Propagation des singularités des courants positifs fermés

Jean-Pierre Demailly

Abstract

Given a closed positive current T on a bounded Runge open subset Ω of $\mathbf{C}^n$, we study sufficient conditions for the existence of a global extension of T to $\mathbf{C}^n$. When T has a sufficiently low density, we show that the extension is possible and that there is no propagation of singularities, i.e. T may be extended by a closed positive C^∞-form outside $\overline{\Omega}$. Conversely, using recent results of *H.* Skoda and *H.* El Mir, we give examples of non extendable currents showing that the above sufficient conditions are optimal in bidegree (1, 1).

0. Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons au problème de l'existence de prolongements globaux d'un courant positif fermé défini sur un ouvert relativement compact de $\mathbf{C}^n$.

Soit T un courant positif fermé de bidimension (p, p) (i.e. de bidegré (q, q) avec $p+q=n$) sur un ouvert $\Omega\subset\mathbf{C}^n$. D'après un théorème de $Y-T$ SIU [5], les ensembles $E_c=\{z\in\Omega;\ \nu(T, z)\geqq c>0\}$ associés aux nombres de Lelong $\nu(T;\ z)$ sont des sous-ensembles analytiques de Ω. Les ensembles E_c propagent donc les « singularités » de T, et apparaissent comme une obstruction au prolongement global du courant T (du moins lorsque les E_c ne s'étendent pas eux-mêmes à $\mathbf{C}^n$ tout entier).

Nous cherchons ici des conditions suffisantes simples, exprimant que la densité de T n'est pas trop grande, pour que le prolongement soit possible. On mesure pour cela la densité des masses de T en posant

$$\beta = \frac{i}{2}\,\partial\overline{\partial}|z|^2,$$

$$\sigma = \text{mesure trace de } T = \frac{1}{p!}\,\beta^p\wedge T,$$

$$\sigma(z, r) = \sigma\big(B(z, r)\big),$$

avec $B(z, r)=\{\zeta\in\mathbf{C}^n;\ |\zeta-z|<r\}$ et $z\in\Omega_r=\{\zeta\in\mathbf{C}^n;\ d(\zeta, \complement\Omega)>r\}$. Nous démontrons alors les résultats suivants:

Théorème 1. *Soit $\Omega\subset\subset\mathbf{C}^n$ un ouvert de Runge, et T un courant positif fermé sur Ω dont la classe de cohomologie est nulle. On suppose que les masses $\sigma(z, r)$ vérifient pour tout $\varepsilon>0$ et tout compact $K\subset\Omega_\varepsilon$ la condition suivante:*

$$\text{(1)}\qquad \sup_{z\in K}\int_0^\varepsilon \frac{\sigma(z, r)}{r^{2n-1}}\,dr<+\infty \quad \textit{si } T \textit{ est de bidegré } (1, 1);$$

$$\text{(2)}\qquad \int_0^\varepsilon \sup_{z\in K}\frac{\sigma(z, r)^{1/2}}{r^n}\,dr<+\infty \quad \textit{en bidegré } (q, q),\ 1<q<n.$$

Alors, pour tous réels $\delta>\eta>0$, il existe un courant $\Theta\geqq 0$ fermé sur $\mathbf{C}^n$ qui coincide avec T sur Ω_δ et de classe C^∞ en dehors de $\bar{\Omega}_\eta$.

Un résultat classique de P. LELONG [4] affirme que $\sigma(z, r)r^{-2p}$ est fonction croissante de r lorsque T est de bidimension (p, p). On a donc toujours une estimation de la forme $\sup_{z\in K}\sigma(z, r)=O(r^{2p})$, qui correspond typiquement au cas d'un courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique de $\dim_{\mathbf{C}}=p$. Un tel courant est bien sûr en général non prolongeable. Les conditions (1) et (2) imposent aux masses $\sigma(z, r)$ une croissance beaucoup plus restrictive, comme le montrent les implications évidentes

$$\sup_{z\in K}\sigma(z, r)=O(r^{2n-2+\varepsilon})\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)\Rightarrow(\forall z\in\Omega)\sigma(z, r)=o(r^{2n-2}).$$

Du théorème 1 découle l'existence de majorants globaux pour un courant défini sur un ouvert d'une variété de Stein et ayant une densité suffisamment faible.

Corollaire 2. *Soit T un courant positif fermé défini sur un ouvert Ω d'une variété de Stein X. On suppose que T vérifie la condition* (1) *(resp.* (2)*) relativement à des ouverts de cartes Ω_j recouvrant Ω. Alors pour tout ouvert $\omega\subset\subset\Omega$ il existe un courant $\Theta\geqq 0$ fermé sur X, de classe C^∞ au voisinage de $X-\Omega$ et tel que $T\leqq\Theta$ sur ω.*

Pour démontrer ces résultats dans le cas général (2), on construit à l'aide d'un noyau un potentiel V tel que $i\partial\bar\partial V=T$ modulo $C^\infty(\bar{\Omega}_\delta)$. On vérifie alors que V peut se prolonger de sorte que la partie $\leqq 0$ de $i\partial\bar\partial V$ reste bornée. Dans le cas élémentaire où T est de bidegré (1, 1), la condition (1) signifie simplement que V est une fonction plurisousharmonique localement bornée. Le théorème 3 ci-dessous montre que la condition (1) est déjà optimale pour assurer la validité du corollaire 2.

Théorème 3. *Soient $\omega\subset\subset\Omega$ deux boules concentriques dans $\mathbf{C}^n$. Si $p=n-1$, on se donne une fonction mesurable $\gamma>0$ définie sur* $]0, 1]$ *telle que*

$$\text{(3)}\qquad \int_0^1\frac{\gamma(r)}{r}\,dr=+\infty$$

et vérifiant l'hypothèse technique suivante:

$$\exists A > 1 \quad \textit{tel que} \quad \sup_{t<Ar} \frac{\gamma(t)}{\gamma(r)} < A. \tag{4}$$

Alors il existe un courant $T \geqq 0$ *fermé de bidimension* (p, p) *sur* Ω, *dont les masses* $\sigma(z, r)$ *admettent pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout compact* $K \subset \Omega_\varepsilon$ *et tout* $r \in]0, \varepsilon[$ *l'estimation:*

$$\sup_{z\in K} \sigma(z, r) = C\gamma(r) r^{2n-2} \quad si \quad p = n-1, \tag{5}$$

$$\sup_{z\in K} \sigma(z, r) \leqq C r^{n+p-1} \quad si \quad 0 < p < n-1 \tag{6}$$

avec $C = C(K, \varepsilon) > 0$, *et ayant de plus les propriétés ci-dessous:*

(7) T *est de masse euclidienne infinie dans* Ω*;*

(8) *tout courant positif fermé* Θ *défini sur* Ω *et tel que* $\Theta \geqq T$ *sur* ω *vérifie* $\Theta \geqq T$ *sur* Ω *(en particulier* Θ *ne se prolonge à aucun voisinage de* $\bar{\Omega}$).

