

PREMIÈRES NOTIONS DE GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE INFINITÉSIMALE

88. Jusqu'ici les seules figures sphériques que nous ayons considérées sont les triangles, mais dans la suite nous rencontrerons des figures plus compliquées et nous aurons à invoquer certaines notions se rapportant à la géométrie sphérique analytique qu'il sera dès lors bon de connaître.

Indiquons en premier lieu en quoi consiste un système de coordonnées sphériques.

89. Pour définir un système de coordonnées sphériques on se donne un triangle

sphérique trirectangle tracé sur la sphère, et dont les sommets soient numérotés 1, 2, 3 (fig. 9); ce triangle se nomme le triangle de référence du système des coordonnées.

Ceci posé, les coordonnées, à savoir l'ordonnée et l'abscisse, par lesquelles la position d'un point M de la sphère est fixée, s'obtiennent de la manière suivante : L'ordonnée y du point M est la distance angulaire du point M au pied P du plus petit arc de grand cercle toujours inférieur à 90° mené de M perpendiculairement au côté 1, 2 du triangle de référence ; cette

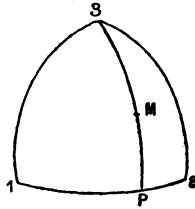


Fig. 9.

distance étant prise positivement ou négativement, suivant que le point M se trouve dans le même hémisphère que le point 3 par rapport au grand cercle 1, 2 ou bien dans l'hémisphère opposé. Les ordonnées varient de -90° à $+90^\circ$, elles ne sont donc pas déterminées par leur cosinus, mais elles le sont complètement par leur sinus ou par leur tangente.

L'abscisse x du point M est la distance angulaire, 1 P de 1 à P comptée dans le sens 1, 2; les abscisses varient de 0 à 360° et ne sont par suite complètement déterminées que lorsqu'on connaît leur sinus et leur cosinus.

90. A ce premier système de coordonnées, qu'on appelle système de coordonnées rectangulaires s'en rattache un autre dit système de coordonnées polaires et qui est formé (*fig. 9*): 1° de la distance angulaire u nommé rayon vecteur du point 3 au point M ; 2° de l'angle dièdre ω nommé azimuth compté de 3, 1 vers 3, 2 que forme le plan (3, M) avec le plan (3, 1); il est d'ailleurs évident que l'on a $u = 90^\circ - y$, $\omega = x$ en sorte que ce second système de coordonnées se ramène immédiatement au premier et réciproquement.

91. Joignons le centre O de la sphère aux sommets 1, 2, 3, du triangle de référence, et désignons par λ , μ , ν , les cosinus directeurs de la direction OM par rapport aux axes rectilignes rectangulaires $O1$, $O2$, $O3$, nous aurons :

$$\lambda = \cos(OM, O1) = \cos y \cos x$$

$$\mu = \cos(OM, O2) = \cos y \sin x$$

$$\nu = \cos(OM, O3) = \sin y.$$

mais ces cosinus λ , μ , ν , sont aussi proportionnels aux coordonnées cartésiennes ξ , η , ζ du point M par rapport aux trois

axes rectilignes O1, O2, O3, on peut donc écrire :

$$\frac{\cos y \cos x}{\xi} = \frac{\cos y \sin x}{\eta} = \frac{\sin y}{\zeta} = \frac{1}{\pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \pm \frac{1}{R}$$

R étant le rayon de la sphère.

Ces équations servent évidemment à passer des coordonnées sphériques aux coordonnées rectilignes et réciproquement.

92. *Équation en coordonnées sphériques d'un grand cercle de la sphère.* Tous les points d'un grand cercle sont dans un même plan, qui d'ailleurs passe par le centre de la sphère, donc les coordonnées rectilignes ξ, η, ζ de tous ces points satisfont à une équation homogène et linéaire

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0.$$

Remplaçant ξ, η et ζ par les fonctions de x et de y , qui leur sont proportionnelles il vient

$$A \cos y \cos x + B \cos y \sin x + C \sin y = 0,$$

pour l'équation cherchée.

93. Cette équation permet de résoudre sur le champ le problème suivant, qui nous sera plus tard très utile :

Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les trois points de la sphère qui ont respectivement $x', y'; x'', y''; x''', y'''$ pour coordonnées sphériques, soient sur un grand cercle.

La condition cherchée est que l'on puisse déterminer A, B, C de manière à avoir :

$$A \cos x' \cos y' + B \cos y' \sin x' + C \sin y' = 0$$

$$A \cos x'' \cos y'' + B \cos y'' \sin x'' + C \sin y'' = 0$$

$$A \cos x''' \cos y''' + B \cos y''' \sin x''' + C \sin y''' = 0$$

c'est-à-dire, de façon que la relation

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha' \cos \gamma' & \sin \alpha' \cos \gamma' & \sin \gamma' \\ \cos \alpha'' \cos \gamma'' & \sin \alpha'' \cos \gamma'' & \sin \gamma'' \\ \cos \alpha''' \cos \gamma''' & \sin \alpha''' \cos \gamma''' & \sin \gamma''' \end{vmatrix} = 0.$$

soit identiquement satisfaite.

