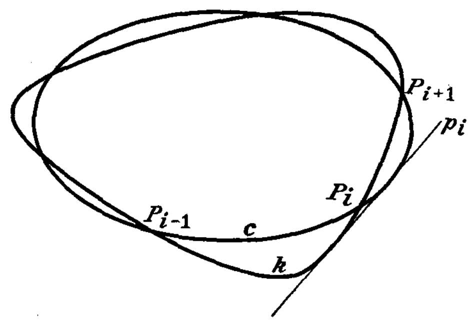

Fig. 7.

sie 0 oder 4 gemeinsame Tangenten, und dual, haben sie keine gemeinsame Tangente, so haben sie 0 oder 4 gemeinsame Punkte. In allen anderen Fällen ist die Anzahl der Schnittpunkte gleich der der gemeinsamen Tangenten.[5] Dies gilt auch, wenn sich die Kurven berühren. Man kann daher sagen, dass bei einem einfachen Oval *konische Ordnung und Klasse übereinstimmen.* Denkt man sich die beiden Kurven ins Endliche projiziert (was möglich ist, wenn gemeinsame Tangenten vorhanden sind), so besteht die folgende Beziehung zwischen den gemeinsamen Punkten und Tangenten (Fig. 7): Die Schnittpunkte bestimmen in passender Reihenfolge P_1, $P_2, \ldots$ ein konvexes Polygon. Es seien P_{i-1}, P_i, P_{i+1} drei auf einander folgende Ecken. Dann liegt z. B. der Bogen $P_{i-1}\,P_i$ von k ausserhalb, der Bogen $P_i\,P_{i+1}$ von k innerhalb des Kegelschnitts c. Dem Punkt P_i entspricht dann eine gemeinsame Tangente p_i, die k in einem Punkt des Bogens $P_{i-1}\,P_i$ und c in einem Punkt des Bogens $P_i\,P_{i+1}$ berührt. Falls sich k und c in P_i berühren, ist p_i die gemeinsame Tangente in P_i.

Da das Oval k „glatt" ist, d. h. eine mit dem Berührungspunkt stetig variierende Tangente besitzt, ist klar, dass wenn $s\,(\geqq 2)$ der Punkte P_i gegen denselben Grenzpunkt P auf k konvergieren, die zugehörigen s Tangenten gegen die Tangente p in P konvergieren. Es gilt auch der umgekehrte (dual entsprechende) Satz. Wählt man speziell die Werte $s=5$ und $s=6$, so erhält man

Satz 17. *Einem einfachen Oval entspricht dual ein einfaches Oval der gleichen konischen Ordnung. Einem Schmiegkegelschnitt entspricht ein Schmiegkegelschnitt, einem ordinären bzw. sextaktischen Punkt ein ordinärer bzw. sextaktischer Punkt.*

Es seien nun ein einfaches Oval k und ein Punkt U, der nicht auf k liegt, gegeben. Wir beweisen dann

---

[5] Vgl. JUEL [9], S. 19.

Satz 18. *Das Oval k habe die Eigenschaft, dass jeder seiner Punkte eine Umgebung besitzt, die von jedem durch den Punkt U gehenden Kegelschnitt in höchstens 4 Punkten geschnitten wird. Dann hat k im ganzen nicht mehr als 4 Punkte mit einem solchen Kegelschnitt gemein.*

Man kann dies auch so formulieren: Hat k die lokale Ordnung 4 in bezug auf die Schar (c) der Kegelschnitte durch U, so hat k im ganzen die Ordnung 4 in bezug auf (c).