L'estimation (5) est valable en particulier avec les poids

$$\gamma(r) = \frac{1}{\operatorname{Log}\frac{2}{r}}, \quad \gamma(r) = \frac{1}{\operatorname{Log}\frac{2}{r}\operatorname{Log}\operatorname{Log}\frac{3}{r}}, \ldots$$

pour lesquels les conditions (3) et (4) sont trivialement vérifiées.

Le courant T du théorème 3 est obtenu en sommant les courants d'intégration sur les fibres d'un morphisme analytique $G: \Omega \to \mathbf{C}^{n-p}$ le long d'un ensemble pluripolaire complet contenu dans une sous-variété totalement réelle $M \subset \mathbf{C}^{n-p}$. On vérifie alors que le courant Θ doit nécessairement se propager de ω à Ω le long des fibres de G, ce qui donne (8). La démonstration utilise essentiellement trois ingrédients: les deux premiers sont des théorèmes de structure pour les courants positifs fermés, démontrés respectivement dans la Thèse d'EL MIR [3] et dans [1]; le troisième est l'existence de sous-variétés totalement réelles de dimension $n-1$ dans $\mathbf{C}^n$ qui soient des ensembles pluripolaires complets (DIEDERICH—FORNAESS [2]; voir aussi §5).

Les conditions suffisante (2) et non suffisante (6) restent néanmoins éloignées l'une de l'autre. Ainsi l'hypothèse (2), qui est indépendante de p, devrait logiquement pouvoir être remplacée par une hypothèse d'autant plus faible que la dimension p du courant est plus petite. Compte tenu de (1), (5) et (6), il paraît raisonnable de conjecturer qu'une condition suffisante d'existence de prolongements globaux du courant T soit la condition de finitude

$$\sup_{z\in K} \int_0^\varepsilon \frac{\sigma(z, r)}{r^{n+p}}\, dr < +\infty. \tag{2'}$$

L'estimation (6) montre en tout cas que l'exposant $n+p$ ne peut être choisi plus petit.

1. Prolongement des courants de bidegré (1, 1)

Il s'agit de prouver la partie (1) du théorème 1. Soit T un courant $\geqq 0$ fermé de bidegré (1, 1) sur Ω. D'après les hypothèses, T possède un potentiel V qui est une fonction plurisousharmonique (en abrégé p.s.h.) dans Ω; on a donc $i\partial\bar{\partial}V=T$. La formule de Lelong—Jensen s'écrit pour tout point $z\in\Omega_\varepsilon$:

$$\int_0^\varepsilon \frac{\sigma(z,r)}{r^{2n-1}}\,dr = C[\lambda(V,z,\varepsilon)-V(z)]$$

avec une constante $C>0$; ici $\lambda(V,z,\varepsilon)$ désigne la moyenne de V sur la sphère de centre z et de rayon ε. Il est bien connu que la fonction $z\mapsto\lambda(V,z,\varepsilon)$ est continue sur Ω_ε (ceci resulte de la formule de Stokes et du fait que dV est à coefficients L^1_{loc}). L'hypothèse (1) équivaut donc à dire que V est localement bornée sur Ω.

Chaque ouvert Ω_δ est de Runge dans Ω, donc aussi dans $\mathbf{C}^n$. Par suite, il existe une fonction p.s.h. $\psi\in C^\infty(\mathbf{C}^n)$ telle que $\psi\leqq -1$ sur $\bar{\Omega}_\delta$, $\psi\geqq 1$ sur $\complement\Omega_\eta$. Puisque V est localement bornée, on peut choisir un entier $N>0$ tel que

$$\begin{cases} N\psi \leqq V & \text{sur } \bar{\Omega}_\delta, \\ N\psi > V & \text{sur } \bar{\Omega}_\eta-\Omega_\eta. \end{cases}$$

On pose alors:

$$\begin{cases} U=V & \text{sur } \Omega_\delta, \\ U=\sup(V,N\psi) & \text{sur } \Omega_\eta-\Omega_\delta, \\ U=N\psi & \text{sur } \complement\Omega_\eta. \end{cases}$$

Dans ces conditions, il est clair que U est p.s.h. dans $\mathbf{C}^n$ et que le courant $\Theta=i\partial\bar{\partial}U$ répond à la question.

2. Construction de potentiels globaux dans $\mathbf{C}^n$, $n\geqq 2$

Soit T un courant de bidegré (q,q), $q\geqq 1$, dans un ouvert $\Omega\subset\subset\mathbf{C}^n$. Pour tous $\delta>\eta>0$ fixés, on choisit une fonction $\chi\in C^\infty(\mathbf{C}^n)$, $0\leqq\chi\leqq 1$, $\chi=1$ au voisinage de $\bar{\Omega}_\delta$, χ à support dans Ω_η. On associe à T le potentiel

$$V(z)=\int_{\zeta\in\mathbf{C}^n}\chi(\zeta)T(\zeta)\wedge K(z,\zeta),\quad z\in\mathbf{C}^n,$$

où $K(z,\zeta)=-c_n\dfrac{\beta^{n-1}(z-\zeta)}{|z-\zeta|^{2n-2}}$, et où (avec un léger abus de notation)

$$\beta(z-\zeta)=\frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z-\zeta|^2.$$

Le noyau K est donc de bidegré total $(n-1, n-1)$ en (z, ζ), et V est de bidegré $(q-1, q-1)$ en z. La constante $c_n > 0$ est choisie ici de sorte que $i\partial\bar{\partial}K = [\Delta]$ = courant d'intégration sur la diagonale de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Plus généralement, etant donné une fonction $\varphi \in C^\infty(\mathbf{C}^n)$ à support dans Ω_η, $0 \leqq \varphi \leqq 1$, et une fonction $\varrho\colon]0, +\infty[\to [0, 1]$ croissante de classe C^∞, on associe à T la $(q-1, q-1)$-forme définie sur $\mathbf{C}^n$:

$$V_{\varrho,\varphi}(z) = \int \varphi^2(\zeta) T(\zeta) \wedge K_\varrho(z, \zeta),$$

avec

$$K_\varrho(z, \zeta) = -\tilde{\varrho}(|z-\zeta|^2) \beta^{n-1}(z-\zeta),$$

et

$$\tilde{\varrho}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\varrho(u)\, du}{u^n}.$$

Lemme 2.1. *Le noyau K_ϱ est à coefficients $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n)$ et*

$$i\partial\bar{\partial}K_\varrho = \frac{\varrho(0_+)}{(n-1)c_n}[\Delta] + \frac{\varrho'(|z-\zeta|^2)}{|z-\zeta|^{2n}}\, i\partial|z-\zeta|^2 \wedge \bar{\partial}|z-\zeta|^2 \wedge \beta^{n-1}.$$

En particulier $i\partial\bar{\partial}K_\varrho$ est un (n, n)-courant positif sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$.

