A COLLECTION OF PAPERS IN MATHEMATICS AND RELATED SCIENCES,
A FESTSCHRIFT IN HONOUR OF THE LATE GALAYE DIA
EDITORS : PROFS HAMET SEYDI, GANE SAMB LO, ABOUBAKARY DIAKHABY
SPAS-EDS (SAINT-LOUIS, CALGARY, 2018), WWW.STATPAS.ORG/SPASEDS/
IN EUCLID (WWW.PROJECTEUCLID.ORG)
DOI : 10.16929/SBS/2018.100

CHAPTER 13

On the weak convergence in $\mathbb{L}^p$ Spaces, *by Hamet Seydi*

Hamet Seydi. Email : hseydi@gmail.com.
Université Cheikh Anta Diop, Dakar, (SENEGAL).

Abstract. In this paper, we characterize the weak convergence in L^p on a locally compact Radon space (X, μ).

Keywords. Weak convergence; Integration theory; locally compact space; Radon measures .
AMS 2010 Mathematics Subject Classification. 28A25; 28A51; 28C05.

Cite tha chapter as :
Seydi, H.(2018). Sur la convergence faible dans les espaces $\mathbb{L}^p$. In *A Collection of Papers in Mathematics and Related Sciences, a festschrift in honour of the late Galaye Dia* (Editors : Seydi H., Lo G.S. and Diakhaby A.). Spas Editions, Euclid Series Book, pp. 247 – 255
Doi : 10.16929/sbs/2018.100-03-01

H. Seydi *et al.* (Eds.) A Collection of Papers in Mathematics and Related Sciences, a festschrift in honour of the late Galaye Dia.
Doi : 10.16929/sbs/2018.100

Foreword. This paper has been publish in the *Annales de la Faculté des Sciences de Dakar, Tome 31 (1978)* and was reproduced in the *Proceedings of the Second International Symposium in West Africa on Functional Analysis and its applications, Kumasi (1979).* The public reached by those publications, being very restricted, we wish to present it to worldwide audience through this festschrift.

Abstract. The aim of this paper is to prove the following theorem.

THEOREM 34. *Let X be a locally Hausdorff compact space, μ a Radon Nykodym on X and (f_n) be a sequence of measurable functions (with respect to μ) belonging to $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ which converges in measure to a measurable function. Let $\bar{g}$ stand for the equivalence class of a measurable function g with the equivalence relation $\mathcal{R}$ induced by the ν-a.e equality and $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ be the quotient by $\mathcal{R}$. Then the following conditions are equivalent.*

(1) The function $\bar{f}$ belongs to $\mathcal{L}^p$ and $(\bar{f})_{n\geq 0}$ weakly converges to $\bar{f}$ in $\mathbb{L}^p$.

(2) The sequence $(\bar{f})_{n\geq 0}$ weakly converges in $\mathbb{L}^p$.

(3) The sequence is $(\bar{f})_{n\geq 0}$ is bounded $\mathbb{L}^p$.

.

1. Introduction.

Soient X un espace localement compact et μ une mesure positive sur X. On désigne par $\mathcal{L}^p$ (pour tout nombre réel $p \geq 1$), l'espace vectoriel des fonctions μ-mesurables f telles que $|f|^p$ soit μ-intégrable (nous dirons simplement mesurable au lieu de μ-mesurable et intégrable au lieu de μ-intégrable). Si $\mathcal{N}$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout, alors $\mathbb{L}^p = \mathcal{L}^p/\mathcal{N}$ est un espace de Banach pour la norme

$$||\tilde{f}||_p = N_p(f) = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

en vertu du théorème de Fischer-Riesz, où $\tilde{f}$ désigne la classe d'équivalence telle que décrite. On dira qu'une suite de fonctions mesurables (f_n) converge en mesure vers une fonction mesurable f si pour tout compact K de X et pour tout nombre réel $\eta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\bigg(\big\{x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| > \eta\big\}\bigg) = 0.$$

Si A est un ensemble intégrale de X, alors pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de X contenu dans A tel que $\mu(A - K) < \varepsilon/2$ et comme

$$\big\{x \in A, |f(x) - f_n(x)| > \eta\} \subseteq (A - K) \cup \{x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| > \eta\big\}.$$

Donc pour tout n suffisamment grand,

$$\mu(\{x \in A, |f(x) - f_n(x)| > \eta\}) < \varepsilon,$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\{x \in A, |f(x) - f_n(x)| > \eta\}\Big) = 0.$$

Donc on peut montrer qu'il existe une suite (f'_n) extraite de (f_n) qui converge presque partout vers f. Nous montrerons que pour tout compact K de X, il existe une suite (f'_n) extraite de (f_n) qui converge presque partout vers f sur K et c'est cette propriété que nous utiliserons dans cet article. D'après le théorème d'Egoroff, toute suite de fonctions mesurables qui converge presque partout, converge en mesure et sa limite est une fonctino mesurable.Notre principal résultat est le suivant.