Zum Beweise betrachten wir das Bild k' von k auf der Veroneseschen Fläche π'. Diese Kurve k' ist geschlossen, stückweise monoton und ordinär. Bezeichnet U' das Bild von U, so entsprechen den durch U gehenden Kegelschnitten die Schnittkurven von π' mit den Hyperebenen durch U'. Wir projizieren nun k' von U' aus auf eine Hyperebene S_4, wodurch ein neues Bild k'' von k entsteht.[6] Da k' geschlossen und stückweise monoton ist, gilt dasselbe von k'. Ein R_3 durch 4 Punkte von k' hat nach einer früher gemachten Bemerkung keine anderen Punkte mit π' gemein, und der oskulierende R_3 in einem Punkt P' von k' kann daher nicht durch U' gehen. Hieraus folgt[7], dass die Kurve k'' ebenfalls ordinär ist, da sie nur ordinäre und Wendepunkte besitzen kann. Da ein R_3 durch U' höchstens 3 Punkte mit k' gemein hat, besitzt die Projektion k'' *keine 4-Sekanten.*

Folglich ist k'' eine geschlossene, stückweise monotone, ordinäre Kurve ohne 4-Sekanten in S_4. Der Voraussetzung von Satz 18 gemäss wird k' in der Umgebung des P entsprechenden Punktes P' von einer Hyperebene durch U' in höchstens 4 Punkten geschnitten, woraus folgt, dass k'' in der Umgebung der Projektion P'' von P' mit einem beliebigen R_3 (also einer Hyperebene) in S_4 höchstens 4 Punkte gemein hat. Die Kurve k'' ist also punktweise monoton. Alle Voraussetzungen für die Anwendung von Satz 12 auf k'' sind somit erfüllt, und aus dem Satz folgt, dass k'' im ganzen monoton ist, also dass jeder R_3 in S_4 in höchstens 4 Punkten schneidet. Die Kurve k' wird von jeder Hyperebene durch U' in höchstens 4 Punkten geschnitten, womit Satz 18 bewiesen ist.

Jedes Oval k, das die Voraussetzungen von Satz 18 erfüllt, hat die Eigenschaft, dass ein Kegelschnitt durch U, der k in einem Punkt P vierpunktig berührt, ganz inner-

[6] Das Bild k'' von k kann man auch direkt aus k erhalten. Wählt man U in $(0, 0, 1)$ und U' in $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, so ist die Abbildung von π auf die projizierte Veronesesche Fläche im S_4 mit der Gleichung $x_5 = 0$ durch

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_2 : y_2 y_0 : y_0 y_1 : y_0^2 : y_1^2$$

gegeben.

[7] SCHERK [11].

halb k verläuft oder k umschliesst, je nachdem U innerhalb oder ausserhalb k liegt. Mit anderen Worten, der durch U gehende oskulierende Kegelschnitt ist Stützkegelschnitt von k in P. Umgekehrt beweisen wir

Satz 19. *Ist jeder ein einfaches Oval k oskulierende Kegelschnitt durch U Stützkegelschnitt von k, so wird k von jedem Kegelschnitt durch U in höchstens 4 Punkten getroffen.*

Ist der durch U gehende Kegelschnitt c ein Stützkegelschnitt von k im Punkte P, liegt er also ganz auf der einen Seite von k, so ist die c entsprechende Hyperebene durch U' Stützhyperebene von k' in P', und der oskulierende R_3 von k'' im Punkte P'' ist daher Stützhyperebene von k'' in diesem Punkt. Die Kurve k'' ist somit wieder punktweise monoton, woraus der Satz (wie oben) folgt.

Satz 18 dual entsprechend hat man: Es seien ein einfaches Oval und eine Gerade u, die das Oval nicht berührt, vorgelegt. Das Oval habe in der Umgebung jedes seiner Punkte (jeder seiner Tangenten) höchstens 4 Tangenten mit einem beliebigen u berührenden Kegelschnitt gemein. Dann hat das Oval im ganzen höchstens 4 gemeinsame Tangenten mit einem solchen Kegelschnitt. Aus diesem Satz folgern wir nun

Satz 20. *Es seien ein einfaches Oval k und eine k nicht berührende Gerade u gegeben. Wird k in der Umgebung jedes seiner Punkte von jedem u berührenden Kegelschnitt c in höchstens 4 Punkten getroffen, so hat k im ganzen höchstens 4 Punkte mit einem solchen Kegelschnitt gemein.*

Wenn k in der Umgebung jedes Punktes höchstens 4 Punkte mit dem Kegelschnitt c gemein hat, so hat k (lokal) auch höchstens 4 Tangenten mit c gemein. Dies gilt dann auch für das Oval im ganzen, und daraus folgt weiter, dass k im ganzen höchstens 4 gemeinsame Punkte mit einem Kegelschnitt c haben kann.