Démonstration. Les coefficients de K_ϱ sont des multiples constants de $\tilde{\varrho}(|z-\zeta|^2)$, et par hypothèse

$$0 \leqq \tilde{\varrho}(t) \leqq \int_t^{+\infty} \frac{du}{u^n} = \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}$$

donc $K_\varrho \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n) \cap C^\infty(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n \setminus \Delta)$. Si $\varrho = \varrho(0_+)$ est une constante on obtient $K_\varrho = \dfrac{\varrho(0_+)}{(n-1)c_n} K$, par suite

$$i\partial\bar{\partial}K_\varrho = \frac{\varrho(0_+)}{(n-1)c_n}[\Delta].$$

En général, quitte à remplacer ϱ par $\varrho - \varrho(0_+)$ et après translation et régularisation, on peut supposer que $\varrho = 0$ au voisinage de 0. Calculons alors le $i\partial\bar{\partial}$ par rapport à la variable $x = z - \zeta$. Il vient:

$$\begin{aligned} i\partial\bar{\partial}(\tilde{\varrho}(|x|^2)\beta^{n-1}(x)) &= 2\tilde{\varrho}'(|x|^2)\beta^n + \tilde{\varrho}''(|x|^2)\, i\partial|x|^2 \wedge \bar{\partial}|x|^2 \wedge \beta^{n-1} \\ &= \left(\frac{n}{|x|^2}\tilde{\varrho}'(|x|^2) + \tilde{\varrho}''(|x|^2)\right) i\partial|x|^2 \wedge \bar{\partial}|x|^2 \wedge \beta^{n-1} \\ &= \frac{\varrho'(|x|^2)}{|x|^{2n}}\, i\partial|x|^2 \wedge \bar{\partial}|x|^2 \wedge \beta^{n-1}, \end{aligned}$$

où dans la deuxième ligne on a utilisé l'égalité

$$i\partial|x|^2\wedge\bar\partial|x|^2\wedge\beta^{n-1}=\frac{2}{n}|x|^2\beta^n,$$

et dans la troisième la définition explicite de $\tilde\varrho$. ∎

Une dérivation sous le signe $\int$ montre que

$$i\partial\bar\partial V(z)=\int\chi(\zeta)T(\zeta)\wedge i\partial_z\bar\partial_z K(z,\zeta).$$

Les dérivations partielles $\partial_z, \partial_\zeta, \bar\partial_z, \bar\partial_\zeta$ sont reliées aux opérateurs $\partial, \bar\partial$ sur $\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ par les formules évidentes $\partial_z=\partial-\partial_\zeta$, $\bar\partial_z=\bar\partial-\bar\partial_\zeta$. Par suite

$$i\partial_z\bar\partial_z K=i\partial\bar\partial K-i\partial_\zeta\bar\partial K-i\partial\bar\partial_\zeta K+i\partial_\zeta\bar\partial_\zeta K.$$

Compte tenu de l'hypothèse $dT=0$ et de la formule $i\partial\bar\partial K=[\Delta]$, on obtient après intégration par parties:

$$\begin{aligned}i\partial\bar\partial V&=\chi T+\int i\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\bar\partial K(z,\zeta)-\int i\bar\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\partial K(z,\zeta)\\&\quad+\int i\partial\bar\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge K(z,\zeta).\end{aligned}$$

On a de même:

$$\begin{aligned}i\partial\bar\partial V_{\varrho,\varphi}&=\int\varphi^2(\zeta)T(\zeta)\wedge i\partial\bar\partial K_\varrho(z,\zeta)+\int 2i\varphi\partial\varphi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\bar\partial K_\varrho(z,\zeta)\\&\quad-\int 2i\varphi\bar\partial\varphi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\partial K_\varrho(z,\zeta)\\&\quad+\int i\partial\bar\partial\varphi^2(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge K_\varrho(z,\zeta).\end{aligned}$$

Comme on le verra au § 3, l'existence d'un prolongement global du courant T résulte du fait que, sous l'hypothèse (2) et avec un choix convenable de ϱ, le (q,q)-courant $i\partial\bar\partial(V+V_{\varrho,\varphi})-\chi T$ est $\geqq 0$ modulo des formes à coefficients bornés.

Lemme 2.2. *On suppose que les fonctions χ, φ et ϱ vérifient les hypothèses techniques suivantes:*

(2.1) χ *est à support dans* Ω_η, $\chi=1$ *au voisinage de* $\bar\Omega_\delta$;

(2.2) φ *est à support dans* $\Omega_\eta-\bar\Omega_\delta$, $\varphi=1$ *au voisinage du support de* $\partial\chi$;

(2.3) $$0\leqq\varrho(t)\leqq 1 \quad \textit{et} \quad 0<\varrho'(t)\leqq\frac{1}{t} \quad \textit{pour tout} \quad t>0.$$

Alors il existe une $(1,1)$*-forme* $\alpha\geqq 0$ *de classe* C^∞ *à support dans* $\Omega_\eta-\bar\Omega_\delta$ *telle que*

$$i\partial\bar\partial(V+V_{\varrho,\varphi})\geqq\chi(z)T(z)-I(z)$$

avec

$$I(z) = \int \alpha(\zeta)\wedge T(z)\wedge \frac{\beta^{n-1}(z-\zeta)}{|z-\zeta|^{2n}\varrho'(|z-\zeta|^2)}.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Cauchy—Schwarz pour minorer les termes croisés dans l'expression de $i\partial\bar\partial V_{\varrho,\varphi}$ (deuxième et troisième intégrales, qui sont conjuguées). On a par définition de K_ϱ et $\tilde\varrho$:

$$2i\varphi\partial\varphi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\bar\partial K_\varrho = \frac{\varrho(|z-\zeta|^2)}{|z-\zeta|^{2n}}\, 2i\varphi\partial\varphi(\zeta)\wedge\bar\partial|z-\zeta|^2\wedge\beta^{n-1}\wedge T(\zeta),$$

d'où

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} 2i\varphi\partial\varphi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\bar\partial K_\varrho \\ &\geqq -\frac{i}{4}\varphi^2\frac{\varrho'(|z-\zeta|^2)\partial|z-\zeta|^2\wedge\bar\partial|z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^{2n}}\wedge\beta^{n-1}\wedge T(\zeta) \\ &\quad -4i\partial\varphi(\zeta)\wedge\bar\partial\varphi(\zeta)\wedge\frac{\varrho^2}{|z-\zeta|^{2n}\varrho'}\beta^{n-1}\wedge T(\zeta). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le lemme 2.1 montre que le terme (2.4) est minoré par $-\frac{1}{4}\varphi^2(\zeta)T(\zeta)\wedge i\partial\bar\partial K_\varrho$. Ceci entraine

$$\begin{aligned} i\partial\bar\partial V_{\varrho,\varphi} &\geqq \tfrac{1}{2}\int \varphi^2(\zeta)T(\zeta)\wedge i\partial\bar\partial K_\varrho \\ &+\int\left(i\partial\bar\partial\varphi^2\cdot K_\varrho - 8i\partial\varphi\wedge\bar\partial\varphi\wedge\frac{\varrho^2}{|z-\zeta|^{2n}\varrho'}\beta^{n-1}\right)\wedge T(\zeta). \end{aligned} \tag{2.5}$$