2. Nptre principal résultat.

THEOREM 35. *Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ qui converge en mesure vers une fonction mesurable f. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f appartient à $\mathcal{L}^p$ et la suite $(\bar{f}_n)$ converge faiblement vers $\bar{f}$ dans $\mathbb{L}^p$.

(2) La suite $\bar{f}$ converge faiblement dans $\mathbb{L}^p$.

(3) La suite $(\bar{f}_n)$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$.

Nous aurons besoin de cette forme du lemme de Pierre.

LEMMA 18. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$ $(1 < p < \infty)$ et soit f une fonction mesurable. On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :*

(1) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en mesure vers f.

(2) La suite $(\bar{f}_n)_{n\geq 1}$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$.

Alors la fonction f appartient à $\mathcal{L}^p$ et $N_p(f) \leq \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} N_p(f_n)$.

Preuve du lemme 18. Soit K un compact de X. Pour tout m et $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$X_{m,n} = \left\{ x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| > 2^{-m} \right\}.$$

Comme la suite (f_n) converge en mesure vers f, quel que soit $m \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(X_{m,n}) = 0$. Par conséquent pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe un entier n_m tel que $\mu(X_{m,n}) < 2^{-m}$ si $n > n_m$.

Soit $g_m = f_{n_{n+1}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $x \in K$ et $x \notin X_m = \bigcup\limits_{m' > m} X_{m', n_{m'+1}}$ on a : $|f(x) - g_{m'}| \leq 2^{-m'}$ pour tout $m' \geq m$.

Comme la suite (X_m) est décroissante, si $x \notin \cap X_m$, il existe $m_o \in \mathbb{N}$ tel que $x \in X_m$ quel que soit $m > m_o$, donc $|f(x) - g_m(x)| < 2^{-m}$ si $m > m_o$. Par conséquent, pour tout $x \in K$ et $x \notin \cap \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} X_m$, la suite $g_m(x)$ converge vers $f(x)$. D'autre part

$$\mu(X_m) \leq \sum_{m \geq m'} \mu(X_{m', n_{m'+1}}) \leq \sum_{m \geq m'} 2^{-m'} = 2^{-m+1}.$$

Par conséquent $\mu(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n) \leq \inf\limits_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m+1})0$. Autrement dit la restriction à K de la suite (g_n) converge presque partout vers la restriction à K de la fonction f. On en conclut d'après le lemme de FATOU que la restriction à K de f appartient à $\mathcal{L}^p(K, \mu_K)$ et

$$\int_K |f|^p \, d\mu \leq sup \left(\int_K |g_m|^p \, d\mu \right) \leq M^p,$$

où $M = sup\ N_p(f_n)$. Donc l'intégrale supérieur $\mu^*(|f|^p)$ est inférieur ou égale à M^p (Riesz and Nagy (1955), Chap. IV, Définition), et comme f est mesurable on en conclut d'après Riesz and Nagy (1955) (Voir Chap. IV, ğ 5, Théoreème 5) que f appartient à $\mathcal{L}^p$ et

$$N_p(f) = \mu(|f|^p)^{1/p} \leq M = \sup_{n \in \mathbb{N}} N_p(f_n).$$

Démonstration du Théorème 35.

L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est triviale et l'implication $ii) \Rightarrow iii)$ découle du théorème de Banach-Steinhaus. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $ii) \Rightarrow i)$. Comme par hypothèse la suite $(\bar{f}_n)$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$, la fonction f appartient à $\mathcal{L}^p$ d'après le lemme précédent.

Soit ϕ une fonction continue de support compact K. Soit ε un nombre réel positif et soit ε' un nombre réel positif tel que

$$2C\ M\ (\varepsilon')^{1/q} + \varepsilon'\ C\ \mu(K) < \varepsilon,$$

où

$$C = \sup_{x \in X} |\phi(x)| \ \ et \ \ M = \sup_n N_p(f_n),$$

et q est le nombre réel conjugué de p, i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (un tel ε' existe toujours quel que soit $\varepsilon > 0$). Soit

$$X_n = \left\{ x \in K,\ |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon' \right\}.$$