Schliesslich formulieren wir den dem Satz 19 dual entsprechenden Satz, der ebenfalls aus der Tatsache folgt, dass ein einfaches Oval dieselbe Ordnung und Klasse hat:

Satz 21. *Es seien ein einfaches Oval k und eine k nicht berührende Gerade u gegeben. Wenn jeder oskulierende Kegelschnitt von k, der die Gerade u berührt, Stützkegelschnitt von k ist, so wird k von jedem u berührenden Kegelschnitt in höchstens 4 Punkten geschnitten.*

Wir gehen nun von der *projektiven* zur *affinen* Ebene über, indem wir die Gerade u als Referenzgerade (unendlich ferne Gerade) wählen. Die in den Sätzen 20 und 21 auftretenden Kegelschnitte sind dann Parabeln, und die über das Oval k gemachte Annahme besagt, dass es entweder ganz im Endlichen liegt (eigentliches Oval) oder zwei unendlich ferne Punkte besitzt (uneigentliches Oval). Ovale mit nur einem unendlich fernen Punkt sind ausgeschlossen.

In der affinen Ebene erhalten dann die Sätze 20 und 21 folgenden Wortlaut:

Satz 20 a. *Wenn ein einfaches Oval k in der Umgebung jedes seiner Punkte von jeder Parabel in höchstens 4 Punkten geschnitten wird, so hat k im ganzen höchstens 4 Punkte mit einer Parabel gemein.*

Satz 21 a. *Wenn jede oskulierende Parabel eines einfachen Ovals Stützkegelschnitt von k ist, so wird K von jeder Parabel in höchstens 4 Punkten geschnitten.*

In beiden Fällen kann man sagen, dass das Oval die *parabolische Ordnung* 4 (also die kleinstmöglich parabolische Ordnung) besitzt.

Aus den Sätzen 20a und 21a ergeben sich nun fast unmittelbar die Sätze von Böhmer und Mohrmann über elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmte Ovale sowie die Sätze von Carleman und Haupt über parabolisch konvexe bzw. konkave Ovale.[8]

Von einer Kurve γ wird gesagt, dass sie in einem Punkt P *elliptisch, parabolisch* oder *hyperbolisch gekrümmt* ist, je nachdem der Schmiegkegelschnitt von γ in P eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.[9] Ist γ im Punkte P elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt, so gibt es auf γ eine Umgebung von P derart, dass 5 beliebige Punkte dieser Umgebung stets auf einer Ellipse bzw. einer Hyperbel liegen. Gibt es umgekehrt auf γ eine Umgebung von P derart, dass 5 beliebige ihrer Punkte stets auf einer Ellipse bzw. einer Hyperbel liegen, so soll γ in P im weiteren Sinne elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt heissen. Der Schmiegkegelschnitt von γ in P ist dann im allgemeinen eine Ellipse bzw. Hyperbel, kann aber in eine Parabel ausarten.

Wir beweisen nun

Satz 22. *Ist ein einfaches Oval k in jedem seiner Punkte im weiteren Sinne elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt, so liegen 5 beliebige Punkte von k auf einer Ellipse bzw. Hyperbel.*

Lägen nämlich 5 Punkte von k auf einer Ellipse und 5 andere auf einer Hyperbel, so müsste es auch 5 Punkte auf k geben, die auf einer Parabel liegen; denn der Kegelschnitt durch 5 Punkte variiert stetig mit diesen Punkten, und kein Kegelschnitt durch 5 Punkte von k entartet in ein Geradenpaar, da ein solches ja höchstens 4 Punkte mit k gemein haben kann. Nach Voraussetzung wird k in der Umgebung jedes seiner Punkte von einer Parabel in höchstens 4 Punkten getroffen, und nach Satz 20 a

---

[8] Böhmer [2], Mohrmann [10], Carleman [3], Haupt [5] und [6].