La dernière intégrale admet bien une minoration du type $I(z)$ puisque $\varrho^2\leqq 1$ et $K_\varrho = O\left(\frac{1}{|z-\zeta|^{2n-2}}\right) = O\left(\frac{1}{|z-\zeta|^{2n}\varrho'(|z-\zeta|^2)}\right)$ d'après l'hypothèse (2.3). Il en est visiblement de même pour l'intégrale $\int i\partial\bar\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge K(z,\zeta)$ dans le développement de $i\partial\bar\partial V$. Il nous reste maintenant à estimer les termes „croisés". $i\partial\bar\partial V$. D'après l'hypothèse (2.2), l'égalité $\bar\partial K = (n-1)c_n\frac{\bar\partial|z-\zeta|^2}{|z-\zeta|^{2n}}\wedge\beta^{n-1}$ et le lemme 2.1 il vient

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}[\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\bar\partial K(z,\zeta)] \\ &\geqq -\frac{1}{4}\varphi^2(\zeta)T(\zeta)\wedge i\partial\bar\partial K_\varrho - \frac{C}{|z-\zeta|^{2n}\varrho'}\, i\partial\chi(\zeta)\wedge\bar\partial\chi(\zeta)\wedge T(\zeta)\wedge\beta^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Le lemme 2.2 s'obtient alors en combinant la formule développée de $i\partial\bar\partial V$ et les inégalités (2.5), (2.6). ∎

Le lemme suivant va nous permettre de choisir la fonction ϱ de manière à minimiser le terme d'erreur $I(z)$ dans le lemme 2.2.

Lemme 2.3. *Sous l'hypothèse* (2) *du théorème* 1, *on peut trouver une fonction* $\varrho \in C^\infty(]0, +\infty[)$ *vérifiant la condition* (2.3) *et telle que l'intégrale* $I(z)$ *soit une forme à coefficients bornés.*

Démonstration. $I(z)$ est de classe C^∞ pour $z \notin \operatorname{Supp} \alpha \subset\subset \Omega_\eta$. Il suffit donc de majorer $I(z)$ lorsque z décrit un compact $K \subset \Omega_\eta$. Un calcul de $I(z)$ en coordonnées polaires d'origine z montre que

$$\|I(z)\| \leqq C\left(1+\int_0^\eta \frac{d\sigma(z, r)}{\varrho'(r^2) r^{2n}}\right) \tag{2.7}$$

où dans le membre de droite figure l'intégrale de Stieltjes de la fonction continue à gauche $r \mapsto \sigma(z, r)$. Posons $\sigma(r) = \sup_{z \in K} \sigma(z, r)$, $0 < r \leqq \eta$. L'hypothèse (2) s'écrit alors

$$\int_0^\eta \frac{\sigma(r)^{1/2}}{r^n}\, dr < +\infty.$$

Il existe donc une fonction croissante $\tilde{\sigma}$: $]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ de classe C^∞, telle que $\tilde{\sigma} \geqq \sigma$ au voisinage de 0 et vérifiant

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tilde{\sigma}(r)^{1/2}}{r^n}\, dr \leqq \frac{1}{n-1}. \tag{2.8}$$

On définit

$$\varrho(r^2) = \int_0^r \frac{\tilde{\sigma}(t)^{1/2}\, dt}{t^n}.$$

Il est clair que $0 \leqq \varrho \leqq \frac{1}{n-1} \leqq 1$, et d'après (2.8) on a:

$$\tilde{\sigma}(r)^{1/2} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^n} \leqq \frac{1}{n-1}, \quad \text{d'où} \quad \tilde{\sigma}(r)^{1/2} \leqq r^{n-1} \quad \text{et}$$

$$\varrho'(r^2) = \frac{\tilde{\sigma}(r)^{1/2}}{2r \cdot r^n} \leqq \frac{1}{2r^2}. \tag{2.9}$$

L'hypothèse (2.3) est donc bien satisfaite. En combinant (2.7) et l'égalité (2.9) il vient

$$\|I(z)\| \leqq C\left(1+2\int_0^\eta \frac{d\sigma(z, r)}{\tilde{\sigma}(r)^{1/2} r^{n-1}}\right),$$

$$\begin{aligned} \|I(z)\| &\leqq C'\left(1+\int_0^\eta \frac{d\sigma(z, r)}{\sigma(z, r)^{1/2} r^{n-1}}\right) \\ &\leqq C'\left[1+2\frac{\sigma(z, \eta)^{1/2}}{\eta^{n-1}} + (2n-2)\int_0^\eta \frac{\sigma(z, r)^{1/2}}{r^n}\, dr\right] \end{aligned}$$

après intégration par parties sur l'intervalle $[\eta_0, \eta]$ quand η_0 tend vers 0. Par hypothèse la dernière ligne est bien une fonction bornée de z. ∎

3. Prolongement des courants de bidegré (q, q), $1<q<n$

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1, en reprenant les notations du paragraphe 2. L'ouvert $\Omega \subset\subset \mathbf{C}^n$ est ici supposé de Runge. Soient $\Omega_\delta \subset\subset \Omega_\varepsilon \subset\subset \Omega_\nu \subset\subset \Omega_\eta$, $\delta>\varepsilon>\nu>\eta$, où Ω_ν est un voisinage de $\bar{\Omega}_\delta$ sur lequel $\chi\equiv 1$ et $\varphi\equiv 0$. Par construction V et $V_{\varrho,\varphi}$ sont de classe C^∞ au voisinage de $\mathbf{C}^n \setminus \Omega_\eta$ et

$$i\partial\bar{\partial}(V+V_{\varrho,\varphi}) = T \quad \text{modulo} \quad C^\infty(\Omega_\nu).$$

De plus, la classe de cohomologie de T sur Ω est supposée nulle. Il existe donc une $(q-1, q-1)$-forme $W\in\mathscr{C}^\infty(\Omega_\nu)$ telle que

$$T = i\partial\bar{\partial}(V+V_{\varrho,\varphi}+W) \quad \text{sur} \quad \Omega_\nu.$$

Soit λ une fonction de classe C^∞ à support dans Ω_ν, $\lambda\equiv 1$ sur Ω_ε. Le courant

$$\Theta_1 = i\partial\bar{\partial}(V+V_{\varrho,\varphi}+\lambda W)$$

coïncide avec T sur Ω_ε, Θ_1 est de classe C^∞ au voisinage de $\mathbf{C}^n \setminus \Omega_\eta$, et d'après les lemmes 2.2 et 2.3, $\Theta_1 \geqq \chi T$ modulo des formes bornées sur $\Omega_\eta \setminus \bar{\Omega}_\delta$. Comme Ω_ε est un ouvert de Runge dans $\mathbf{C}^n$, il existe une fonction p.s.h. $\psi\geqq 0$ de classe C^∞, exhaustive, $\psi\equiv 0$ sur Ω_δ, ψ strictement p.s.h. en tout point de $\mathbf{C}^n \setminus \Omega_\varepsilon$. On peut alors choisir une fonction convexe croissante $\mu\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R})$ telle que le courant

$$\Theta = \Theta_1 + (i\partial\bar{\partial}\mu\circ\psi)^q$$

soit $\geqq 0$ sur $\mathbf{C}^n$ tout entier. Θ coïncide avec T sur Ω_δ et répond donc à la question. ▮

