Anmerkungen.

In den Anmerkungen sind einige häufiger angeführte Werke *abgekürzt* bezeichnet. Die zugehörigen *vollen* Titel folgen hier zur schnellen Auffindung in *alphabetischer* Reihenfolge.

Die Angaben, wie § 3, 2 und § 3, (2), beziehen sich überall auf §, Artikel **(ohne Klammern)** und Formeln **(mit Klammern)** des vorstehenden Textes; die Angaben I § oder I Anm. ebenso auf das vorausgegangene Buch des Verfassers: Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, 1905.

Apollonii Pergaei quae Graece exstant (Conicorum libri IV, um 250 v. Chr.), ed. *J. L. Heiberg,* Leipzig, Bd. 1, 1891; Bd. 2, 1893 [abgekürzt: Apollonius, Con.; Seitenzahlen auf Heib. bezüglich].

Baltzer, R., Analytische Geometrie, Leipzig 1882 [Baltzer, Geom.].

—, Theorie und Anwendung der Determinanten, 4. Auflage, Leipzig 1875 [Baltzer, Det.].

Bopp, K., Die Kegelschnitte des *Gregorius a St. Vincentio* (1647), Leipzig 1907 [Bopp, Greg.].

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Leipzig, Bd. 1, 3. Aufl. 1907; Bd. 2, 2. Aufl. 1900; Bd. 3, 2. Aufl. 1901; Bd. 4, 1908 [Cantor 1, 2, 3 oder 4].

Cauchy, A. L., Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie, Paris, t. 1. 1826 [Cauchy, Applic.].

—, Exercices de mathématiques, 1.—4. année, Paris 1826—29 [Cauchy, Exerc.].

Chasles, M., Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles 1837 [Chasles, Aperçu].

—, Recherches de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré, Bruxelles, Mém. Acad. V, 1829 [Chasles, Recherches].

—, Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré, Bruxelles, Mém. Acad. VI, 1830 [Chasles, Cônes].

Clebsch, A., — Lindemann, F., Vorlesungen über Geometrie, Bd. 1, 2. Aufl.. Leipzig 1906 [Clebsch-Lindemann, Ebene].

—, Vorlesungen über Geometrie, Bd. 2, Leipzig 1891 [Clebsch-Lindemann, Raum],

Desargues, G., Oeuvres par G. Poudra, Paris 1864 [Desargues, Oeuvres].

Dingeldey, F., Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme, Encyklopädie der math. W. III, C, 1 [Dingeldey, Encykl.].

Dupin, Ch., Développements de géométrie, Paris 1813 [Dupin, Dével.].

Dyck, W., Katalog mathematischer Modelle, München 1892 [Dyck, Katalog].

Euler, L., Introductio in analysin infinitorum, Lausannae 1748 [Euler, Introd.].

Hesse, O., Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene, Leipzig, 2. Aufl. 1873 [Hesse, Ebene].

—, Sieben Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig 1874 [Hesse, Sieb. Vorl.].

—, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig, 3. Aufl. 1876 [Hesse, Raum].

Klein, F., Einleitung in die höhere Geometrie, autograph. Vorl. Bd. 1, Göttingen 1893 [Klein, Vorles.].

Klügel, G. S., Mathematisches Wörterbuch, Leipzig, Bd. 2, 1805; Bd. 3, 1808; Bd. 4, 1823 [Klügel 2, 3, 4].

Kötter, E., Bericht über die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. der D. Math. Vereinigung 5, 1901 [Kötter, Ber.].

Lamé, G., Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818 [Lamé, Exam.].

Lie, S. — Scheffers, G., Vorles. über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig 1891 [Lie-Scheffers, Differentialgl.].

—, Vorles. über kontinuirliche Gruppen, Leipzig 1893 [Lie-Scheffers, kontin. Grupp.].

—, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig 1896 [Lie-Scheffers, Berühr.-Transf.].

Magnus, L. J., Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd. 1, 1833; Bd. 2, 1837 [Magnus, Aufg.].

Müller, F., Historisch-etymologische Studien über mathem. Terminologie, Programm, Berlin 1887 [F. Müller, Progr.].

—, Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Leipzig 1892 [F. Müller, Tafeln].

Pappus, Alexandrinus, Collectio, ed. F. Hultsch, Berlin, Bd. 1—3, 1875—78 [Pappus, Coll.].

Plücker, J., Analytisch-geometrische Entwicklungen, Essen, Bd. 1, 1828; Bd. 2, 1831 [Plücker, Entw.].

—, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835 [Plücker, System 1835].

—, System der analytischen Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846 [Plücker, System 1846].

—, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig, Bd. 1, 1865 [Plücker, N. Geom.].

Poncelet, J. V., Traité des propriétés projectives des figures, Paris 1822 [Poncelet, Traité].

Reye, Th., Die Geometrie der Lage, Leipzig, 4. Aufl., Abt. 1, 1899; Abt. 2, 1907; Abt. 3, 1910 [Reye, G. d. L.].

Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, 4. Aufl. 1878 [Salmon-Fiedler, Kegelschn.].

—, Analytische Geometrie des Raumes, 1. Teil, Leipzig, 4. Aufl. 1898 [Salmon-Fiedler, Raum].

Schröter, H., Die Theorie der Kegelschnitte, Leipzig, 2. Aufl. 1876 [Schröter, Kegelschn.].

—, Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1880 [Schröter, Oberfl.].

v. Staudt, G. K. Chr., Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 [v. Staudt, G. d. L.].

—, Beiträge zur Geometrie der Lage, Nürnberg 1856—60 [v. Staudt, Beitr.].

—, Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen 2. O., Nürnberg 1867 [v. Staudt, Halbm.].

Study, E., Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903 [Study, Dyn.].
Sturm, R., Die Gebilde 1. und 2. Grades der Liniengeometrie, Leipzig 1892/3 [Sturm, Liniengeom.].
Tropfke, J., Geschichte der Elementarmathematik, Leipzig 1902/3 [Tropfke, Gesch.].
Zeuthen, G. H., Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von R. v. Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886 [Zeuthen, Kegelschn.].
—, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896 [Zeuthen, Gesch. A. M.].
—, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsch von R. Meyer, Leipzig 1903 [Zeuthen, Gesch. XVI; XVII].

---

1. **Namen der Kurven und Flächen 2. Ordnung.** I. Die Namen *Ellipse, Hyperbel* § 1, 1 und *Parabel* § 2, 1 (ἔλλειψις, ὑπερβολή, παραβολή) rühren her von *Apollonius*, Con. lib. I, art. 13; 12; 11 (Heib. 1, S. 48; 42; 38); s. *Cantor* 1, S. 335. Über ihre Entstehung und ihre Bedeutung bei Flächenanlegungen s. Cantor 1, S. 171; 288—290. Der Name *Kegelschnitt* § 3, 4; § 115, 9 (κώνου τομή) geht auf *Menächmus* (um 350 v. Chr.) zurück, s. *F. Müller*, Progr., S. 25; s. Anm. 183. Den Ausdruck *Kurve 2. Ordnung* (linea secondi ordinis) § 9, 2 braucht *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 54.

II. Der Name *Paraboloide* oder conoide parabolique, neben conoide hyperbolique und elliptique für die entspr. Rotationsfl. (Anm. 137) bei *J. Ozanam*, Dictionnaire mathématique, Amsterdam 1691, S. 121. Die Namen *Ellipsoeides, Hyperboloeides, Paraboloeides* tauchen auf bei *J. Wallis* (1695) nach *Kötter*, Ber. S. 66; *superficies elliptoidis, elliptico-hyperbolica, hyperbolico-hyperbolica, elliptico-parabolica, parabolico-hyperbolica* bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 117—125; *Ellipsoide, hyperboloide à une nappe, — à deux nappes, paraboloide elliptique, — hyperbolique* bei *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 158—161; 166; *Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid* § 55, 1; § 56, 1 neben Sphaeroid, Konoid bei *Klügel* 3 (1808), S. 305; 4 (1823), S. 375. *Fläche 2. Ordnung* (superficies secundi ordinis) § 66, 2 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 101; *Klügel* 3, S. 304.

2. **Brennpunkte der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Brennpunkte der Ellipse und Hyperbel* § 1, 1 werden von *Apollonius*, Con. III, art. 45 (Heib. 1, S. 424) als σημεῖα ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα (puncta adplicatione orta) bezeichnet, s. *Cantor* 1, S. 339. Der Brennpunkt der Parabel § 2, 1 kommt erst bei *Pappus* von Alexandrien (um 295 n. Chr.), Coll. lib. VII, prop. 238 (Hultsch 2, S. 1015) ohne Namen vor, s. *Cantor* 1, S. 344. *Kepler*, Paralip. (1604), Opera omnia, ed. Frisch 2, S. 185—188 nennt den Brennpunkt *focus* (Jahrb. d. Fortschr. 12 [1880], S. 35); der Parabel schreibt er einen *unendlich fernen* oder *blinden* Brennpunkt zu. Bei *Desargues* (1639), Oeuvres 1, S. 210; 286 heißt der Brennpunkt *foyer*. *Gregorius a St. Vincentio* (1647) nennt die Brennpunkte *poli seu foci*, s. Bopp, Greg., S. 108. Die *imaginären* Brennpunkte § 13, 8 bei *Poncelet*, Ann. de math. 8 (1817/8), S. 222 nach Dingeldey, Encykl. S. 54; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (1). Bei der Ellipse und Hyperbel von gegebenen Halbachsenquadraten a^2, b^2 erscheinen die Brennpunkte § 1, (12), (12') im wesentlichen als die von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängigen Punkte der Hauptachsen § 13, (26), bei der Parabel von gegebenem Parameter p der Brennpunkt § 2, (13) als der vom Scheitel um $\frac{p}{2}$ entfernte Punkt der Hauptachse mit der Ordinate p, § 3, 1; vgl. *Zeuthen*, Gesch. A. M., S. 210.

II. Die Erklärung der Brennpunkte als Scheitelpunkte solcher Tangentenpaare, die *Kreisstrahlenpaare* sind, § 13, 8, II; 16, II, oder, was dasselbe ist, als Punkte, an denen die von dem Kegelschnitt bestimmte Involution harmonischer Polaren eine *Involution rechter Winkel* ist, § 20, 4, I; 16, I, setzt mit *De la Hire*, Sect. con. (1685), lib 8, propr. XXIII, ein und entwickelt sich weiter bei *Poncelet*, Ann. de math. 8 (1817/8), S. 222; Traité (1822), art. 451; 453; *Chasles*, Cônes (1830), S. 12; *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 64; (1832) Gesammelte Abhandl., S. 291; System (1835), S. XI; 102; System (1846), S. 278.

III. Ein vom Punkte P an einen Kegelschnitt gelegtes Tangentenpaar kann auch als ein *Linienpaar* bezeichnet werden, *das P als Mittelpunkt hat und den Kegelschnitt doppelt* (in zwei Punkten S, S) *berührt*. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte S, S, die *Berührungssehne*, ist die Polare von P. Ist nun das Tangentenpaar ein Kreisstrahlenpaar, so ist *P der Mittelpunkt eines Kreisstrahlenpaares, das den Kegelschnitt doppelt berührt*, und umgekehrt. Daher kann Auffassung II auch in der Form § 127, 11, IV gegeben werden, *Poncelet*, Traité (1822), art. 457; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn, S. 350.

IV. Durch Verbindung der II. Auffassung mit dem Begriff der *Kurvenschar* erhält man die Erklärung der Brennpunkte des Kegelschnittes als *Punktepaare* in der durch ihn und die imaginären Kreispunkte bestimmten *Schar*, § 32, 11; § 34, 10; § 20, 23 nach *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 167ff.; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47).

V. Als *Doppelpunkte der Involutionen*, in denen zwei *senkrechte harmonische Polaren* eine Hauptachse schneiden, § 20, 6; 18, entstehen die Brennpunkte bei *Chasles*, Aperçu, Note XXXI, art. (18). Wenn zwei Gerade in bezug auf *zwei* Kegelschnitte einer Schar § 32, (12) harmonische Polaren sind ($F_{12} = 0$, $G_{12} = 0$, § 17, (2)), sind sie es in bezug auf *alle* ($F_{12} - \mu G_{12} = 0$). Zwei senkrechte harmonische Polaren eines Kegelschnittes, die durch einen Punkt P gehen, sind aber harmonische Polaren in bezug auf den Kegelschnitt und das Kreispunktepaar (§ 20, 22, II), also in bezug auf alle Kegelschnitte der Schar, § 32, (14), darunter die Punktepaare, § 32, (24). Daher sind sie harmonisch zu den reellen oder imaginären Brennstrahlen des Punktes P; *Plücker*, System (1846), S. 280. Somit beruht die Auffassung V auch wieder auf der Auffassung IV.

VI. Die Brennpunkte der *Rotationsflächen* erscheinen, analog der Auffassung II, als Scheitelpunkte solcher Berührungskegel, die *Kugelkegel* sind, § 70, 5; 12, im wesentlichen nach *Chasles*, Recherches (1829), S. 27.

VII. Die *Hauptbrennpunkte* der *Ellipsoide*, *Hyperboloide* und *Paraboloide* (foyers principaux) treten als Brennpunkte der Hauptschnitte, § 55, 3; 7; § 56, 3; 7, auf bei *Dupin*, Dével. (1813), S. 315, bei Ellipsoiden und Hyperboloiden von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängig, § 55, (6), bei den Paraboloiden um die halben Parameter vom Scheitel entfernt, § 56, (17), wie bei Auffassung I. *Brennpunkte* schlechthin sind nach *Plücker*, System (1846), S. 254 *alle* Punkte der Fokalkegelschnitte [s. Anm. 144].

3. **Brennpunktseigenschaften der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Fokaleigenschaft der Ellipse und Hyperbel* § 1, (3) bei *Apollonius*, Con. III, art. 51; 52 (Heib. 1, S. 434; 436) nach *Cantor* 1, S. 339; als Ausgangspunkt der analyt. Darstellung bei *De la Hire* (1679) nach *Tropfke*, Gesch. 2, S. 452 und bei *Vega* (1786) nach *Cantor* 4, S. 461. Über die Fokaleigenschaft *der Parabel* vgl. Anm. 16.

II. Die entsprechende Eigenschaft der *sphärischen Ellipse* § 130, 4 gab *N. v. Fuß,* Nova acta. Petrop. 3 (1788), S. 90 nach *Chasles,* Aperçu V, art. 42; Cantor 4, S. 386; vgl. *C. J. Brianchon,* lignes du 2 ordre (1817), S. 15; die des *elliptischen Kegels,* § 130, 4, *J. Magnus,* Ann. de math. 16, 182 5/6, S. 33 und Aufg. 2 (1837), S. 170; *Chasles,* Cônes (1830), S. 21; *Plücker,* System (1846), S. 312.

III. Die entsprechende Eigenschaft der *Ellipsoide* und *Hyperboloide* § 134, 12 gab *O. Staude,* Leipz. Ber. 1882, S. 19; Math. Ann. 20 (1882), S. 183; vgl. die ausführl. Darstellung bei *Staude,* Die Fokaleigenschaften der Flächen 2. O., Leipzig 1896. Diese Fokaleigenschaften (Theorie der gebrochenen Fokaldistanzen) § 132, 10 schliessen sich schon *der Form nach am engsten* an diejenigen der Ellipse und Hyperbel in der Ebene an, enthalten ferner die letzteren als *Spezialfälle* (Hauptschnitte, § 134, 14) in sich und bringen auch den *Unterschied* der Ellipsoide und Hyperboloide (*Summe und Differenz,* § 134, (30)—(32)) genau so, wie in der Ebene zur Geltung. *Charakteristisch* ist auch die Analogie der Formeln, § 33, (10) und § 134, (23′), welche die Fokaldistanzen durch *ellipt. Koord.* darstellen, *Jacobi,* Vorles. Dynamik (1866), S. 222; *Staude,* Math. Ann. 20, S. 182. Die Fokaleigensch. des *hyperbol. Paraboloids,* § 137, 12, II, lehnt sich an die der Hyperboloide an (Differenz der Fokaldist.).

4. **Identität der Fokaleigenschaften.** Die *Identität* § 1, (6) für die *Ellipse* und *Hyperbel* gibt im wesentlichen *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 45; *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 7; die der Parabel § 2, (8) ist danach gebildet.

Die entsprechende Identität für den *Kegel* § 130, (14) im Anschluß an *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 170; diejenigen für die Ellipsoide und Hyperboloide § 134, (19) und die Paraboloide § 137, (17) von *O. Staude,* Leipz. Ber. 1897, S. 83; 179; Math. Ann. 50 (1897), S. 399. Bereits *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (29), vermutet, daß die Fokaleigensch. der Fl. 2. O. auf eine kubische Gl. führen.

5. **Hauptachsen und Hauptebenen der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Hauptachsen der Ellipse* § 1, 5; 6 unterschied *Archimedes* (um 237 v. Chr.) als *μείζων* und *ἐλάσσων διάμετρος* nach *F. Müller,* Progr. S. 27; die Hauptachse der *Parabel* § 2, 5 nannte er *διάμετρος*. Die Hauptachsen (*ἄξονες*) der Ellipse und *Hyperbel* als zwei rechtwinklige konj. Durchmesser § 14, 5, I bei *Apollonius,* Con. I, Def. (Heib. 1, S. 8) nach *F. Müller,* Progr. S. 27.

II. Die *innere Hauptachse* des Kegels, § 54, 4, heißt bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 68, schlechthin *Achse,* bei *Chasles,* Cônes (1830), S. 6, axe principal, die *Hauptebene der größten und kleinsten Öffnung* § 54, 4 nennt *Chasles,* ebd., S. 6, *grande et petite section.*

III. Die *Hauptachsen* und *Hauptebenen* der *Ellipsoide* und *Hyperboloide,* § 55, 2 und der *Paraboloide,* § 56, 2, bemerkt *Euler,* Introd. 2, App. art. 115; 116; 123 im Anschluß an die Hauptachsengleichungen; „Hauptebene der kleineren Öffnung" beim Paraboloid § 56, 9 nach *Dupin,* Dével. (1813), S. 282 („petite section principale"); s. Anm. 88.

6. **Begriff und Bedingungsgleichungen des Mittelpunktes.** I. Der *Mittelpunkt* der *Ellipse* § 1, 5 bei *Archimedes* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 445, der Ellipse und *Hyperbel* bei *Apollonius,* Con. I, art. 16 (Heib. 1, S. 66) nach Cantor 1, S. 336; *F. Müller,* Progr. S. 27; *Greg. a St. Vicentio* definiert den Mittelp. der Ellipse als den Punkt, in dem jeder Durchmesser halbiert wird, und den der Hyperbel als Halbierungspunkt des ersten Durchmessers, des

latus transversum, s. *Bopp,* Greg., S. 108; 241. Der Mittelpunkt *der allg. Kurve 2. O.* (Centrum) § 11, 4 bei *Euler,* Introd. 2, art. 107; die *Bedingungsgleichungen* § 11, (7) bei *Lamé,* Exam. 1818, S. 71; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 73. Als *Pol der unendl. fernen Geraden* § 11, 12; § 11, 16, IV bei *Fr. Aguilonius* (1613) nach *Kötter,* Ber S. 5; *Desargues* (1639), Œuvres 1, S. 215 ff.; S. 291 ff. und *De la Hire* (1685) nach *Kötter,* Ber. S. 52; bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 116.

II. Der Mittelpunkt der *Ellipsoide* und *Hyperboloide* § 55, 2 bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 116; 119; *der allg. Fläche 2. O.* § 68, 4 bei *Euler,* ebd. art. 115; die *Bedingungsgleichungen* § 68, (6) bei *J. P. de Gua* (1740) nach *Cantor* 3, S. 795; *Lamé,* Examen (1818), S. 41; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 4; *Hesse,* Raum, S. 157. Als Pol der unendl. fern. Ebene § 68, 11 bei *Poncelet,* Traité, art. 591.

III. Die *Bedingungsgl.* für den Mittelp. *der ebenen Schnitte* § 106, (26) bei *Cauchy,* Applic. (1826), S. 265; s. Anm. 92.

7. **Scheitelpunkte und Scheitellinien.** I. Der *Scheitelpunkt der Parabel* § 2, 5 bei *Archimedes* (κορυφή, vertex segmenti parabolae), de conoid. et sphaeroid., nach Tropfke, Gesch. 2, S. 445; für *Ellipse* und *Hyperbel,* § 1, 5, und Parabel bei *Apollonius,* Con. I, art. 17 (Heib. S. 68); des Paraboloids § 56, (4) bei *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 247; 249.

II. Die *Scheitellinie* des *parabol. Zylinders,* § 53, 10, bei *Plücker,* System (1846), S. 149. Die Scheitellinien des *Kegels* § 54, 5 bei *Chasles,* Cônes (1830), S. 6; Scheitel- und Nebenscheitellinien bei *Plücker,* System (1846), S. 301; 306; *Reye,* G. d. L. 1, S. 219. Die *Scheitelerzeugenden des hyperbol. Paraboloids* § 56, (13); § 65, (6) bemerkt *Euler,* Introd. 2, App. art. 125.

8. **Hauptachsengleichungen der einzelnen Kurven und Flächen 2. O.** I. Die *Hauptachsengleichung* der *Ellipse* und *Hyperbel* § 1, (13); (13') im Sinne der anal. Geom. bei *P. de Fermat* (vor 1637) nach *Cantor* 2, S. 818 und *De la Hire* (1679) nach *F. Müller,* Progr. S. 27; bei *Euler,* Introd. 2, art. 138 noch in der Form $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$; die Hauptachsengleichung der *Parabel,* § 2, (17), bei *Stirling* (1717) nach *Cantor* 3, S. 434.

II. Die Hauptachsengleichung des *Kegels* § 54, (14) bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 68; die der *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Parabaloide* § 55, (7); § 56, (16) bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 116; 119; 122; 124; 125; die des Paraboloids § 56, (16), auch bei *Meusnier* (1776) nach *Cantor* 4, S. 547; 1087.

9. **Unendlich ferne Elemente der Kurven und Flächen 2. O.** I. Von unendl. fern. Punkten oder Ästen der Hyperbel oder Parabel, § 1, 7; § 2, 9, ist bei *Gregor. a St. Vicentio* (1647) die Rede nach *Bopp,* Greg., S. 245; 235. Die *Gleichung,* § 9, (25), des *u. f. Punktepaares der Kurve 2. O.* und die Art dieses Punktepaares als *Einteilungsgrund,* § 21, 14 und § 26, (2), Z. 1—3, bei *Euler,* Introd. 2 (1748), art. 219 (und 137); auch bei *Cramer* (1750) nach *Cantor* 3, S. 835; *Klügel* 3 (1808), S. 185. Die unendlich ferne *Gerade* als *Tangente* der Parabel, § 13, 14, bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 132.

II. Die Gleichung der *u. f. Kurve der Fläche 2. O.,* § 66, (23) und ihre Art als *Einteilungsgrund,* § 80, (21); § 99, (2), Z. 1—4, sachlich bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 105—112; die u. f. *Geraden* des *hyperbol. Paraboloids,* § 65, (11), erwähnt *Poncelet,* Traité (1822), art. 594 und die u. f. *Ebene* als *Tangentialebene* § 70, 10 *Poncelet,* ebd. art. 591; 622.

III. Ein *u. f. Kegelschnitt,* § 80, (20), ist nach *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 139 als Schnitt des Kegels 2. O., § 80, (1), mit der u. f. Ebene *definiert;* in diesem Sinne ist die Einteilung, § 80, (21), eine unmittelbare Folge von § 80, (17).

10. **Asymptoten und Asymptotenkegel.** I. Die *Asymptoten der Hyperbel* muß, nach Cantor 1, S. 231, *Menächmus* (um 350 v. Chr.) gekannt haben. *Archimedes* nennt sie *αἱ ἔγγιστα τᾶς τοῦ ἀμβλυγωνίου κώνου τομᾶς*, die engstanschliessenden Geraden, nach F. Müller, Progr. S. 27; *Apollonius*, von dem der Name *ἀσύμπτωτοι* herrührt, behandelt sie Con. II, art. 1 (Heib. 1, S. 194) s. Cantor 1, S. 337. Sie heißen non coincidentes bei *Joh. Werner* (1522) nach Cantor 1, S. 456; die Lini, die in die weitten läuft und nimmer mehr zu keym end kombt bei *A. Dürer,* Unterweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt (1525) nach F. Müller, Abh. z. Gesch. der Math., Heft 9 (1899), S. 329. Als Tangenten angesehen u. anal. bestimmt, § 13, 7, bei Desargues Oeuvres 1, S. 210; *Klügel* 2 (1802), S. 717; *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 62 unter Bezugnahme auf *Ampère; Plücker*, Entwickl. 1 (1828), S. 157.

II. Der *Asymptotenkegel* der *Hyperboloide* und seine Lage gegen diese § 55, 9 nach *Euler*, Introd. 2, App. art. 120; 122; vgl. *Hesse,* Raum S. 166. Die *Asymptotenebenen* des *hyperbol. Paraboloids* § 62, 3 bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 125; s. Anm. 155.

Die Gl. des Asymptotenkegels in *Ebenen*koord. § 111, (19) bei *Hesse*, Vorl. Raum, S. 394.

11. **Fadenkonstruktionen.** Die *Faden*-(Gärtner-) *Konstruktion* der *Ellipse* § 1, 9 von den drei Brüdern *Muhammed, Ahmed*, *Alhasan* um 865 nach Cantor 1, S. 733; sie findet sich auch bei *Guidobaldo del Monte* nach Cantor 2, S. 568 und nach *v. Braunmühl,* Dyck, Katalog, S. 59; die Fadenkonstruktion der *Hyperbel* § 1, 9 von *Guidobaldo del Monte* in seiner Theoria planisphaericorum 1579 nach v. Braunmühl, ebd. S. 65, und *Fr. van Schooten,* Exercit. mathem. (1646) nach Klügel 2, S. 720; der *Parabel* § 2, 8 von *van Schooten* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 450; s. auch *Klügel* 3, S. 721.

Die Fadenkonstruktion der *sphärischen Ellipse* § 130, 6 von *N. v. Fuss* (1788), s. Anm. 3.

Die Fadenkonstruktion des *Ellipsoides* § 134, 14, welche in den beiden ersten Hauptschnitten diejenige der Ellipse unmittelbar in sich einschließt, von *O. Staude*, Leipz. Ber. 1882, S. 5; Math. Ann. 20 (1882), S. 183. Das zugehörige *Modell* von *Staude* vgl. Dyck, Katalog, S. 288.

12. **Gleichseitige Hyperbel.** I. Die *gleichseitige Hyperbel* § 1, 10 wird von *Alsidschzi* (972) zur Dreiteilung des Winkels gebraucht nach Cantor 1, S. 750. Ihre Gleichung § 1, (22) findet sich bei *De la Hire* (1679) nach Cantor 3, S. 128; ebenso bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 159; vgl. *Brianchon-Poncelet*, Ann. de math. 11 (1820/1), S. 205—220; *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 188; *H. Bobillier*, Ann. de math. 19 (1828/9), S. 349.

II. Die *gleichseitige kubische Hyperbel* mit drei rechtw. Asymptoten § 85, 12 bei *Th. Reye*, Mitt. der Hamburger math. Gesellsch. 2 (1890), S. 56; G. d. L. 2, S. 180; 218.

13. **Konjugierte Hyperbeln und Hyperboloide.** *Konjugierte Hyperbeln* § 1, 11 betrachtet *Apollonius* Con. I, art. 60; II, art. 17 (Heib. 1 S. 190; 220), sie heißen bei ihm *τομαὶ συζυγεῖς* oder *ἀντικείμεναι κατὰ συζυγίαν τομαί* (sectiones

oppositae). Die Deutung § 1, (24) ihrer Gleichung bei *Plücker*, Syst. (1835), S. 91. Konjug. Hyperboloide s. Anm. 74, III.

14. Direktrix und Direktrixebenen. I. Der Name *Direktrix* § 2, 1 bei der *Parabel* von *De l'Hospital* (vor 1704) nach Dingeldey, S. 12, bei der *Ellipse* und *Hyperbel* § 4, 5 dem Begriff nach bei *Pappus*, Coll. VII, propr. 235; 238 (Hultsch 2, S. 1004; 1012); allg. Definition der Direktrix einer Kurve bei *Joh. Bernoulli*, Acta erud. 1694, S. 435; dann bei *Raabe*, J. f. Math. 2 (1827), S. 330. Die Direktrix *als Polare des Brennpunktes* § 20, 3 bei *De la Hire*, Sect. con. (1685) 8, propr. 26 und *Poncelet*, Traité (1822), art. 452.

II. Die *Direktrixebene des Kegels* (plan directeur) führt *Chasles*, Cônes (1830), S. 29 als *Polarebene der Fokallinie* § 128, (27) ein, auch bei *Plücker*, System (1846), S. 308.

III. Die Direktrix § 127, 5; § 128, 5 und *Direktrixebenen* § 127, 11 eines Fokalpunktes *bei den Flächen 2. O.* führen *B. Amiot*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 163 und *Mac-Cullagh* (1843), Works, S. 262 ein; vgl *Plücker*, System (1846), S. 293.

IV. Die *Hauptdirektrixebenen des elliptischen Paraboloids* § 137, 11 als *Polarebenen der beiden Hauptbrennpunkte* bei *Staude*, Leipz. Ber. 1895, S. 486.

15. Parameter der Kurven und Flächen 2. O. I. Für *Parameter* § 2, 2; § 3, 1 ursprünglich *ὀρθία*, *latus rectum* (Senkrechte zur Achse) bei *Apollonius*, Con. I, art. 11 (Heib. 1, S. 42); *ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά, rectum figurae latus* bei *Pappus* 4, prop. 33 (Hultsch. 1, S. 278); ebenso bei *Gregorius* I def. 5; II def. 4; III def. 7, s. Bopp, Greg., S. 108; 161; 241; *chorda* oder *sagitta* bei *Kepler*, Op. omnia 2, S. 185—188. *Parameter* zuerst bei *Cl. Mydorge* (1631), nach Tropfke, Gesch. 2, S. 427; *Wallis*, Opera 1, Oxoniae (1695), S. 310; *costé droit* bei *Desargues* 1, S. 205; latus rectum bei *Jac. Bernoulli*, Acta Erud. 1689, S. 586; Die Formel § 3, (2) bei *Euler*, Introd. 2, art. 128—130.

II. Die *Parameter des Paraboloides* § 56, 5 sind ebenfalls Ordinaten der Hauptbrennpunkte nach *Plücker*, System (1846), S. 166.

16. Brennpunkt-Direktrixeigenschaft der Kurven und Flächen 2. O. I. Die *Brennpunkt-Direktrixeigenschaft* der drei *Kegelschnitte* § 2, (6); § 4 (32); (34) kannte nach Zeuthen, Kegelschn. S. 367ff. wahrscheinlich *Euklid*. Erwähnt wird sie von *Pappus* (295 n. Chr.), Coll. VII, propos. 238 (Hultsch. 2, S. 1004); s. Tropfke, Gesch. 2, S. 447; 451; 455; Dingeldey, Encykl., S. 12.

II. Die *Brennlinien-Direktrixebeneneigenschaft* des *Kegels* § 128, 9 von *Chasles*, Cônes (1830), S. 44; der Fall $\varkappa^2 = 1$ ebd.; vgl. *Hachette*, Quet. Corr. 4 (1828), S. 285.

III. Die *Brennpunkt-Direktrixeigenschaft* der *Flächen 2. O.* § 127, 7—9; § 128, 6—7 gab für imaginäre Direktrixebenen *Mac-Cullagh*, Dubl. Proc. 2 (1843), S. 446 = Works, S. 269. Sie schließt sich nicht nur *der Form nach aufs engste* an diejenige der Kegelschnitte an, sondern enthält die letztere auch als *Spezialfall* in sich (in den Hauptschnitten § 127, 7; § 128, 7) vgl. *Plücker*, System (1846), S. 292; *Schröter*, Oberfl. S. 623.

Die von *B. Amiot*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 163ff. angegebene *Brennpunkt-Direktrixebeneneigenschaft der Flächen 2. O.* § 127, 7; 9. § 128, 6 für reelle Direktrixebenen erstreckt sich nicht auf *alle* Flächen 2. O., vgl. *Amiot*, ebd. S. 183.