[9] Blaschke [1], S. 27.

gilt dies daher für die ganze Kurve k. Hieraus folgt, dass sämtliche Kegelschnitte durch 5 Punkte von k von der gleichen Art sind, und damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem obigen geht hervor, dass jedes überall elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmte einfache Oval von der parabolischen Ordnung 4 ist. Wir haben aber zugleich gesehen, dass ein einfaches Oval der parabolischen Ordnung 4 überall elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt ist, da sämtliche Kegelschnitte durch 5 Kurvenpunkte von der gleichen Art sind. Es gilt also

Satz 23. *Die (im weiteren Sinne) elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmten einfachen Ovale stimmen mit den Ovalen der parabolischen Ordnung 4 überein.*

Wenn eine Kurve γ in der Umgebung eines Punktes P ganz innerhalb bzw. ganz ausserhalb der oskulierenden Parabel in P liegt, nennt man die Kurve nach CARLEMAN bzw. HAUPT *parabolisch konvex* bzw. *parabolisch konkav* in diesem Punkt. Es ist nun klar, dass ein einfaches Oval k der parabolischen Ordnung 4 überall parabolisch konvex oder überall parabolisch konkav ist und ganz innerhalb bzw. ganz ausserhalb einer jeden oskulierenden Parabel liegt, je nachdem k überall elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt ist. Aus Satz 21 a folgt umgekehrt, dass jedes überall parabolisch konvexe bzw. konkave einfache Oval von der parabolischen Ordnung 4 ist und elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmt ist. Man hat also

Satz 24. *Die (im weiteren Sinne) elliptisch bzw. hyperbolisch gekrümmten einfachen Ovale sind identisch mit den überall parabolisch konvexen bzw. konkaven Ovalen.*

Die elliptisch gekrümmten (parabolisch konvexen) Ovale sind offenbar eigentliche Ovale, die hyperbolisch gekrümmten (parabolisch konkaven) uneigentliche Ovale.

Wir bemerken schliesslich, dass die Sätze 22, 23 und 24 im hyperbolischen, jedoch nicht im elliptischen Fall, ihre Gültigkeit bewahren, wenn man statt der Ovale (offene) konvexe Bogen in betracht zieht.

Literaturverzeichnis.

[1] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie II* (Berlin 1923).

[2] BÖHMER, P, *Über elliptisch-konvexe Ovale.* Math. Ann. Bd. 60 (1905), p. 256.

[3] CARLEMAN, T., *Sur les courbes paraboliquement convexes.* Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Ges., Zürich, Bd. 85 (1940), Beiblatt Nr. 32, p. 61.

[4] FABRICIUS-BJERRE, FR., *Über geschlossene Kurven $(n+1)$ter Ordnung im R_n mit einer Anwendung auf ebene Kurven der konischen Ordnung 5 und 6.* D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat-fys. Medd., Bd. 20, Nr. 1 (1942).

[5] Haupt, O., *Bemerkungen über parabolisch konvexe und konkave Ovale.* Sitz.ber. Phys-med. Soz. zu Erlangen, Bd. 72 (1940—41), p. 216.

[6] ——, *Über Verallgemeinerungen des Böhmerschen und verwandter Ovalsätze,* Abh. a. d. math. Seminar, Hamburg, Bd. 15 (1943), p. 130.

[7] Hjelmslev, J. *Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle.* D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Oversigt 1911, Nr. 5.

[8] ——, *Introduction à la théorie des suites monotones.* D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Oversigt 1914, Nr. 1.

[9] Juel, C., *Indledning i Læren om grafiske Kurver.* D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 6. Række, nat.-mat. Afd, Bd. 10, Nr. 1 (1899).

[10] Mohrmann, H., *Beständig gleichartig gekrümmte Kurven,* Math. Ann. Bd. 72 (1912) p. 285, und *Beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke,* ebenda, p. 593.

[11] Scherk. P., *Über Punkte $(n+1)$ter Ordnung auf Bögen im R_n.* Annali di Mat., Serie IV, Bd. 17 (1938), p. 289.