Le corollaire 2 est une conséquence presque immédiate du théorème 1. Supposons en effet T défini sur un ouvert Ω d'une variété de Stein X, et soit $\omega \subset\subset \Omega$. Il existe un recouvrement fini de $\bar{\omega}$ par des ouverts $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N \subset\subset \Omega$ et des applications $F_j\colon X \to \mathbf{C}^n$ telles que F_j soit un isomorphisme de Ω_j sur la boule unité $B \subset \mathbf{C}^n$. Soit T_j l'unique courant sur B défini par $T = F_j^* T_j$ sur Ω_j. Choisissons des réels $\delta>\eta>0$ tels que

$$\bar{\omega} \subset \bigcup_{1\leqq j\leqq N} F_j^{-1}\big((1-\delta)B\big) \cap \Omega_j.$$

Le théorème 1 nous donne des courants $i\partial\bar{\partial}W_j \geqq 0$ définis sur $\mathbf{C}^n$, qui coïncident avec T_j sur $(1-\delta)B$, et dont le potentiel W_j est de classe C^∞ en dehors de $(1-\eta)\bar{B}$. Soit φ_j une fonction de classe C^∞ sur X, à support dans Ω_j, telle que $\varphi_j\equiv 1$ au voisinage de $F_j^{-1}\big((1-\eta)\bar{B}\big) \cap \Omega_j$. Le courant $i\partial\bar{\partial}(\varphi_j F_j^* W_j)$ coïncide avec T sur $F_j^{-1}\big((1-\delta)B\big) \cap \Omega_j$ et il est positif modulo des formes de classe C^∞. On peut donc trouver une fonction ψ strictement p.s.h. de classe C^∞ telle que le courant

$$\Theta = (i\partial\bar{\partial}\psi)^q + \textstyle\sum_{j=1}^N i\partial\bar{\partial}(\varphi_j F_j^* W_j)$$

soit $\geqq 0$ sur X et $\Theta \geqq T$ sur ω. On observe enfin que Θ coïncide avec $(i\partial\bar{\partial}\psi)^q$ au voisinage de $X-\Omega$. Le corollaire 2 est donc démontré ∎

La démonstration du théorème 1 s'applique aussi au cas des variétés de Stein, à condition de remplacer les noyaux K et K_ϱ de $\mathbf{C}^n$ par des noyaux analogues ayant les mêmes types de singularités. On obtient alors l'énoncé général suivant:

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert de Runge dans une variété de Stein X, et T un courant positif fermé sur Ω. On suppose que la classe de cohomologie de T est la restriction à Ω d'une classe de cohomologie de X et que T vérifie la condition* (1) *(resp.* (2)*) dans toute carte locale sur Ω. Alors pour tout couple d'ouverts de Runge $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ il existe un courant $\Theta \geqq 0$ fermé sur X qui coïncide avec T sur Ω_1 et de classe C^∞ sur $\Omega-\bar{\Omega}_2$.*

4. Construction de courants non prolongeables de faible densité

La démonstration du théorème 3 que nous allons donner fait appel à deux théorèmes de structure pour les courants positifs fermés, obtenus récemment par H. EL MIR [3] et J. P. DEMAILLY [1].

Soient X une variété analytique complexe de dimension n, Θ un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X. Rappelons qu'un ensemble $A \subset X$ est dit *pluripolaire* (resp. *pluripolaire complet)* s'il existe une fonction u p.s.h. sur X telle que $A \subset u^{-1}(-\infty)$ (resp. $A=u^{-1}(-\infty)$). Si Y est un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure de X, nous désignons par $[Y]$ le courant d'intégration sur Y.

Théorème 4.1. ([3]; cf. aussi SKODA [6]). *Soit A un ensemble fermé pluripolaire complet dans X, 1_A sa fonction caractéristique. Alors le courant positif $1_A \cdot \Theta$ est fermé.*

Théorème 4.2. [1]. *Soit S une sous-variété réelle fermée de classe C^1 de X, munie d'une submersion $\sigma\colon S \to M$ sur une variété C^1, dont les fibres $F_t=\sigma^{-1}(t)$, $t \in M$, sont des sous-variétés complexes connexes de dimension p. On suppose que l'espace tangent TS est totalement réel dans les directions normales aux fibres* [i.e. $(TS \cap iTS)_{|F_t}=TF_t$]. *Alors si le support de Θ est contenu dans S, il existe une unique mesure μ sur M, positive, telle que*

$$\Theta = \int_{t \in M} [F_t]\, d\mu(t)$$

[i.e. $\langle \Theta, v\rangle = \int_{t\in M} d\mu(t) \int_{F_t} v$ *pour toute (p,p)-forme v continue à support compact dans X*].

Nous aurons besoin également du lemme élémentaire qui suit:

Lemme 4.3. *Soient* $\omega \subset\subset \Omega$ *deux boules concentriques dans* $\mathbf{C}^n$. *Pour tout entier* $p=1, 2, \ldots, n-1$ *il existe une submersion holomorphe* $G\colon \Omega \to \mathbf{C}^{n-p}$ *et un ouvert* $V \subset \mathbf{C}^{n-p}$ *tels que les propriétés suivantes soient vérifiées quel que soit* $t \in V$:

(4.1) *la fibre* $G^{-1}(t)$ *est une sous-variété connexe de* $\dim p$;

(4.2) $$G^{-1}(t) \cap \omega \neq \emptyset;$$

(4.3) $G^{-1}(t)$ *est de volume euclidien infini.*

Le lemme est vrai pour des ouverts beaucoup plus généraux que des boules (par exemple pour un ouvert borné Ω de classe C^1, avec $\omega \subset\subset \Omega$), mais nous avons opté ici pour la simplicité technique.