IV. Die *Brennpunkt-Direktrixebeneneigenschaft* des *elliptischen Paraboloides*

§ 137, 11, I, die eine vollkommene Analogie mit der der Parabel darbietet und in den beiden Hauptebenen direkt in die der Parabel übergeht, § 137, 14, von *Staude*, Leipz. Ber. 1895, S. 487.

17. **Die Scheitelgleichungen.** I. Die *Scheitelgleichung* der *Kegelschnitte* § 2, (12) und § 3, (6); (8)—(10) inhaltlich bei *Archimedes* und *Apollonius* nach F. Müller, Progr. S. 26; Tropfke, Gesch. 2, S. 437ff., im Sinne der analyt. Geometrie bei *Descartes* (1637) nach Cantor 2, S. 815. Die Parabel als *Übergangsfall* zwischen Ellipse und Hyperbel § 3, 3 bei *Kepler* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 177; s. *Euler*, Introd. 2, art. 149.

II. Die Scheitelgleichung der Flächen 2. O. ist nur beim *Paraboloid* § 56, (16) üblich und hier von *Euler*, Introd. 2, App. art. 124 angegeben; das Paraboloid als Grenzfall des Ellipsoides oder Hyperboloides bei *Dupin*, Dével. (1813), S. 222.

18. **Die Asymptotengleichungen.** I. Die *Asymptotengleichung der Hyperbel* § 3, (15) in umschriebener Form § 3, (16) bei *Menächmus*, dem Erfinder der Kegelschnitte (um 350 v. Chr.) nach Cantor 1, S. 231; auch bei *Joh. Werner* (1522) und *Fr. Maurolico* (1570) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 176; im Sinne der analytischen Geometrie bei *Fermat* (um 1650) nach Cantor 2, S. 817; unmittelbar in der Form § 3, (15) bei *Euler*, Introd. 2, art. 161.

II. Die *Asymptotenebenengleichung* § 62, (7) des *hyperbol. Paraboloids* zuerst bei *Tinseau* (1774) nach Cantor 4, S. 557 (Sonderfall von § 74, (33)); *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 250.

III. Die *Asymptotengleichung der Hyperboloide* § 74, (8) bei *Steiner* (1827), Werke 1, S. 150; *Plücker*, System (1846), S. 233.

19. **Exzentrizität.** I. Über die Benennung *lineare* e und *numerische Exzentrizität* ε § 4, (3) s. F. Müller, Progr. S. 28; daß das Verhältnis $r:d=\pm\varepsilon$ ist § 4, (18) bemerkt *Gergonne*, Ann. de math. 16 (1826), S. 369; *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161.

II. Beim *Ellipsoid* nennt *P. S. Laplace* (1782), Mécanique céleste 2 (1799), S. 16 die Größen e und $\sqrt{e^2-d^2}$ § 55, (4); (4′) die beiden Exzentrizitäten; ebenso *J. Jvory*, Phil. Trans. London 1809 II, S. 351; *C. F. Gauss* (1813), Werke 5, S. 19.

20. **Brennpunktsgleichungen.** I. Die *Brennpunktsgleichung* der Kegelschnitte § 4, (10); (11) gibt *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161; mit der Ableitung § 4, 5 *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 132; vgl. *Baltzer*, Geom., S. 230. Charakteristisch ist für sie die Form $f=K-U^2=0$, wo $K=0$ ein Kreisstrahlenpaar und $U=0$ die Direktrix ist; s. Anm. 21.

II. Die Brennpunktsgleichungen der Flächen 2. O. ist nach § 127, (29) von der Form $f=K-UV=0$, wo $K=0$ ein Kugelkegel und $U=0$, $V=0$ die Direktrixebenen sind, und wird von *Amiot* und *Mac Cullagh* erhalten, s. Anm. 16.

21. **Die Identitäten der Direktrixeigenschaften.** I. Die Identität § 4, (27); (28) der *Direktrixeigenschaft* der Kegelschnitte im wesentl. bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 161 und Exerc. 3 (1827), S. 71. Die Identität § 4, (27) von der Form $f=K-\lambda U^2$ bringt auch unmittelbar zum Ausdruck (Anm. 2, III), dass der Kegelschnitt $f=0$ in seinen beiden Schnittpunkten mit der Direktrix $U=x-\sigma\frac{a^2}{e}=0$ das Kreisstrahlenpaar $k=(x-\sigma e)^2+y^2=0$ berührt, *Pon-*

celet, Traité (1822), art. 457; *Steiner,* J. f. Math. 45 (1852), S. 195 = Werke 2, S. 453; *Salmon-Fiedler*, Kegelsch., S. 350.

II. Die Identität der Direktrixeigenschaft *der Flächen 2. O.* § 127, (29) ist von *B. Amiot,* J. de math. (1) 8 (1843), S. 163 und *Mac Cullagh* (1843), Works S. 263 aufgestellt und ist analytisch dieselbe für die von beiden Autoren gefundenen Eigenschaften (s. Anm. 16). Die Deutung § 127, 11 nach *Chasles,* Par. C. R. 16 (1843), S. 831 und *Plücker*, System (1846), S. 276, vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 256.

22. **Fokaldistanz als lineare Funktionen von x.** Die Darstellung der *Fokaldistanzen* r, r' der Punkte einer *Ellipse* oder *Hyperbel* als *lineare* Funktionen von x § 4, (35) gibt *Euler*, Introd. 2, art. 128; vgl. Kötter, Ber. S. 57; Dingeldey, Enc. S. 59. Die Erweiterungen § 131, (8) nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 280. Die *gebrochenen Fokaldistanzen* r_1, s_1, r_1', s_1' § 133, (22); (23) sind für die Punkte einer Krümmungskurve der *Ellipsoide* and *Hyperboloide lineare* Funktionen von x nach *E. Gradhandt*, Fokaleigenschaften der Krümmungskurven, Dissert. Rostock 1901.

23. **Reziproke Quadrate rechtwinkliger Halbmesser.** Die Sätze § 5, (3) und § 92, (3) über die *Summe der reziproken Quadrate rechtwinkliger Halbmesser* bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 273 und 274; *Anonymus*, Ann. de math. 18 (1828), S. 369—371 und *Bobillier*, Ann. de math. 19 (1828/9), S. 249; 251. Die Auffassung als *Invarianteneigenschaft*, § 22, 9; § 92, (3), bei *Cauchy* a. a. O.; *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 84, Anm.; (1842), Abhandl. S. 391; System (1846), S. 154.

24. **Polargleichung der Kegelschnitte.** Die *Polargleichung* § 5, (14) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 177 in umschriebener Form bei *Kepler* (1604); bei *Klügel* 2 (1805), S. 79; 709 als in der Astronomie gebräuchlich bezeichnet; die *beiden* Gleichungen § 5, (9); (9′) bei *Cauchy*, Applic. 1 (1826), S. 162. Die Ableitung § 5, 3; 4 nach *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 134.

25. **Trigonometrische Parameterdarstellung.** Die *Parameterdarstellung der Ellipse* § 6, (1) bei *O. Brien*, Cambr. Math. J. 4 (1845), S. 99 nach *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 322; der Hyperbel § 6, (5) bei *A. M. Legendre*, (1786) nach *Dingeldey*, Encykl. S. 11. Die entsprechende des *Ellipsoides*:

$$x = a \cos \varphi, \; y = b \sin \varphi \cos \psi, \; z = c \sin \varphi \sin \psi$$

bei *J. Ivory*, Phil. Trans. R. S. London (1809), S. 352; *C. F. Gauss.* (1813), Werke 5, S. 16.

26. **Konstruktion der Ellipse und Hyperbel aus zwei Kreisen.** Die *Konstruktion der Ellipse* § 6, 1 bei *Cl. Mydorgius* (1631) nach *Kötter*, Ber. S. 10; bei *Ph. de la Hire* (1689) nach *Dingeldey*, Encykl. S. 10; s. *Klügel* 2 (1805), S. 76. Die Konstruktion der Hyperbel § 6, 3 von *E. R. Turner*, Cambr. Dubl. math. J. 1 (1846), S. 123 nach *Dingeldey*, Encykl. S. 11. Die Konstr. der *Tangente* § 13, 5 nach *Brianchon,* J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 7, Anm. Eine entspr. Konstr. des *Ellipsoides* aus drei konz. Kugeln bei *Ch. Gudermann,* J. f. Math. 42 (1851), S. 282.

27. **Affinität zwischen Kreis und Ellipse.** Die *Affinität* § 6, (4) zwischen *Kreis* und *Ellipse,* angedeutet bei *Archimedes,* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 453, findet sich bei *J. Ceva,* De lineis rectis etc., Mailand (1678), S. 35; *Klügel* 2, S. 101; vgl. *Baltzer,* Geom. S. 108. Die *Kollinearverwandtschaft* § 6, (7) bei

Newton, Philos. nat. princ. math. (1687) 1, lemma 22 nach Chasles, Aperçu V, § 23. Affine Figuren betrachtet zuerst *Clairaut* (1731) nach Chasles, Aperçu (1837), S. 553, Addition à la page 218; dann *Euler*, Introd. 2 (1718), art. 442, wo das Wort *affin* eingeführt wird; *Poncelet*, Traité (1822), art. 326. Die tiefere Grundlegung und umfassendere Behandlung der affinen Verwandtschaft bei *A. F. Moebius*, Baryc. Calc. (1827) Werke 1, S. 180; ferner Werke 1, S. 392; 519. Die allgemeinen Formeln der *Kollineation* in der Ebene gibt *Waring* (1762) nach Chasles, Aperçu V, § 23; *Moebius* (1829) Werke 1, S. 451.

*28. **Rationale Parameterdarstellung der Kegelschnitte.** Die *Parameterdarstellungen* § 6, (10); (12); (14) der *Punkte* und § 13, (48); (49); (50) der *Tangenten* des Kegelschnittes sind Spezialfälle der allgemeinen Darstellungen § 52, (15); (15′). Sie gehen, was die Punkte betrifft, auf *Euler*, Introd. (1748) 1, art. 54; 2, art. 398 u. *Moebius* (1827), Werke 1, S. 81 zurück. Über die rationale Parameterdarstellung der Kurven vom Geschlecht 0 überhaupt vgl. *Salmon-Fiedler*, Höhere eb. Kurven (1873), S. 35.

29. **Projektive Strahlbüschel und Punktreihen am Kegelschnitt.** Der Satz über *projektive Strahlbüschel* an zwei Punkten eines gegeb. Kegelschnitts § 6, 8 nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187 bei *Pascal* (1640); in seiner allg. Bedeutung aufgestellt von *J. Steiner* (1832), Werke 1, S. 332, III rechts.

Der Satz über *projektive Punktreihen* auf zwei Tangenten § 13, 18 für parallele Tangenten und für die Asymptoten bei *Apollonius*, Con. III, art. 41—43 (Heib. 1, S. 415 f.), s. Zeuthen, Kegelschn. S. 344; bei *Euler*, Introd. 2, art. 122; allgemein bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 332, III links; s. Anm. 68 und 109.

30. **Kongruente Strahlbüschel am Kreise.** Daß der Peripheriewinkel halb so groß, wie der zugehörige Zentriwinkel, Peripheriewinkel über demselben Bogen gleich sind, bei *Euklid* III, prop. 20; 21 nach Tropfke, Gesch. 2, S. 61. Der hieraus folgende Satz über *gleichlaufend kongruente Strahlbüschel* am *Kreise* § 6, 9 bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 330. Die Betrachtung § 6, 9 gibt denselben Satz mit *ungleichlaufenden* Strahlbüscheln für die *gleichseitige Hyperbel*, *Steiner* ebd. S. 330 (s. Anm. 110).

31. **Gleichungen der Punkte- und Strahlenpaare.** Die *Gleichung des Punktepaares* in *gemeiner* Koord. § 7, (1) bei *Hesse*, J. f. Math. 45 (1853), S. 82 = Werke, S. 298; in *Verhältniskoord.* § 7, (30) bei *Hesse*, Ebene, S. 77; in *Zweieckskoord.* § 39, (1) bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 413.

Die Gleichung des *Strahlenpaares* § 7, (33) bei *Fermat*, (um 1635) nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 198; ferner bei *Euler*, Introd. 2, art. 435; *Lamé*, Exam. (1818), S. 45; *Hesse*, Ebene, S. 124; *Baltzer*, Geom. S. 193.

32. **Name und Begriff der Involution.** Der *Name Involution* § 8, 5 von *Desargues* (1639), Oeuvres 1, S. 119. Der *Begriff der Punktinvolution*, ursprünglich für *drei Punktepaare* geht in der Form § 8, (20) im wesentlichen auf *Pappus*, Collect. VII, prop. 130 (Hultsch 2, S. 873), zurück nach Baltzer, Elem. 2 (5. Aufl.), S. 382, sachlich in der Form § 8, (15) und (4) gibt sie *Desargues*, Oeuvres 1, S. 119; 247; 250, vgl. *Brianchon*, Lignes (1817), S. 11; *Poncelet*, Traité (1822), art. 172—178. Über die *drei Definitionen* § 8, (4); (15); (20) vgl. *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 185; *Chasles*, Aperçu (1837), Note X; *Moebius* (1853), Werke 2, S. 221.

Der *allgemeine Begriff* § 8, 5 mit ∞^1 *Punktepaaren* bei *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 173; *Plücker*, System (1835), S. 39; *Moebius*, a. a. O.

Zwei Punktepaare bestimmen eine Involution § 8, 7, wie zwei Punkte eine Gerade; daß *drei* Punktepaare in Involution liegen, ist ein Satz wie der, daß drei Punkte in gerader Linie liegen. Daher der *allgemeine* Begriff bei vielen Sätzen auf *drei* Paare reduziert.

Strahleninvolutionen mit drei Paaren bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 257, mit ∞^1 Paaren § 8, 10 bei *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 173; *Plücker*, System (1835), S. 22; *Poncelet*, Par. C. R. 16 (1843), S. 953.

33. **Arten der Involution.** Die *Arten der Punktinvolutionen* § 8, 5 im wesentlichen bei *Desargues*, vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 182; dann bei *Gergonne*, Ann. de math. 16 (1826), S. 277 Anm.; *Plücker*, System (1835), S. 39. Die *Namen* elliptisch, parabolisch, hyperbolisch usw. § 8, 5 nach *Schröter*, Kegelschn., S. 50f.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 178; *Reye*, G. d. L. 1, S. 150.

Die *Arten der Strahleninvolutionen* § 8, 11 bei *Plücker*, System (1835), S. 22.

Die Involution *rechter Winkel* (zirkulare) § 8, 12 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 187; *Fr. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 4 (1843), S. 261.

Die *gleichs. hyperb.* Inv. und Satz § 8, 13, II bei *Schröter*, Kegelschn. S. 16, vgl. *Schoenflies*, Enzyklopädie III AB 5, S. 430 (1901).

34. **Interpretation imaginärer Gebilde durch Polarsysteme.** Die elliptische Involution § 8, 5 dient zur *Vertretung* des *imaginären* Punktepaares bei *Seydewitz* (1846) nach Kötter, S. 313, *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 186; Beitr. (1856), S. 76; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 342.

35. **Involution als Spezialfall der projektiven Verwandtschaft.** Die Involution als Spezialfall der projektiven Verwandtschaft zweier vereinigt gelegener Punktreihen § 8, 15 bei *Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 253ff.; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 118; *Moebius* (1853), Werke 2, S. 234; vgl. *Baltzer*, Geom., S. 15 und Determ., S. 33.

36. **Erhaltung der Involution bei Projektion.** Die Erhaltung der Punktinvolutionen bei Projektion § 8, 16 bemerkt *Desargues*, Oeuvres 1, S. 146; vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 182.

37. **Analytische Darstellung der Involutionen in der Ebene.** Die anal. Darst. der Involution in der Ebene § 8, 17 nach *Hesse*, Vorles. Ebene S. 59f.; die Formeln § 8, (40); (42) ebd.

38. **Die Involution beim Kegelschnittbüschel.** *I. Satz*, § 8, 18, I im wesentlichen bei *Pappus*, Collect. VII, prop. 130 (Hultsch 2, S. 873); vgl. *Carnot*, Géom. de position (1803), S. 456 (nach Poncelet, Traité S. 92); *Brianchon*, Lignes (1917), S. 11; *Poncelet*, Traité (1822) art. 172. *Chasles*, Aperçu (1837) Note X und géom. sup. S. 220; 339; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 122; *Baltzer*, Elem. 2 (5. Aufl.), S. 382.

II. Satz, § 48, 8, III von *Desargues* (1839), Oeuvres 1, S. 186; 267; 2, S. 162; vgl. Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 183.

III. Satz, § 48, 8, I von *J. Ch. F. Sturm*, Ann. de math. 17 (1826), S. 180; *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1828), S. 363 erkennt die beiden vorhergehenden Sätze als Spezialfälle des dritten und gibt auch die dualen Sätze; vgl. Anm. 75; 126.

39. Involution als Büschel von Punktepaaren. Die Involution als Büschel § 8, 21 bei *Hesse*, J. f. Math. 63 (1864), S. 179 = Werke, S. 521; *Hesse*, Ebene, S. 77; 99; *Baltzer*, Geom. S. 19; 196; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 407.

40. Allgemeine Gleichungen der Kurven und Flächen 2. O. und 2. Kl. I. Daß eine *Gleichung 2. Grades in gemeinen Punktkoordinaten* einen Kegelschnitt darstellt, wußten nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 195; 209 *Fermat* und *Descartes*. Die *allg. Gl.* dieser Art § 9, (1) findet sich bei *A. J. Hermann*, Comm. acad. Petrop. 4 (1735), S. 15 nach Dingeldey, Encykl., S. 16; dann bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 54. Die Bezeichnung der Koeffizienten mit A_{xx}, A_{xy}, ... bei *Cauchy*, Exerc. 4 (1828), S. 141, mit a_{11}, a_{12}, ... bei *Jacobi* (1834), Werke 3, S. 204; *Hesse*, J. f. Math. 20 (1840), S. 285 = Werke, S. 23; vgl. über die Entstehung der „*topographischen*" Bezeichnung bei *Leibniz* auch Baltzer, Det., S. 5.

Die allg. Gleichung 2. Grades in *gem. Linienkoord.* § 15, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 6 (1830), S. 109 = Abhandl. S. 180; Entw. 2 (1831), S. 47 (*Gergonne*, Ann. de math. 11 (1820/1), S. 381 und *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 160 benutzen noch nicht die richtigen Linienkoordinaten); die Bezeichnung der Koeffizienten mit b_{11}, b_{12}, ... bei *Hesse*, Sieb. Vorl., S. 16.

Die allg. Gl. der Kurve 2. O. und 2. Kl. in *Dreieckskoordinaten* § 41, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 5 (1830), S. 8 = Abhandl. S. 131; § 41, (1) und (1′) bei *Plücker*, System (1835), S. 87.

II. Die *allg. Gl. der Fläche 2. O. in gem. Punktkoord.* § 66, (1) bei *Fermat* nach Kötter, Ber. S. 67 (Stäckel), dann bei *Euler*, Introd. 2, App. art. 102; die topographische Bezeichn. der Koeff. bei *Cauchy*, *Jacobi*, *Hesse* a. d. vorhin a. O.

Die allg. Gl. der Fläche 2. Kl. *in gem. Ebenenkoord.* § 75, (1) bei *Plücker*, J. f. Math. 9 (1832), S. 124 = Abhandl. 1, S. 225; System (1846), S. 191.

Die allg. Gl. der Fläche 2. O. und 2. Kl. *in Tetraederkoordinaten* § 138, (1) und (1′) bei *Plücker*, System (1846), S. 49; 79.

41. Die Determinanten der Punktepaare, der Kurven und Flächen 2. O. In *entwickelter* Form findet sich die „*Determinante*" des Punktepaares (der binären quadrat. Form) § 7, (11); § 39, (11) bei *Gauss* (1801), Werke 1, S. 122; *des Kegelschnittes* (der ternären qu. F.) § 9, (15); § 41, (8) bei *Gauss*, ebd. S. 301; *Jacobi* (1831), Werke 3, S. 109; *der Fläche 2. O.* § 66, (15); § 138, (8) bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 208; *Plücker*, System (1846), S. 52; 58 (Formel VIII). Auch die *Unterdeterminanten* A_{13}, A_{23}, A_{33} § 9, (16) und A_{44} § 66, 6 finden sich *entwickelt* bei *Euler*, Introd. 2, art. 107; Append. art. 112; ein Teil der Unterdet. A_{kl}, α_{kl} § 66, 6 ebenso bei *Plücker*, System (1846), S. 57; 58.

Der *bewußte* Gebrauch der Determinanten der quadrat. Formen (auch mit n Veränderlichen) setzt bei *Cauchy*, Exerc. 4 (1829), S. 142 (fonction alternée) und *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 11 = Werke 3, S. 201; *Hesse* (1844) Werke, S. 114, ein und wird von *Hesse*, Raum, S. 138; 174 usw.; *Salmon-Fiedler*, Kegelschn. 7. Aufl., S. 310; Raum, S. 88 allgemein durchgeführt.

42. Invarianteneigenschaft von Ordnung und Klasse. Die Erhaltung der *Ordnung* bei der Transformation der *gemeinen* Koordinaten für die *Kurve 2. O.* § 9, 7 bei *de Gua* (1740) nach Cantor 3, S. 798; *Cramer* (1750) nach Cantor 3, S. 829; *Euler*, Introd. 2, art. 37; *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 127; für die *Kurve 2. Kl.* § 15, 4 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 48; für die *Fläche 2. O.* § 66, 7 bei

Euler, Introd. 2, Append. art. 94; für die *Fläche 2. Kl.* § 75, 4 bei *Plücker*, System (1846), S. 191; bei der Transformation der *Dreiecks-* und *Tetraederkoordinaten* bei *Plücker*, System (1835), S. 5; System (1846), S. 9.

Es handelt sich dabei schließlich nur um den *allgemeinen* Satz, daß bei jeder *linearen* Substitution, mag sie als *Koordinatentransformation* oder als *kollineare* oder *reziproke* Verwandtschaft gedeutet werden, eine *quadrat. Form* als solche invariant bleibt.

Für den *linearen Komplex* § 86, 2 gilt nach *Plücker*, N. Geom. (1868), S. 11; *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), S. 202; 366 das entsprechende, jedoch kann zu der linearen Gleichung § 86, (1) immer das quadratische Glied λP mit beliebigem λ zugefügt werden, da der Komplex in sechs unabh. homog. Koord. p_{kl} durch *zwei* Gleich. $\varphi = 0$, $P = 0$ dargestellt ist.

43. **Geometrische Bedeutung von Ordnung und Klasse.** Die Bedeutung der *Ordnung* für die *Kurve 2. O.* § 9, 8 bei *J. Newton* (1704) nach Cantor 3, S. 421; bei *Euler*, Introd. 2, art. 66; 70; für die *Fläche 2. O.* § 66, 8; 9 bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 51; 95; *Steiner* (1832), Werke 1, S. 365; *v. Staudt*, G. d. L. (1847), S. 197; *Seydewitz*, Arch. Math. Phys. (1) 9 (1846), S. 190.

Das Wort *Klasse* und ihre geom. Bed. § 15, 5; § 75, 5; 7 für Kurven und Flächen 2. O. von *Gergonne*, Ann. de math. 18 (1828), S. 151; *Plücker*, J. f. Math. 6 (1829), S. 109 = Abhandl.. S. 180.

Die Kurve und Fläche 2. Kl. heißt nach *v. Staudt*, G. d. L. S. 72; 73 auch *Strahlenbüschel* und *Ebenenbündel 2. O.*

44. **Anzahl der Bestimmungsstücke.** Die *Bestimmbarkeit der Kurve 2. O. durch fünf Punkte* bei *Pappus*, Coll. VIII, prop. 13 (Hultsch 3, S. 1077); vgl. Zeuthen, Kegelschn. S. 184 ff.; durch Abzählen der Konstanten der Gleichung, § 9, 9, bei *Euler*, Introd. 2, art. 79; *Kästner* (1758) nach Cantor 4, S. 457; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 147. Die der *Kurve 2. Kl. durch fünf Tangenten,* § 15, 6, bei *Pascal* (vor 1640), *Newton* (1687) nach Kötter, Ber. S. 32. Die Bestimmbarkeit *der Fläche 2. O. durch neun Punkte*, § 66, 10, bei *Klügel* 3 (1808), S. 318; *Anon.*, Ann. de math. 20 (1829/30)), S. 185 ff.; der Flächen *2. Kl.*, § 75, 8 bei *Plücker*, System (1846), S. 36.

Die *Determinantendarstellungen*, § 9, (27) und § 15, (23), bei *Hesse*, Sieb. Vorles. S. 2; 17; die § 66, (27) bei *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 131.

45. **Schnittpunkte einer Geraden mit der Kurve und Fläche 2. O.** Die Entwicklung der *fundamentalen* Aufgabe der Bestimmung des Schnittpunktepaares einer Geraden mit der Kurve und Fläche 2. O. hat sich in *drei* Stufen vollzogen.

Die *erste Methode* ist die der *gemeinen* Koordinaten x, y; s, § 10, 1; x, y, z; s, § 67, 1, welche *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 66, für die Kurve und ebd. S. 2 für die Fläche 2. O. benutzt; die quadrat. Gleich., § 10, (4); § 67, (4), gibt er ebd. S. 66; 3.

Die *zweite Methode* ist die der homogenen gemeinen Koordinaten x, y, t, § 10, 2; x, y, z, t, § 67, 2, in Verbindung mit der *reinen* Verhältniskoord. λ (I § 6, (1)) bei *Joachimsthal*, J. f. Math. 33 (1846), S. 373, und der *multiplizierten* Verhältniskoord. λ (I § 6, (7)), auch der dualen Aufgaben, § 16, 2; § 76, 1, bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 8; 21; Vorl., Raum S. 130; 146.

Die *dritte Methode* ist die des Übergangs von *Dreiecks- und Tetraederkoordinaten auf Zweieckskoordinaten,* § 44, (7); § 142, (7), welche die Aufgabe in ihren vollen Zusammenhängen erfaßt, vgl. *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 136; Raum, S. 132; sie wird dann auch unmittelbar auf die Schnittkurve der Fläche 2. O. mit einer Ebene ausgedehnt, § 141, 2, Absatz 3.

Die sachgemäßen *Bezeichnungen,* § 10, (9); (10); § 16, (7); (8); § 41, (6); § 67, (8), (9); § 76, (5); (6); § 138, (6), nach *Hesse* (1853), Werke S. 329; Sieb. Vorl. S. 9; 22.

46. **Imaginäre Schnittpunktepaare.** Das Mitzählen der *imaginären Schnittpunktepaare,* § 10, 1, findet sich bei *J. Stirling* (1717) nach Cantor 3, S. 430; *Euler,* Introd. 2 (1848), art. 86; *Poncelet,* Traité (1822), art. 50; *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXVI; *Ch. Paulus,* Arch. Math. Phys. 21 (1853), S. 183; 22 (1854), S. 121.

Der *Mittelpunkt* einer imaginären Sehne, § 11, 1; § 68, 1, bei *Poncelet,* Traité, S. X u. art. 51; *Gergonne,* Ann. de math. 16 (1826), S. 279; *Plücker,* System (1835), S. 101; *v. Staudt,* Halbm. (1867), S. 38.

Imag. *Tangentenpaare,* § 16, 2, bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 187.

In den Involutionen § 11, 6; § 17, 2; § 68, 7; § 77, 2 finden diese imag. Elemente ihren reellen Ausdruck, vgl. Anm. 34.

47. **Gleichungen der Tangenten und Tangentialebenen.** Die beiden Formen der *Gleichung der Tangente der allg. Kurve 2. O.* § 10, (14); (18), gibt *Cauchy,* Exerc. 3 (1826), S. 80, indem er in etwas anderer Weise an die quadr. Gleich. § 10, (4) anknüpft. Wie *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 156 bemerkt, enthält das Verfahren § 10, 3 eine Umschreibung der Methode der Differentialrechnung.

Die *Gleichung des Berührungspunktes,* § 16, (12), bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 192; Entw. 2 (1831), S. 117.

Die Existenz der *Tangentialebene* als Ort der Tangenten, § 67, 4, beweist *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 7. Die beiden Formen der *Gleichung* der Tangentialebene, § 67, (16); (18), bei *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 109; in *Tetraederkoordinaten,* § 143, (5), bei *Plücker,* System (1846), S. 19.

Die Gleichung des *Berührungspunktes,* § 76, (10) und § 143, (7), bei *Plücker,* System (1846), S. 21; 193.

48. **Begriff und Gleichungen der Tangentenpaare und Berührungskegel.** Die Gleichung des *Tangentenpaares* der allg. Kurve 2. O., § 10, (21), bei *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 164; die Form § 10, (23) bei *Hesse,* Raum, S. 291, die Gl. des *Schnittpunktpaares,* § 16, (14), für den Kreis bei *Hesse,* Ebene, S. 190; vgl. *Baltzer,* Geom., S. 207.

Die Gl. des *Berührungskegels* der allg. Fläche 2. O., § 67, (22), im wesentl. bei *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 58; in der Form § 67, (23); § 144, (6) bei *Hesse,* Raum, S. 171; *Baltzer,* Geom., S. 494; die Gl. der *Schnittkurve,* § 76, 4 bei *Hesse,* Raum, S. 178.

Daß der Berührungskegel *des Kegels,* § 71, (13), in ein Ebenenpaar zerfällt, bei *Serenus,* (350 n. Chr.) nach Cantor 1, S. 490.

49. **Begriff und Gleichungen der Doppelelemente.** Die *linearen Gleichungen* für die *Doppelpunkte* einer Kurve oder Fläche 2. O., § 10, (28); § 67, (32) erhält *Lamé,* Exam. (1818), S. 71; 72, indem er ausdrückt, daß der Mittelpunkt auf der Kurve oder Fläche liegt. Die für die *Doppelgerade* einer Kurve oder

Doppelebene einer Fläche 2. Kl., § 16, (16); § 76, (16), gibt *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 19; Raum S. 173.

Die für die Doppelpunkte einer *ebenen Schnittkurve* der Fläche 2. O., § 106, (22); § 107, (2); § 141, (31), *Hesse,* Raum S. 392; für den Doppelp. des *Schnittpunktpaares* mit einer Geraden s. § 44, (25); § 142, (28).

Der Ausdruck point singulier (dans lequel la direction de la tangente devient indéterminée) bei *Cauchy,* Appl. (1826), S. 76, *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 395. Eine zweite Erklärung, nach der es sich um Punkte handelt, durch deren Einführung als Koordinateneckpunkte eine Koordinate aus der Gleichung der Kurve oder Fläche verschwindet, in § 39, (26); § 42, 3; § 139, 3; § 141, 6.

50. **Durchmesser und Diametralebenen.** Den Ort der Mittelpunkte eines Systems paralleler Sehnen bei *Ellipse, Hyperbel* und *Parabel,* § 14, 1; 8, nennt *Apollonius,* Con. I, Def. 4 (Heib. 1, S. 6) einen *Durchmesser* (διάμετρος), s. Cantor 1, S. 337; F. Müller, Progr. S. 27. Derselbe Begriff für die *allg. Kurve 2. O.,* in § 11, 1 als die einer Richtung konjugierte Gerade bezeichnet, bei *Euler,* Introd. 2, art. 90; die *Gleichung* dieser Linie, § 11, (2), gibt *Gergonne,* Ann. de math. 5 (1814/5), S. 64; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 67.

Diametralebene einer Fläche als Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen, § 68, 2, die einer Richtung konjugierte Ebene genannt, im wesentl. bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 13; *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 151; die *Gleichung* der Ebene, § 68, (2), bei *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 19; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 3; 82; *Gergonne,* Ann. de math. 5 (1814/5), S. 74; *Plücker,* System (1846), S. 93; als *Polarebene* des unend. fernen Punktes der Richtung, § 68, 11, bei *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 19; *v. Staudt,* Halbm. (1867), S. 37.

Durchmesser einer Fläche ist der Ort der Mittelpunkte paralleler ebener Schnitte, § 111, 4, die reziproke Polare der unendl. f. Geraden der Schnitte, *Poncelet,* J. f. Math. 4, S. 21; *v. Staudt,* Halbm. S. 39; 40; *Hesse,* Raum S. 389.