Comme la suite (f_n) converge en mesure vers f, on a $\lim_{n \to \infty} \mu(X_n) = 0$; il existe donc un entier $n_{\varepsilon'}$ tel que si $n > n_{\varepsilon'}$. On en conclut donc que $\mu(X_n) < \varepsilon'$ si $n > \varepsilon'$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_X (f - f_n)\phi d\mu \right| &\leq \left| \int_{X_n} (f - f_n)\phi d\mu \right| + \left| \int_{K - X_n} (f - f_n)\phi d\mu \right| \\
&\leq C\ N_p(f - f_n)\varepsilon'^{1/q} + \varepsilon'\ C\ \mu(K - X_n) \\
&\leq 2C\ M\ \varepsilon'^{1/q} + \varepsilon'\ C\ \mu(K) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

puisque

$$\mu(K - X_n) \leq \mu(K) \text{ et } N_p(f - f_n) \leq N_p(f) + N_p(f_n) \leq 2M,$$

d'après le lemme précédent, et par conséquent

$$\int_X f\phi d\mu = \lim_{n \to \infty} \left(\int_X f_n \phi d\mu \right).$$

Soit maintenant g une fonction appartenant à $\mathcal{L}^q$ (où $f_n\ \phi d\mu$ désigne le nombre réel conjugué de $,p$ i.e. $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$). Soit ε un nombre réel positif et soit $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{1+2M}$ où $M = sup\ N_p(f_n),$ donc d'après le lemme précédent $N_p(f) \leq M$. Alors il existe une fonction continue ϕ de support compact telle que $N_p(g-\phi) < \varepsilon'$.

Pour cette fonction $\phi,$ on peut trouver un entier n tel que si $n > n_\varepsilon$, on a

$$\Big|\int_X (f-f_n)\phi d\mu| < \varepsilon,$$

d'après ce que nous venons de prouver, et donc pour $n > n_{\varepsilon'}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_X (f-f_n) g d\mu\right| &\leq \left|\int_X (f-f_n)(g-\phi)d\mu\right| + \left|\int_X (f-f_n)\phi d\mu\right| \\
&\leq N_p(f-f_n)\ N_q(g-\phi) + \left|\int_X (f-f_n)\phi d\mu\right| \\
&< 2M\varepsilon' < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\int_X fgd\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n g d\mu\right).$$

D'où la conclusion.

Comme conséquence de ces résultats dont les démonstrations paraîtront plus tard, nous obtenons les corollaires suivants.

3. Corrollaires.

Corollary 8. *Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$, $(1 < p < \infty)$ qui converge presque partout vers une fonction f. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction f appartient à $\mathcal{L}^p$ et la suite $(\bar{f}_n)$ converge faiblement vers $\bar{f}$ dans $\mathbb{L}^p$.

(2) La suite $(\bar{f}_n)$ converge faiblement dans $\mathbb{L}^p$.

(3) La suite $(\bar{f}_n)$ est bornée dans $\mathbb{L}^p$.

Corollary 9. *Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$, $(1 < p < \infty)$ et soit f une fonction mesurable. On suppose vérifiées les conditions suivantes :*

(1) La suite (f_n) converge en mesure vers f.

(2) La suite $(\tilde{f}_n)$ converge faiblement dans $\mathbb{L}^p$.

Alors les suites $(|\tilde{f}_n|)$, $(\tilde{f}_n^+)$ et $(\tilde{f}_n^-)$ convergent faiblement dans $\mathbb{L}^p$ respectivement vers $|\tilde{f}|$, $\tilde{f}_n^+$ et $\tilde{f}_n^-$.

Corollary 10. *Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$,, $(1 < p < \infty)$ et soit f une fonction appartenant à $\mathcal{L}^p$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La suite $(\tilde{f}_n)$ converge fortement vers $\tilde{f}$ dans $\mathbb{L}^p$.

(2) La suite (f_n) converge en mesure vers f et

$$N_p(f) = \lim_{n\to\infty} N_p(f_n).$$

Corollary 11. *Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant à $\mathcal{L}^p$, $(1 < p < \infty)$ et soit f une fonction mesurable appartenant à $\mathcal{L}^p$ et soit f et g deux autres fonctions. On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :*

(1) La fonction f *est mesurable et la suite* (f_n) *converge en mesure vers* f*.*

(2) La fonction g *appartient à* $\mathcal{L}^p$ *et* $|f_n| \leq g$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$*.*

Alors la suite $(\tilde{f})$ *converge fortement vers* f *dans* $\mathbb{L}^p$.

Corollary 12. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions appartenant à* $\mathcal{L}^p$, $(1 < p < \infty)$ *qui converge en mesure vers une fonction* f*. On suppose vérifiées les deux conditions suivantes :*

(1) La mesure μ *est bornée.*

(2) La suite $(\tilde{f}_n)$ *est bornée dans* $\mathbb{L}^p$*.*

Alors pour tout réel p' *tel que* $1 \leq p' < p$*, la suite* $(\tilde{f}_n)$ *converge fortement vers* $\tilde{f}$ *dans* $\mathbb{L}^p$*.*

Bibliography

Bourbaki, N.(1952) Intégration, chap, I, II, III, et IV. *Hermann*, Paris.
Riesz, F., Nagy B.(1955). Leçons d'Analyse Fonctionnelle. *Gauthier - Villars*. Paris. 3ième édition.