Démonstration. On peut supposer que Ω est la boule de centre $a=(1, 0, \ldots, 0)$ et de rayon 1. On définit alors

$$G(z) = \left(z_{p+1} \exp \frac{1}{z_1^\alpha}, \ \ldots, \ z_n \exp \frac{1}{z_1^\alpha}\right)$$

où α désigne un réel >1 assez grand et z_1^α la détermination principale de la fonction $\exp(\alpha \operatorname{Log} z_1)$ (noter que $\operatorname{Re} z_1 > 0$ dans Ω). Pour $t=(t_{p+1}, \ldots, t_n) \in \mathbf{C}^{n-p}$, la fibre $G^{-1}(t)$ est l'ensemble défini par les équations

$$\begin{cases} z_j = t_j \exp\left(-\dfrac{1}{z_1^\alpha}\right), & p+1 \leqq j \leqq n, \\ |z_1-1|^2+|z_2|^2+\ldots+|z_p|^2+|t|^2 \left|\exp\left(-\dfrac{1}{z_1^\alpha}\right)\right|^2 < 1. \end{cases}$$

Les coupes de $G^{-1}(t)$ suivant les hyperplans $z_1=$constante sont donc des boules, par suite $G^{-1}(t)$ est connexe si et seulement si l'ensemble plan

$$E_\tau = \left\{|z_1-1|^2+\tau^2 \left|\exp\left(-\frac{1}{z_1^\alpha}\right)\right|^2 < 1\right\}, \quad \tau = |t|,$$

est lui-même connexe. Quand τ décroît vers 0, l'ensemble E_τ croît vers le disque $D=\{|z_1-1|^2<1\}$; il suffit donc de choisir $\tau<\tau_0$, où $\tau_0>0$ est la plus petite valeur critique sur D de la fonction $\tau(z_1)=(1-|z_1-1|^2)^{1/2} \left|\exp \dfrac{1}{z_1^\alpha}\right|$. Les conditions (4.1) et (4.2) sont alors réalisées dès que $|t|$ est assez petit. On va maintenant montrer que le volume euclidien de $G^{-1}(t)$ est infini si α est assez grand et si $|t|$ est >0 assez petit. D'après la remarque ci-dessus l'ensemble $G^{-1}(t)$ est un fibré en boules, ce qui donne

$$\mathrm{Vol}(G^{-1}(t)) = \int_{z_1\in E_\tau}\left(1+\sum_{j=p+1}^{n}\left|\frac{\partial z_j}{\partial z_1}\right|^2\right)d\lambda(z_1)\int_{|z_2|^2+\dots+|z_p|^2<R_\tau(z_1)} d\lambda(z_2, \dots, z_p)$$

$$= \frac{\pi^{p-1}}{(p-1)!}\int_{E_\tau}\left(1+\frac{\alpha^2\tau^2}{|z_1|^{2\alpha+2}}\left|\exp\left(-\frac{1}{z_1^\alpha}\right)\right|^2\right)R_\tau(z_1)^{p-1}d\lambda(z_1)$$

où

$$R_\tau(z_1) = 1-|z_1-1|^2-\tau^2\left|\exp\left(-\frac{1}{z_1^\alpha}\right)\right|^2, \quad E_\tau = \{z_1;\, R_\tau(z_1) > 0\}.$$

Passons en coordonnées polaires $z_1=re^{i\theta}$. Il vient

$$\mathrm{Vol}(G^{-1}(t)) = \frac{\pi^{p-1}}{(p-1)!}\int_{E_\tau}\left[1+\frac{\alpha^2\tau^2}{r^{2\alpha+2}}\exp\left(-\frac{2\cos\alpha\theta}{r^\alpha}\right)\right]R_\tau(re^{i\theta})^{p-1}r\,dr\,d\theta,$$

$$R_\tau(re^{i\theta}) = r(2\cos\theta-r)-\tau^2\exp\left(-\frac{2\cos\alpha\theta}{r^\alpha}\right).$$

On restreint l'intégration au domaine Δ défini par:

$$\begin{cases} |\theta| < \dfrac{\pi}{2\alpha}, \quad r < r_0 = \cos\dfrac{\pi}{2\alpha}, \\ \exp\left(-\dfrac{2\cos\alpha\theta}{r^\alpha}\right)\in[r, 2r]. \end{cases}$$

Δ est bien contenu dans E_τ quand $\tau^2<\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\pi}{2\alpha}$. De plus, l'amplitude angulaire du domaine Δ sur le cercle $|z_1|=r$ est $\geqq\dfrac{\mathrm{Log}\,2}{2\alpha}r^\alpha$, tandis que pour $re^{i\theta}\in\Delta$ on a:

$$1+\frac{\alpha^2\tau^2}{r^{2\alpha+2}}\exp\left(-\frac{2\cos\alpha\theta}{r^\alpha}\right) \geqq \alpha^2\tau^2 r^{-2\alpha-1},$$

$$r(2\cos\theta-r)-\tau^2\exp\left(-\frac{2\cos\alpha\theta}{r^\alpha}\right) \geqq Cr,$$

avec une constante $C>0$. On obtient alors pour $|t|$ assez petit:

$$\mathrm{Vol}(G^{-1}(t)) \geqq C'\tau^2\int_0^{r_0} r^{-\alpha+p-1}\,dr.$$

La condition (4.3) est donc réalisée dès que $\alpha>p$ (ou même $\alpha=p$ si $p\geqq 2$), en choisissant pour V une boule épointée de centre 0 et de rayon assez petit dans $\mathbf{C}^{n-p}$. ∎

Nous sommes maintenant prêts pour démontrer le théorème 3. Avec les notations du lemme 4.3, soit $M\subset V$ une sous-variété totalement réelle fermée et $P\subset M$

un ensemble pluripolaire complet fermé. On choisit une mesure $\mu \geqq 0$ non nulle à support compact dans P, et on lui associe le courant de bidimension (p, p):

$$T = \int_{t \in P} [G^{-1}(t)] \, d\mu(t).$$

Lemme 4.4. *Le courant T vérifie les hypothèses* (7) *et* (8) *du théorème* 3.

Démonstration. Puisque les fibres $G^{-1}(t)$ sont de volume infini, T a bien une masse infinie dans Ω en vertu du théorème de Fubini.

Soit de plus Θ un courant $\geqq 0$ fermé sur Ω qui majore T sur ω. Le courant T est à support dans l'ouvert $X = G^{-1}(V)$, et c'est sur cet ouvert que nous allons appliquer les théorèmes 4.1 et 4.2.

L'ensemble $A = G^{-1}(P)$ est pluripolaire complet dans X (ceci résulte immédiatement des définitions) donc $1_A \cdot \Theta$ est $\geqq 0$ fermé dans X. Par ailleurs, le courant $1_A \cdot \Theta$ est à support dans la sousvariété $S = G^{-1}(M)$ qui vérifie toutes les hypothèses du théorème 4.2, d'après la condition (4.1) et l'hypothèse que M est totalement réelle. Il existe donc une mesure ν sur M telle que

$$1_A \cdot \Theta = \int_{t \in M} [G^{-1}(t)] \, d\nu(t) \quad \text{sur} \quad X.$$

Comme les fibres $G^{-1}(t)$ rencontrent l'ouvert ω et comme $1_A \cdot \Theta \geqq 1_A \cdot T = T$ sur ω, on en déduit que $\nu \geqq \mu$. Par conséquent

$$\Theta \geqq 1_A \cdot \Theta \geqq T \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et la condition (8) est satisfaite. ▮

Il nous reste à obtenir les estimations annoncées pour les masses de T. Dans le cas $p < n-1$, un résultat de DIEDERICH—FORNAESS [2] (redémontré au paragraphe suivant) affirme que l'ouvert $V \subset \mathbf{C}^{n-p}$ possède une sous-variété M totalement réelle et pluripolaire complète de dimension réelle $n-p-1$. On choisit alors pour μ une mesure positive de densité C^∞ et à support compact dans $P = M$. Les coefficients de T sont donc des fonctions C^∞ sur $S = G^{-1}(Q)$, et comme $\dim_{\mathbf{R}} S = n+p-1$ la condition (6) est bien vérifiée.