51. **Harmonische Pole, Polaren und Polarebenen.** I. Die *induktive Definition harmonischer Pole,* § 11, 5; § 68, 5, *harmonischer Polaren,* § 17, 1, und *harmonischer Polarebenen,* § 77, 1, setzt die *Kurve* oder *Fläche* als gegeben voraus und benutzt *gleichartige* Elemente (zwei Punkte, zwei Gerade, zwei Ebenen). Sie ist ausgeprägt bei *Hesse,* Sieb. Vorl., S. 11; 22; Raum, S. 131; 147. Die *deduktive Definition,* § 11, 20; § 17, 12; § 68, 29; § 77, 16, geht von der allg. Verwandtschaft der *Reziprozität* (der *ungleichartigen* Polarelemente Punkt und Gerade, Punkt und Ebene) aus und bezeichnet allgemein (s. auch Anm. 166) zwei Elemente als *konjugiert,* wenn das eine von ihnen mit dem Polarelement des andern vereinigt liegt. Sie ist ausgeprägt bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 134; 190; Beitr. S. 286 f.; vgl. *Reye,* G. d. L. 1, S. 104; 2, S. 47; *Sturm,* Linieng. 1, S. 82; Jahrb. d. F. 1878, S. 413. Vorgebildet sind beide Definitionen bei *Steiner,* Entw. (1832), Werke 1, S. 350 („zugeordnete harmonische Pole, zugeordn. harm. Gerade"), *Plücker,* System (1835), S. 101 („zugeordn. Pole, zugeordn. Polaren"), *Hesse* (1840) Werke, S. 30; 34 („puncta conjugata, lineae conj."); vgl. *Baltzer,* Geom. S. 209.

II. Der *analytische Ausdruck* aller Definitionen liegt in der Gleichung $f_{12} = 0$, § 11, (8); § 46, (2); § 68, (7); § 149, (2). Denn einerseits ergibt sich f_{12} als mittlerer Koeffizient der quadratischen Gleichung des *Schnittpunktproblems,* § 10, (7); § 67, (7), und der Gleichung des *Schnittpunktpaares* in Zweieckskoordinaten, § 44, (7); § 142, (7). Andererseits ist die Gleichung $f_{12} = 0$ § 41, (6); § 138, (6) (auch ohne die Bed. $a_{kl} = a_{lk}$) der *Ausgangspunkt* des allg. Begriffs der *Reziprozität* bei *Möbius* (1833), Werke 1, S. 492; *Plücker,* System (1846), S. 13.

III. Die *involutorische Eigenschaft,* § 11, 14; § 17, 7, bei der Kurve und, § 68, 13; § 77, 7, bei der Fläche hebt *Poncelet,* Traité (1822), art. 196; J. f. Math. 4 (1829), S. 19; 20 („Fundamentalsatz") hervor, vgl. *Steiner,* Entw. (1833), Werke 1, S. 350; *Schröter,* Oberfl. S. 132; 489; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 86; 203. Auch die verschiedenen Auffassungen dieser Eigenschaft vereinigen sich in der einzigen anal. Gleichung $f_{12} = 0$ nach *Moebius* (1833), Werke 1, S. 493, art. 3, Absatz 2.

52. **Involution harmonischer Pole, Polaren und Polarebenen.** Der Begriff der *Involution harmonischer Pole,* § 11, 6; § 68, 7, Polaren, § 17, 2, und Polarebenen, § 77, 2, knüpft wiederum (Anm. 51) *induktiv* an das *Schnittpunktpaar* der gegeb. Kurve und Fläche mit einer geg. Geraden usw. an bei *Plücker,* System (1835), S. 101.

Deduktiv erscheint die Involution als *Durchschnitt* einer Geraden mit einem *Polarsystem* in der Ebene oder im Raume bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 134; 193.

53. **Begriff und Gleichung der Polare und Polarebene.** I. Der Name „*Polare eines Punktes*" § 11, 7 von *Gergonne*, Ann. de math. 3 (1812/3), S. 297.

II. Die *harmonische Teilung* einer Sehne durch Pol, Polare und Kurve für den Kreis § 12, 6 und für die Kegelschnitte im Spezialfall § 20, 3 bei *Apollonius,* Con. I, art. 34; 36; III, art. 37 (Heib. 1 S. 100; 106; 402); vgl. Cantor 1, S. 338; Zeuthen, Kegelschn. S. 119; allgemeiner bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 168; 263, vgl. Cantor 2, S. 678; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 180; Baltzer, Elem. 2 (1878), S. 385; weiter bei *De la Hire* nach Cantor 3, S. 128; *Poncelet*, Traité, art. 194; 186; Polarebene § 68, 8 für Kugel und Fläche 2. O. angedeutet bei *Desargues,* Oeuvres 1, S. 290; allgemein bei *Poncelet*, J. f. Math. 4 (1829), S. 19; Traité (1822), art. 590.

III. Die *Gleichung* der Polare § 11, (16) bei *Gergonne,* Ann. de math. 3, S. 296; die der Polarebene § 68, (15) von *Monge* nach Kötter, Ber. S. 48; *Gergonne*, Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; 3 (1812/3), S. 297; *Livet*, Corr. polyt. 1 (1805), S. 75.

54. **Konstruktion der Polare.** Die *Konstruktion der Polare* (trauersale) mittels des vollst. Vierecks § 11, 8 bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 189; *Servois,* Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; *Gergonne,* Ann. de math. 3 (1812/3), S. 297; *Lamé,* Exam. (1818), S. 46 zugleich zur Konstruktion des Tangentenpaares.

55. **Polar- und Berührungselemente.** I. Die *Tangente* als *Polare* des Berührungspunktes § 11, 9 bei *Desargues,* Oeuvres 1, S. 265 nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 181; der *Berührungspunkt* als *Pol* der Tangente § 17, 4 bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 118. Die *Tangentialebene* als *Polarebene* des Ber. p. § 68; 9; der *Berührungspunkt* als *Pol* der Tangentialebene § 77, 4 bei *Plücker,* System (1846), S. 21; *Hesse,* Raum S. 134.

II. Die *Polare* als *Berührungssehne* des Tangentenpaares § 11, 10 bei *Gregorius a St. Vinzentio* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 97; bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 192; der *Pol* als *Scheitel* des Tangentenpaares § 17, 5 bei *Plücker,* System (1835), S. 100. Die *Polarebene* als *Berührungsebene* des Berührungskegels § 68, 10 bei *Monge* nach *Livet,* Corr. polyt. 1 (1805), S. 75; *Lamé,* Exam. (1818), S. 47f. Der *Pol* als *Spitze* des Berührungskegels § 77, 5 bei *Hesse,* Raum S. 171.

56. **Zusammengesetzte Polarbeziehungen.** I. Daß die Polaren der Punkte einer *Punktreihe* § 11, 15, II ein *Büschel* bilden, bei *De la Hire* (1685)

nach Kötter, Ber. S. 47; daß die Polarebenen der Punkte eines *Feldes* ein *Bündel* bilden § 68, 23, II, bei *Gergonne*, Ann. de math. 3 (1812/3), S. 293 ff. nach Kötter, Ber. S. 49 und die Polarebenen der Punkte einer *Geraden* ein *Büschel* bei *Monge* nach Kötter, Ber. S. 48.

II. Die *Projektivität* der entsprechenden Gebilde § 11, 15, I; § 17, 8, I; § 68, 14, I; 23, I; § 77, 8, I; 12, I folgt aus der *allg. Theorie* der reziproken Verwandtschaften I § 67, 3; 7; § 69, 3; 6; vgl. *Klügel,* Suppl. v. *Grunert* 2 (1836), S. 989.

57. **Begriff und Gleichung des Poles.** I. Der Name *Pol einer Geraden* § 11, 16 von *J. F. Servois,* Ann. de math. 1 (1810/1), S. 337; hier ist der Pol der Punkt, durch den die Polaren aller Punkte einer Geraden gehen, § 11, 16, II; Name und Begriff des *Poles einer Ebene* § 68, 24 bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 590.

II. Die *Gleichung* des Poles in *Linienkoordinaten* § 11, (27); § 17, (6) bei *Plücker* (1829) Abhandl. S. 193; Entw. 2 (1831), S. 118; *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 23; in *Ebenenkoordinaten* § 68, (26); § 77, (5) bei *Hesse*, Raum, S. 147.

58. **Gleichungen von Kreis und Kugel.** I. Die *Gleichung des Kreises* § 12, (20) im wesentl. bei *P. de Fermat* nach Cantor 2, S. 817; die der *Kugel* § 69, (1) bei *Parent* (1713) nach Cantor 3, S. 417, und *Clairaut* (1731) nach Cantor 3, S. 781. Die *Unterscheidung der Normalform* § 12, (1); § 69, (1) und der *allgemeinen* § 12, (20); § 69, (20) bei *Plücker*, Entw. 1, S. 47; *Hesse* Ebene, S. 179; Raum, S. 345, vgl. *Magnus*, Aufg. 1, S. 83; *Klügel* 3, S. 295.

II. *Imaginäre* Kreise § 12, 9 bei *Chasles*, Traité de géom. supér. Chap. 33; *Möbius* (1857) Werke 2, S. 317; *v. Staudt,* Halbm. S. 9; imag. Kugel § 69, 10 bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 253.

III. Geom. Deutung der Relationen zwischen 4 Punkten eines Kreises § 12, 12 und 5 Punkten einer Kugel § 69, 14 s. bei *R. A. Luchterhandt*, J. f. Math. 23 (1842), S. 375; *Möbius*, J. f. Math. 26 (1843), S. 26 = Werke 1, S. 583; *Joachimsthal*, J. f. Math. 40 (1850), S. 21; *Baltzer,* Geom. S. 368; Det. S. 230; vgl. *Frobenius*, J. f. Math. 79 (1875), S. 185.

59. **Potenz in bezug auf Kreis und Kugel.** I. Über das Vorkommen des *Sekantensatzes* vom *Kreise* § 12, 3 bei *Archytas* (um 350 v. Chr.) und *Euklid* s. Tropfke, Gesch. 2, S. 84; 85.

II. Den *Begriff der Potenz* § 12, 3 führt *Steiner,* J. f. Math. 1 (1826), S. 164 = Werke 1, S. 22 ein; für die *Kugel* § 69, 3 *Moebius* (1857), Werke 2, S. 319. Die *anal. Darstellung* § 12, (8); § 69, (8) nach *Hesse*, Ebene S. 180. Die Alten nannten den konst. Inhalt des Parallelogramms § 3, 6 *Potenz der Hyperbel* (*δύναμις*) nach F. Müller.

III. Bei der *allg. Kurve 2. O.* § 9, (1) ist $s_1 s_2$ nicht von α, β unabhängig, wie beim Kreise in § 12, (7). Vielmehr folgt aus § 10, (4) für zwei durch einen Punkt x_0, y_0 gehende Richtungen α, β und α', β':

$$s_1 s_2 = \frac{g(x_0 y_0)}{h(\alpha\beta)}, \qquad s_1' s_2' = \frac{g(x_0 y_0)}{h(\alpha'\beta')},$$

so dass:

$$\frac{s_1 s_2}{s_1' s_2'} = \frac{h(\alpha'\beta')}{h(\alpha\beta)}$$

von x_0, y_0 unabhängig wird. Dies gibt die *Sekantensätze der Kegelschnitte*, *Apollonius* Con. III, art. 16—23 (Heib. 1, S. 347 ff.) nach Cantor 1, S. 338; *Newton* (1706) nach Cantor 3, S. 423; *Stirling* (1717) nach Cantor 3, S. 434; vgl. *Euler*, Introd. 2, art. 93; *Klügel* 3, S. 189; Zeuthen, Kegelschn. S. 116; Gesch. A. M. S. 208.

60. **Imagin. Kreispunkte und Kugelkreis.** Der *Begriff* des *imaginären Kreispunktpaares* § 12, 10 von *Poncelet*, Traité (1822), art. 94; vgl. *Klein*, Autogr. Vorles. Elementarmath. 2 (1909), S. 248. Seine *Gleichung in Linienkoordinaten* § 20, (60′) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 41; *Clebsch-Lindemann*, Ebene (1906), S. 248.

Das *Kreisstrahlenpaar* § 12, (18) als Punktkreis bei *Cauchy*, Appl. S. 65; Exerc. 3, S. 81.

Der *Begriff* des *imag. Kugelkreises* § 69, 9 bei *Poncelet*, Traité art. 593; 619; *v. Staudt*, Beitr. S. 129. Seine *Gleichung in Ebenenkoord.* § 84, (9′) bei *Hesse*, Raum S. 338; *in Linienkoord.* § 84, (11′) bei *F. Aschieri*, Rend. Ist. Lomb. (2) 9 (1876), S. 222; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 183. Der Ausdruck *Kugelkegel* § 69, 9 nach *F. Meyer*, Jahrb. der Fortschr. 1882, S. 717. Die Tangentialebenen des imag. Kugelkreises heißen *Minimalebenen* nach *Lie-Scheffers*, Berühr.transf., S. 429; die Treffgeraden des imag. Kugelkreises § 84, (11′) *Minimalgerade* nach *Lie-Scheffers*, ebd. S. 255, lignes isotropes nach *E. Laguerre*, Nouv. Ann. (2) 11 (1872), S. 14.

61. **Gleichung des Kreises und der Kugel in Linien- und Ebenenkoordinaten.** Die Gl. des *Kreises* in *Linienkoord.* § 12, (27) bei *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 34; *Hesse*, Ebene, S. 186; der *Kugel* in *Ebenenkoord.* § 69, (27) bei *Plücker*, System (1846), S. 244; in *Linienkoord.* § 69, (28) nach *Plücker*, N. Geom. S. 256.

62. **Imagin. Ellipse und Ellipsoid.** Die Gleichung der *imaginären Ellipse* § 13, 1 und des *imag. Ellipsoides* § 70, 1 bei *Cauchy*, Exerc. 3, S. 70; Applic. S. 253; vgl. *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 37; s. Anm. 85.

F. Klein, Vorl. 1, S. 355 bezeichnet als imagin. Kurven und Flächen 2. O. solche mit imagin. *Koeffizienten* a_{kl} in § 9, (1); § 66, (1) und nennt die hier betrachteten *nullteilig*.

63. **Abstände der Brennpunkte von der Tangente.** Der Satz über das Produkt der Abstände der Brennpunkte von der Tangente § 13, (11) von *J. Keill* (1709) nach *Klügel* 2, S. 97; vgl. *Plücker*, Syst. (1835), S. 115. Der Satz liegt auch in der Formel § 31, (28) nach *Hesse*, Vorl. Raum, S. 344.

64. **Winkel der Brennstrahlen gegen Tangente und Normale.** I. Der Satz von der *Halbierung des Winkels der beiden Brennstrahlen* eines Punktes P der *Ellipse oder Hyperbel* durch Tangente und Normale § 13, 4 bei *Apollonius*, Con. III, art. 48 (Heib. S. 430) nach Cantor 1, S. 339; für die *Parabel* § 13, 13 erst von *Anthenius* (6. Jahrh.) nach Heiberg, Zeitschr. Math. Phys. (1) 28 (1888), kl. Abh. S. 121; *Joh. Werner* (1500) nach Cantor 2, S. 458. Daß die Halbierungslinien der Winkel der Brennstrahlen des Punktes P die Tangenten der beiden durch P gehenden *Konfokalen* sind § 33, 9; § 35, 7 bemerkt *Chasles*, Aperçu Note XXXI, art. (30); die Beziehung des Satzes zur Theorie der *senkrechten harmon. Polaren* § 20, 6 bei *Chasles* ebd. art. (18).

II. Der entsprechende Satz von den *Halbierungsebenen der Winkel der Fokalebenen beim Kegel* § 119, 8, III von *Magnus*, Ann. de math. 16 (1826), nach *Chasles*, Aperçu V, § 42 (1837, S. 237).

III. Der entsprechende Satz bei den *Flächen 2. O.* gliedert sich in *zwei*, je nachdem man die durch einen Punkt P der Fläche gehenden *Fokalkegel* § 122, (4) oder *Fokalstrahlen* § 122, (9), bezügl. die gebrochenen Fokaldistanzen § 134, 13; § 137, 13, als Analoga der *Brennstrahlen* ansieht. Die Normalen der drei durch P gehenden *Konfokalen* sind nach § 122, 1 die Hauptachsen der Fokalkegel und nach § 122, 4, III die Halbierungslinien der Fokalstrahlen, s. Anm. 102 und 186.

65. **Hauptachsengleichungen der Kegelschnitte in Linienkoordinaten und der Flächen 2. O. in Ebenenkoordinaten.** I. Die *Linienkoordinatengleichung* der *Ellipse*, *Hyperbel* § 13, (18) und *Parabel* § 13, (43) bei *Plücker* (1829), Abhandl. S. 189; *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 43. Andeutungen über die Auffassung der Parabel als *Liniengebilde* bei *Apollonius*, Con. III, art. 41 (Heib. 1, S. 412 ff.) nach Tropfke, Gesch. 2, S. 448; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 227. Der Übergang von § 13, (23) zu § 13, (18) bei *Cayley* nach Dingeldey, Enc. S. 19. Daß die Parabel keine *parall.* Tang. hat § 13, 15, II erwähnt *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 334.

II. Die *Ebenenkoord.gleich.* des *Ellipsoides* und *Hyperboloides* § 70, (10) bei *Plücker*, System (1846), S. 211; 212.

66. **Ort der Scheitel besonderer Tangentenpaare und Berührungskegel.** I. Den Ort der Scheitel *rechtwinkl.* Tangentenpaare eines Kegelschn. § 13, 8, I; § 13, 16, I; § 33, (22); § 35, (21) bestimmt *De la Hire* nach Cantor 3, S. 129; *Lamé*, Exam. (1818), S. 78; *Poncelet*, Traité (1822), art. 452. Auch die *allgemeinere* Aufgabe § 33, (24) behandelt *De la Hire*, Sect. con. VIII, prop. 27 ff. und für die Parabel § 35, 8, letzt. Abs., *De l'Hospital*, Sect. con., S. 266 ff. nach Kötter, Ber. S. 52. Die Kurven 4. O. § 33, (24) (bei der Parabel 2. O.) in *ellipt. Koord.* von *O. Staude*, Dissert., Leipzig 1881, S. 17 behandelt.

II. Den Ort der Scheitellinien *rechtwinkl.* Tangenten*ebenen*paare beim *Kegel* § 119, 10 gibt *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 321; s. auch *Painvin*, Bull. scienc. math. 2 (1871), S. 371; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 439.

III. Der Ort der Schnittpunkte von drei *rechtw. Tangenten* beim Ellipsoid od. Hyperboloid bestimmt *Lamé*, Exam. (1818), S. 80; *Bobillier*, Ann. de math. 18 (1827/8), S. 232; von drei *rechtw.* Tangenten*ebenen* („Mongesche Kugel") *Monge* nach *Livet*, Corr. polyt. 1 (1804), S. 30; der erste Beweis von *Poisson*, ebd. 1 (1806), S. 240; vgl. *Chasles*, Corr. polyt. 3 (1816), S. 320; *Lamé*, Exam. S. 80; beim Paraboloid *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 325. Daß es sich dabei um den Ort der Scheitel *gleichseitiger*, § 100, (17); (21); § 122, (13); § 125, (8), und *dual* gleichseit. *Berühr. Kegel*, § 100, (18); (22); § 122, (16); § 125, (10) handelt, bemerkt *Plücker*, System (1846), S. 206. Ort der Scheitel Pappusscher und Hachettescher Kegel (s. Anm. 143) nach *A. Mannheim*, Proc. R. Soc. Lond. 1881, S. 447, eine Fresnelsche Wellenfläche. Die Bed. dafür lautet nach § 122, (2): $(\mu + \nu - 2\tau)(\nu + \lambda - 2\tau)(\lambda + \mu - 2\tau) = 0$ und ist nach *Staude*, Dissert. Leipzig 1881, S. 61, die Gl. der Fresnelschen Wellenfl. in *ellipt.* Koord. Die Methode der ellipt. Koord. ist für alle diese Örter I—III das *systematische* Hilfsmittel und gestattet auch die *getrennte* Deutung der einzelnen Kurvenzweige und Flächenschalen, wie $\mu + \nu - 2\tau = 0$, $\nu + \lambda - 2\tau = 0$ usw.

IV. Da alle Ebenen durch eine Erzeugende Tangentialebenen sind, gehört dem Ort der Scheitel von drei rechtw. Tangenteneb. auch der Ort der Schnittpunkte zweier rechtw. Erzeugender der Fläche § 64, (3); § 65, (44) an, *Plücker* System (1846), S. 207; 208. Die letztgenannten Örter erscheinen wiederum auch bei der Theorie der *gleichseitig hyperbol. Schnitte* § 116, (24).

67. **Asymptotengleichung in Linienkoordinaten.** Die Asymptotengl. der Hyperbel in *Linienkoord.* § 13, (31) bei *Plücker*, Entw. 2, S. 53. Der Satz § 13, (32) aber schon bei *Apollonius*, Con. III, art. 43 (Heib. 1, S. 420); in der Auffassung § 13, 18 bei *Steiner*, Syst. Entw., Werke 1, S. 335.

68. **Ähnliche Punktreihen auf zwei Tangenten der Parabel.** Der Satz § 13, 19 gibt *Apollonius* III; art. 41 (Heib. 1, S. 412); vgl. *Zeuthen*, Kegelschn. S. 344. Er findet sich auch bei *De la Hire* und *M. R. de Prony*, J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 57 f. nach *Dingeldey*, Encykl. S. 16; ferner bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 224 und in seiner systematischen Stellung bei *Steiner*, Syst. Entw., Werke 1, S. 334.

69. **Gleichungen des Linienpaares in Linien- und des Kegels in Ebenenkoordinaten.** Die Darstellung des *Linienpaares* § 13, (57) durch *zwei* Gleichungen in *Linienkoordinaten* § 13, (58'); § 19, (14); (18); § 45, (11); (15) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 16; des *Kegels* durch *zwei* Gleichungen in *Ebenenkoord.* § 71, (8); (9); § 143, (9); (11) nach *Plücker* (1832), Abhandl. S. 229; *Hesse*, Raum, S. 164; *Clebsch-Lindemann*, Raum. S. 23 f.; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 343.

Die Beziehung der Geraden u_k', u_k'' des Geradenpaares § 42, (15) und der Ebenen des Ebenenpaares § 139, (23) zu den Koeffizienten a_{kl} bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene S. 182; Raum S. 153. Die umgekehrte Aufgabe deckt sich im wesentl. mit der Darstellung des Geraden- und Ebenenpaares in Linien- und Ebenenkoord. § 45, (11); (15); § 71, (33); (34); § 143, (14); (17); s. Anm. 139.

70. **Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen.** I. Der *Begriff zweier konjugierter Durchmesser* der *Ellipse* und *Hyperbel* § 14, 2, I bei *Apollonius*, Con. I (Heib. 1, S. 8) nach Cantor 1, S. 337; bei *Gregorius a St. Vincentio* nach Bopp, Greg. S. 108 ff.; *Euler*, Introd. 2, art. 111. Die besondere Art § 14, 5, II bei *Euler*, Introd. 2, art. 146; *Klügel* 2, S. 87. Bei der *Parabel*, wo alle Durchmesser der Achse parallel sind, treten für zwei konjugierte Durchmesser *ein Durchmesser* und *eine Tangente* ein § 14, 8, s. *Euler*, Introd. 2, art. 151.

II. Der *Begriff* von Durchmesser und Diametralebene, die einander konjugiert sind, ferner von *drei konjug. Durchmessern*, bezügl. *Diametralebenen* des Ellipsoides und Hyperboloides § 72, 1; 5; 7 bei *Monge-Hachette*, Journ. éc. polyt. cah. 11, S. 153; *Baltzer*, Geom. S. 514. Beim *Paraboloid*, wo alle Durchmesser und Diametralebenen der Achse parallel sind, treten für drei konj. Durchm. *ein Durchm.* und *zwei Tangenten* ein § 73, 3, s. *v. Staudt*, Halbm. S. 45; *Baltzer*, Geom. S. 517.

71. **Konjugierte Durchmesser und Diametralebenen als Polarsysteme.** I. Die Auffassung *aller Paare* konjugierter Durchmesser § 14, 4 als *Strahleninvolution* mit den *Asymptoten* als Doppelstrahlen bei *De la Hire* nach Dingeldey, S. 21 und bei *Chasles* nach Kötter S. 295; — *aller Paare* konjugierter Durchmesser und Diametralebenen § 84, 3, letzter Absatz, als *Polarbündel* des *Asymptotenkegels* bei *v. Staudt*, Halbm. S. 39.

II. Allgemeiner bilden die Paare konj. Durchmesser die zum Mittelpunkt gehörige *Involution harmonischer Polaren* am Mittelpunkt § 20, 4 und konjugierte Durchmesser und Diametralebenen das Polarbündel am Mittelpunkt.

72. **Konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen.** I. Die *Gleichungen* der Ellipse und Hyperbel *in bezug auf zwei konj. Durchm.* § 14, (11) und der Parabel in bezug auf Durchm. u. Tangente § 14, (25) bei *Fermat* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 198; *Euler,* Introd. 2, art. 110; 114; 151; *Klügel* 2, S. 82. Die *Gleichung* der Ellipsoide und Hyperboloide § 72, (14) *in bezug auf drei konj. Durchm.* bei *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 154; *Moebius,* Werke 1, S. 159.

II. Die *Form* der Gleichungen § 14, (11) und § 72, (14) ist in der Auffassung der betreff. Koordinatensysteme als *Polardreieck* § 47, 1 und *Polartetraeder* § 150, 1 begründet, die auf *Poncelet,* Traité (1822), art. 617 zurückgeht. Die Form der Gl. § 14, (25) und § 73, (8) in der Auffassung als Berührungsdreieck § 52, 3 und Polarberührungstetraeter § 158, 5.

73. **Metrische Sätze über konjugierte Durchmesser.** I. Die beiden Sätze § 14, (16); (17) bei *Apollonius,* Con. VII, art. 12; 13; 31 nach Zeuthen, Kegelschn, S. 393; bei *Euler,* Introd. 2, art. 119; 116; 145; *Klügel* 2 (1805), S. 84; 713. Als *Invariantenbeziehungen* § 22, 10 bei *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 144.

II. Die Sätze § 72, (23) bei *Livet,* Corr. polyt. 1 (1804), S. 29; J. éc. polyt. cah. 13 (1806), S. 277; *J. Binet,* Corr. polyt. 2 (1810), S. 79 (2 (1812), S. 323; J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 321; mit zahlreichen ähnlichen Sätzen bei *Chasles.* Corr. polyt. 3 (1816), S. 306ff.; J. de math. (1) 2 (1837), S. 388; *Magnus* 2 (1837), S. 236; *v. Staudt,* Halbm. S. 50. Als *Invariantenbeziehungen* § 92, 2 bei *Binet,* J. cé. polyt. 16 (1813), S. 51; vgl. *Plücker,* System (1846), S. 160ff.; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 125f.; vgl. *Bauer,* Münch. Ber. 1880, S. 637. Die Sätze § 73, (12); (13); § 92, 3 von *Allman,* Quart. J. 13 (1875), S. 102.

74. **Ähnliche Kurven und Flächen 2. O.** I. Der *Begriff der Ähnlichkeit* der *Parabeln* § 14, 10 bei *Archimedes,* Con. et Sphaer., Op. omnia ed. Heiberg, 1, S. 279, der *Kegelschnitte* überhaupt § 14, 10 bei *Apollonius,* Con. VI, nach Cantor 1, S. 342; bei *De la Hire,* Sect. con. VI, nach Cantor, 3, S. 129; *De l'Hospital,* Sect. con. (1720) V, art. 190; *Euler,* Introd. (1748) 2, art. 439; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 174; (1852), Werke 2, S. 91. Über den *weiteren* Begriff § 14, 10 vgl. *R. Müller,* Arch. math. Phys. (3) 2, S. 342; Jahrb. der Fortschr. 1902, S. 560.

II. Die Formeln § 14, (32) bei *Euler,* a. a. O. art. 446. Die *allgem. Formeln* für die Ähnlichkeit zweier auf dasselbe (oder nicht dasselbe) *rechtwinklige* Koordinatensystem bezogene Figuren lauten in der *Ebene:*

$$x = x_0 + m(\alpha_1 x' + \alpha_2 y'),\quad y = y_0 + m(\beta_1 x' + \beta_2 y'),$$

wo α_1, β_1 und α_2, β_2 die Bedingungen § 21, (7) erfüllen, und im *Raume*:

$$x = x_0 + m(\alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'),\quad y = y_0 + m(\beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'),$$
$$z = z_0 + m(\gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'),$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ die Bedingungen § 88, (3), (4) erfüllen. Beidemal ist m das konstante *Verhältnis entsprechender Strecken;* vgl. *Klügel* (*Grunert*), Suppl. 2 (1836), S. 984.

III. Begriff u. Übereinstimmung der konjugierten Durchmesser konjugierter Ellipsoide und Hyperboloide § 72, 12 bei *Cauchy,* Applic. S. 274; *v. Staudt,* Halbm. S. 42; *Salmon-Fiedler,* Raum, S. 124f.

75. **Abschnitte auf der Tangente der Hyperbel.** Der Satz § 14, 11, IV, daß die *Asymptote auf der Tangente der Hyperbel gleiche Stücke abschneidet,* bei

Archimedes und *Apollonius* nach *Tropfke* 2, S. 456. Alle Sätze § 14, 11, II—IV sind Spezialfälle des Satzes § 48, 8, II. Denn das Büschel ähnlicher Hyperbeln:

$$f-\lambda g=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\lambda t^2=0$$

enthält die unendl. ferne Gerade $t^2=0$. Daher ist für die Involution § 48, 8, I der unendl. ferne Punkt ein Doppelpunkt und die Involution gleichseitig hyperbolisch, § 8, (16). Die Schnittpunktpaare S und T, S' und T' § 14, Fig. 75 haben also denselben Mittelpunkt M.

76. **Begriff und Kriterien des Ranges.** I. Der *Rang eines Punktepaares, einer Kurve* oder *Fläche 2. O.* oder *2. Kl*, ist gleich dem Rang der zugehörigen *Determinante,* § 39, 7; § 42, 1; § 139, 1. Als solchen bezeichnet *L. Kronecker,* Berl. Ber. (1884), S. 1071 die größte Zahl r von der Beschaffenheit, daß nicht alle Unterdeterminanten r-ten Grades verschwinden. Seine *Invarianz* § 39, 7; § 42, 1; § 139, 1 für jede Koordinatentransformation bei *K. Weierstraß,* Berl. Monatsber. (1868), S. 316.

II. *Geometrisch* kommt der Rang erstens in der *Anzahl der Doppelelemente* zur Geltung § 18, 1; § 78, 1; § 39, 8, zweitens in der *Mannigfaltigkeit niedrigster Ordnung,* der das Gebilde angehört (eigentl. Fläche 2. O. dem Raume von ∞^3 Punkten, Kegel dem Bündel von ∞^2 Strahlen, Ebenenpaar dem Büschel von ∞^1 Ebenen), drittens überhaupt in der durch die *Benennung* ausgedrückten Beschaffenheit des Gebildes § 19, (27); § 81, (27); § 80, (17). Das *Linienpaar* als Grenzfall der Kurve 2. O. bei *Desargues* nach Chasles, Aperçu II § 21, S. 75; *Poncelet,* Traité art. 221, das *Punktepaar* als Kurve 2. Kl. bei *Plücker,* Abh. S. 441. *Reduzible* Flächen 2. O. bei *Brandes,* Höh. Geom. (1824), S. 199; *Baltzer,* Geom. S. 454;

III. Bei der *analytischen Darstellung* tritt der Rang hervor in der niedrigsten Anzahl der Koordinaten in der Gleichung des Gebildes § 39, 10; § 42, 2; § 139, 2 bei *Plücker,* System (1846), S. 59; *Baltzer,* Geom. S. 198, 486; sowie spezieller in der Zahl der *Quadrate* in der Quadratdarstellung § 40, (4); § 39, (26); § 46, 13; § 149, 15 nach *S. Gundelfinger* in Hesse, Raum, S. 462.

IV. Die ursprünglichen Bedingungen des Ranges liegen nach seiner Definition I in dem *Verschwinden aller Unterdeterminanten eines bestimmten Grades* § 39, (16); (17); § 19, (27); § 81, (27). Die Bedingung § 19, (1); (1') in ausgeschriebener Form bei *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 131; 2 (1831), S. 50; 173; System (1835), S. 87; *Magnus,* Aufg. 1 (1833), S. 103; die Bed. § 79, (3) andeutungsweise bei *Lamé*, Exam. (1818), S. 42; 72; ausgerechnet bei *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 95; *Plücker,* System (1846), S. 52; 59. Die *Determinantenform* durch *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 142; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1833), S. 11 = Werke 3, S. 207; *Hesse,* Ebene S. 94; Sieb. Vorl. S. 4; Raum, S. 138 in Gebrauch; vgl. *Baltzer,* Det. S. 42; *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 154.