Dans le cas $p = n-1$, on peut supposer que l'ouvert $V \subset \mathbf{C}$ contient le segment $[0, 1]$. On choisira alors pour P un ensemble de Cantor convenable et pour variété totalement réelle M l'ensemble $M = \mathbf{R} \cap V$. D'après le théorème de Fubini, les masses $\sigma(z, r)$ du courant T vérifient pour tout $\varepsilon > 0$, tout compact $K \subset \Omega_\varepsilon$ et tout $r \in]0, \varepsilon[$ une estimation du type:

$$\sup_{z \in K} \sigma(z, r) \leqq C r^{2n-2} \sup_{t \in \mathbf{R}} \mu(]t - Cr, t + Cr[)$$

avec une constante $C = C(K, \varepsilon) > 0$. L'inégalité (5) s'obtient alors grâce au résultat suivant, plus ou moins classique en théorie du potentiel.

Lemme 4.5. *Soit* γ: $]0, 1] \to \mathbf{R}$ *une fonction mesurable* >0 *vérifiant les hypothèses*

$$\int_0^1 \frac{\gamma(r)}{r}\, dr = +\infty, \quad et \tag{3}$$

$$\sup_{t<Ar} \frac{\gamma(t)}{\gamma(r)} < A, \quad A > 1. \tag{4}$$

Alors, il existe un ensemble fermé polaire (complet) $P \subset [0, 1]$ *et une mesure* $\mu \geqq 0$ *non nulle portée par* P *telle que* $\sup_{t\in\mathbf{R}} \mu(]t-r, t+r[) \leqq C\gamma(r)$, $r \in]0, 1]$, C *constante* >0.

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes simples.

a) *Réduction des hypothèses.*

Si $\inf_{r\in]0,1]} \gamma(r) > 0$, l'ensemble $P=\{0\}$ et la mesure de Dirac μ en 0 conviennent. On supposera donc $\inf \gamma(r) = 0$ $\left(=\lim_{r\to 0} \gamma(r)\right.$ grâce à (4)$\left.\right)$. Quitte à remplacer A par le nombre entier $A'=[A^k]-2$ avec $k\in\mathbf{N}$ assez grand, on peut remplacer l'hypothèse (4) par

$$\sup_{t\leqq(A+1)r} \frac{\gamma(t)}{\gamma(r)} < A, \quad A \text{ entier } \geqq 2. \tag{4.4}$$

Posons alors $\left(\text{en supposant pour simplifier } \gamma\left(\frac{1}{A}\right)=1\right)$:

$$r_k = \inf \{r\in]0, 1];\ \gamma(r) \geqq A^{-k}\}, \quad k\in\mathbf{N}.$$

Il vient $r_0 \leqq \frac{1}{A}$ et

$$r_{k+1} \leqq \frac{1}{A+1}\, r_k \quad \text{pour tout} \quad k\in\mathbf{N}. \tag{4.5}$$

Sinon il existerait en effet $\varepsilon \geqq 0$ tel que $\frac{1}{A+1}(r_k+\varepsilon) < r_{k+1}$ et $\gamma(r_k+\varepsilon) \geqq A^{-k}$, d'où

$$\gamma\left(\frac{1}{A+1}(r_k+\varepsilon)\right) < A^{-1-k} \leqq \frac{1}{A}\gamma(r_k+\varepsilon),$$

ce qui contredit (4.4).

b) *Construction de* P *et* μ.

On considère l'ensemble de type Cantor

$$P = \left\{\sum_{k=0}^{+\infty} n_k r_k;\ (n_k) \in \{0, 1, \dots, A-1\}^{\mathbf{N}}\right\}$$

muni de la mesure μ image de la mesure d'équiprobabilité sur l'ensemble produit $\{0, 1, \dots, A-1\}^{\mathbf{N}}$. D'après (4.5) on a l'estimation

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} n_k r_k \leqq (A-1)\, r_{k_0} \sum_{k=0}^{+\infty} (A+1)^{-k} = \frac{(A-1)(A+1)}{A}\, r_{k_0} < A r_{k_0}. \tag{4.6}$$

En particulier $P\subset[0, 1]$ et

$$r_{k_0}-\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} n_k r_k > r_{k_0+1}. \tag{4.7}$$

c) *La mesure μ vérifie l'estimation du lemme.*

L'inégalité (4.7) montre que si k_0 est le plus petit entier pour lequel il existe $x=\sum n_k(x)r_k$, $y=\sum n_k(y)r_k$ dans $]t-r, t+r[$ avec $n_{k_0}(x)<n_{k_0}(y)$, alors:

$$2r > y-x > r_{k_0+1},$$

ce qui implique $r_{k_0+1}+\varepsilon\leqq(A+1)r$ et

$$\gamma(r) > \frac{1}{A}\gamma(r_{k_0+1}+\varepsilon) \geqq A^{-k_0-2}$$

pour $\varepsilon\geqq 0$ bien choisi. Le choix de k_0 montre d'autre part que

$$P\cap]t-r, t+r[\subset \left\{\sum n_k r_k;\ n_k = n_k(x),\ 0 \leqq k < k_0\right\},$$

d'où $\mu(]t-r, t+r[)\leqq A^{-k_0}\leqq A^2\gamma(r)$.

d) *P est polaire complet.*

On associe à μ la fonction sous-harmonique

$$u(z) = \int_{t\in P} \operatorname{Log}|z-t|\, d\mu(t),$$

qui est harmonique sur $\mathbf{C}-P$. Il s'agit de montrer que $u(z)=-\infty$ pour $z\in P$. On utilise pour cela l'égalité

$$u(z) = -\int_0^1 \mu(]z-r, z+r[)\frac{dr}{r}, \quad z\in[0, 1].$$

Si $z=\sum_{k=0}^{+\infty} n_k(z)r_k\in P$ l'ensemble

$$E = \left\{\sum_{k=0}^{k_0-1} n_k(z)r_k+\sum_{k=k_0}^{+\infty} n_k r_k;\ n_k=0, 1, \dots, A-1 \text{ si } k \geqq k_0\right\}$$

a pour mesure A^{-k_0} et la formule (4.6) montre de plus que $E\subset]z-r, z+r[$ dès que $r\geqq Ar_{k_0}$. En choisissant k_0 tel que $r_{k_0}\leqq\dfrac{r}{A}<r_{k_0-1}$ on obtient donc

$$\mu(]z-r, z+r[) \geqq A^{-k_0} > \frac{1}{A}\gamma\left(\frac{r}{A}\right),$$

ce qui implique $u(z)=-\infty$ d'après (3). ∎

5. Existence de sous-variétés totalement réelles et pluripolaires complètes

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant:

Théorème 5.1. *Il existe dans* $\mathbf{C}^n$ *une sous-variété* M *de classe* C^∞, *de dimension réelle* $n-1$, *totalement réelle et pluripolaire complète.*

Ce résultat a été obtenu par DIEDERICH—FORNAESS [2] en réponse à une question de T. OHSAWA. Comme la démonstration n'est explicitée dans [2] que pour $n=2$ et comme nous avons une méthode plus simple et plus constructive, nous redonnons ici la preuve détaillée.