V. Eine Vereinfachung erfahren diese Bedingungen durch Zurückführung auf die *Hauptunterdeterminanten* § 49, (18) vor den geschweift. Klammern, § 152, (36) vor den Klammern. Diese Zurückführung geschieht durch die Betrachtung der Spezies und beruht auf den Determinantensätzen I Anm. 1, II, (7); (8); III, (21)—(23) in § 152, 11; 13.

VI. Während die „aufgelöste Form" IV und V der Bed. des Ranges für die Einzelanwendung (vgl. die Tabellen § 40, (22); § 153, (21)) bequemer ist, erhalten sie ihre theoretisch vollkommenste, „geschlossene Form" durch Zurückführung auf *die Summen der Hauptunterdeterminanten* § 19, (28); § 81, (28); § 139, (30). Diese Form ergibt sich auf Grund der *orthogonalen Transformation* (s. Anm. 116) § 50, 19; § 155, 21; oder auf Grund der *Determinantenidentitäten* (s. Anm. 80).

VII. Bei den *Schnitten* der Kurve 2. O. mit einer Geraden und der Fläche 2. O. mit einer Ebene und einer Geraden durchlaufen die *Bedingungen des Ranges* ebenfalls die vorstehenden *drei Entwicklungsformen* IV–VI, nur daß überall, statt der einfachen, die *geänderten* Det., Unterdet., Hauptunterdet., Summen von Hauptunterdet. erscheinen: Form IV § 44, (17)—(19); § 141, (20) bis (23); § 142, (17)—(19); Form V § 49, (22) Zeilenvorschr.; § 153, (21) Zeilenvorschr.; § 154, (9); Form VI § 51, (35); § 141, (24); § 142, (24). Der Vergleich dieser Stellen dürfte zugleich die überall durchgeführte *Bezeichnung* A^u, A^u_{kl}, A'^u usw. *rechtfertigen.*

VIII. Bei den *geänderten* Det. treten als Bedingungen des Ranges von der Form IV z. B. § 107, (18) nur die *„regelmäßigen" Unterdet.* § 107, (9) auf, während die *„unregelmäßigen"* § 107, (10); (11) ausfallen. Indessen folgt aus dem Verschwinden aller 9 regelm. Unterdet. 3. Gr. A^u_{kl} auch das Verschw. der Det. 4. Gr. A^u selbst, sowie das der 7 unregelm. Unterdet. 3. Gr. § 44, 10; ebenso aus dem Verschw. aller 16 regelm. Unterdet. 4. Gr. A^u_{kl} das der Det. 5. Gr. A^u, § 141, bei (22), und der 9 unregelm. § 107, 4 (wo in Satz I „neben A^u" wegbleiben kann); ebenso mit bezug auf $A^{uu'}$ § 142, bei (19) und § 142, 10. Auch begründen die Formeln § 44, (37); § 107, (21); § 142, (21) den Übergang zur Form V der Bedingungen.

77. **Identität der eigentlichen Kurven oder Flächen 2. Ordnung und 2. Klasse.** I. Die Identität der eigentlichen Kurven und Flächen 2. O. und 2. Kl., § 18, 7 und § 78, 7, bei *Gergonne,* Ann. de math. 18 (1827/8), S. 152; *Plücker,* System (1835), S. 87; Abhandl. (1831). S. 225; System (1846), S. 21; 321.

II. Die Beziehung der *Gleichungen* der *eigentl.* Kurven und Flächen in *Punkt-* und *Linien-* bezügl. *Ebenenkoord.,* § 18, (9); (10) und § 78, (10); (11); § 45, 3; § 143, 3, bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 120 f.; System (1846), S. 321; s. dagegen Anm. 69.

78. **Polarsysteme im allgemeinen.** I. Ursprünglich war die *Kurve* oder *Fläche 2. O.* der Ausgangspunkt, § 18, 11; § 78, 13. Zwei Figuren, bei denen die Geraden der einen die Polaren der Punkte der andern und die Punkte der einen die Pole der Geraden der andern in bezug auf eine Kurve oder entsprechend eine Fläche 2. O. sind, wie die Dreiecke, § 48, 5; die Tetraeder, § 151, 8, erscheinen bei *Brianchon,* J. éc. polyt. cah. 10 (1810), S. 14; cah. 13 (1806), S. 297 und *Poncelet,* Traité (1822), art. 232. *Poncelet* nennt sie, ebd. art. 229, *polaires réciproques* und die zugrunde liegende Kurve *directrice ou auxiliaire*, vgl. *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 19; *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 262; *Hesse,* Werke S. 33, art. 9. Die Polarverwandtschaft beim *Kegel,* § 79, 6; § 80, 3, wird entwickelt von *Chasles,* Cônes, S. 3; *Magnus* 2, S. 147 („konische Reziprozität"); *Salmon-Fiedler,* Raum, S. 87, 115; *Hesse,* Raum S. 163; 167; *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 147; 148.

II. Den umgekehrten Ausgangspunkt, vom *„Polarsystem"* aus zur Kurve und Fläche 2. O., § 18, 11; § 78, 13, nimmt im Anschluß an *Gergonne, Steiner, Plücker* (vgl. I Anm. 119), *v. Staudt,* G. d. L. S. 131; Beitr. (1856), S. 55; 106. Die Kurve und Fläche erscheint dann als „*Ordnungskurve*“ oder „*Ordnungsfläche*“ des Polarsystems, *v. Staudt,* G. d. L. S. 137; 197; *Reye,* G. d. L. 2, S. 103. Im gleichen Sinne erscheint das „Polarbündel“, § 79, 6, bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 211; Beitr. S. 285; Halbm. S. 36; *Reye,* G. d. L. 1, S. 109 f.; 2, S. 108; *Schröter,* Oberfl. S. 34; 37.

III. Als Sonderfall der *allg. Korrelation,* § 18, 12; § 78, 14, wird das Polarsystem von *Moebius, Plücker, Magnus* und *Chasles* erkannt (vgl. I Anm. 119).

79. **Koordinaten der Doppelelemente.** Die Koordinaten des *Doppelpunktes,* § 19, (2); § 42, (8), und der *Doppelgeraden,* § 19, (20); § 42, (16), der *Kurve 2. O.* bei *Clebsch-Lindemann,* Ebene S. 180; 184; die des Doppelpunktes § 79, (4); § 139, (8), der Doppelgeraden § 81, (2); § 139, (16) und der Doppelebene § 81, (21); § 139, (24) der *Fläche 2. O.* nach *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 150. Entsprechend sind die Koordinaten des Doppelpunktes § 107, (17); § 141, (32) und der Doppelgeraden § 107, (31); § 141, (46) eines *ebenen Schnittes der Flächen 2. O.* gebildet.

80. **Determinantenidentitäten.** Die systematisch hergestellten Identitäten für die *Summen der Quadrate der Unterdeterminanten bestimmten Grades* sind teils *unbedingte* für *einfache* Determinanten § 39, (20); § 19, (7); (23); § 79, (10); § 81, (17); (24) und für *geränderte* Determinanten § 44, (40) = § 109, (20); § 107, (25); (43); § 142, (23), teils *bedingte* § 23, (20); (25); § 94, (29); (35); (43); § 111, (17); (29); (35). Sie sind aus einer an das *Dupin*sche Paradoxon (s. Anm. 150) anknüpfenden Anregung von *Hesse,* Raum, S. 402 f., hervorgegangen, wo sich die Formel § 109, (20) im Spezialfall $\mathsf{H}(\lambda) = 0$ findet. Bei der *Herleitung* bildet die Identität, § 81, (17), deshalb besondere Schwierigkeiten, weil zu den zwölf Formeln, § 81, (3), die drei entsprechenden für $\alpha_{11}\alpha_{44} - \alpha_{14}^2$, $\alpha_{22}\alpha_{55} - \alpha_{25}^2$, $\alpha_{33}\alpha_{66} - \alpha_{36}^2$ fehlen, so daß in § 81, (5) die Quadrate α_{14}^2, α_{25}^2, α_{36}^2 nicht eingeführt werden können. Entsprechendes gilt bei § 107, (41) für α_{14}^u, α_{25}^u, α_{36}^u.

Der *Zweck* dieser Identitäten ist einerseits die direkte Herleitung der gegeschlossenen Bedingungen des Ranges, Anm. 76, VI und andererseits die Verwendung zur Bestimmung der Elementarteiler bei der orthogonalen Transformation § 40, 9, II; III; § 50, 10; § 51, 9; § 155, 10; § 156, 9; § 157, 8.

81. **Tangente und Normale, Tangentialebene und Normale.** Die Involution, in der Tangente und Normale der *Kurve 2. O.* die Hauptachsen schneiden § 20, 6; 7; 18 und das Polarsystem, in der Tangentialebene und Normale der *Fläche 2. O.* die Hauptebenen schneiden § 120, 14; § 123, 12; § 118, 9 bei *Chasles,* Aperçu Note XXXI, art. (1); (18); vgl. *Schröter,* Kegelschn. S. 190; Satz § 20, 7, II bei *Schröter,* ebd. S. 193.

82. **Senkrechte harmonische Polaren und Achsenkomplex.** I. Die Theorie der *zugeordneten Normalstrahlen* § 20, 8; 19 folgt im wesentl. *Reye,* G. d. L. 1 (4. Aufl. 1899), S. 187 f. Sie ist die Vorstufe zur Theorie des *Achsenkomplexes.* Während aber in der Ebene, § 20, (18), *jede* Gerade als Normale von Pol auf Polare erhalten wird, werden im Raume als Normalen von Pol auf Polarebene *nur* ∞^3 von den ∞^4 Geraden erhalten. Sie bilden also einen Komplex § 85, 1. Als solcher, im Plückerschen Sinne (vgl. I Anm. 130), ist der Komplex zuerst von *Th. Reye* eingehend untersucht, *Reye,* G. d. L. 1. Aufl. (1868) und Ann. di mat. (2) 2 (1869), S. 1; vgl. über die Literatur *Reye,* G. d. L. 2 (4. Aufl. 1907), S. 223; *Kötter,* Ber. S. 403; *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 271; 320. Der Satz § 85, 9 von *E. Waelsch* (1887) nach Reye, G. d. L. 2, S. 215.

II. Die *Gemeinsamkeit* der senkr. konj. Polaren für *konfokale Kegelschnitte* § 32, 13; § 34, 11 und des Achsenkomplexes für konf. *Flächen* § 120, 12; § 123, 11 bei *Reye,* G. d. L. 1, S. 188; 2 S. 229; 240. Der Unabhängigkeit der Formeln § 85, (37), von a in § 85, (34) entspricht der Verschiebbarkeit des Achsenkomplexes eines Paraboloides in der Richtung der Hauptachse, *Reye,* G. d. L. 2, S. 221.

83. **Das Normalenproblem.** I. Das Normalenproblem der *Kegelschnitte* § 20, 9; 19 bei *Apollonius* nach Cantor 1, S. 341; *De la Hire* nach Cantor 3, S. 129; *Frézier* nach Cantor 4, S. 621; *Poncelet,* Traité (1822), art. 492; *Joachimsthal,* J. f. Math. 26 (1843), S. 172 ff.; *Steiner* (1854) Werke 2, S. 627; *Schröter,* Kegelschnitte S. 203; *Salmon-Fiedler,* Kegelschn. (7. Aufl. 1907), S. 352; 394; siehe *Dingeldey,* Encykl., S. 62 ff.

II. Das Normalenproblem der *Flächen 2. O.* § 85, 14 bei *Chasles,* J. de math. (1) 3 (1838), S. 433; Quetel. Corr. 9 (1839), S. 49; Par. C. R. 54 (1862), S. 318; *Steiner,* J. f. Math. 49 (1854), S. 346 = Werke 2, S. 636; *Reye,* G. d. L. 2, S. 241; vgl. Staude, Encykl. III C 2, 44.

84. **Polarbeziehung der Direktrix.** Der Satz am Schluß von § 20, 9 von *De la Hire* nach Kötter, Ber. S. 54 und Dingeldey, Encykl., S. 54. Der Satz hängt aufs engste mit der *Identität der Direktrixeigenschaft* zusammen. Der Kegelschnitt gehört einem Büschel $K - \lambda U^2 = 0$ (Anm. 21) an, dessen Linienpaare das Kreisstrahlenpaar $K = 0$ (mit dem Scheitel F) und die Doppelgerade $U^2 = 0$ (die Direktrix) sind. In einem solchen sind alle Punkte P der Doppelgeraden Punkte gleicher Polare (§ 50, 3). In bezug auf das Kreisstrahlenpaar ist aber die Polare eines solchen Punktes P die in F zu PF errichtete Senkrechte. Diese ist daher auch in bezug auf den Kegelschnitt die Polare von P.

Entsprechend würde im Raume, wo die Tangente t_0 im Punkte P_0 eines Fokalkegelschnittes (§ 127, Fig. 190) die reziproke Polare der Direktrix p_0 des Punktes P_0 ist, die zur Verbindungsebene eines Punktes P der Direktrix mit der Tangente t_0 durch t_0 gelegte Normalebene die Polarebene von P sein, da t_0 Fokalachse ist (§ 122, 11).

85. **Polarsysteme mit besonderer Direktrix.** I. Die *imaginäre Ellipse* § 20, 10, der imag. *Kegel* § 84, 4, das imaginäre *Ellipsoid* § 82, 12 gewinnen durch das jedesmal entsprechende *reelle Polarsystem* ihre Vertretung, wie das imaginäre Punktepaar (Anm. 34) durch die zugehörige Involution; vgl. *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 157; *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 137; *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 341; *Reye,* G. d. L. 2 (1907), S. 91; 105.

II. Den anal. Ausdruck § 20, (27) der Polarreziprozität in bezug auf einen imag. Kreis vom Radius $\sqrt{-1}$ (*Dualität in gemeinen Koordinaten*) gibt *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 283; vgl. *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 24; in bezug auf eine imag. Kugel § 82, 13 *Salmon-Fiedler,* Raum, 3. Aufl. S. 134; 202. Der Ausdruck § 46, (24); § 149, (39) (*Dualität in Dreiecks- u. Tetraederkoord.*) nach *Hesse,* J. f. Math. 45 (1853) S. 88 = Werke S. 303.

86. **Besondere polarreziproke Figuren.** I. Der *Kegelschnitt als Reziproke des Kreises* in bezug auf einen Kreis bei *De l'Hospital,* Sect. Con. S. 275 und *Poncelet,* J. f. Math. 4 (1829), S. 48 nach Kötter, Ber. S. 171. Die analyt. Darstellung § 20, 12 von *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 59; 62; 125. Die *Rotationsflächen als Reziproke der Kugel* in bezug auf eine Kugel § 82, 14 bei *Poncelet* nach Kötter, S. 171; *Plücker,* System (1846), S. 319; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 213.

II. *Reziproke Ellipsoide* § 82, 15 benutzt *Chasles,* Corr. polyt. 3 (1816), S. 319.

87. **Polarentheorie der imaginären Kreispunkte und des imaginären Kugelkreises.** Die *Polarentheorie des imag. Kreispunktepaares* und des Kreisstrahlenpaares § 20, 22 bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 205; *Cayley,* Philos. Transact. 149 nach *Salmon-Fiedler,* Kegelschn. (4. Aufl. 1878), S. 574; *Baltzer,* Geom. S. 195.

Die des *imag. Kugelkreises* und des Kugelkegels § 84, 6 bei *v. Staudt,* G. d. L. S. 210; 215; Beitr. S. 126; 128; Halbm. S. 36; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 341; 365; 370; *Clebsch-Lindemann,* Raum, S. 183 f.; 252; *Reye* 2, S. 97; *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 429; s. Anm. 169, II.

88. **Das Hauptachsenproblem der Kurven und Flächen 2. O.** Das Hauptachsenproblem der Kurven und Flächen 2. O. hat eine *doppelte Auffassung* erfahren, je nachdem nur die *einzelne* Kurve oder Fläche oder *zwei* solche gleichzeitig ins Auge gefaßt wurden.

I. Der Typus der *1. Auffassung* ist die Definition § 21, 1 und § 88, 1 der Hauptachsen („*Beseitigung des Gliedes* mit $\xi\eta$ *in der Gleichung* § 21, (2) *und der Glieder mit* $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ *in* § 88, (2)"), welche ausgeht von *Euler,* Introd. 2, art. 125f. und append. art. 114; *Monge-Hachette,* J. éc. pol. cah. 11 (1802), S. 154; *Biot,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 187 (die Definition § 21, 6, II und § 88, 5, II nach *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 17; *Cauchy,* Exerc. 3 (1827), S. 67; 4 versagen in Ausnahmefällen, während die § 21, 1 und § 88, 1 alle Fälle § 21, 13 und § 90, 7 gleichmäßig umfassen).

II. Der Typus der *2. Auffassung* ist die Definition § 21, 2, II und § 88, 2, II („*gemeinsames Polzweieck des unendl. fern. Punktepaares der Kurve 2. O. und des imag. Kreispunktepaares, gemeins. Poldreieck des u. f. Kegelschnittes der Fläche 2. O. und des imag. Kugelkreises*"), welche von *Chasles,* Corr. polyt. 3 (1816), S. 330; *Poncelet,* Traité art. 624, vorbereitet, von *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 148; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 1 = Werke 3, S. 193; *Hesse,* Ebene S. 125; Raum S. 244 als Problem der gleichzeitigen Transformation zweier quadrat. Formen auf eine Summe von Quadraten erkannt und von *Weierstraß,* Berl. Ber. 1858, S. 216 auch für den Fall gleicher Wurzeln der Determinante $\Delta(\lambda)$ in § 21, (17); § 88, (17) erledigt wurde. Dabei ordnet sich das Hauptachsenproblem des Kegelschnittes unter die orthog. Transf. des Punktepaares § 40, 7 und das der Fläche 2. O. unter die des Kegelschnittes § 50, 2 unter.

III. Die *Ausführung* § 21, 6—7 und § 88, 2—7, die für beide Auffassungen I und II zusammenläuft, folgt im wesentl. *Cauchy,* Exerc. 3, S. 67 f.; 4 f.

IV. Das Hauptachsenproblem der *ebenen Schnitte* § 108, 3 ist von *Cauchy,* Appl. (1826), S. 266 in Angriff genommen, weiter entwickelt von *Hesse,* Raum S. 395; *Henrici,* J. f. Math. 64 (1865), S. 187.

89. **Quadratische und kubische Gleichungen der Hauptachsenprobleme der Kurven und Flächen 2. O. u. 2. Kl.** I. Die *quadrat. Gl. des Hauptachsenproblems der Kurve 2. O.* in der *trigonometr.* Form (Gl. f. die Hauptachsen*richtung*) § 21, (9) und § 8, (31) bei *Hachette-Poisson,* J. éc polyt., cah. 11 (1802), S. 171; *Cauchy,* Exerc. 3 (1827), S. 73; in der *algebr.* Form (Gl. f. d. Hauptachsen*koeffizienten*) § 21, (17) und § 29, (21) ebd. S. 68; die *Realität* der Wurzeln § 21, (20) und die Bedingungen ihres *Gleichwerdens* § 21, (22), ebd. S. 68. Die Gl. § 22, (23) für *schiefw.* Koord. in trigon. Form bei *Euler,* Introd. 2, art. 125; *Magnus,* Aufg. 1, S. 112; *Grunert,* Arch. Math. Phys. (1) 51 (1870), S. 279. Die quadr. Gl. des Hauptachsenproblems *der Kurve 2. Kl.* § 28, (16); § 29, (12) bei *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 272.

II. *Die kubische Gl. des Hauptachsenproblems der Fläche 2. O.* ursprünglich auch in *trigon.* Form (für die Hauptachsen*richtungen*) bei *Euler,* Mechanik starrer Körp. (1765) deutsch von *J. Ph. Wolfers* 3, S. 214; *Hachette-Poisson,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 170; *Binet,* Corr. polyt. 2 (1809), S. 19; 78; *Bourdon,* ebd. 2 (1811), S. 191; 250; in der *algebr.* Form (für die Hauptachsen*koeffizienten*) § 88, (17), aber *entwickelt,* zuerst bei *Hachette-Petit,* Corr. polyt. 2 (1812), S. 325; 327; *Cauchy,* Appl. 1 (1826), S. 240; in *Determinantenform* zuerst bei *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 142. Die *Realität* der Wurzeln in der Weise § 89, 3 von *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 6ff. in der Weise § 50, 7 von *Cauchy*, Exerc. 4 (1829), S. 145; *Jacobi*, Werke 3, S. 209; *Hesse,* Raum S. 250. Über zahlreiche andere Beweise s. Encyklopaedie III C 2, S. 175. Die Gleichung § 91, (19) für *schiefw.* Koord. bei *Binet,* J. éc. polyt, cah. 16 (1813), S. 50; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 51; *Plücker*, System (1846), S. 212; die Realität ihrer Wurzeln beweisen *Ch. Brisse*, Nouv. ann. (3) (1882), S. 193, 207; *Gundelfinger*, ebd. 13 (1884), S. 7. Die kub. Gl. des Hauptachsenproblems *der Fläche 2. Kl.* § 102, (12) bei *Hesse*, Raum, S. 342.

90. **Invarianten der Kurve und Fläche 2. O.** I. Die *Determinante* als Invariante einer quadrat. Form *bei jeder linearen Substitution* für $n = 2$ in § 39, (12) bei *Lagrange*, Mém. de Berlin 1773, S. 285 (nach *Baltzer*, Det. S. 51), für $n = 3$ in § 22, (16), § 31, (13) und § 41, (17) bei *Gauß* (1801), Werke 1, S. 302; für beliebiges n mit der *Methode* § 41, 6; § 138, 6 bei *Hesse*, J. f. Math. 28 (1844), S. 83 = Werke, S. 114; J. f. Math. 49 (1853), S. 243ff. = Werke, S. 329.

Der Name Invariante (Hessesche Determinante) von *Sylvester,* Philos. Mag. 2 (1851), S. 396 (nach *Baltzer* Det. S. 171); *Sylvester*, Cam. Dubl. math. J. 6 (1851), S. 290; *Fr. Meyer*, Encyklopädie d. math. W. 1, S. 322.

II. Die beiden letzten *dem gemeinen Koordinatensystem eigentümlichen Invarianten der Kurve 2. O.* § 22, (16) gibt *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 144; der Kurve 2. Kl. § 31, (13) in nicht ganz reiner Form *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 85. (Die Plückersche Formel (14) ist der Quotient $\frac{B}{\sin^4\omega} : \left(\frac{b_{33}}{\sin^2\omega}\right)^3$, die Plückersche Formel (15), in der es A^2 statt A^4 heißen muß, ist der Quotient des zweiten Ausdruckes § 31, (13) und des Quadrats des dritten).

III. Die Invarianten A_{44}, A'_{44}, A''_{44} der Fläche 2. O. im rechtw. System § 91, 4 bemerkt *Cauchy*, Appl. 1 (1826), S. 244; *Plücker* (1842) Abhandl. S. 390; die im schiefw. System § 91, (17) bei *Briot et Bouquet*, Géom. analyt. S. 612; die der Fläche 2. Kl. § 105, (17) bei *Hesse,* Raum S. 372; § 105, (23) bei *Binet*, J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 51.

IV. Die Invariante k des linearen Komplexes im rechtw. System § 86, 3; § 87, (10) bei *Plücker,* N. Geom. (1868), S. 37; 58.

91. **Doppelte Auffassung der Invarianten.** I. Die Erhaltung der Gleichung des imag. Kreispunktepaares § 31, (7) und des imag. Kugelkreises § 105, (12) *bei jeder Veränderung der rechtw. Koordinaten* nach *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 41.

II. Die Auffassung von der Invarianz des Kreispunktepaares und des Kugelkreises *bei der kontinuierlichen Gruppe der Euklidschen Bewegungen* ausgebildet von *Lie,* s. für das Kreisstrahlenpaar § 22, (27), *Lie-Scheffers,* Differentialgl. S. 9f.; für das Kreispunktepaar § 31, (7), *Lie-Scheffers*, Kontin. Gruppen, S. 110; für den Kugelkegel § 91, (22) und den Kugelkreis § 105, (12), *Lie-Scheffers*, Kontin.

Grupp. S. 549; ferner *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 529. Bei der Rotation in der Ebene sind alle um den Drehungspunkt beschriebenen Kreise (zu denen auch das Kreisstrahlenpaar § 22, (27) gehört); bei der Rotation um eine Achse im Raume § 53, (6) alle um diese beschriebenen Rotationsflächen, bei der Rotation um einen Punkt im Raum § 91, (22) alle Kugelflächen invariant; bei der Schraubenbewegung § 57, (8); (10) alle Schraubenlinien nach *Lie-Scheffers*, Differentialgl. S. 237.

92. **Unterscheidung und Koordinaten der Mittelpunkte.** I. Die Unterscheidung der *Anzahl der Mittelpunkte* der *Kurven 2. O.* § 23, 3 bei *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 79, der *Flächen 2. O.* § 94, 3 bei *Cauchy*, ebd. S. 99, genauer bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 207; der *ebenen Schnittkurven* der Flächen 2. O. § 111, 1 bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 266.

II. Die Unterscheidung eines *endlichen* und *unendl. fernen* Mittelpunktes § 23, 4 bei *Euler*, Introd. 2 (1748), art. 150 und § 94, 4 bei *Euler*, Introd. 2, Append. art. 115; 123; *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 153.

III. Die *Koordinaten* des Mittelpunktes der *Kurve 2. O.* § 23, (12) bei *Euler*, Introd. 2, art. 107; der Fläche 2. O. § 94, (16) bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 238; Exerc. 3 (1828), S. 91; der *ebenen Schnittkurve* der Fläche 2. O. § 111, (11) bei *Cauchy*, Applic. S. 265, wo sich die Bed. § 111, (14) (mit $-P=0$ bez.) findet; ihre Bedeutung § 111, (19) bei *Salmon-Fiedler*, Raum S. 373.

IV. Die *Determinantenbeziehungen* § 23, (20); (25); (28) bei der *Kurve 2. O.*; § 94, (29); (35); (43) bei der *Fläche 2. O.*; § 111, (17); (29); (35) bei der *Schnittkurve* begründen jedesmal das *Ineinandergreifen* der Bedingungen des Mittelpunktes und des Ranges, wonach z. B. eine Fläche mit ∞^1 Mittelp. keine eigentliche sein kann.

V. Die Tabellen § 23, 8; § 94, 10; § 111, 12 zeigen die Analogie der Bedingungen der verschiedenen Mittelpunktsverhältnisse in den drei Fällen und motivieren gleichzeitig die Bezeichnung der geränderten Determinanten mit dem oberen Index u.

93. **Die Mittelpunktsgleichung und ihr konstantes Glied.** I. *Begriff und Form der Mittelpunktsgleichung* für die *Kurve 2. O.* § 24, (4) bei *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 79; *für die Fläche 2. O.* § 95, (3) bei *Cauchy*, Applic. (1826), S. 239; *Hesse*, Raum, S. 158.

II. *Die Bestimmung des konstanten Gliedes* für die Kurve 2. O. § 24, (8) bei *Cauchy*, Exerc. 3, S. 74 (mit $K-k$ bezeichnet), für die Fläche 2. O. § 95, (7) bei *Cauchy*, ebd. S. 91; die Determinantenformen § 24, (8); § 95, (7) nach *Magnus*, Aufg. 2, S. 209 bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 159; Raum S. 166; *Salmon-Fiedler*, Raum 1, S. 107. Die Unabhängigkeit von der Wahl eines Mittelpunktes im Falle von unendl. vielen solchen bemerkt *Cauchy*, ebd. S. 99. Die Formeln § 24, (8); (10); § 95, (7); (11); (13); § 112, (7); (11) enthalten die vollständige Reihe dieser Bestimmungen.

94. **Scheitelpunkt der Parabel und des Paraboloides.** I. Die Koord. des *Scheitels der Parabel* bei *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 173, und des *Paraboloides* bei *Plücker*, System (1846), S. 147; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 178. Für die davon abweichenden Formeln § 25, (26) und § 97, (29) war die Absicht maßgebend, *im Nenner die Invarianten A und A'_{33}, bezgl. A'_{44} direkt einzuführen*, wie in § 25, (27) und § 97, (30), weil auf diese allein sich die *Voraussetzung*

§ 25, (3) und § 97, (7) bezieht. Aus demselben Grunde ist den Koordinaten des Scheitels der *parabol. Schnittkurve* die Form § 113, (22) gegeben. Die *Scheitelachse* des parabol. Zylinders § 98, 6; 7 bestimmt *Plücker,* System (1846), S. 150. Die entsprechenden Formeln für die Kurve und Fläche 2. Kl. § 29, (11); § 103, (10) ebenfalls nach *Plücker*, System (1846), S. 193.

II. Die Übereinstimmung der Bedingungen des unendl. fern. Mittelp. einerseits und des Verschwindens einer Wurzel λ_1 § 97, 2 bemerkt *Cauchy*, Exerc. 3, S. 103; *Hesse,* Raum S. 251.

95. **Klassifikation der Kurven und Flächen 2. O.** I. Die Klassifikation der Kurven und Flächen 2. O. *mittels der Transformation des gemeinen Koordinatensystems* ist, nach unvollst. Anfängen bei *Fermat* (s. Anm. 40), von *Euler,* Introd. 2 (1748), art. 131 ff und append. art. 101 ff. u. *Monge-Hachette*, J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 153 begonnen. Als Bedingungen z. B. für Zeile 1 der Tabelle § 99, (31) gibt *Euler,* a. a. O. app. art. 108—10: $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > 0$, $\alpha_{33} > 0$, $a_{11} A_{44} > 0$, in seiner Bezeichnung: $4\delta\zeta > \varepsilon^2$, $4\alpha\delta > \beta^2$; $4\alpha\zeta > \gamma^2$; $\alpha\varepsilon^2 + \delta\gamma^2 + \zeta\beta^2 < \beta\gamma\varepsilon + 4\alpha\delta\zeta$, $\alpha > 0$. Alle Einzelfälle suchen die Klassifikationen von *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 69 ff.; 85 ff.; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 104; 2 (1837), S. 221 zu umfassen.

II. Aber erst nach Einführung der *homogenen Koordinaten* durch *Plücker,* System (1835), S. 87; System (1846), S. 73, der *topographischen Bezeichnung* der Koeffizienten (s. Anm. 40) und der *Determinanten* (s. Anm. 41) konnte die *elementare* Klassifikation ihre *volle Ausbildung* erhalten. Diese liegt nun einerseits in der Herstellung der *kanonischen Gleichungen* (Tabelle § 26, (2); § 99, (2)), in denen die neuen Koeffizienten Invarianten des rechtwinkligen Systems sind (§ 22, 4; 5; § 91, 4) und mit denen die Halbachsenquadrate, Parameter usw. der betr. Kurven und Flächen durch die ursprüngl. Koeff. a_{kl} in § 26, (1); § 99, (1) dargestellt sind; andererseits in der Herstellung der *Bedingungen für jede einzelne Art*, Tabelle § 26, (19); § 99, (31).

III. Sind dabei für die Ausgangsgleichungen § 26, (1); § 99, (1) zunächst *rechtw.* Koord. zu Grunde gelegt, so kann man die kanon. Gleichungen durch Einführung der Ausdrücke § 26, (22); § 22, (23) in die Tabelle § 26, (2) auch in *schiefw.* Koord. übertragen, und entsprechend § 99, (2). Für die Klassifik. aber *gilt die Tabelle* § 51, (38) *und* die nach § 155, 21; § 156, 18 veränderte § 153, (21) *sowohl bei rechtw.* als bei *schiefw. Koord.* in der Ausgangsgleichung. Aber auch die Tabelle § 26, (19), die sich von § 51, (38) nur in den beiden ersten Kolonnenüberschr unterscheidet, gilt mit Rücksicht auf § 26, (21); (22) auch für *schiefw.* Koord., da $a_{11} + a_{22}$ und $a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega$ für $A_{33} > 0$ gleiches Vorzeichen haben nach *Grunert*, Arch. Math. Phys. (1) 51 (1870), S. 283. Es gilt nämlich, wie § 23, (25), die Identität:

$$(a_{11} + a_{22})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\omega) = \{(a_{11} - a_{12})^2 + (a_{21} - a_{22})^2\}\cos^2\frac{\omega}{2}$$
$$+ \{(a_{11} + a_{12})^2 + (a_{21} + a_{22})^2\}\sin^2\frac{\omega}{2} + 2A_{33}.$$

IV. Die Behandlung der Klassifikation in *Dreiecks- und Tetraederkoordinaten* § 49, (22) und § 153, (21), wo man die Gleichung § 49, (19) oder § 141, (2) speziell als Gleichung der unendl. fern. Geraden oder Ebene ansehen kann, bringt schließlich die allgemeinen Gesichtspunkte zur Geltung: 1. Die Klassif.

der Kegelschnitte und Flächen 2. O. ist ein Spezialfall der *Klassifikation der Schnittpunktpaare des Kegelschnittes mit einer Geraden*, bezügl. der *ebenen Schnitte der Fläche 2. O*; 2. die Einteilung geschieht nach *zwei Einteilungsgründen*, die Spezies der Kurve oder Fläche selbst (Kolonnen der Tabellen § 51, (38) und § 153, (21)) und der Spezies des unendl. fernen Schnittpunktpaares oder Schnittkegelschnittes (Zeilen der Tabellen); 3. Beide Einteilungsgründe sind *teilweise voneinander abhängig*, so daß nicht jede Kombination möglich ist (freie Felder der Tabellen). Von der zahlreichen Literatur sei nur hervorgehoben: *Hesse*, Raum S. 253; *Gundelfinger*, daselbst S. 465 und J. f. Math. 127, (1904), S. 85; *Lindemann*, Raum S. 161; *K. Hensel*, J. f. Math. 113 (1894), S. 303; *E. Timerding*, J. f. Math. 122 (1900), S. 172; *C. Koehler*, Arch. Math. Phys. (3) 3 (1902), S. 21, 94; *L. Heffter*, J. f. Math. 126 (1903), S. 83.

96. **Die Klassifikation der Kurven und Flächen 2. Klasse.** I. Die *elementare Methode*, nach der die Klassif. der Kurven und Flächen *2. Klasse* in den §§ 27—30 und §§ 101—104 durchgeführt wird, folgt im wesentl. *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 48 ff. und System (1846), S. 191 ff.; ferner *Hesse*, Sieb. Vorl., S. 24; 40 und Vorles. Raum, S. 173.

Dabei gilt es besonders, die *gegenseitige Abhängigkeit* der den *verschiedenen Einteilungsgründen* (Rang § 27, 1; § 101, 1; unendl. ferne Gerade u. Ebene § 27, 2; § 101, 2; Mittelpunkt § 27, 4; § 101, 5; Hauptachsenproblem § 28, (25); § 102, (22)) entsprechenden *Bedingungen* mittels Determinantensätzen herzustellen.

II. Die *Koordinaten des Mittelpunktes* § 27, (12) bei *Hesse*, Sieb. Vorles., S. 23; § 101, (13) bei *Plücker*, System (1846), S. 192; *Hesse*, Raum, S. 161.

III. Die *Kriterien der Ellipse, Hyperbel, Parabel* § 104, 5 bei *Plücker*, ebd. S. 195; *Clebsch-Lindemann*, Raum S. 204.

97. **Brennpunktsgleichungen in Linien- und Ebenenkoordinaten.** Die charakteristische Gleichung des Kegelschnittes § 31, (28) ist von *Plücker*, Entw. 2 (1831), S. 167 ff. gegeben, die speziellen Formeln § 31, (32) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 45 f. Die entsprechende Gl. der Rotationsfläche 2. O. § 105, (31) von *Plücker*, System (1846), S. 243; 247; *Hesse*, Raum S. 344.

98. **Begriff und Name konfokal.** I. *Zwei konfokale Parabeln* § 34, 1 treten bei *Tschirnhaus* (1695) auf nach Cantor 3, S. 155; *zwei konfokale Ellipsen* § 32, 1 und *Ellipsoide* § 55, 10 bei *Maclaurin* (1742) nach Chasles, Aperçu IV § 23 und Cantor 3, S. 748. Konfokale Ellipsoide ferner bei *P. S. Laplace*, Méc. cél. (1782), Ostwalds Klassiker Nr. 19, S. 21; *J. Ivory*, London philos. Transact. (1809), S. 351; *C. F. Gauss* (1813) Werke 5, S. 19. Jedoch handelt es sich bei diesen auf das Problem der Anziehung der Ellipsoide bezüglichen Untersuchungen nur um *gleichartige* konfok. Flächen.

II. Mit dem *Namen* „konfokal" bezeichnet *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 204 zwei Kegelschnitte und, Aufg. 2 (1837), S. 353, zwei Rotationsflächen, die *einen* Brennpunkt gemein haben, während *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 137 = Werke 7, S. 7 „konfokale" Flächen 2. O. solche nennt, deren Hauptschnitte dieselben Brennpunkte haben. *Lamé*, Ann. chim. phys. 53 (1833), S. 199 und J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 nennt solche Flächen „surfaces homofocales".

99. **Gestaltliche Verhältnisse des konfokalen Systems.** I. Die Gestalt des *vollen* konfokalen Systems, die Unterscheidung und Veränderlichkeit der ungleichartigen Flächen § 120, 3; 4 und § 123, 2; 3; die dreifache Erfüllung des

Raumes durch sie § 120, 5; 6 und § 123, 4; 5 beschreibt erschöpfend *Dupin,* Dével. (1813), S. 269 und S. 281, und schließt damit auch die entsprechende Betrachtung für die Ebene § 32, 3—6; § 34, 2—5 ein.

II. Den *rechtwinkl. Durchschnitt* ungleichartiger konfokaler *Kegelschnitte* § 32, 7 bemerkt *Dupin,* Dév., S. 269 und zugeh. Fig. 12; *Gergonne,* Ann. de math. (1822/3), S. 316; *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 211; für konf. *Kegel* § 118, 7 *Chasles,* Cônes (1830), S. 28; für *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Paraboloide* § 120, 7 und § 123, 6 *Dupin,* Dév. S. 268; 302; 316; *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 59; J. de math. 2 (1837), S. 248.

III. Die Gleichungen § 120, (1); § 123, (1) im wesentl. auch bei *Dupin,* Dév. S. 309; 318; vgl. *Jacobi,* Vorl. Dynamik (1866), S. 207; 212 *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 50; 52; Raum, S. 288; 305.

100. **Das konfokale System als Schar.** I. Die *vier gemeins. imag. Tangenten* § 32, 9 finden sich angedeutet bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 453 und bestimmt ausgesprochen bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47). Die *Gleichung* der konf. Schar in *Linienkoordinaten* § 32, (12); (13) und die Punktepaare der Schar § 32, (24) bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 172; 180; System (1846), S. 279; auch *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 42; 46; 48.

II. Die *gemeins. Developpable* zweier Flächen überhaupt tritt bei *Monge* auf nach Cantor 4, S. 537. Die abwickelbare Linienfläche der Schar der Konfokalen § 120, 10; § 123, 9 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47); die *Gleichung* in *Ebenenkoordinaten* § 120, (18) gibt *Plücker,* System (1846), S. 255; 331; vgl. Abhandl. S. 228; vgl. *v. Staudt,* Beitr. S. 383; *Hesse,* Raum S. 337.

101. **Polarentheorie im konfokalen System.** Die Polarensätze § 32, 12; § 34, 11 bei *Plücker,* Entw. 2 (1831), S. 197; System (1846), S. 279; Abhandl. S. 195; für die Schar im allg. bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 42. Die entsprechenden Sätze im Raume § 120, 11 und § 123, 10 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (50); (51); *Plücker,* System (1846), S. 331; vgl. Kötter, Ber. S. 171; 400; 402.

102. **Hauptachsen der Tangentenpaare und Berührungskegel.** I. Der Satz über die Hauptachsen des *Tangentenpaares* der *Ellipse, Hyperbel und Parabel* § 32, 13, III; § 34, 11 bei *Poncelet,* Traité (1822), art. 478; *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (10); *Plücker,* System (1846), S. 280; die Herleitung der *Hauptachsengleichung* § 33, (19) nach *Hesse,* Raum, S. 291.

II. Die entsprechenden Sätze für den *Kegel* § 119, 7 gibt *Chasles,* Recherches (1829), S. 41; Cônes, S. 19; die für die *Ellipsoide, Hyperboloide* und *Paraboloide* § 121, 7; § 122, 1; § 124, 7 sind von *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 137; später von *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (10); (11); (32) angegeben. Die wirkliche Herstellung der *Hauptachsengleichungen* § 121, (18); (24); (36); § 124, (18); (24) gibt *Mac Cullagh* (1843), Coll. Works, S. 311; daß die Erzeugenden gleiche Winkel mit den Krümmungslinien bilden, bemerkt schon *Dupin,* Dével. (1813), S. 52; vgl. *Cayley,* Cam. Dubl. math. J. 3 (1848), S. 48; *A. Wangerin,* Zeitschr. Math. Phys. 34 (1889), S. 126.

III. Die Einführung der Tangenten der zwei durch den Punkt $P = \lambda, \mu$ gehenden Kurven der konfok. Schar als *Koordinatenachsen* ξ, η in § 33, (13) setzt voraus, daß diese *zwei Tangenten getrennt* sind. Dies ist nach § 33, (12) der Fall, wenn $\lambda \neq \mu$. Dagegen ist es für die Punkte der vier gemeins. imag. Tangenten § 32, (23) im allg. nicht der Fall, weil durch solchen Punkt nur *eine*

Kurve $\lambda = \mu$ der Schar geht und nur *eine Tangente* zur Verfügung steht, im besonderen aber doch wieder der Fall für die Werte $\lambda = \mu = \beta$ oder $\lambda = \mu = \alpha$, weil dann die Kurve $\lambda = \mu$ in ein Punktepaar § 32, (24) zerfällt und in jedem Punkte des Paares ein ganzes *Büschel von Tangenten* zur Verfügung steht. Die Gleichung § 33, (19) kann daher auf alle Punkte $\lambda \neq \mu$ und wie in § 33, (23) auf die Punkte $\lambda = \mu = \beta$ oder α angewendet werden, jedoch nicht auf andre Punkte $\lambda = \mu$ (§ 13, (26)). Aus entsprechendem Grunde ist die Gleichung § 121, (18) auf alle Punkte mit *drei verschiedenen* ellipt. Koord. λ, μ, ν und alle Punkte, wo *zwei* ellipt. Koord. den *gemeins. Wert* γ, β *oder* α haben, § 122, 8, anwendbar, *nicht aber* auf *andere* Punkte mit *zwei* oder solche mit *drei gleichen* elliptischen Koord. (§ 70, (19)).

103. **Elliptische Koordinaten.** I. Die *ellipt. Koord.* in der *Ebene* § 33, 1 schuf *Euler* zur Behandlung des Problems der Anziehung eines Punktes nach zwei festen Zentren, nach Jacobi, Werke 2, S. 61, Vorl. Dynamik (1866), S. 221; sodann erscheinen sie, auf ellipt. u. hyperb. Zylinder angewendet, bei *Lamé*, J. de math. (1) 2 (1837), S. 173. Die ellipt. Koord. im *Raume* § 121, 1 schuf *Lamé*, J. éc. polyt., cah. 23 (1834), S. 235; Par. Mém. sav. étrang. 5 (1838), S. 174; J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 (wo zuerst der *Name* „coordinées elliptiques" auftritt); 4 (1839), S. 134; 8 (1843), S. 430; die *parabolischen* § 124, 1 ebenfalls *Lamé*, J. de math. (1) 8 (1843), S. 434 und (Nachlaß) J. de math. (2) 19 (1874), S. 311. Ellipt. Koord. für n Dimensionen bei *Jacobi*, Vorl. Dynamik (1866), S. 198.

II. Die Darst. der *gem. Koord.* durch die *ellipt.* § 120, (13) und *parabol.* § 123, (13) bei *Lamé*, J. de math. (1) 2 (1837), S. 156 und J. de math. (1) 8 (1843), S. 434. Die Realität der Wurzeln der *kubischen Gleichung* § 120, (10) und die Bestimmung ihrer Grenzen § 120, (11) gibt (für beliebiges n) *Jacobi*, Vorl. Dynam. S. 199. Die kub. Gl. ist die *Resolvente* der *biquadrat.* Gl. der gebrochenen Fokaldistanzen § 134, 6 nach *Staude*, Leipz. Ber. 1897, S. 75.

III. Die *Identitäten* § 33, 3; § 121, 3 für beliebiges n bei *Jacobi*, Vorl. Dyn. S. 201; vgl. *Hesse*, Vorl. Raum S. 288.

104. **Ivorys Theorem.** Das *Ivorysche Theorem* umfaßt *drei* Gesichtspunkte: 1. die *affine Verwandtschaft* § 129, (5) zwischen zwei konfokalen Ellipsoiden (bezüglich § 36, (5) Ellipsen) und den Begriff der hierbei sich *entsprechenden* (korrespondierenden) *Punkte*, die *J. Ivory*, Lond. Phil. Trans. 1809 I, S. 355 (Ostwalds Klass. Nr. 19, S. 32) einführt; 2. den *Entfernungssatz* § 129, (9) (§ 36, (9)), der bei *Ivory*, ebd. S. 353 (S. 31) in der Formel

$$\Delta^2 = (h \cos m - k \cos \varphi)^2 + \cdots = (k \cos m - h \cos \varphi)^2 + \cdots$$

versteckt liegt und von *M. Chasles*, J. de math. (1) 5 (1840), S. 485 (Ostw. Klass. Nr. 19, S. 93) klar ausgesprochen und in der hier § 129, 2 (§ 36, 2) vorliegenden Weise abgeleitet wird; 3. Die Gewinnung entsprechender Punkte als solcher mit *zwei*, § 129, 7; 8 (oder *einer*, § 36, 5) *gleichen ellipt. Koord.*, die bei *Ivory*, ebd. S. 352 (S. 30) in der Parameterdarst. $a = h \cos m$, usw. im Keime enthalten, aber nicht ausgesprochen ist. Für die Ebene ist das Ivorysche Theorem aus *Jacobis* Nachlaß von *O. Hermes*, J. f. Math. 73 (1871), S. 180 = Werke 7, S. 43, entwickelt; vgl. *G. Darboux*, Sur les théorèmes d'Ivory, Paris (1872), S. 25.

105. **Die Jacobischen Fokaleigenschaften.** Die Sätze § 36, 6, II und § 129, 9, II bezeichnet *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 139 = Werke 7, S. 8 ohne

nähere Ausführung als Folgen des Ivoryschen Theorems. Die Ableitung § 36, 6 findet sich in *Jacobis* Nachlaß (*O. Hermes*), J. f. Math. 73 (1871), S. 182 = Werke 7, S. 44 und die Ableitung § 129, 9 bei *O. Hermes,* J. f. Math. 73, S. 211. Einen Zusatz über die Bestimmung der Flächennormale gibt *F. Joachimstal,* J. f. Math. 73, S. 207; die Entwicklungen § 36, 7 und § 129, 10 und weitere bei *Darboux,* Sur les théorèmes d'Ivory, Mem. Soc. Bordeaux 8 (1872), S. 197 ff.; vgl. auch *Townsend*, Cam. Dubl. math. J. 3 (1848), S. 150, *Schröter,* Oberfl. S. 639; *J. Larmor,* Proc. Lond. math. Soc. 16 (1885), S. 189 ff.

106. **Pascalscher und Brianchonscher Satz.** Der Satz § 37, 4 (links) von *Bl. Pascal,* Essai pour les coniques (1640), lemme 1, vgl. Chasles, Aperçu Note XIII; Cantor 2, S. 679 ff.; 3, S. 802; Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 186. Der Satz § 37, 4 (rechts) von *C. J. Brianchon,* J. éc. polyt. cah. 13 (1806), S. 301; Lignes du sec. ordre (1817), S. 34. *Analyt.* Beweise gaben *Bobillier,* Ann. de math. 18 (1828), S. 366; *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 184; System (1835), S. 119; *Magnus*, Aufg. 1 (1833), S. 152, an die sich das § 37, 5 angegebene Verfahren von *Hesse,* Ebene, S. 163 anlehnt.

Die 60 Sechsecke aus 6 Punkten § 52, 10 bemerkt *Bobillier*, a. a. O. und *Plücker*, Entw. 1, S. 185; Abhandl. S. 164. Die Punkte § 52, 11 bei *Steiner* (1828) Werke 1, S. 224 ohne Beweis; diesen gibt *Plücker* (1829) Abhandl. S. 166.

Ausführl. Geschichte des Pascalschen Satzes bei *Möbius*, Werke 1, S. 634; *Kötter,* Ber. S. 14 ff.; *Dingeldey,* Encykl. S. 32 f.

107. **Konstruktion des Kegelschnittes aus fünf Punkten.** I. Die Anwend. des Pascalschen Sechsecks § 37, 7 bereits *Pascal* selbst bekannt nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187; später bei *Poncelet,* Traité (1822) art. 203. II. Die Konstr. durch projekt. Büschel § 38, 4 von *Steiner,* Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 338.

108. **Grenzfälle des Pascalschen Satzes.** I. Über das einbeschriebene *Fünfeck* § 37, 8 vgl. *Reye,* G. d. L. 1, S. 82. II. Die Sätze über das *Viereck* und Vierseit § 37, 9 nach Kötter, Ber. S. 33; 50 und Dingeldey, Encykl. S. 20 von *R. Simson* (1735); nach Cantor 3, S. 802 auch bei *C. Maclaurin* (1748); vgl. *Plücker,* System (1835), S. 117. III. Der Satz über das *Dreieck* § 37, 10 nach Dingeldey, Encykl. S. 36, von *Carnot* (1803) und *Bobillier,* Ann. de math. 18 (1828), S. 321 ff., vgl. *Plücker,* Entw. 1 (1828), S. 185; s. Anm. 125; der Satz über das Dreiseit § 37, 10 nach Dingeldey, Encykl. S. 36, von *J. Ceva* (1678); auch bei *Maclaurin* nach Kötter, Ber. S. 50.

109. **Projektive Erzeugung der Kurven und Flächen 2. O.** I. Umschriebene Spezialfälle der Erzeugung der *Kegelschn.* durch proj. Strahlbüschel und Punktreihen finden sich bei *Apollonius,* III, art. 53—56, bezügl. 41—43 (Heib. 1, S. 439; 413) nach Zeuthen, Kegelschn. S. 123; 344; bei *Pascal* nach Zeuthen, Gesch. XVI; XVII, S. 187 und *Cavalerius* (1647) nach Kötter, Ber. S. 9; ferner bei *Newton* (1706) als descriptio organica nach Cantor 3, S. 424; bei *De l'Hospital* (1720) nach Cantor 3, S. 427; bei *Maclaurin* (1720) nach Cantor 3, S. 427 und *Braikenridge* (1733) nach Cantor 3, S. 788. Die allgemeine Begründung gibt *Steiner,* Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 329 ff.; s. *Schoenflies* in der Encyklopädie III AB 5, S. 416. Die analyt. Darst. § 38, 2 bei *Hesse,* Zeitschr. Math. Phys. 11 (1866), S. 383; 397; *Clebsch-Lindemann,* Ebene, S. 79.

II. Die Erzeugung der *Linienflächen* durch proj. Ebenenbüschel und Punktreihen § 159, 5 in Spezialfällen bei *Hachette*, Corr. polyt. 1 (1806), S. 179; *Binet*, ebd. 2 (1810), S. 71; *Poncelet*, J. f. Math. 4 (1829), S. 49; *Meier-Hirsch*, Aufg. 2 (1807), S. 238; *Giorgini*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 440; *Chasles*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 446. Systematisch bei *Steiner* (1832), Werke 1, S. 370.

110. **Spezielle projektive Gebilde.** Die Erzeugung der Parabel durch *ähnliche* Punktreihen § 38, 6 bei *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 334; Die Erz. des Kreises und der gleichseit. Hyperbel § 38, 7 durch *kongruente* Büschel bei *Steiner*, ebd. Werke 1, S. 330; 336; *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 128; s. Anm. 165, IV.

111. **Dreiteilung des Winkels.** Die *Dreiteilung* wurde mittels einer *gleichseitigen Hyperbel* ausgeführt von *Alsidschzi* (972) nach Cantor 1, S. 750. Für die Geschichte der Dreiteilung vgl. *J. E. Montucla*, Histoire des recherches sur la quadrature du cercle etc., Paris 1754; nouv. éd. par *S. L. Lacroix*, Paris 1831; *M. Backer*, A collection of solutions of the trisectionproblem, Bull. phil. soc. Washington 10 (1887), S. 96—100; *O. Hölder*, in der Encyklopädie d. math. W. I, 1, S. 501. Die hier § 38, 10 geg. Darst. im wesentl. bei *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 279; *Chasles*, Sect. con. Nr. 37; *Cremona*, Elem. der proj. Geom., deutsch v. Trautwetter (1882), S. 302; *F. Amodeo*, Lez. Geom. proiettiva, Napoli 1905, S. 440.

112. **Pascalsches Sechseck und proj. Erzeugung.** Die Beziehung § 38, 11 von *Steiner*, Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 299 und Fig. 32; *Schröter*, Kegelschn. S. 99f; 127.

113. **Die allgemeine lineare Transformation der einzelnen quadrat. Form.** I. Der *Name* „Form" § 39, 1; § 41, 1 von *Gauß* (1801), Werke 1, S. 120.

II. Die *Identitäten* § 39, (4); § 41, (4); § 138, (4) von *Euler*, Mechanica (1736) 2, § 106; § 497; Calcul. diff. § 225 nach Baltzer, Det. S. 149.

III. Die *allg. Transformationsformeln* für zwei Veränderliche § 39, (10) bei *Gauß*, Werke 1, S. 124; die umgekehrten Formeln § 41, (25) (in Verbindung mit der orthog. Transf.) bei *Gauß* (1818), Werke 3, S. 339; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 48f.; für n Veränderl. ebenso bei *Hesse* (1840), Werke S. 24; 26.

IV. Die *Aufgabe der Transf.* besteht in erster Linie darin, die *neuen* Koeffizienten und die aus ihnen gebildeten *Determinanten* und *Unterdet.* durch die *alten* § 39, (10); § 41, (20); § 138, (23), sowie umgekehrt die *alten* Koeff. und die aus ihnen geb. Det. u. Unterdet. sämtlich durch die *neuen* darzustellen § 39, (15); § 41, (25); § 138, (32). Dieselbe doppelte Aufgabe ist sodann auch für die *einfach geänderte* Det. § 43, (10); (23); § 140, (14); (26); (40) und die *zweifach ger.* Det. § 43, (15); § 140, (14); (45) vollst. erledigt. Hierbei ist Gewicht darauf gelegt, überall nicht nur die für die *Gleichung* $f = 0$ in Betracht kommenden *Verhältnisse* der Koeff. u. Variabeln, sondern die für die *Form* f erforderlichen *Größen selbst* zu berücksichtigen. Diesem Zweck dient die genaue Beibehaltung der Faktoren S, S^2 in § 41, (24); § 43, (16); § 138, (28); (29); (31); § 140, (32); (39) und σ in § 138, (26); (27); § 140, (18); (18').

114. **Transformation einer einzelnen quadrat. Form auf Quadrate.** — I. Die *Quadratdarstellung der quadrat. Form überhaupt* für $n = 2$ in § 40, (4) und für $n = 3$ in § 46, (14) bei *Lagrange*, Misc. Taur. 1 (1759), S. 18; Mécanique anal. (1788) 1, III nach Baltzer, Det. S. 160; dann bei *Gauß* (1801), Werke 1, S. 306; (1818), Werke 3, S. 339; *Jacobi* (1827), Werke 3, S. 48; für beliebiges n

§ 149, (21) bei *Hesse* (1840), Werke S. 24. Die Mannigfaltigkeit dieser Transf. faßt durch Einführung willkürlicher Parameter zusammen *Darboux,* J. de math. (2) 19 (1874), S. 347; *S. Gundelfinger,* J. f. Math. 91 (1881), S. 221, und in *Hesse,* Raum S. 449; vgl. *Fr. Meyer,* Encyklopädie I B 2, 3, S. 327.

II. Der geom. Gesichtspunkt, daß es sich bei jeder solchen Transf. um die Einführung eines *Polarzweiecks, -dreiecks oder -tetraeders* handelt § 40, 1; § 46, 6; 9; § 149, 6; 7; 10, erscheint bei *Plücker,* System (1835), S. 100; 107; System (1846), S. 88 mit dem Gebrauch der *allg. homog.* Koordinaten.

III. Da es unendl. viele Transf. einer quadr. Form auf Quadrate gibt, so tritt die einer tunlichst weitgehenden Erhaltung der alten Koord. entsprechende „*Stufentransformation*" § 40, (15); § 47, (13); § 150, (17) in den Vordergrund, die für beliebiges *n* von *Jacobi* (Nachlaß) Werke 3, S. 590; *Plücker,* J. f. Math. 24 (1842), S. 287 = Abhandl. S. 399 behandelt ist. Sie führt auch zu den Quadratdarstellungen § 47, (32); § 150, (62); (46) der Schnittpunktpaare und Schnittkurven.

115. **Begriff und Erhaltung der Spezies.** I. Die *Spezies* einer quadr. Form, bzgl. Kurve oder Fläche 2. O., mit reellen Koeff. bezeichnet die *Anzahl gleicher Vorzeichen* in der Quadratdarstellung § 40, 4; § 49, 2; § 152, 4, s. Baltzer, Leipz. Ber. 1873, S. 530; Determ. (1875), S. 162.

II. Ihre Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems, auf das sich die Quadratdarst. bezieht, heißt das *Trägheitsgesetz der quadr. Formen.* Es ist bei *Plücker,* System (1835), S. 101 und System (1846), S. 75; 89 bereits vorgebildet und allgemein von *Sylvester,* Phil. Mag. (4) 4 (1852), S. 140, Lond. Phil. Trans. 143 (1853), S. 481 aufgestellt, findet sich auch bei *Jacobi* (Nachlaß v. 1847) Werke 3, S. 593; vgl. *Ch. Hermite,* J. f. Math. 53 (1857), S. 271; *Borchardt,* ebd. S. 281; *F. Brioschi,* Nouv. Ann. 15 (1856), S. 264; s. *Fr. Meyer* in der Encyklopädie I B 2, 2, S. 328.

III. Die Bedingungen der Spezies knüpfen sich für die Kurve und Fläche 2. O., ebenso wie die des Ranges (s. Anm. 76, V; VI), entweder an die *einzelnen* Hauptunterdeterminanten („aufgelöste Form"), § 49, (18); § 152, (36), oder an die Summen der Hauptunterdet. („geschlossene Form") § 50, (38); § 155, (41) an. Ebenso erscheinen sie für die *Schnitte* der Kurve 2. O. mit einer Geraden und der Fläche 2. O. mit einer Ebene oder Geraden in *geränderten* Determinanten entweder in der aufgelösten Form § 49, (20); § 153, 5; 6; § 154, 2 oder in der geschlossenen Form § 51, (35); § 156, (38); § 157, (21).

116. **Quadratdarstellung durch orthogonale Substitution.** I. Der *Begriff* der orthogonalen Substitution § 40, 7; § 50, 1; § 155, 1 entwickelt sich bei *Euler,* Nov. Comm. Petrop. 15 (1770), S. 75; 20 (1775), S. 217; vgl. *Jacobi,* Werke 3, S. 601; *Baltzer,* Det. S. 172; vgl. *Cayley,* J. f. Math. 32 (1846), S. 119.

II. Die *orthog.* Transf. *einer* quadr. Form § 40, 7; § 50, 2; § 155, 2 wird als Spezialfall der *gleichzeitigen* Transf. *zweier* quadrat. Formen *f* und *g* erkannt und ausgebildet von *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 140; *Jacobi,* J. f. Math. 12, S. 7 = Werke 3, S. 199; *Hesse,* Ebene, S. 123; Raum, S. 259. Der Spezialfall ist dadurch ausgezeichnet, daß die *eine* Form *g* § 40, (19); § 50, (3); § 155, (3) *definit* ist, *Weierstrass,* Berl. Ber. 1858, S. 213; *Kronecker,* Berl. Ber. 1868, S. 339.

III. Der *geom.* Gesichtspunkt, der in § 40, § 50, § 155 in den Vordergrund gestellt ist, daß es sich nämlich um ein *gemeinsames Polzweieck, -dreieck* oder *-tetraeder* handelt, wird von *Plücker,* System (1835), S. 121 erkannt.

117. **Die kovarianten Funktionen.** Die Funktion F in § 41, (21) führt *Gauß,* (1801), Werke 1, S. 301 als „adjungierte" von f ein, mit der Bemerkung, daß die adjungierte von F wieder f ist, was § 18, 8; § 78, 8 benutzt wird. Die mit f gleichzeitige Transformation von F § 41, (23) zieht *Jacobi* (1831), Werke 3, S. 101 in Betracht. Die allgemeine Auffassung der Formen § 138, (24); (25) als *Kontravarianten* und *Zwischenformen* vgl. *Fr. Meyer*, Encyklopädie I B 2, S. 324.

118. **Übergang der geänderten Determinanten in vollständige Quadrate.** I. Der Übergang der Kovariante F oder der einfach geänderten Determinanten A^u in ein vollst. Quadrat für den Fall § 42, (14) bei *Hesse*, Sieb. Vorl. S. 16; *Clebsch-Lindemann*, Ebene, S. 180, für den Fall § 139, (14) bei *Hesse,* Raum, S. 164; *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 151. Der allg. Satz für belieb. n bei *G. Salmon* (1859) nach Baltzer, Det. S. 42; von *Hesse* (1868), Werke S. 559.

Die Kovariante φ oder die nach Linienkoord. entwickelte zweif. ger. Det. $A^{u\,u'}$ als vollst. Quadrat § 139, (22) bei *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 152.

Daß die Form f selbst ein vollst. Quadrat werden kann § 42, (20); § 139, (28), bemerkt *Plücker*, Entw. 1 (1828), S. 132; System (1846), S. 78.

II. Derselbe Übergang erstreckt sich in der Ebene auf die *zweif.* geänderte *Determinante* § 44, (36), sowie die *einf.* geränd. *Unter*determinanten § 45, (16); im Raume auf die nach Ebenen- und Linienkoord. entwickelte zwei-, bezügl. dreifach geänderte Det. § 141, (41); (49), *Hesse*, Raum S. 179 f., und die nach Ebenenkoord. entw. dreif. ger. Det. § 142, (35), aber auch auf die einf. ger. Unterdet. § 143, (14); (18) und zweif. ger. Unterdet. § 146, (17). Er beruht überall auf dem *Zerfall der Koeffizienten* in zwei Faktoren.

119. **Geänderte Determinanten.** I. Die *geänderten Determ.* sind von *Hesse*, Werke S. 283 (1850); S. 323 (1852); S. 362 (1853); S. 471 (1857) eingeführt nach Clebsch-Lindemann, Ebene, 1, S. 144 Anm.; vgl. *Hesse,* Raum S. 138; 179; *Clebsch*, J. f. Math. 59 (1861), S. 56; *Salmon,* Higher Algebra (1876), S. 16.

II. Die *Entwicklung* der *einfach* ger. Det. § 43, (7) und § 140, (7) nach *Hesse,* Sieb. Vorl., S. 15; Raum, S. 138; die doppelte der *zweifach* ger. § 43, (17) und (19); § 140, (16); (17); (19) und (22); die dreifache der *dreif.* ger. § 140, (33); (36); (37); (42) nach *Hesse,* Raum S. 179; *Salmon,* Higher Alg. S. 16.

III. Die *Invarianteneigenschaft* folgt *erstens* mittels des Multiplik.theorems § 43, 2; 3; § 140, 3; 5; 10 nach *Hesse* (1853), Werke S. 330; *zweitens* aus der Inv.eigensch. der kovar. Formen § 43, 4 letzter Abs.; § 140, 6 vorletzt., 11 letzt. Abs.

IV. Die Bez. zwischen den dualen zweif. ger. Det. φ und Φ § 154, (16) nach *Salmon-Fiedler*, Raum S. 104; vgl. *Schröter,* Oberfl. S. 142 f.; *Sturm*, Flächen 3. Ordn. (1867), S. 252.