Théorème 5.2. *Soit* $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *une suite de vecteurs de l'espace euclidien* $\mathbf{R}^{n-1}$ *telle que*

$$|v_k| \leqq |v_{k+1}| \quad \text{et} \tag{5.1}$$

$$\limsup_{k\to+\infty} \langle x', v_k\rangle = +\infty \quad \text{pour tout} \quad 0 \neq x' \in \mathbf{R}^{n-1}. \tag{5.2}$$

On se donne une suite $A_k > 0$ *telle que les conditions suivantes soient réalisées:*

$$\lim \frac{\operatorname{Log}|v_k|}{A_k} = 0, \tag{5.3}$$

$$\lim \frac{A_k|v_k|}{A_{k+1}} = 0. \tag{5.4}$$

Alors le graphe de la fonction

$$f(x') = \sum_{k=0}^{+\infty} \exp\left(-A_k(1+i\langle x', v_k\rangle)\right)$$

défini par $M_f = \{z=(z', z_n)\in\mathbf{C}^n;\ z'\in\mathbf{R}^{n-1}\ \text{et}\ z_n = f(z')\}$ *est une sous-variété pluripolaire complète de classe* C^∞. *Plus précisément, il existe une fonction* p.s.h. u *continue sur* $\mathbf{C}^n - M_f$ *telle que* $M_f = u^{-1}(-\infty)$.

Démonstration. Les hypothèses (5.1)—(5.4) impliquent

$$\lim |v_k| = +\infty, \quad \lim \frac{A_{k+1}}{A_k} = +\infty \quad \text{et} \quad |v_k|^\nu = O\left(\exp\frac{A_k}{2}\right)$$

quel que soit $\nu\in\mathbf{N}$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (A_k|v_k|)^\nu \exp(-A_k) < +\infty \quad (\forall\, \nu\in\mathbf{N}),$$

ce qui prouve que f est de classe C^∞. Posons pour tout $j\in\mathbf{N}$:

$$F_j(z') = \sum_{0\leqq k\leqq j} \exp\left(-A_k(1+i\langle z', v_k\rangle)\right), \quad z'\in\mathbf{C}^{n-1},$$

$$u_j(z) = \sup\left\{-1, \frac{1}{A_{j+1}}\operatorname{Log}|z_n - F_j(z')|\right\}, \quad z = (z', z_n)\in\mathbf{C}^n.$$

La croissance rapide de la suite (A_k) entraîne l'existence d'une constante $C>0$ telle que

$$|f(z')-F_j(z')| \leqq C \exp(-A_{j+1}) \quad \text{pour} \quad z' \in \mathbf{R}^{n-1},$$

donc

$$\lim_{j\to+\infty} u_j(z) = -1 \quad \text{si} \quad z \in M_f. \tag{5.5}$$

D'autre part pour $j \geqq j_0$ assez grand il vient:

$$|F_j(z')| \leqq C \exp(A_j |v_j| |\mathrm{Im}\, z'|),$$

$$u_j(z) \leqq \frac{A_j |v_j|}{A_{j+1}} [|\mathrm{Im}\, z'| + \mathrm{Log}(C+|z_n|)]. \tag{5.6}$$

Quel que soit $v \in \mathbf{N}$ on peut choisir grâce à (5.4) un indice $j(v) \geqq j_0$ tel que

$$\frac{A_j |v_j|}{A_{j+1}} \leqq 2^{-v} \quad \text{pour} \quad j \geqq j(v). \tag{5.7}$$

Considérons dans $\mathbf{C}^n - M_f$ la suite exhaustive de compacts

$$K_v = \{z = (z', z_n);\ |z| \leqq v \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}\, z'| + |z_n - f(\mathrm{Re}\, z')| \geqq 2^{-v}\}.$$

Etant donné un point $z \in K_v$, $\mathrm{Im}\, z' \neq 0$, il existe un indice $j > j(v)$ tel que $\langle \mathrm{Im}\, z', v_j \rangle > 1 + \dfrac{\mathrm{Log}\, 2}{A_j}$ (hypothèse (5.2)) d'où $|F_j(z') - F_{j-1}(z')| > 2$ et $\sup\{u_j(z), u_{j-1}(z)\} > 0$. Si $z \in K_v$ et $\mathrm{Im}\, z' = 0$, on a $\lim_{j\to+\infty} |z_n - F_j(z')| = |z_n - f(z')| > 0$, par suite $\lim_{j\to+\infty} u_j(z) = 0$. Par compacité de K_v on peut donc trouver un indice $J(v)$ tel que

$$\sup\{u_j(z);\ j(v) \leqq j \leqq J(v)\} \geqq -2^{-v} \quad \text{sur} \quad K_v. \tag{5.8}$$

Ceci nous permet de poser

$$u(z) = \textstyle\sum_{v=0}^{+\infty} \sup\{u_j(z);\ j(v) \leqq j \leqq J(v)\}.$$

Les inégalités (5.6), (5.7) et (5.8) montrent que la série précédente est majorée (resp. minorée) sur tout compact de $\mathbf{C}^n$ (resp. de $\mathbf{C}^n - M_f$) par une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$; u est donc une fonction plurisousharmonique dans $\mathbf{C}^n$, continue sur $\mathbf{C}^n - M_f$. De plus (5.5) enraîne que $u \equiv -\infty$ sur M_f. ∎

Bibliographie

1. DEMAILLY, J. P., Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge; *Inv. Math.* **69**, (1982), 347—374.
2. DIEDERICH, K. and FORNAESS, J. E., Smooth, but not complex analytic pluripolar sets; *Manuscripta Math.* **37**, (1982), 121—125.
3. EL MIR, H. *Théorèmes de prolongement des courants positifs fermés;* Thèse de Doctorat d'Etat soutenue à l'Université de Paris VI, novembre 1982; Acta Math. 153 (1984).
4. LELONG, P., *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives;* Gordon and Breach, New York, et Dunod, Paris (1967).
5. SIU, Y. T., Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents; *Inv. Math.* **27**, pp. 53—156 (1974).
6. SKODA, H., Prolongement des courants positifs fermés de masse finie; *Inv. Math.* **66**, pp. 361—376 (1982).

Received July 11, 1983

J. P. Demailly
Laboratoire de Mathématiques Pures — Institut Fourier
dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
associé au C.N.R.S.
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères (France)