120. **Übergang von zwei auf eine, von drei auf zwei und eine Dimension.** Um die Eigenschaften des Schnittpunktpaares einer Geraden mit der Kurve oder Fläche 2. O. oder der Schnittkurve einer Ebene mit der Fläche 2. O. zu gewinnen, ist es wesentlich, die einfachen Determinanten und Unterdeterminanten der *Schnittgebilde* durch die geänderten Det. u. Unterd. der *gegebenen Kurve und Fläche* auszudrücken u. umgekehrt, wie es § 44, (14)—(16); § 142, (14)—(16) und § 141, (17)—(19) geschieht. Die Formeln § 44, (14) und § 141, (17), (vgl. *H. M. Taylor,* Proc. L. M. Soc. 11 (1880), S. 141) leitet *Clebsch-Lindemann*, Ebene (1876), S. 277; Raum, S. 138, Anm. mittels der *symbolischen Methoden der Invariantentheorie* ($(\frac{1}{6}\,abcu)^2 = (\alpha\beta\gamma)$) ab, während sie hier mit den

übrigen sämtlich als spezielle Fälle der allg. Transformationsformeln (Anm. 113) sofort hervorgehen. Das allg. Prinzip der symbol. Methoden, die von Theorie der Schnittgebilde ausgeht s. bei *Fr. Meyer,* Encyklopädie I B 2 S. 363.

121. **Zerfall der Koeffizienten in zwei Faktoren.** I. *Die Methode der „übergreifenden Proportionen"*. Der Schluß in § 90, von (3) auf (4); in § 44, von (26) auf (28) rührt her von *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 17 = Werke 3, S. 210. Er wiederholt sich in § 50, von (28) auf (29); in § 110, von (2) auf (3) nach *Hesse,* Raum, S. 399; in § 141, von (32) auf (34); § 142, von (29) auf (31).

II. *Methode der Transformationsformeln.* Dasselbe Resultat geben jedoch auch die allg. Transformationsformeln der quadr. Formen in der Ebene für die Unterdeterminanten A_{kl}, a_{ki} § 42, (13); (19); für die einf. geränderten A_{kl}^{u} § 44, (31); (32) und im Raume für die Unterdeterminanten A_{kl}, α_{kl}, a_{kl} § 139, (13); (21); (27), für die einf. geränderten A_{kl}^{u}, α_{kl}^{u} § 141, (38); (48), für die zweif. ger. $A_{kl}^{uu'}$ § 142, (31); (34).

122. **Geometrische Bedeutung der geränderten Determinanten.** Die Bed. der ein- und zweifach geränd. Det. in der Ebene § 45, (2); (17), sowie der ein-, zwei- und dreifach geränd. Det. im Raume § 143, (2); § 144, (3); § 148, (10) bei *G. Salmon,* Lessons higher Algebra (1876), S. 17; § 45, (2) auch bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 15 f.; § 148, (2); (5) bei *Hesse,* Raum S. 179; § 148, (13) bei *Hesse,* ebd. S. 129; 471. Die *vollst. Durchführung* für die *Kurve 2. O.* s. § 45, (2); (9); (15); (16); u. das Schnittpunktpaar § 45, (18); (20); für die *Fläche 2. O.* § 143, (2); (8); (11); (14); (17); (18); auch § 144, (3); (18); § 146, (5); (17); das Schnittpunktpaar § 148, (13); (14), die Schnittkurve § 148, (3); (5); (8); (9); (11); (12).

123. **Polardreieck und Polartetraeder.** I. Der *Begriff* § 46, 7 und die *Konstruktion* § 46, 8 des *Polardreiecks* bei *Brianchon,* Lignes du sec. ordre (1817), S. 22; *Poncelet,* Traité (1822), S. 103, art. 192; *Steiner* (1832), Werke 1, S. 351. Der *Name* „Polardreieck" § 46, 10 bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 132; „Polardreiseit" § 46, 7 bei *Schröter,* Kegelschn. S. 147.

II. Das *Polardreikant* des Kegels § 149, 7 bei *Chasles,* Cônes (1830), S. 5; *Plücker,* System (1846), S. 94; drei konj. Durchmesser als Polardreikant des Asymptotenkegels § 84, 3 bei *v. Staudt,* Halbm. S. 39.

III. Das *Polartetraeder* § 149, 8 bei *Poncelet,* Traité (1822), S. 395, art. 615; der Name „Poltetraeder" bei *Plücker,* System (1846), S. 88.

124. **Sätze über zwei Polardreiecke und Polartetraeder.** I. Die Sätze § 48, 2, I ohne Beweis bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 448, Aufg. 46; der Beweis § 48, 1; 2 von *Hesse* (1840), Werke S. 31; 34; der Satz § 48, 3, II bei *Hesse* (1852) Werke S. 303. Der Satz § 48, 4, III von *Brianchon-Poncelet,* Ann. de math. 11 (1820/1), S. 205 nach Salmon-Fiedler, Kegelschn. S. XXXII, 39).

II. Die entsprechenden Sätze im Raume § 151, 2 mit dem Beweis § 151, 1; 2 gibt *Hesse* (1840) Werke S. 36; 39; Vorl. Raum S. 197; vgl. *v. Staudt,* Beitr. (1860), S. 373. Der Spezialfall über zwei Polartetr. mit einer gemeins. Ecke § 151, 4 bei *Hesse,* Raum S. 204; der Satz über zwei Tripel konjugierter Durchmesser § 151, 6 von *A. Goepel,* Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 205; vgl. *Hesse* (1838) Werke S. 8; *Chasles,* J. de math. (1) 2 (1837), S. 400. Der Satz über zwei Tripel rechtwinkl. Achsensysteme § 151, 7 bei *Steiner* (1832) Werke 1, S. 452; *A. R. Luchterhandt,* Arch. Math. Phys. (1) 4 (1843), S. 101; 103; vgl. *Fr. Meyer,* Jahrb. d. d. Math.-Ver. 18 (1909), S. 107.

125. **Polarreziproke Dreiecke und Tetraeder.** Den Satz § 48, 5 über polarrezipr. Dreiecke gibt *Plücker,* J. f. Math. 5 (1830), S. 11 = Abhandl. S. 134; den entsprechenden für polarreziproke Trieder beim Kegel 2. O. *Chasles,* Ann. de math. 19 (1828/9), S. 74; vgl. *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 135; *Schröter,* Oberfl. S. 40. Fr. Meyer, Jahrb. d. Fortschr. 16 (1884), S. 548.

Der entsprechende Satz über polarrezipr. Tetraeder § 151, 8 von *Chasles,* Ann. de math. 19 (1828/9), S. 65; Aperçu (1837), Note XXXII, S. 402; *Hesse* (1844), Werke S. 642; vgl. *Cayley,* Quart. J. 1 (1857), S. 7; *Ferrers,* ebd. S. 191; *Salmon,* ebd. S. 237; *Brioschi,* ebd. S. 368; *Weddle,* Cambr. Dub. J. 6 (1851), S. 123; weitere Literatur bei *F. Schur,* Math. Ann. 19 (1882), S. 429; *Schoenflies,* Encyklopaedie III A B 5, S. 429; der Spezialfall § 151, 8, II von *Bobillier* nach Kötter, Ber. S. 198.

126. **Begriff und Gleichung des Büschels.** Die Gleichung $f - \lambda g = 0$ des *Kegelschnittbüschels* § 48, (16), der die des *Büschels von Punktepaaren* § 8, (53) nachgebildet ist, wurde von *G. Lamé,* Exam. (1818), S. 32 gebildet; ebenso die des *Flächenbüschels,* ebd. S. 28; 35.

127. **Der Hessesche Satz.** Der Satz § 48, 7, IV in dualer Form bei *Hesse* (1840), Werke S. 41; mit dem Spezialfall § 8, 20, IV bei *Hesse,* Sieb. Vorl. S. 31; 32; auch bei *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 136; 205; die Formel § 48, (19) findet auch bei *Magnus,* Aufg. 1 (1833), S. 147 Verwendung.

128. **Geometrische Bedeutung der Spezies.** Die Sätze § 49, 5 und § 152, 8 (§ 72, 11) über die Lage der Polardreiecke und Polartetraeder gegen Kurve und Fläche 2. O., welche die Spezies geometrisch deuten, nach *Plücker,* System (1835), S. 100; (1846), S. 89; *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. 111; *Schröter,* Kegelschn., S. 148; Oberfl., S. 166.

129. **Klassifikation der Schnittpunktpaare von Kurve oder Fläche 2. O. und Gerader.** I. Die Tabelle § 49, (22), nach *Gundelfinger,* Vorl. Kegelschnitte, S. 46—51; *Dingeldey,* Encykl. S. 23, vertritt *zwei* Tabellen, insofern ihre Kolonnen- und Zeilenüberschriften nach § 51, 15 auch in den *Summen* der Hauptunterdeterminanten dargestellt werden können (s. Anm. 76, VI). Sie enthält in der letzteren Form die Tabelle § 51, (38) und in teilweise modifizierter Form die Tabelle § 26, (19) in sich, s. Anm. 182.

II. Im Raume entspricht ihr eine Tabelle, die nach § 154, 3 hergestellt werden kann.

130. **Elementarteiler der Büscheldeterminante.** Die Theorie der Elementarteiler der Determinante $\varDelta(\lambda) = |a_{kl} - \lambda b_{kl}|$ § 50, (16); § 155, (16) ist für beliebiges n von *K. Weierstraß,* Berl. Ber. 1857, S. 213; 1868, S. 316 begründet. Sie dient unter anderen dazu, die *Möglichkeiten der Lage zweier Kurven* oder *Flächen 2. O.* erschöpfend zu bestimmen. Es gibt fünf Lagen zweier Kurven und 13 zweier Flächen 2. O. gegeneinander, die sich einerseits nach der Multiplizität l_i der Wurzel λ_i § 50, 9; § 155, 9 und andererseits nach den Werten der Elementarteilerexponenten $e_i = l_i - l_i'$, $e_i' = l_i' - l_i''$, ... § 50, (27); § 155, (27) unterscheiden. In *zwei,* bezüglich *vier* dieser Lagen sind die Exponenten $e_i, e_i', \ldots$ *alle* 1, § 50, 10; § 155, 10, und *nur* dann gibt es ein oder mehr *gemeinsame Polardreiecke,* bezügl. *-tetraeder* und ist eine *gleichzeitige* Quadratdarstellung möglich § 50, (8); (34); § 155, (8); (35). Diese zwei, bezügl. vier Lagen sind die *einzig* möglichen, wenn, wie § 50, (3); § 155, (3), die eine Kurve oder Fläche $g = 0$ eine

imaginäre eigentl. ist. In diesem Sinne enthalten die § 50 und § 155 einen *Ausschnitt* aus der allg. Theorie des Büschels. Dasselbe ist auch der Grund, warum der unendl. ferne Kegelschnitt der Fläche 2. O. (außer der identischen) nur zwei Lagen gegen den imaginären Kugelkreis haben kann § 100, 2, statt, wie im allg., fünf.

131. **Regel des Descartes.** Über die *Regel* § 89, 9 *des Descartes* (1649) s. *J. A. Serret,* Höh. Algebra, deutsch v. G. Wertheim, 1 (2. Aufl. 1878), S. 215; *C. Runge,* Encyklopaedie I, 1, S. 410. Ihre *Anwendung* auf die Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ in § 89, 9 gab zuerst *Petit,* Corr. polyt. 2 (1812), S. 325; 327; *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 92.

132. **Invarianten der orthogonalen Substitution.** Die Invarianten A, A' § 40, 13 der orthogon. Transf. des Punktepaares sind im wesentl. dieselben wie A_{33}, A'_{33} in § 21, (19); § 22, (16); ebenso die Invarianten A, A', A'' der orthogon. Transf. der Kurve 2. O. § 50, (42) dieselben wie $A_{44}, A'_{44}, A''_{44}$ in § 89, (7); § 91, (17). Sie sind im letzteren Sinne von *Cauchy,* Applic. 1 (1826), S. 244; *Plücker,* J. f. Math. 24 (1842), S. 283 = Abhandl. S. 390 erkannt. Die Invarianten A, A', A'', A''' in § 155, (46) und die entsprechenden für beliebig viele Koordinaten bei *Cauchy,* Exerc. 4 (1829), S. 142; *Jacobi,* J. f. Math. 12 (1834), S. 14 = Werke 3, S. 208; s. *W. F. Meyer* in der Encyklopaedie I B. 2 S. 329.

133. **Die geänderten Gleichungen des Hauptachsenproblems.** I. Die *quadrat. Gleichungen des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte* der Fläche 2. O. § 108, (27) ist in entwickelter Form gegeben von *Cauchy,* Applic. (1826), S. 269; in Determinantenform von *Hesse,* Raum (1. Aufl. 1861), S. 331; (3. Aufl.), S. 398; Werke S. 498. *Hesse,* Werke S. 498 tritt auch formal die zweite Bedeutung derselben Gleichung § 51, (18) für das Problem der orthogonalen Transf. des Schnittpunktpaares einer Kurve 2. O. mit einer Geraden hervor. Die Darstellungen § 51, 12 und § 110, 5 ergänzen sich daher wechselseitig (eine dritte Bedeutung der Gl. s. § 103, (14)).

II. Der indirekte Beweis für die Realität der Wurzeln § 51, 6 nach *Hesse,* Raum, S. 399; der direkte § 109, 5 schließt sich an die Darstellung der Diskriminante als Summe von Quadraten an, *Hesse* ebd. S. 406; s. Anm. 150, IV.

134. **Berührungs-Dreiecke und Tetraeder.** I. Unter den *ausgezeichneten Koord.dreiecken* eines Kegelschnittes ist, neben dem Polardreieck mit der Darstellung in drei Quadraten § 46, (14), das *Berührungsdreieck* mit der Darstellung durch *ein Quadrat* und *ein Produkt* § 52, (3) hervorzuheben. Es ist bei der Parabel § 13, (37) und Hyperbel § 13, (27) schon in gemeinen Koordinaten gebräuchlich, in Dreieckskoord. eingeführt bei *Moebius* (1827) Werke 1, S. 85; *Plücker,* System (1835), S. 84; 86; 88; 89; 90.

II. Beim Kegel entspricht ihm das *Berührungsdreikant* § 74, 1.

III. Unter den ausgez. Tetraedern der Fl. 2. O. sind, neben dem Polartetraeder mit der Darstellung durch 4 Quadrate § 149, (21), das *Polarberührungstetraeder* mit der Darst. durch *2 Quadrate* und *1 Produkt* § 158, (5) und das *Schmiegungstetraeder* mit der Darst. durch *2 Produkte* § 159, (4) wichtig. Jenes ist bei beiden Paraboloiden § 56, (16); (16'), dieses beim hyperbol. Paraboloid § 62, (7) gebräuchlich. Allgemein wird das Schmiegungstetraeder bei *Magnus,* 2 (1837), S. 292 betrachtet und als Koord.tetraeder eingeführt bei *Plücker,* (1842), Abhandl. S. 396; System (1846), S. 99; vgl. *Klein,* Geom., S. 29.

135. **Anwendung von Berührungs-Dreieck und Tetraeder.** I. Der Zusammenhang des Berührungsdreiecks mit der *projekt. Erzeugung* § 52, 4 (§ 38, 5) und *Parameterdarstellung* § 52, 5 bei *Salmon-Fiedler* Kegelschn. 4. Aufl. S. 387 ff.; vgl. auch *W. Fr. Meyer,* Apolarität und rat. Kurven, Tübingen 1883, S. 43.

II. Der Zusammenhang des Schmiegungstetraeders mit der projekt. Erzeugung § 159, 5 wird von *Plücker,* System (1846), S. 105 hervorgehoben; ähnlich verhält sich das Polarberühr.tetr. zu der Erzeugung durch reziproke Bündel § 158, 11.

136. **Doppelverhältnisse in Elementargebilden 2. O.** Begriff und Gleichheit der Doppelverhältnisse δ von vier Punkten und vier Tangenten eines Kegelschnittes § 52, 7 (für $\delta = -1$) bei *Steiner*, Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 347; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XV, XVI (S. 334; 341); das Doppelverh. von vier Erzeugenden § 159, 12, bei *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 4.

137. **Rotationsflächen.** I. Der *Begriff* der Rotationsfl. § 53, 1 für spezielle Fälle bei *Euklid* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 388; die allg. *Gleichung* $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$ (§ 53, (3)) bei *Clairaut,* (1731) nach Cantor 3, S. 781; bei *Euler*, Introd. 2 (1748), Append. art. 37; 39; bei *Kästner* (1758) nach Cantor 4, S. 457.

II. Das *verl.* u. *abgepl.* Rotat.*ellipsoid* § 53, 3; 4 |(σφαιροειδὲς παραμᾶκες und ἐπιπλατύ), *eine* Schale des *zweischal.* Rot.*hyperboloids* § 53, 3 (κωνοειδὲς ὀρθογώνιον) und Rot.*paraboloid* § 53, 5 (κ. ἀμβλυγώνιον) bei *Archimedes* (237 v. Chr.) Op. ed. Heib. 1, S. 280; 274, nach Cantor 1, S. 309; F. Müller, Zeittaf. S. 22; vgl. *J. Gow*, A short history of greek mathematics, Cambridge 1884. Das *einschal.* Rotat.*hyp.* § 53, 4 als solidum annularium bei *Kepler*, Nova stereometria doliorum, Linz 1615, und als Cylindroid bei *Wren*, Lond. Phil. Trans. 3 (1669), S. 961 nach Cantor 3, S. 401.

Die *Kugel* als Rotationsfl. bei *Euklid*, als Ort der Punkte gleichen Abstandes vom Mittelp. § 69, (1) bei *Theodosius von Tripolis* (55 v. Chr.) nach Tropfke, Gesch. 2, S. 259. Der *rechtwinklige* Rot.kegel (ὀρθογώνιος κῶνος) neben dem allg. Rot.kegel bei *Archimedes* nach Cantor 1, S. 244, seine Gleichung § 53, (16) bei *Klügel* 3 (1808), S. 314.

III. Die *Bedingungen*, daß die *allg. Gl.* der Fl. 2. O. eine Rotationsfl. darstelle, § 100, (6)—(8) sind auf verschied. Wegen entwickelt von *Bourdon*, Corr. polyt. 2 (1811), S. 196; 250; *Mondot,* ebd. S. 205; *Monge,* ebd. (1812), S. 313; *Lamé*, Exam. (1818), S. 43; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 257; aus der Gleichheit zweier Wurzeln der kub. Gl. $\Delta(\lambda) = 0$ in § 88, (17) von *Cauchy*, Exerc. 3 (1828), S. 10; 20. Dabei tritt, wie *Hesse,* Raum, S. 282 bemerkt, die Frage auf, inwiefern die *eine* Bedingung des Verschwindens der Diskriminante von $\Delta(\lambda)$ die *zwei* Bedingungen § 100, (6) der Rotat.fl. geben kann. Sie wird beantwortet mit der Darstellung der Diskriminante als Summe von Quadraten durch *E. Kummer*, J. f. Math. 26 (1843), S. 268, vgl. *Hesse*, Raum, S. 378, und völlig erledigt in der Theorie der Elementarteiler durch *Weierstraß*, Berl. Ber. 1858, S. 214. Hierauf stützt sich die elementare Darstellung § 89, 5, nach der für eine Doppelwurzel der Determinante $\Delta(\lambda)$ alle sechs Unterdet. $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden müssen, und diese sechs Bedingungen § 89, (23) für zwei unabhängige § 89, (35) zählen. Geometrisch findet diese Auffassung nach § 50, 6 ihren Ausdruck darin, daß die *Rotationsfl. den Kugelkreis doppelt berührt* § 100, 2 nach *v. Staudt,* Beitr. (1856), S. 129.

138. **Zylinder.** I. Der Begriff des *Zylinders* beschränkt sich zuerst auf *Kreis*zylinder. Der *gerade* Kreiszylinder als *Rotations*zylinder § 53, 9 bei *Euklid,* Elem. nach Tropfke, Gesch. 2, S. 388. Der *schiefe* Kreisz. und seine Identität mit dem *elliptischen* Zylinder § 59, (19) bei *Euler,* Introd. 2, App., art. 52. Seine Auffassung als *Kegel* mit unendlich ferner Spitze § 96, 5; § 98, 10 bei *Desargues*, Oeuvres 1, S. 158; 261.

II. Die Zylinder *ohne* kreisförm. Basis, der *hyperbolische* § 53, (30) und *parabolische* § 53, (34) erscheinen als Arten der Fläche 2. O. bei *Euler,* Introd. 2, art. 125; 126.

139. **Gleichungen des Punktepaares in Linien- und des Kegelschnittes in Ebenenkoordinaten.** Die Darstellung des *Punktepaares* § 13, (58) durch *eine* Gl. in *Linienkoord.* § 13, (57′) nach *Plücker*, Entw. 2, S. 93; des *Kegelschnittes* durch *eine* Gl. in *Ebenenkoord.* § 53, (35) bei *Plücker,* System (1846), S. 195; 251; s. Anm. 69. Die Dualität zwischen Kegel und Kegelschnitt § 79, 3 bei *v. Staudt*, Beitr. S. 22.

140. **Elliptische Kegel.** Der „schiefe Kegel" (κῶνος σκαληνὸς) als Ort einer Geraden, die an einem Kreise gleitet und durch einen festen Punkt (κορυφή) geht, der nicht senkrecht über dem Mittelpunkt des Kreises liegt, bei *Apollonius*, Con. I, Defin. I, 3 (Heiberg 1, S. 7); vgl. Cantor 1, S. 335; Tropfke, Gesch. 2, S. 389; 437. Daß dieser schiefe Kegel der *allgemeine elliptische Kegel* § 54, (1); § 93, (8) ist, ergab sich mit der Entdeckung der Kreisschnitte der letzteren § 59, 3 durch *Descartes*, vgl. Cantor 4, S. 601, war aber nach Cantor 4, S. 465 bei *Karsten* 1775 noch nicht bekannt. *Euler*, Introd. (1748) 2, App. art. 68 definiert den schiefen Kegel als einen solchen, bei dem die zur Achse senkr. Schnitte Ellipsen sind (§ 54, 3), die ihren Mittelpunkt auf der Achse haben, und erwähnt art. 74 seine Kreisschnitte.

Die *Gleichung* des Kegels ist durch ihre in x, y, z *homogene* Form § 80, (19) charakterisiert bei *Clairaut* (1729) nach Cantor 3, S. 781; *Euler*, Introd. 2, App. art. 35.

141. **Die Fokallinien des Kegels.** I. Die „*Fokallinien*" des Kegels § 54, (11); (15) sind entdeckt und benannt von *Magnus*, Ann. de math. 16 (1825/6), S. 33; Aufg. 2 (1837), S. 172. Beim Asymptotenkegel des Hyperboloides sind sie, § 55, 9, die Asymptoten der Fokalhyperbel, vgl. *H. Schröter*, Oberfl., S. 571. Sie hängen, wie auch die beiden Paare *imaginärer* Fokallinien § 118, (17) nur von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate ab, s. Anm. 2, I.

II. Die drei Paare von Fokallinien sind die Scheitellinien derjenigen Tangentialebenenpaare, die *Rotationszylinder-Ebenenpaare* § 119, (25) sind oder, was dasselbe ist, an denen die von dem Kegel bestimmte Involution harmonischer Polarebenen eine *rechtwinklige* ist, was *Chasles,* Cônes (1830), S. 13 erkannt hat; s. Anm. 2, II und Anm. 177.

III. Sie sind die drei *Strahlenpaare* in der *Schar konfokaler* Kegel § 118, (17), wie Anm. 2, IV.

IV. Sie sind die *Doppelstrahlen der Involutionen*, in denen zwei senkrechte harmon. Polarebenen § 119, 9 die Hauptebenen schneiden, wie Anm. 2, V.

142. **Sphaerische Kegelschnitte.** Die *sphaerische Ellipse* bei *N. v. Fuß*, De propr. quibusd. ellipseos in superf. sphaer. descriptae (1787) als Ort eines Punktes, für den die Summe der sphaer. Entf. von zwei festen Punkten konstant

ist (s. Anm. 3) nach Cantor 4, S. 542; 1088. Der Ausdruck „*sphaer. Kegelschn.*" bei *Steiner* (1827) Werke 1, S. 117. Als Durchschnitt von *Kegel* und *Kugel* § 54, 6 bei *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 202; vgl. *Magnus*, Ann. de math. 16 (1825/6), S. 33; vgl. *Salmon-Fiedler*, Raum S. 426.

143. Unterarten des elliptischen Kegels. Der elliptische Kegel § 54, (14), überall mit $a^2 > b^2$, wird für: I. $b^2 = c^2$ der *Kegel des Pappus, Pappi* Collect. (ed. Hultsch) 2, S. 581; er hat einen rechtwinkligen Hauptschnitt in der Hauptebene der *kleinsten* Öffnung § 54, 8 und außerdem „*zwei Ebenenbüschel rechtwinkliger Schnitte*" § 116, 5, IV; vgl. über ihn *Th. Meyer,* Dissert. Straßburg 1884.

II. $a^2 = c^2$ der *Kegel des Hachette;* er hat einen rechtwinkligen Hauptschnitt in der Hauptebene der *größten* Öffnung § 54, 8; seine Erzeugung als Ort eines Punktes, der von einer Ebene und einer Geraden gleichen Abstand hat § 128, 9, letzter Satz, bei *Hachette,* Quetelet Corr. Brux. 4 (1828), S. 285; *Chasles,* Cônes (1830), S. 44. Der Ort derjenigen Bündelstrahlen, durch die nach § 119, (24) zwei rechtwinklige Tangentialebenen an den Kegel § 54, (14) gehen, nämlich der Kegel:

$$(b^2 - c^2)x^2 + (a^2 - c^2)y^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 0,$$

zerfällt für den Kegel des Hachette in das reelle Ebenenpaar ($a^2 > b^2$):

$$(b^2 - a^2)x^2 + (a^2 + b^2)z^2 = 0;$$

es gibt also „*zwei Strahlbüschel rechtwinkliger Tangentialebenen*"; vgl. über ihn *Th. Meyer,* Dissert. Straßburg 1884.

Die beiden Kegel I und II sind im Sinne von § 71, 8 *reziprok.* Denn wenn mit $b^2 = c^2$ bei dem Kegel § 54, (14) der Hauptschnitt der kleinsten Öffnung rechtwinkl. ist, so ist es bei dem Kegel § 71, (22) der Hauptschn. der größten Öffnung $\left(\frac{1}{b^2} > \frac{1}{a^2}\right)$. Mit $a^2 = b^2 = c^2$ verschmelzen die Kegel I und II in den *rechtw. Drehungskegel* § 53, (20). Die zwei Ebenenbüschel rechtwinkliger Schnitte fallen in *einen* durch die z-Achse und die zwei Strahlbüschel rechtwinkliger Tangentialebenen in *einen* in der xy-Ebene zusammen.

III. $a^2 - 2b^2 + c^2 = 0$ der Kegel mit *rechtwinkligen Fokallinien* § 54, (16);

IV. $\frac{1}{b^2} - \frac{2}{a^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ der Kegel mit *rechtw. Kreisschnittebenen* § 59, (24), beide ebenfalls *reziprok* nach § 71, 9, vgl. *Reye,* G. d. L. 1, S. 260.

V. $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$ der *orthogonale Kegel; Scheitelerzeugende* in der Hauptebene der kleinsten Öffnung *auf den Kreisschnittebenen senkrecht* § 64, 5;

VI. $b^2 - a^2 + c^2 = 0$ der *dual orthogonale Kegel* § 82, (55); Scheitelerzeugende in der Hauptebene der größten Öffnung, also auch die betreffenden *Scheiteltangentialebenen auf den Fokallinien senkrecht,* § 54, (18); *Schröter,* Oberfl. S. 71; bei *Plücker,* System (1846), S. 303; 305 heißt dieser Kegel *parabolisch,* weil die zu einer Fokallinie senkrechten Schnitte nach § 115, 9; § 74, 2 Parabeln sind; s. Anm. 165. Auch die beiden Kegel V und VI sind reziprok § 82, 16.

VII. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$ der *gleichseitige Kegel;* und reziprok:

VIII. $a^2 + b^2 - c^2 = 0$ der *dual gleichseitige Kegel* § 71, 10, s. Anm. 164.

144. Die Fokalkegelschnitte. I. Die *Fokalkegelschnitte* (Fokalkurven, Brennkurven) des Ellipsoides, Hyperboloides und Paraboloides § 55, (9); § 56, (7) wurden entdeckt von *Ch. Dupin*, Dével. (1813), S. 280; sodann einschließlich des *imaginären* § 120, 9 von *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 326; *Chasles*, Aperçu (1837), Note XXXI, art. (7) erhalten; *Chasles* nennt sie coniques excentriques ou focales. Die Analogie der Fokalkegelschn. mit den Brennpunkten tritt schon *formal* in ihren *Gleichungen* hervor:

$$\text{Ellipse: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,; \quad \text{Brennp: } \frac{y^2}{b^2-a^2}=0,\ x=1\,; \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}=1;\ y=0\,.$$

$$\text{Ellipsoid: } \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,; \quad \text{Fokalk.: } \frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1,\ x=0\,;$$

$$\frac{z^2}{c^2-b^2}+\frac{x^2}{a^2-b^2}=1,\ y=0\,; \quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\ z=0,$$

welche wesentlich (Anm. 2, I) von den *Differenzen* der Halbachsenquadrate abhängen.

II. Nach dem Vorgange von *Apollonius,* Con. I, art. 52—53 (Heib. 1, S. 158 ff.) bestimmte *Dupin,* Corr. polyt. 2 (1813), S. 424; Dével. (1813), S. 280 den einen der beiden Fokalkegelschn. als Ort der Spitzen der über dem andern errichteten Rotationskegel § 122, 8, III; § 125, 2; § 131, 3; 4; § 132, 2; § 135, 3; § 136, 2. Allgemeiner findet *Steiner,* J. f. Math. 1 (1826), S. 47 = Werke 1, S. 11; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 326 die Fokalkegelschn. als *Ort der Spitzen umbeschriebener Rotationskegel* § 122, 8, I; § 125, 2, wie sie schon bei *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 63 als Ort der Punkte mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten und ähnlich bei *Ampère,* Mém. Acad. Inst. de France 5 (1826), S. 99 sich ergeben. Die *Rotationskegel* als Kegel mit *zwei gleichen* Halbachsenquadraten entsprechen hier dem *Kreisstrahlenpaar* der Anm. 2, II, dem Linienpaar mit *zwei gleichen* Halbachsenquadraten.

III. Berührungskegel mit *drei gleichen* Halbachsenquadraten (Kugelkegel), welche die Fläche *längs einer Kurve berühren,* gibt es nach § 70, 5 bei den dreiachs. Flächen nicht. Dagegen sind die Fokalkegelschn. § 127, 11, III wiederum der *Ort der Spitzen solcher Kugelkegel,* welche die Fläche *in zwei Punkten berühren* nach *B. Amiot,* J. de math. (1) 8 (1843), S. 163; *Chasles,* Par. C. R. 16 (1843), S. 831; *Plücker,* System (1846), S. 276; s. Anm. 177.

IV. Als *Grenzflächen* (courbes limites) *im konfokalen System* § 120, 4; § 123, 3 erhielt *Dupin,* Dével. (1813), S. 277; 309 die Fokalkegelschn., und *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (47) erkannte sie als Doppellinien (lignes de striction) § 120, 10 der umbeschriebenen Developpabeln; als die vier *Kegelschnitte der Schar* der Konfokalen erhalten sie ihre Gleichungen in Ebenenkoord. § 120, (21); § 123, (19) bei *Plücker,* System (1846), S. 255; 325; vgl. *v. Staudt,* Beitr. S. 383.

V. Als *Ordnungskurven* in dem Polarsystem, welches eine Ebene und ihr zugeordneter Normalstrahl in einer Hauptebene bestimmen § 120, 14; § 123, 12, betrachtet die Fokalkegelschn. *Chasles,* Aperçu, Note XXXI, art. (1); (18); *Plücker,* System (1846), S. 332 u. J. f. Math. 35 (1847), S. 103 = Abhandl. S. 459; *Reye,* G. d. L. 2, S. 227.

VI. Als Umhüllungskurven der Fokalachsen, s. Anm. 177.

145. Hauptschnitte. Die Hauptschnitte der Ellipsoide und Hyperboloide § 55, 7 und Paraboloide § 56, 7 dienen bei *Euler,* Introd. 2, App. art 117; 119;

122; 124; 125 zur ersten Beschreibung und Unterscheidung (auch Benennung) der einzelnen Flächen. Ihre verschiedene *Lage gegen die Fokalkegelschnitte* § 55, 7; § 56, 7, nach *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 327 ff., ist ebenso charakteristisch, wie die versch. Lage der Scheitelpunkte der Kegelschnitte gegen die Brennpunkte § 1, 5. Der Ausdruck *„Kehlellipse“* beim einsch. Hyperboloid § 55, 8 bei *Clebsch-Lindemann,* Raum, S. 173; „ellipse de gorge“ bei *Amiot,* J. de math. (1) 8, (1843), S. 183.

146. **Darstellung durch Draht- und Gipsmodelle.** Durch Herstellung der Hauptschnitte § 55, Fig. 131—133; § 56, Fig. 134; 135 in *Draht* entstehen die von *H. Wiener* angefertigten Modelle, bei *A. W. Gay,* Darmstadt, 1903.

Gipsmodelle, entsprechend der Erzeugung § 55, 8 und § 56, 8 durch ebene Schnitte, sind von *R. Diesel* (1878) hergestellt, s. *Dyck,* Katalog, S. 258.

147. **Schraubenlinie und linearer Komplex.** Die *Schraubenlinie* § 57, 1; 2 bei *Pappus* IV, prop. 28 (ἡ περὶ κύλινδρον ἕλιξ) (Hultsch 1, S. 260; auch 3, S. 1125); bei *A. Parent* (1702) nach Cantor 3, S. 419; *Kästner* (1771) nach Cantor 4, S. 557 und *Frézier* (1738) nach Cantor 4, S. 621. Die Geraden des *Komplexes* als *Tangenten* von Schraubenlinien § 57, 13 bei *Plücker,* Neue Geom. (1868), S. 57; die Formel § 57, (22) ebd. S. 58; die Polarebene eines Punktes als *Schmiegungsebene* der durch ihn gehenden Schraubenlinien § 87, 8 bei *Plücker,* ebd. S. 59; in anderer Auffassung bei *F. Klein,* Vorl. Geom. 1, S. 135, im Keime schon bei *Moebius,* (1833), Werke 1, S. 506. Die Drehbarkeit und Verschiebbarkeit § 57, 13 bei *Plücker,* a. a. O. S. 38; vgl. *Lie-Scheffers,* Berührungstransf., S. 268.

148. **Tangente und Schmiegungsebene einer Raumkurve.** Ist eine Raumkurve in der Parameterdarstellung:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

gegeben und wird die Differentiation nach dem Parameter t durch Akzente bezeichnet, so ist in laufenden Koordinaten X, Y, Z die *Tangente* und die *Schmiegungsebene* der Kurve im Punkte x, y, z durch die Gleichungen dargestellt:

$$X - x : Y - y : Z - z = x' : y' : z'$$

und bezüglich:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

H. v. Mangoldt, Encyklopaedie III D 1, 2; 29.

149. **Begriff, Name, Parameter und kanonische Gleichung des Komplexes.** Begriff und Name des *linearen Komplexes* § 86, 1 von *Plücker* (1865), Abhandl. S. 464; 478; N. Geom. (1868), S. 26; *„Strahlengewinde“* § 86, 1 nach *Sturm,* Liniengeom. 1 (1892), S. 62. Begriff und doppelte Bedeutung des *Parameters* § 57, (20) bei *Plücker,* N. Geom. S. 38. Die kanonische Gleichung § 57, (19); § 87, (19) bei *Plücker,* ebd. S. 37; 57; die allgemeinere § 87, (17) ebd. S. 56: in der Form § 87, (25) schon bei *Moebius* (1833), Werke 1, S. 502.

150. **Kreisschnitte.** I. *Die Kreisschnitte des Kegels 2. O.* waren bei *Apollonius,* Con. lib. I, art. 5 (Heib. 1, S. 21) bekannt nach *Baltzer,* Geom. S. 521, später auch bei *Greg. a St. Vincentio* (1647) nach *Bopp,* Greg. S. 106. Die beiden Systeme der Kreisschnitte § 59, 3 entdeckte *R. Descartes* (1648) nach *Chasles,* Cônes S. 2; sie werden angegeben von *De l'Hospital* und *Jacquier* (1755) nach *Cantor* 4, S. 601;

A. F. Frézier (1738) mit Benutzung von *J.* und *H. Bernoulli* nach *Cantor* 4, S. 621; vgl. *Klügel* 3 (1808), S. 3. *Euler,* Introd. 2, App. art. 74.

II. *Beim dreiachsigen Ellipsoid* § 58, 3 entdeckte sie *D'Alembert,* Opusc. mathém. 7 (1780), S. 163 nach Kötter, S. 72, bei *allen Mittelpunktsflächen Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 161 ff., wo sich die Gleichungen der Hauptkreisschnittebenen § 58, (21); § 59, (21); § 60, (21) finden; für die Paraboloide § 61, 3 werden sie ohne Beweis behauptet, S. 161. Die Ausnahme des hyperbol. Paraboloids, wo die geradlinigen Schnitte § 62, 3 dafür eintreten, bemerkte *Klügel* 3 (1808), S. 328 und *Hachette,* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433; ferner betonte sie *Steiner*, J. f. Math. 1 (1826), S. 50 = Werke 1, S. 13; 14. Besondere Methoden zur Bestimmung der Kreisschnitte geben *Dupin,* Dév. (1813), S. 168; *Plücker*, J. f. Math. 19 (1839), S. 8 = Abhandl. 1, S. 346.

III. Die *allgemeine Auffassung* der Kreisschnittebenen aus der Beziehung zum imaginären Kugelkreis § 100, 2 gibt *Poncelet*, Traité (1822), art. 621; *v. Staudt,* Beitr. (1867), S. 129.

IV. Das *allgemeine analytische* Problem der Kreisschnitte knüpft sich an die Bedingung der Gleichheit der beiden Wurzeln der quadr. Gl. § 109, (11) und führt auf ein von *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 129 bemerktes *Paradoxon.* Die Bedingung ist nämlich scheinbar nur *eine*, das Verschwinden der Diskrim. § 109, (16), zählt aber in Wirklichkeit für *zwei* § 117, 5. *B. Amiot,* J. de math. (1) 12 (1847), S. 130 erklärte das Paradoxon durch *Zerlegung* der Diskrim. in drei *Quadrate*, von denen zwei unabh. waren. *O. Hesse*, Raum S. 403 verlangte daher überhaupt die Zerlegung der Diskrim. in Quadrate und gelangte dazu auf Umwegen J. f. Math. 60 (1862), S. 505 = Werke, S. 497; andere Zerlegungen gaben *O. Henrici,* J. f. Math. 64 (1865), S. 191; *C. Souillart,* J. f. Math. 65 (1866), S. 325; 87 (1879), S. 220; *G. Bauer,* J. f. Math. 71 (1870), S. 46; *C. F. Geiser,* Ann. di mat. (2) 8 (1877), S. 113; *E. Souvander,* J. f. Math. 85 (1878), S. 339.

V. Der Zusammenhang aller analyt. Methoden und der Ponceletschen Auffassung § 117, 14 knüpft sich an die von *O. Staude,* Arch. Math. Phys. (3) 7, S. 187 angegeb. Quadratdarst. § 109, (21) und die zugeh. Beding. § 117, (12), sowie die Beziehungen zum Hauptachsenproblem § 117, 8, 9, die teilweise von *C. Souillart,* J. f. Math. 65 (1866), S. 326, vollst. von *O. Staude,* a. a. O. S. 192 gegeben werden. Hiernach wird die *einheitliche* Darstellung § 117, 13 möglich, die auch die *geradl.* Schnitte wieder unter die *Kreisschnitte* einreiht.

VI. *Die vollständige Aufklärung des Dupinschen Paradoxons* liegt tiefer. Die Gleichung § 109, (1) ist nach § 45, (2) die Gleichung des Kegelschnittbüschels § 117, (46):

$$(a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + \cdots + 2a_{12}xy = 0 \tag{1}$$

in Linienkoordinaten u, v, w in der unendlich fernen Ebene. Als quadr. Gl. in λ § 109, (11) bestimmt sie daher diejenigen Kegelschnitte des Büschels (1), welche die Gerade u, v, w berühren. Durch Nullsetzen der Diskriminante § 109, (16) erhält man in:

$$(A'^{u}_{44})^2 + 4(u^2 + v^2 + w^2) A^{u}_{44} = 0 \tag{2}$$

die Gleichung der vier Grundpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ des Büschels (1) *in Linienkoordinaten.* Ihr genügen *alle Geraden der vier Strahlbüschel, welche die Schnittpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ der unendl. fernen Kurve der Fläche mit dem imag. Kugelkreis als Scheitel haben.* Beispielsweise für das Ellipsoid § 115, (1) lautet die Gleichung (2) nach § 115, (7); (4):

$$\left\{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)u^2+\cdots+\cdots\right\}^2-4\,(u^2+\cdots+\cdots)\left(\frac{u^2}{b^2c^2}+\cdots+\cdots\right)=0$$

und zerfällt nach § 118, (18) in die Gleichungen von vier Punkten:

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,u\pm i\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,v\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}\,w=0.$$

Die Gegenseitenpaare des vollst. Vierecks dieser Punkte sind nach § 118, (17) die Geraden:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)z^2=0,\ \cdots,\ \cdots,$$

welche die Stellung der Kreisschnittebenen § 117, (17) bestimmen.

Da nun die Gleichung (2) die Bedingung der Gleichheit der Wurzeln λ_1, λ_2 der quadrat. Gl. des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte § 109, (11) darstellt, so scheint es, als müßten alle Ebenen, die durch eine Gerade der vier Strahlbüschel (2) hindurchgehen, Kreisschnittebenen sein (*Salmon-Fiedler,* Raum S. 373), während es doch nach § 117, 14 nur die sind, die durch die 6 Verbindungslinien der Scheitel der vier Strahlbüschel (2) gehen. Daß die übrigen Geraden der Büschel *ausfallen,* hat seinen Grund darin, daß für sie die Hauptachsentransformation § 110, (11) überhaupt nicht möglich ist. Das Hauptachsenproblem des Kegelschnittes, in dem die Ebene u, v, w, s die Fläche schneidet, besteht nämlich nach § 21, 2, II in der Auffindung eines Polzweiecks, welches das unendl. f. Punktepaar U_1, U_2 des Kegelschnitts und das imag. Kreispunktpaar K_1, K_2 der Ebene gemein haben. Ein solches gemeins. Polzweieck ist aber nur vorhanden, wenn entweder U_1, U_2, K_1, K_2 vier getrennte Punkte sind, also die unendl. f. Gerade u, v, w durch *keinen* der Grundpunkte $S_1 S_2 S_3 S_4$ des Büschels (1) geht; oder $U_1 = K_1$, $U_2 = K_2$, also die Gerade u, v, w durch *zwei* dieser Grundpunkte geht; ist aber *nicht* vorhanden, wenn $U_1 = K_1$ und $U_2 \neq K_2$, also die Gerade u, v, w durch *einen* dieser Grundpunkte geht. Diese drei Möglichkeiten entsprechen aber nach der Theorie der Elementarteiler gerade den drei Fällen, daß die quadrat. Gl. § 108, (27) erstens zwei verschiedene Wurzeln $\lambda_1 \neq \lambda_2$, zweitens eine Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_2$ hat, für die alle Unterdet. § 109, (24) verschwinden, drittens eine Doppelwurzel, für die nicht alle diese Unterdet. verschwinden.

Obwohl also die *eine* Bedingung (2) der Doppelwurzel eine in vier Strahlbüschel zerfallende *Kurve 4. Klasse* in der unendl. f. Ebene darstellt, kann doch die Gleichungsform § 117, (3) der Kreisschnitte sich nur für die 6 Strahlen dieser Strahlbüschel einstellen, welche auch den Gl. § 117, (12) unter Elimination von λ genügen.

151. **Die Kreispunkte.** Der *Begriff der Kreispunkte* ist von *Monge* (1795) eingeführt nach Baltzer, Geom. S. 459; vgl. *Monge*, J. éc. polyt. cah. 2 (1796), S. 155; 160; Applic. de l'analyse, 4. Aufl. Paris 1809, S. 127. Ihre Koordinaten § 58, (22); § 60, (22); § 61, (19) bei *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 260; 262 f. Daß sie auf den Fokalkegelschnitten liegen § 58, 7; § 60, 7; § 61, 7 bemerkt *Dupin*, Dév. (1813), S. 278; 321; vgl. *Steiner* (1825), Werke 1, S. 11; *Plücker,* System (1846), S. 252.

152. **Die Kartonmodelle.** Die *Kartonmodelle* § 58, 10; § 59, 9; § 60, 9; § 61, 9; § 62, 6 sind auf Grund einer Anregung von *O. Henrici,* London 1871, zuerst von *A. Brill* (1874) hergestellt; in der beigegeb. Beschreibung findet man

auch die Formel § 58, (24); § 59, (23); § 60, (24); § 61, (21); § 62, (16) im wesentlichen vor; s. *Dyck,* Katalog S. 258. *H. Wiener,* bei B. G. Teubner 1908, ersetzt die Kartonblätter durch Drahtkreise mit „geschränktem Verbindungsgelenk".

153. **Besondere Mittelpunktsflächen.** I. Das Ellipsoid § 58, 12 und die Hyperboloide § 59, 10; § 60, 10 mit rechtw. Kreisschnittebenen schließen sich an den Kegel Anm. 143, IV an.

II. Daneben tritt § 58, 11 das Ellipsoid mit konjugierten Hauptkreisschnittebenen.

III. Bei dem einschaligen Hyperboloid § 64, (1) mit $a^2 = c^2$ sind nach § 64, (3) nur die Erzeugenden in den Scheitelpunkten der kleinen reellen Achse $2b$ zueinander senkrecht.

154. **Besondere Paraboloide.** I. Das *gleichseitige hyperbolische Paraboloid* § 62, 7 erklärt *Steiner* (1832), Werke 1, S. 380, als solches mit rechtwinkligen Asymptotenebenen (s. Anm. 155); die Bedingung § 62, (17) bei *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 249. Infolge der Eigenschaft § 65, 17; § 116, 15 entspricht das gleichs. hyp. Par. dem *gleichseitigen* Hyperboloid, infolge der Eigenschaft, daß seine Kreisschnittebenen § 117, 13, V auf einer Scheitelerzeugenden senkrecht stehen, dem *orthogonalen* Hyperboloid, nach *Schröter,* Oberfl. S. 220; 224. Ausführlich ist es nebst der Erzeugung § 100, 9 behandelt von *A. Schoenfließ,* Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 245; 269; *Schröter*, Oberfl. S. 218.

II. Das elliptische Paraboloid § 61, 10 entspricht dem Kegel Anm. 143, IV.

155. **Die geradlinigen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids.** Daß das *hyp. Parab. keine Kreisschnitte* hat, s. Anm. 150, II. Indessen treten dafür nach *Berthot-Hachette* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433 die Schnitte § 62, 3 ein, die aus *einer endlichen* (und einer unendlich fernen Geraden bestehen § 115, (40) und sowohl zu den *gleichseitig hyperbolischen* § 116, (33) als zu den *Kreisschnitten* § 117, 13, V gehören. Die Ebenen dieser Schnitte nennt *Steiner* (1882) Werke 1, S. 376 Asymptotenebenen.

156. **Gerade Linien auf der Fläche 2. O.** I. Das *Rotationshyperboloid* § 53, (18) (corpus cylindroides hyperbolicum) wurde als Linienfläche erkannt von *Wren* (1669) und *A. Parent* (1698) nach Chasles, Aperçu V § 46 und Cantor 3, S. 418. Die beiden Scharen der Erzeugenden des *dreiachsigen* einschal. Hyperboloides § 63, 3 entdeckte *Monge,* J. éc. polyt. cah. 1 (1794), S. 5; *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 159. Beim hyperbol. *Paraboloid* § 65, 3 entdeckte die eine Schar nach dem Vorgange von *Clairaut* (1731), *Frézier* (1738) nach Cantor 3, S. 793; *Braikenridge* (1759) nach Cantor 4, S. 556; 1079; die beiden Scharen *Mauduit* (1763) nach Cantor 4, S. 556; 1080; endlich *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 167. Die Anzahl der Bedingungen dafür, daß die Gerade § 63, (1) mit ihren vier Konstanten ganz auf der Fläche $n$ter Ordnung liegt, ist nach dem Verfahren § 63, 1 gerade $n+1$. Daher enthält die Fläche 1. O. ∞^2, die Fläche 2. O. ∞^1, die Fläche 3. O. nur noch eine begrenzte Zahl, die Flächen höherer O. i. a. keine Geraden mehr.

II. Als *Schnittlinien der Fläche mit der Tangentialebene* § 67, 8 erscheinen die Erzeugenden bei *Dupin*, Dév. (1813), S. 52; vgl. *Moebius* (1827) Werke 1, S. 139; die Gleichungen § 67, (26) gibt *Cauchy,* Exerc. 3 (1828), S. 110; s. Anm. 178.

III. Als *Inflexions- oder Haupttangenten* (Asymptoten der Indicatrix) § 67, 8 betrachtet sie ebenfalls *Dupin,* Dév. S. 52; 189f.

IV. Jede Erzeugende ist daher (§ 14, 5, III) ihre *eigne konjugierte Tangente* nach *Dupin,* Dév. S. 44; 51 und damit ihre *eigne reziproke Polare* § 68, 21.

157. **Analytische Darstellung der Erzeugenden.** I. Die Darstellung der Erzeugenden in *gemeinen* Koordinaten beim Hyperboloid § 63, (22); § 64, (19) gibt *Cauchy*, Applic. (1826), S. 228; *Bobillier,* Quetel. Corr. 4 (1828), S. 30; beim Paraboloid § 65, (9) *Cauchy,* ebd. S. 221.

II. Die Darstellung in *Tetraederkoordinaten* § 159, (15) von *Plücker,* System (1846), S. 105.

158. **Die beiden Scharen von Erzeugenden.** Daß durch jeden Punkt der Fläche zwei Erzeugende gehen § 63, (8); (12) und in jeder Tangentialebene zwei liegen § 82, (29′) ergab sich bei *Dupin,* s. Anm. 156, III. Daß sich zwei ungleichnamige schneiden und zwei gleichnamige nicht § 63, 4; § 65, 4 hebt *Moebius* (1827) Werke 1, S. 140 und *Steiner* (1827) Werke 1, S. 149 hervor; das erstere ergibt sich auch aus der allg. Darst. § 147, 8.

159. **Metrische Beziehungen der Erzeugenden.** I. Beim Hyperboloid sind je *zwei* ungleichnamige *Erzeugende,* die durch denselben unendl. fernen Punkt gehen, *parallel* und einer Erz. des Asympt. Kegels parallel § 63, 5 nach *Steiner* (1827) Werke 1, S. 150 f.; *v. Staudt,* G. d. L., S. 214; beim Paraboloid alle gleichnamigen einer Asympt.ebene parallel nach *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 167; keine zwei parallel, da durch einen unendl. f. Punkt der Fläche schon eine unendl. f. Erz. § 65, (11) geht, *Schröter*, Oberfl. S. 212.

II. Der Ort *rechtwinkliger* Erzeugender für d. Hyperboloid § 64, 1; § 116, 6 bei *Plücker,* System (1846), S. 207, in allgemeiner Auff. bei *Bauer,* Münch. Ber. 1881, S. 242; für d. Paraboloid § 65, 16, III; § 116, 12 bei *Plücker,* ebd. S. 208. Den Ort der Erzeugenden mit beliebig gegebenem Winkel bestimmt *Bobillier*, Quet. Corr. 4 (1828), S. 35 nach Kötter, Ber. S. 74.

160. **Faden- und Stabmodelle.** I. Auf das Fadenmodell des Hyperboloides § 63, 7 deutet *Monge*, Géom. déscript. (1798), Ostwald's Klassiker Nr. 117, S. 174 hin; auch die Teilung der Ellipse § 63, Fig. 153 von *Monge* nach *Hachette*, Corr. polyt. 2 (1812), S. 329. Die *Fadenmodelle* § 63, 7; § 65, 11 *selbst* sind von *Th. Olivier* (1830) angefertigt nach Jahrb. d. Fortschr. 1868, S. 298; *F. Müller,* Führer durch die math. Lit., S. 206, und später bei *Ch. Delagrave*, Paris, *L. Brill,* Darmstadt, *Winkelmann u. S.*, Berlin 1879 erschienen; s. *Dyck,* Katalog, S. 259.

II. Das *bewegl.* Stabmodell § 63, 12, wurde von *O. Henrici* (1874) entdeckt, vgl. *Dyck,* Katalog, S. 261; *F. Klein,* Geom. 1, S. 50; *A. Cayley*, Mess. 8 (1879), S. 51; *E. Lucas*, Nouv. Ann. (2) 20 (1881), S. 9; *A. Mannheim,* Par. C. R. 102, (1886), S. 501. Eine wichtige Verbesserung zeigen die Stabmodelle von *H. Wiener* mit „geschränktem Verbindungsgelenk" bei Teubner, 1908.

161. **Parameterdarstellungen der Flächen 2. O.** I. Bei der Parameterdarstellung der gemeinen Koord. der *Punkte* § 63, (25); § 65, (15) und *Tangentialebenen* § 82, (33); § 83, (24) der Fläche 2. O. dienen die Erzeugenden als Koord.linien auf der Fläche, *Gauß* (1828), Werke 4, S. 224 In Tetraederkoordinaten § 159, (26) nach *Moebius* (1827) Werke 1, S. 136 lehnt sie sich an ein Schmiegungstetraeder an.

II. Die Parameterdarstellung der gemeinen Linienkoord. der *Erzeugenden* § 82, (27); § 83, (20) schließt sich an die Parameterdarst. der Kegelschn. § 6, (10) an und enthält diese als Spezialfall (I § 48, (9')). Für Tetraederkoord., entsprechend § 159, (17), gibt *F. Schur*, Math. Ann. 21 (1883), S. 518 eine Parameterdarst. mit drei abhäng. Parametern.

162. **Projektive Punktreihen und Ebenenbüschel an den Erzeugenden.** I. *Ähnliche* Punktreihen auf den Erzeugenden des hyperbol. Paraboloids bei *Mauduit* (1763) nach Cantor 4, S. 556; *Tinseau* (1780) nach Kötter, Ber. S. 77; *Meier Hirsch*, Aufg. 2 (1807), S. 237; *Giorgini*, Corr. polyt. 2 (1813), S. 439; *Moebius* (1827) Werke 1, S. 214. *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 280.

II. Projekt. Punktreihen auf den Erzeugenden § 63, 10 und Ebenenbüschel an ihnen § 82, 11; § 83, 11 im vollen Umfange erhalten von *Steiner* (1832), Werke 1, S. 363—373, teilweise auch von *Chasles*, Aperçu (1837) Note IX.

163. **Aufgeschriebene Sechsseite.** Die Sätze über das *auf einem Hyperboloid liegende Sechsseit* § 63, 13; § 160, 1—9; *Hesse* J. f. Math. 24 (1842), S. 40 = Werke S. 58., vgl. *J. D. Dandelin*, Ann. de math. 15 (1824/5), S. 387; *Plücker,* System (1846), S. 129; N. Geom. (1868), S. 119; *Hesse,* Werke S. 651; 676; *O. Hermes,* J. f. Math. 56 (1858), S. 210; *F. Gräfe,* J. f. Math. 93 (1882), S. 87.

164. **Gleichseitige Kegel und Hyperboloide.** I. Daß ein Kegel zwei Tripel rechtwinkliger Erzeugender haben kann, bemerkt *Ampère* (1826) nach Kötter, Ber. S. 71. Den vollen Begriff der *gleichseitigen* und *dual gleichseitigen Kegel* § 71, 10; § 93, 4; 5 entwickelt *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 323; 324; auch bemerkt er die entsprechenden *Rotations*kegel ($x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$, § 64, (9); $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$).

II. Das gleichseitige Hyperboloid § 64, 4; § 116, 9 wird ausführlich behandelt von *H. Vogt,* J. f. Math. 86 (1879), S. 301; *Schröter*, Oberfl. S. 195.

III. Der tiefere Grund dafür, daß es beim allgemeinen Hyperboloid kein Tripel von senkrechten Erzeugenden gibt, beim gleichseitigen unendlich viele, liegt in der Theorie der gleichseitig hyperbolischen Schnitte § 116, 8. 9.

165. **Orthogonale Hyperboloide und Kegel.** I. Die *charakteristische Eigenschaft* § 64, 5 des „besonders einfachen“ *einschaligen Hyperboloides* und *Kegels* hebt *Steiner,* J. f. Math. 2 (1827), S. 292 = Werke 1, S. 162; Syst. Entw. (1832) Werke 1, S. 394; 385 hervor auch *Chasles*, J. de math. (1) 1 (1836), S. 331; der Name *„orthogonal“* § 64, 5 von *H. Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 41 und Oberfl. S. 184; 195. Die analyt. Bed. § 64, (16) von *Schoenfließ*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 269. Die Auffassung der charakt. Eigenschaft als Beziehung zum imag. Kugelkreis § 100, 7 und die allg. Bed. § 100, (29) bei *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 195. Wenn der Pol der Geraden $S_1 S_2$ § 100, (24) in bezug auf den Kugelkreis auf der Kurve (2) liegt, liegt auch der Pol der Geraden $S_3 S_4$ auf ihr nach *Sturm*, Jahrb. der Fortschr. 1878, S. 414. Deshalb geben die sechs Seiten des Vierecks nur drei Bedingungen § 100, (27).

II. Das *zweischalige* orthogonale Hyperboloid § 64, 5, letzter Absatz, bei *R. Sturm*, Jahrb. d. Fortschr. d. Math. 10 (1878), S. 416.

III. Die *dual orthogonalen* Hyperboloide und Kegel § 82, 16 nach *H. Schröter,* Oberfl. S. 71.

IV. Die *Erzeugung* des orthog. Hyperboloides durch *kongruente Ebenenbüschel* § 100, 8 entspricht derjenigen des Kreises durch kongr. Strahlbüschel

§ 38, 8; der *Spezialfall* § 64, 7, wo entsqrechende Ebenen beider Büschel *senkrecht* sind, dem Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in § 38, 8. Diese *spezielle* Erzeugung § 64, 7 gibt für den Kegel *Hachette*, Corr. polyt. 1 (1806), S. 179, für das Hyperboloid *Binet*, Corr. polyt. 2 (1810), S. 71; *Steiner* (1832) Werke 1, S. 385. 394; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 282; *Plücker*, System (1846), S. 112. *Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 42; Oberfl. S. 188.

Die allgemeine Erzeugung § 100, 8 gibt nach dem Vorgange von *W. Fiedler*, *F. Ruth*, Wien. Ber. 80 (1879), S. 257; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 385f.; *Schoenflies* Zeitschr. Math. Phys. 28 (1883), S. 233; Geom. der Bewegung (1886), S. 107.

V. Die Erzeugung durch einen Punkt, dessen *Abstände von zwei windschiefen Geraden ein konstantes Verhältnis* haben, § 100, 9 gibt *Chasles*, J. de math. (1) 1 (1836), S. 331; *Magnus*, Aufg. 2 (1837), S. 266 f. die weiteren Beziehungen § 100, 10—11 von *Schoenflies*, Zeitschr. Math. Phys. 23 (1878), S. 245; 269; 24 (1879), S. 62 und *Schröter*, J. f. Math. 85 (1878), S. 28; 46; *H. Milinowski*, J. f. Math. 85 (1878), S. 88.

166. **Reziproke Polaren und konjugierte Gerade.** I. Der Begriff der *reziproken Polaren bei der Fläche 2. O.* entwickelt sich im Sinne von § 68, 15, V bei *G. Monge,* Géométrie descriptive (1798) in Ostwalds Klassikern Nr. 117, S. 65, sowie Feuilles d'analyse (1801) nach Kötter, Ber. S. 48. Der Name „droites polaires" bei *Poncelet*, Traité (1822), art. 590; „reziproke Polaren" bei *Hesse*, Vorl. Raum, S. 133. Die Hauptsätze § 68, 15; 16; 27 bei *Hesse,* a. a. O. S. 133; 150f. An § 68, 27 schließt sich noch der Satz, daß die beiden gemeinsamen Transversalen (I § 60, 6) von zwei Paar reziproken Polaren wieder reziproke Polaren sind, von *F. Klein*; *A. Cayley*, Quart. J. 15 (1877), S. 124; *Rosanes,* Math. Ann. 23 (1884), S. 416.

II. Der Begriff der reziproken Polaren *beim linearen Komplex* (Nullsystem) § 86, 9 tritt bei *Moebius* (1833) Werke 1, S. 507 auf.

III. Beide Begriffe I und II ordnen sich dem Begriff von „Linie" und „Gegenlinie" bei der *allg. Reziprozität* unter nach *Moebius* (1833) Werke 1, S. 493 und entsprechen den beiden *involutorischen* Reziprozitäten § 78, 14.

IV. Neben beiden führt *von Staudt*, G. d. L. (1847), S. 191 den Begriff der „*konjugierten Geraden*" § 68, 31, III; § 86, 11 ein.

V. Dort § 68,31, IV; § 68, 21 erhält man als Ort der Geraden, die zu sich selbst konjugiert sind, den Tangentenkomplex, und als Ort der Geraden, die ihre eignen reziproken Polaren sind, die Regelscharen; hier § 86, 10; 11 beidemal den Komplex selbst.

167. **Konjugierte Tangenten.** Begriff und Eigenschaften der konjugierten Tangenten § 68, 17—20 nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 44ff.; *v. Staudt*, Halbm. S. 38.

168. **Hauptachsengleichungen in Linienkoordinaten.** I. Die Gleichungen § 70, (23); (41) nach *Plücker*, N. Geom. S. 256; *Clebsch-Lindemann*, Raum, S. 143.

II. Auf die Darstellung § 71, (16); (19) der *Kegel* und *Kegelschnitte* in Linienkoord. weist *Plücker*, a. a. O. S. 259 hin; vgl. *Clebsch-Lindemann*, a. a. O. S. 150. Die erste Darstellung der Raumkurven in diesem Sinne bei *Cayley*, Quart. J. 3 (1860), S. 225.

169. **Reziprokalkegel und orthogonales Polarbündel.** I. *Reziproke sphärische Dreiecke* bei *Vieta* (1593) u. *Snellius* (1627) nach Cantor 2, S. 605; 707.

Die zusammen gehörigen *Gleichungen reziproker Kegel* § 71, (1) und (22) gibt *Steiner* (1827) Werke 1, S. 117; ihre ausführliche Theorie *Chasles*, Cônes (1830), S. 8; die Beziehung der Fokallinien und Kreisschnitte § 71, 9 *Chasles,* ebd. S. 12.

II. Der allgemeinere Begriff ist das *orthogonale Polarbündel* § 84, 6, bei dem jedem Strahl des Bündels die zu ihm senkrechte Ebene entspricht, *v. Staudt,* G. d. L. (1847), S. 210; Halbm. S. 36; *Reye,* G. d. L. 2, S. 97.

170. **Parallelepipedon, durch drei Erzeugende bestimmt.** I. Das Parallelepipedon beim *Hyperboloid* § 74, 5 und sein konstantes Volumen § 92, (24) bei *Hachette,* J. f. Math. 1 (1826), S. 345; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 277; vgl. *H. Vogt,* J. f. Math. 86 (1879), S. 297; *G. Bauer,* Münch. Ber. 1880, S. 637; *H. Schröter,* Münch. Ber. 1881, S. 238; *A. Schumann,* Zeitschr. Math. Phys. 26 (1881), S. 136. Das *rechtwinkl.* Parallelep. § 92, 6, dessen Ecken auf der Mongeschen Kugel liegen, bei *Schröter,* Oberfl. S. 199 f.

II. Das Parallelepip. beim *Paraboloid* § 74, 9 und § 92, (29) nach *Magnus,* Aufg. 2 S. 279; vgl. *Moebius,* Werke 1, S. 215.

171. **Gerade an drei Geraden gleitend.** I. Die Erzeugung des *Hyperboloides* § 74, 6; 7 zuerst bei *Monge,* Géom. descript. (1799), S. 130; *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 160; *Hachette,* J. f. Math. 1 (1826), S. 340; *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 321; *Moebius* (1827), Werke 1, S. 140. Das Koordinatensystem § 74, 7 und die mittlere Gl. § 74, (22) bei *Steiner* (1827), Werke 1, S. 150; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 277. Ein allgemeines Koordinatensystem benutzt *Hesse,* Raum S. 113. Die Gl. § 74, (22) ist ein Spezialfall einer allgemeineren Form § 147, 12.

II. Die Erzeugung des *Paraboloides* § 74, 11 von *Frézier* (1738) nach Cantor 3, S. 793; *Braikenridge* (1759) nach Cantor 4, S. 556; 1079. Das Koordinatensystem § 74, 10; 11 nach *Magnus* a. a. O. S. 279.

III. Die Bestimmung des Ortes einer Geraden, die an drei Ger. gleitet, fällt unter die allgemeinere Aufgabe, *den Ort der gemeinsamen Strahlen von drei linearen Komplexen zu bestimmen* § 147, 10. Die natürliche Ableitung der Gleichung § 147, (30); (28) aus § 147, (23) ist zuerst von *Plücker* (1865), Abhandl. S. 466, 505; N. Geom. (1868), S. 121 ff. gegeben, andere Ableitungen geben *Gordan,* Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868), S. 59; *Cayley,* Math. Ann. 4 (1871), S. 558; *Pasch,* J. f. Math. 75 (1873), S. 131 ff.; *Doehlemann,* Arch. Math. Phys. (2) 17 (1899), S. 166; *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 142.

172. **Komplexgleichung der allg. Fläche 2. O.** Die allg. Gl. § 78, (28); § 144, (2) bei *Plücker,* N. Geom. (1869), S. 257; vgl. *Salmon-Fiedler,* Raum 1, S. 102; *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 142. Die Auffassung als *geänderte Determinante* § 144, (3) bei *Hesse,* Raum S. 179; *Baltzer,* Geom. S. 497; *Clebsch-Lindemann,* a. a. O. S. 143.

173. **Lineare Komplexe der Erzeugenden.** I. Von den *drei lin. Komplexen* § 82, (22) geht *Plücker,* N. Geom. S. 129, Formel (45) zu dem Hyperboloid § 82, (19) über (seiner Bez. — $\sigma, \varrho, \eta, r, s, 1;\ k_1, k_2, k_3$ entspricht hier $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34};\ -\frac{\varepsilon bc}{a}, -\frac{\varepsilon ca}{b}, \frac{\varepsilon ab}{c}$); die Bemerkung über den *Sinn der Windung* § 82, 9 bei *Plücker,* ebd. S. 130. Der Sinn einer Regelschar bei *v. Staudt,* Beitr. S. 39 ff. Das Verfahren § 82, 6 nach *Clebsch-Lindemann,* Raum S. 144.

II. Es findet seine umfassendere Bedeutung in der Aufstellung der sechs lin. Komplexe § 147, (17) oder (18) nach *Gordan,* Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868),

S. 59 und der Theorie der Determinante § 147, (4) nach *Voss*, Math. Ann. 10 (1876), S. 143; 13 (1878), S. 320; vgl. *Baltzer*, Det. S. 184; *Staude*, Arch. Math. Phys. (3) 9 (1903), S. 230.

III. Es vollendet sich schließlich in der Aufstellung *aller linearen Komplexe*, denen eine Regelschar angehört § 159, 7 nach *Plücker*, Neue Geom. (1868), S. 113; *P. Gordan*, Zeitschr. Math. Phys. (1) 13 (1868), S. 59.

IV. Der Begriff der Involution zweier linearen Komplexe § 159, 8 von *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), S. 201.

174. **Allgemeine Gleichung und Polarsystem des linearen Komplexes (Nullsystem).** Die *allgem. Gleichung* des linearen Komplexes in der aufgelösten Form § 86, (17) bei *Moebius* (1833), Werke 1, S. 494, in Linienkoordinaten § 86, (1); (2) bei *Plücker*, Abhandl. (1865), S. 464; 478 und Neue Geom. S. 26f.

Das *Polarsystem* des lin. Kompl. § 86, 6; 8—11, welches *Plücker*, N. G. S. 28f. behandelt, erscheint bei *Moebius*, Werke 1 S. 494 als involutorischer Sonderfall der allg. Korrelation des Raumes § 78, 14, in gleichem Sinne auch bei *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 191, wo es als „*Nullsystem*" bezeichnet wird. *Moebius* hat für Pol, Polarebene, reziproke Polaren die Ausdrücke „Gegenpunkt, Gegenebene, Gegenlinie". Die Komplexlinien erscheinen bei ihm auf Grund des Satzes § 86, 10 als „Doppellinien", Werke 1 (1833), S. 508; vgl. 3 (1837), S. 118. Die Sätze § 86, 12, I; II finden sich bei ihm, Werke 1, S. 509, XX und XIX. Er folgert aus ihnen noch unter XXI, daß zwei Paare reziproker Polaren hyperboloidisch liegen.

175. **Mittelpunkt, Durchmesser, Hauptachse und Hauptebene des Komplexes.** Der *Mittelpunkt* § 87, 1 als Pol der unendl. fernen Ebene und ein *Durchmesser* § 87, 2 als eine durch diesen Pol gehende Gerade, wie beim Paraboloid § 73, 1.

Die *Hauptachsenrichtung* und *Hauptachse* § 87, 1; 4 führt *Moebius* (1833), Werke 1, S. 501; 506 ein („Hauptlinie"); *Durchmesser* § 87, 2 und *Hauptebenen* („Hauptschnitte") § 87, 4 bei *Plücker*, N. Geom. (1868), S. 32; 33; Satz § 87, 3 inhaltlich schon bei *Moebius*, Werke S. 507, XIV.

176. **Projektion reziproker Polaren beim Komplex.** Der Satz § 87, 9 vermittelt in der *graphischen Statik* die Beziehung zwischen Fachwerk und Kräfteplan nach *L. Cremona*, Le figure reciproche nella statica grafica, Milano, 1872; *F. Schur*, Math. Ann. 48 (1896), S. 191; Zeitschr. Math. Phys. 40 (1895), S. 48 und *A. Föppl*, Vorles. techn. Mechanik 2 (2. Aufl. 1903), S. 153f.

177. **Fokalachsen der Flächen 2. O.** Wie die *Brennpunkte* der Kegelschnitte solche *Punkte* sind, an denen die zugehörige Involution harmonischer *Polaren* eine rechtwinklige ist (Anm. 2, II), so sind die *Fokalachsen* der Flächen 2. O. solche *Gerade*, an denen die zugehörige Involution harmonischer *Polarebenen* eine rechtwinklige ist. Die letztere Eigenschaft erkannte für die Brennlinien des Kegels § 119, 11 *Chasles*, Cônes (1830), S. 11; vgl. *v. Staudt*, Geom. d. L. (1847), S. 212; *Schröter*, Oberfl. S. 52; für die Tangenten der Fokalkegelschnitte der Flächen 2. O. § 122, 10 *Plücker*, System (1846), S. 333; für die Erzeugenden aller konfokalen Flächen § 122, 10 vorbereitet bei *Jacobi*, J. f. Math. 12 (1834), S. 137 = Werke 7, S. 7; über die allg. Theorie vgl. *Reye*, G. d. L. 2, S. 230.

Das Auftreten der Fokalachsen bei der Erzeugung des orthog. Hyperboloids § 100, 11 bemerkt *H. Schröter,* Berl. Monatsber. 1877, S. 594; J. f. Math. 85 (1878), S. 67.

Die Fokalachsen entsprechen den Brennpunkten im Sinne von § 13, 8, II; den Komplex der Geraden, durch die, entsprechend § 13, 8, I, zwei senkrechte Tangentialebenen an die Fläche 2. O. gehen, betrachtet *Painvin,* Bull scienc. math. 2 (1871), S. 371.

178. **Tangentialebene als schneidende Ebene.** Daß die Tangentialebene die Fläche 2. O. in einem Geradenpaar schneidet, § 106, 6, bemerkt *Dupin,* Dével. (1813), S. 51; *Cauchy,* Appl. (1826), S. 209f.; *Steiner* (1832) Werke 1, S. 371. Überhaupt hat die Schnittkurve einer Fläche mit einer Ebene einen Doppelpunkt im Berührungspunkt nach *Plücker,* Abh. S. 113.

Die Ableitung der Gl. der Fläche in Ebenenkoordinaten aus dieser Eigenschaft § 107, (7) bei *Hesse,* Raum S. 393.

179. **Allgemeine Darstellung der ebenen Schnitte.** I. Ebene Schnitte der Flächen 2. O. überhaupt betrachtete *Fermat* nach Cantor 2, S. 818; *Kästner* (1758) und *Jacquier* (1735) nach Cantor 4, S. 457 und 601; *Dandelin* nach Dingeldey S. 13.

II. Die Methode der Einführung eines ebenen Koord.systems in der schneidenden Ebene § 108, 1; 2 bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 49; 50; dann in verbesserter Form bei *Cauchy,* Appl. 1, S. 263; *Hesse,* Raum S. 388ff., *Henrici,* J. f. Math. 64 (1865), S. 187.

180. **Parallele Schnitte der Flächen 2. O.** I. Die *Ähnlichkeit und ähnliche Lage paralleler Schnitte* § 110, 6; § 112, 10; § 113, 8 wird in unvollkommener Weise bei *Euler,* Introd. 2, App. art. 30 angedeutet und von *Monge-Hachette,* J. éc. polyt. cah. 11 (1802), S. 155 bewiesen, auch bei *Klügel* 3 (1808) S. 306; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 224; s. *Baltzer,* Geom. S. 490. Dabei gilt nach *R. Müller,* Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), S. 342 der weitere Begriff der Ähnlichkeit § 14, 10. Auch bei den Parabeln § 113, 8 genügt zur ähnl. Lage die gleiche *Richtung* der Hauptachsen, während der *Sinn* der Hauptachse (beim Durchgang der Parabel durch ein Parallellinienpaar § 74, 2 oder eine Doppellinie) umschlagen kann.

II. Der *Ort der Mittelpunkte* ebener Schnitte § 111, 4 für Rotationsflächen bei *Waring* (1762) nach Cantor 4, S. 522; allg. *Baltzer,* Geom. S. 515; s. Anm. 50.

III. Die Bemerkung § 113, 8, daß die in *s quadratische* Gleichung (§ 107, (8)):

$$-A^u = (A_{11}u^2 + \cdots + 2A_{12}uv) + 2(A_{14}u + \cdots + A_{34}w)s + A_{44}s^2 = 0$$

die *Diskriminante:*

$$\begin{aligned}&(A_{11}u^2 + \cdots + 2A_{12}uv)A_{44} - (A_{14}u + \cdots + A_{34}w)^2\\ &= \mathsf{A}_{44}u^2 + \cdots + 2\mathsf{A}_{56}vw + \cdots = A(\alpha_{11}u^2 + \cdots + 2\alpha_{23}vw + \cdots) \text{ (I Anm. 1, III(11))}\\ &= -AA_{44}^u \text{ (§ 111, (19))}\end{aligned}$$

hat, die nach § 113, (1) *verschwindet,* dürfte neu sein. Sie bedeutet bei den eigentl. Flächen ($A \neq 0$) oder Kegeln ($A = 0$), daß unter einem System paralleler parabolischer Schnitte nur *einer* vorkommen kann, wo die Parabel in ein Parallellinienpaar oder eine Doppellinie zerfällt.

181. **Hauptkrümmungsmittelpunkte.** I. Der § 110, 8 benutzte Satz lautet: Bestimmt man in einem Punkte $P = x, y, z$ der Fläche $f(x, y, z) = 0$

die *positive* Normale durch die Richtungskosinus:

$$\frac{f_1}{F},\ \frac{f_2}{F},\ \frac{f_3}{F};\ F = +\sqrt{f_1^{\,2} + f_2^{\,2} + f_3^{\,2}},$$

unter f_1, f_2, f_3 die partiellen Differentialquotienten von f verstanden, so sind die Hauptkrümmungsradien, als *relative* Entfernungen $\varrho_1 = PM_1$ und $\varrho_2 = PM_2$ der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 von P auf der positiven Normale, die Wurzeln der in ϱ quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_{11} + \frac{F}{\varrho} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} + \frac{F}{\varrho} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} + \frac{F}{\varrho} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Cauchy, Applic. (1826), S. 344; *Baltzer,* Determ. S. 155. Mit $2f = g$ geht hieraus die Gleichung § 110, (22) hervor.

II. Die Unterscheidung *positiv* und *negativ gekr.* Flächen zuerst bei *Meusnier* Par. mém. prés. 10 (1776), S. 491 ff. nach Baltzer, Geom. S. 457. Das *konstante* Vorzeichen der Krümmung bei den Fl. *2. O.* § 115, 1 nach *Dupin*, Dével. (1813), S. 195; 205, während bei Fl. höherer Ordnung Gebiete von pos. u. neg. Kr. durch die *Demarcationslinie* getrennt sind, *Dupin,* a, a. O. S. 195.

III. Den Zusammenhang zwischen Hauptkrümmungsradien und Hauptachsen eines ebenen Schnittes § 110, 8 begründet *Dupin,* Dével., S. 29; 206, indem er mittels einer affinen Transformation den gerade betrachteten Punkte der Fläche zu einem Scheitelpunkt macht.

IV. Die Darstellung durch ellipt. Koord. und die Polarbeziehung § 121, 11 von *G. Salmon* nach Salmon-Fiedler, Raum 1, S. 312; *R. Townsend,* Camb. Dubl. J. 5 (1850), S. 177.

182. **Klassifikation der ebenen Schnittkurven der Fläche 2. O.** I. Ansätze zu einer vollst. Klassif. der ebenen Schnitte bei *Cauchy,* Appl. S. 263ff.; *Hesse,* Raum S. 388 ff. Die hier gegebene Darstellung erreicht auf *elementarem* Wege die Herstellung *aller kanonischen Gleichungen* § 114, (3), deren Vergleich mit § 26, (2) zugleich die kurze Bezeichnung der geränderten Determinanten durch den obern Index u rechtfertigen dürfte, sowie der Tabelle § 114, (20) *aller möglichen Schnittkurven* bei Annahme gem. rechtw. Koordinaten.

II. In Tetraederkoordinaten § 153, 11 wird die Klassifikation der ebenen Schnitte umfassend behandelt von *Gundelfinger* in *Hesse,* Raum S. 467. Die Tabelle § 153, (22) vertritt *zwei* Tabellen, insofern ihre Kolonnen- und Zeilenüberschriften nach § 155, (41) und § 156, (38) in den *Summen* der Hauptunterdeterminanten dargestellt werden können (s. Anm. 76, VII).

III. Der Aufbau der Tabelle § 114, (20) stützt sich auf die allgemeinen Tabellen § 156, (38) und § 157, (25).

183. **Besondere ebene Schnitte.** I. Als Schnitte *verschiedener Rotationskegel,* senkrecht zu einer Kante geführt, wurden die drei *„Kegelschnitte“* (s. Anm. 1) von *Archimedes* erhalten nach Tropfke 2, S. 432, als Schnitte *eines und desselben elliptischen* Kegels § 115, 9 bei *Apollonius* nach Tropfke, Gesch. 2, S. 437.

II. Daß die Schnitte des *hyp. Parab.* § 115, 8 niemals geschlossene Kurven 2. O. sein können, hebt hervor, *Hachette,* Corr. polyt. 1 (1808), S. 433.

III. Die Beziehung der *parabolischen Schnitte* § 74, 2 und § 115, 4; 5 zum Asymptotenkegel bei *Steiner,* Werke 1, S. 445 Anm.; *Magnus,* Aufg. 2 (1837), S. 247. Das Vorkommen von *Parallellinienpaaren* bei *Cauchy,* Appl. (1826), S. 271; *Steiner,* Werke 1, S. 151; 371; *v. Staudt,* G. d. L. S. 214.

184. **Gleichseitig hyperbolische Schnitte.** Die ebene Schnittkurve § 110, (11) der Fläche 2. O. hat *ein gegebenes Achsenverhältnis* $\frac{1}{\lambda_1} : \frac{1}{\lambda_2} = m : -n$, wenn die Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung § 109, (11) die (rational gemachte) Bedingung erfüllen:

$$(m\lambda_1 + n\lambda_2)(m\lambda_2 + n\lambda_1) = 0 \quad \text{oder} \quad (m-n)^2\lambda_1\lambda_2 + mn(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 0$$

oder nach § 109, (25):

$$(m-n)^2(u^2 + v^2 + w^2)A_{44}^u - mn(A_{44}'^u)^2 = 0\,.$$

Diese stellt, in Verbindung mit $s = 0$, einen *Kegel 4. Klasse* dar, den *Leitkegel der Schnitte vom Achsenverhältnis* $m : -n$, auf den *Steiner,* Syst. Entw. (1832), Werke 1, S. 445, Aufgabe 31, hinweist. Für $m = n$ zerfällt er in den doppelt zählenden Kegel 2. Kl. § 116, (11) den Leitkegel der *gleichseitig hyperbolischen Schnitte* (*Steiner,* a. a. O. Aufgabe 30). Für $m = -n$ zerfällt er in vier Strahlen (vier Ebenenbüschel), $\Theta = 0$ (§ 109, (16)). Von den Ebenen dieser vier Büschel kommen aber nur die 6 Verbindungsebenen der vier Strahlen als *Kreisschnitte* in Betracht aus dem Anm. 150, VI dargelegten Grunde. Für $m = 0$ oder $n = 0$ kommt er auf den Asymptotenkegel § 111, (19), den Leitkegel der *parabolischen Schnitte* (Steiner a. a. O. S. 445, Anm.) zurück.

Über die *gleichseitig hyperbol. Schnitte* s. *O. Schlömilch,* Zeitschr. Math. Phys. 6 (1861), S. 418; *Beyer,* Diss. Breslau 1868; *H. Schröter,* Oberfl. (1880), S. 75; 195; 218; *O. Rupp,* Wien, Ak. Ber., math. naturw. Kl. 86, 2 (1882), S. 909 ff.; *Gillet,* Mathésis (2) 2 (1892), S. 153; 180; 223; *M. Krewer,* Arch. Math. Phys. (2), 12 (1894), S. 208; *G. D. E. Weyer,* ebd. 14 (1896), S. 139; *B. Hoppe,* ebd. 14, S. 436; *W. Rulf,* Monatsh. f. Math. 7 (1896), S. 93; *K. Schober,* ebd. S. 111; genauere Angaben bei *W. Bath,* Diss. Rostock 1904; vgl. auch *Steiner* (1826), Werke 1, S. 13.

185. **Ebener Schnitt senkrecht zu einem Fokalkegelschnitt.** Daß ein durch einen Punkt P_0 eines Fokalkegelschnittes senkrecht zu diesem gelegter Schnitt in P_0 einen Brennpunkt hat, bemerkt für den *Kegel* § 119, 11, II *Chasles,* Recherches (1829), S. 9; Cônes (1830), S. 13; *Plücker,* System (1846), S. 299; für die *eigentl.* Flächen § 127, 10; § 128, 8 *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (28); die Schlußweise § 127, 10 bei *Plücker,* System (1846), S. 290; 295; die allg. Auffassung § 127, 12 bei *SalmonFiedler,* Raum S. 263.

186. **Gemeinsame Tangenten zweier konfokaler Flächen und Fokalstrahlen.** Die Bestimmung der gemeinsamen Tangenten zweier konf. Fl. § 122, (8) gibt *Liouville,* J. de math. (1) 11 (1846), S. 112; 12 (1847), S. 423; vgl. *Gundelfinger* in Hesse, Raum, S. 496.

Die gemeinsamen Transversalen der Fokalkegelschnitte heißen bei *Mac Cullagh* (1843), Works S. 303, *bifocal right lines.*

Ihre Konstruktion § 134, 1; § 137, 1 für § 132, Fig. 203; § 136, Fig. 211 bei *Staude,* Fokaleigenschaften (1896), S. 183.

187. **Senkrechter Schnitt der scheinbaren Umrisse.** Der Satz § 122, 6, II für zwei beliebige Flächen τ_1 und τ_2 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (33); für eine Fläche τ_1 und einen Fokalkegelschnitt $\tau_2 = \beta, \gamma$ bei *Chasles,* ebd. art. (13); für die beiden Fokalkegelschnitte § 122, 6, III bei *Chasles,* Nouv. Mém. Acad. Brux. 5 (1829), nach Aperçu, a. a. O. art. (14).

188. **Fokaleigenschaften der konjugierten Fokalkegelschnitte.** Der Ausdruck *„focales conjuguées“* § 131, 1; § 135, 1 bei *Chasles,* Aperçu (1837), Note XXXI, art. (7) Anm. Die *Fokaleigenschaften* der Fokalkegelschnitte § 131, 5—7; § 135, 4 gibt *Ch. Dupin,* Dével. (1813), S. 280; Corr. polyt. 1 (1807), S. 218; 2 (1813), S. 424; vgl. *Dandelin,* Brux. Nouv. mém. acad. 2 (1822), S. 171; 3 (1826), S. 1; Ostwalds Klassiker, Nr. 117, S. 206; *Jacobi* (1834), Werke 7, S. 8; *Chasles,* Par. C. R. 16 (1843), S. 1108; *Plücker,* System (1846), S. 264; *Hesse,* Raum, S. 353; *Baltzer,* Geom. S. 528; *Steiner-Geiser,* Kegelschn. (1875) S. 175; *Schröter.* Oberfl. S. 603; 605.

189. **Gleichungen 3. und 4. Grades.** I. Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der *kubischen Gleichung:*

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

so genügen die drei Werte:

$$y_1 = x_2 + x_3, \quad y_2 = x_3 + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2$$

der unsymmetrischen Funktion $y_1 = x_2 + x_3$ der Wurzeln ihrerseits der Gleichung (§ 137, (12)):

$$y^3 + 2py^2 + (p^2 + q)y + (pq - r) = 0;$$

nach dem allg. Satz über unsymmetr. Funktionen der Wurzeln von *Lagrange* (1771), *J. A. Serret,* Höh. Algebra, deutsch von *G. Wertheim* 1 (2. Aufl. 1878), S. 328; *Encyklopädie* der math. W. I, 1, S. 468, art. 16 (*K. Th. Vahlen*); die Gleichung § 137, (12) selbst von *Binet,* J. éc. polyt. cah. 16 (1813), S. 52.

II. Die Bestimmung der Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der *biquadrat. Gleichung:*

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

führt auf die *kubische Resolvente* (§ 134, 6):

$$y^6 + Py^4 + Qy^2 + R = 0,$$

deren Koeffizienten:

$$P = -3p^2 + 8q, \quad Q = 3p^4 - 16p^2q + 16pr + 16q^2 - 64s,$$
$$R = -(p^3 - 4pq + 8r)^2,$$

und deren Wurzeln die sechs Werte

$$y_1 = x_2 + x_3 - x_1 - x_4, \quad y_2 = x_3 + x_1 - x_2 - x_4, \quad y_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$y_4 = -x_2 - x_3 + x_1 + x_4, \quad y_5 = -x_3 - x_1 + x_2 + x_4, \quad y_6 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4$$

der unsymmetr. Funktion y_1 sind; Methode von *Lagrange, Serret-Wertheim* a. a. O. 2 (1879), S. 396; *Encyklopädie* I, 1, S. 502 (*O. Hölder*).

190. **Die biquadratische Gleichung der gebrochenen Fokaldistanzen.** Das Verfahren § 134, 2; 9, *erst* die *Längen* der gebr. Fokaldistanzen aus einer Gl. 4 Grades § 134, (14) und *dann* die Koordinaten x_0, y_0 der *Knickpunkte* aus den linearen Gl. § 134, (12) zu bestimmen, entspricht dem Verfahren des Hauptachsenproblems, wo ebenfalls *erst* die *Hauptachsenkoeff.* aus der kub. Gl. § 88, (17) und *dann* die *Richtungskosinus* der Hauptachsen aus § 88, (15) bestimmt werden. Die Resolvente § 134, (18) der Gl. § 134, (14) ist die Definitions-

gleichung der ellipt. Koordinaten § 120, (10), wie auch in der Darstellung § 134, (23′) zum Ausdruck kommt. Das entsprechende gilt für das Verfahren § 137, 2; 4.

191. **Umbeschriebene Vierseite.** I. Die erste der beiden Möglichkeiten des Satzes § 145, 2 findet *C. J. Brianchon*, Mém. lign. du 2 ordre (1817), S. 14; *Poncelet*, Traité (1822), Art. 153; beide Möglichkeiten erkennt *Th. Weddle*, Cambr. Dubl. J. 8 (1853), S. 106; vgl. *G. Bruno*, Torin. Atti 17 (1882), S. 35; *A. Mannheim*, Soc. Math. Fr. Bull. 25 (1897), S. 78. Die allgemeinere Aufgabe, wann n Punkte einer Fl. 2. O. Berührungspunkte eines geschl. Tangentenpolygons sein können, bei *A. Voss*, Math. Ann. 25 (1885), S. 39; 26 (1886), S. 231; *Zeuthen*, ebd. S. 247.

II. Den Ort der Tangenten, welche zwei feste Tangenten schneiden § 145, 4 behandelt *J. Cardinaal*, Nieuw Arch. 10 (1883), S. 131.

192. **Quadratische Komplexe der Erzeugenden.** Während es *keinen linearen* Komplex gibt, dem *gleichzeitig beide* Scharen der Erzeugenden angehören § 159, 7, I, gibt es neben den *speziellen* quadrat. Komplexen § 146, (3) im allg. *einen quadrat.* Komplex, der beide Scharen enthält, nach *F. Schur*, Math. Ann. 21 (1883), S. 516; s. *W. Düker*, Dissert. Rostock 1910.

193. **Determinante $n$ten Grades.** I. Die *Inversionszahl* $\mathfrak{a}$ *einer Permutation* $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ der n Zahlen $12 \dots n$ ist die Summe der Anzahlen kleinerer, die auf jede der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ folgen; z. B. $\alpha = 15342$, $\mathfrak{a} = 0 + 3 + 1 + 1 + 0 = 5$; $\alpha = 14523$, $\mathfrak{a} = 4$. Die *Permutation* heißt *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ihre Inv.zahl ger. od. unger. ist. *Baltzer*, Det. (1875), S. 1.

II. *Definition der Determinante $n$ten Grades:*

$$(1)\quad A = |a_{lm}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} a_{\alpha_1\beta_1} a_{\alpha_2\beta_2} \dots a_{\alpha_n\beta_n},$$

wo sich die Summe entweder, bei fester Permutation $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ (in der Regel $\alpha = 12 \dots n$), über alle $n!$ Permutationen $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ oder, bei fester Permutation β (in der Regel $\beta = 12 \dots n$), über alle $n!$ Permutationen α erstreckt, und $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Invers.zahlen von α und β sind. Beispiele $n = 2, 3, 4$, s. I Anm. 1, I, (1); II, (1); III, (1); *Baltzer*, Det., S. 5.

III. *Adjungierte Unterdeterminanten.* Sind $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n$ und $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_n$ zwei Permutationen mit den Invers.zahlen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so sind:

$$(2)\quad p_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} a_{\alpha_1\beta_1} & a_{\alpha_1\beta_2} & \dots & a_{\alpha_1\beta_k} \\ a_{\alpha_2\beta_1} & a_{\alpha_2\beta_2} & \dots & a_{\alpha_2\beta_k} \\ & \dots & & \\ a_{\alpha_k\beta_1} & a_{\alpha_k\beta_2} & \dots & a_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix}, \quad q_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} \begin{vmatrix} a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_{k+1}\beta_n} \\ & \dots & \\ a_{\alpha_n\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}$$

zwei *adjungierte Unterdeterminanten* k ten ($k = 1, 2, \ldots,$ oder $n-1$) und $n-k$ ten Grades. Den $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ Kombinationen $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$ und $\binom{n}{k}$ Kombinationen $\beta = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k$ entsprechen $\binom{n}{k}^2$ Unterdet. $p_{\alpha\beta}$ und zu jeder solchen gehört eine bestimmte $q_{\bar\alpha\bar\beta}$; z. B für $n = 4$ mit $\alpha = 314$, $\bar\alpha = 2$; $\beta = 124$, $\bar\beta = 3$ oder $\alpha = 23$, $\bar\alpha = 14$; $\beta = 24$, $\bar\beta = 31$:

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} \text{ und } a_{23} \text{ oder } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{43} & a_{41} \end{vmatrix}.$$

Der Faktor $(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ wird immer $+1$, wenn man die Kombination α, $\bar\alpha$ und β, $\bar\beta$ so wählt, daß die Permutationen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \alpha_{k+1} \ldots \alpha_n$ und $\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_k \beta_{k+1} \ldots \beta_n$ beide gerade sind, wie I Anm. 1, III, (3); (10).

IV. *Entwicklung nach Unterdeterminanten.* Die Determinante (1) ist:

$$A = \sum p_{\alpha\beta} q_{\bar\alpha\bar\beta}, \tag{3}$$

wo sich die Summe entweder, bei fest bleibender Kombination α, über alle $\binom{n}{k}$ Kombinationen β oder, bei fest bleibender Kombination β, über alle $\binom{n}{k}$ Kombinationen α erstreckt, und der Faktor $q_{\bar\alpha\bar\beta}$ in jedem Gliede die adjungierte Unterdet. von $p_{\alpha\beta}$ ist. Ist im ersten Falle $\bar\alpha$ nicht genau die „*komplementäre Kombination*“ zu α, die α zu einer vollen Permutation ergänzt, so ist die Summe in (3) nicht A, sondern 0; und entsprechend im zweiten Falle; *Baltzer,* Det. S. 30, Beispiele s. I Anm. 1, II, (6); III, (17); (19) und im vorl. Text § 43, (17); § 107, (8); (12); ferner für § 140, (12) ausgeführt:

$$A^{uu'} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1' & u_2' & u_3' & u_4' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_2' \\ u_3 & u_3' \end{vmatrix} + \cdots$$

und die ersten Faktoren der 6 Glieder nach I Anm. 1, III, (19) entwickelt (§ 140, (16)):

$$A^{uu'} = \sum_1^6{}^k \sum_1^6{}^l \alpha_{\bar k \bar l} q_k q_l;$$

und entsprechend § 140, (33); (36); (42); § 142, (40).

V. *Determinanten aus Unterdeterminanten.* Bedeutet A_{lm} die (adjungierte) Unterdeterminante des Elementes a_{lm}, so ist in der Bezeichnung von (2):

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A_{\alpha_1\beta_1} & A_{\alpha_1\beta_2} & \dots & A_{\alpha_1\beta_k} \\ A_{\alpha_2\beta_1} & A_{\alpha_2\beta_2} & \dots & A_{\alpha_2\beta_k} \\ & \dots & & \\ A_{\alpha_k\beta_1} & A_{\alpha_k\beta_2} & \dots & A_{\alpha_k\beta_k} \end{vmatrix} = (-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}} A^{k-1} \begin{vmatrix} a_{\alpha_{k+1}\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_{k+1}\beta_n} \\ & \dots & \\ a_{\alpha_n\beta_{k+1}} & \dots & a_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix};$$

und insbesondere für $k = n$ im Sinne von (1):

$$(5)\quad |A_{lm}| = A^{n-1};$$

Baltzer, Det. 58; Beispiele s. I Anm. 1, II, (4); (5); III, (7)—(9); im vorlieg. Text § 107, (19); § 142, (20); § 148, (4).

VI. Die *Multiplikationstheoreme* I Anm. 1, V gelten entsprechend für die Det. $n$ten Grades, § 140, 3; 5; 10; § 147, 3; 6.

VII. *Differentialquotienten.* In (2) ist $q_{\bar\alpha\bar\beta}$ auch als partieller Diff.-quot. darstellbar:

$$(6)\quad q_{\bar\alpha\bar\beta} = \frac{\partial^k A}{\partial a_{\alpha_1\beta_1}\,\partial a_{\alpha_2\beta_2}\dots\partial a_{\alpha_k\beta_k}},$$

s. § 147, 6; nach *Baltzer*, Det. S. 26.

194. **Erzeugung durch reziproke Bündel.** Die Erz. der Fläche 2. O. durch rezipr. Bündel § 158, 11 gibt *F. Seydewitz*, Arch. Math. Phys. 9 (1847), S. 193; vgl. *v. Staudt*, Beitr. (1856), S. 29; *H. Schröter*, J. f. Math. 62 (1863), S. 215; Oberfl. S. 452; *Reye*, G. d. L. 2, S. 37; vgl. *G. v. Escherich*, Wien. Ber. 85 (1882), S. 893. Die analyt. Darst. bei *W. Fiedler*, Darstell. Geom. 3 (1888), S. 533; *Salmon-Fiedler*, Raum S. 190. Durch „*gleichwinklige*" rezipr. Bündel, entsprechend § 38, 7, werden nach *Schoenflies*, J. f. Math. 99 (1885), S. 195, gewisse Rotationsflächen 2. O. erzeugt.