94. Les grands cercles sont les lignes les plus simples que l'on puisse tracer sur une sphère. Ils sont à la sphère ce que les lignes droites sont au plan. En astronomie on a très fréquemment occasion de considérer des grands cercles, et on en fixe toujours les positions au moyen de deux éléments particuliers que nous allons définir et apprendre à déterminer.

95. Le premier de ces éléments que l'on appelle le *nœud* du grand cercle est l'un des points d'intersection du grand cercle avec celui auquel correspond le côté 1,2, du triangle de référence, le second appelé *obliquité* est l'un des angles sous lesquels le plan du grand cercle considéré est coupé en un nœud

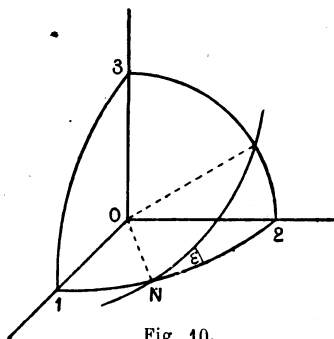


Fig. 10.

par celui du côté 1, 2.

Ceci posé, soit :

$$A \cos y \cos x + B \cos y \sin x + C \sin y = 0$$

ou (1) $\operatorname{tang} y = a \cos x + b \sin x.$

l'équation d'un grand cercle. Pour un nœud N (fig. 10), la valeur

de y sera nulle, et celle de x que nous appellerons x_0 sera telle que

$$(2) \quad a \cos x_0 + b \sin x_0 = 0;$$

faisons $a = -m \sin \alpha, \quad b = m \cos \alpha$

avec $m > 0; \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < 360^\circ$

m et α seront bien déterminés quand a et b le seront, et l'on pourra mettre les équations (1) et (2) sous la forme plus simple :

$$\text{tang } y = m \sin (x - \alpha),$$

$$0 = \sin (x_0 - \alpha).$$

La dernière équation à laquelle il faut joindre les inégalités

$$0 < x_0 < 360^\circ, \quad 0 < \alpha < 360^\circ$$

qui entraînent $-360^\circ < (x_0 - \alpha) < 360^\circ$

donne,

$$x_0 = \alpha \quad \text{et} \quad x_0 = \alpha \pm 180^\circ$$

le signe étant celui de $180 - \alpha$. De là, résulte que tout grand cercle a deux nœuds qui sont situés aux extrémités d'un même diamètre du grand cercle dont le plan contient le côté 1, 2.

Passons à la détermination de l'obliquité que nous appellerons ϵ . Si on désigne par x_0 l'abscisse du nœud auquel se rapporte cette obliquité, nous aurons (fig. 10) :

$$\text{tang } \epsilon = \pm \frac{\text{tang } y}{\sin (x - x_0)}$$

x et y étant les coordonnées d'un point du grand cercle, voisin du nœud. Observant que x_0 est égal à α , ou à $\alpha + 180^\circ$ ou à $\alpha - 180^\circ$ et que $\text{tang } y = m \sin(x - \alpha)$ on trouve simplement

$$\text{tang } \varepsilon = \pm m.$$

Ce résultat prouve que l'obliquité supposée comprise entre 0° et 360° a quatre valeurs, que ces valeurs sont les mêmes quel que soit le nœud que l'on considère, et enfin qu'en appelant ε_0 la plus petite d'entre elles laquelle est comprise entre 0 et 90° les autres sont

$$180^\circ - \varepsilon_0, \quad 180^\circ + \varepsilon_0, \quad 360^\circ - \varepsilon_0.$$

96. Les grands cercles que nous rencontrerons en astronomie se présenteront toujours comme orbites de certains mobiles, en sorte que nous connaîtrons non seulement l'équation du grand cercle, c'est-à-dire la relation qui existe entre les coordonnées x et y de ses différents points, mais encore l'expression de chacune de ces coordonnées en fonction du temps, ce qui permettra de trouver le sens dans lequel les coordonnées varient à partir de chaque instant, ou de chaque position. En se plaçant à ce point de vue, on peut préciser la notion du nœud et de l'obliquité, et ne considérer qu'une seule position, ou une seule valeur pour chacun de ces éléments.

97. Nous appellerons *nœud* celui des deux points de rencontre avec le grand cercle où l'ordonnée y , en s'annulant, passe du négatif au positif, c'est-à-dire va en croissant à mesure que le temps croît, ou encore a sa dérivée par rapport au temps positive.

Quant à l'obliquité qui a jusqu'ici quatre valeurs ε_0 , $180^\circ - \varepsilon_0$, $180^\circ + \varepsilon_0$, $360^\circ - \varepsilon_0$ également acceptables, nous prendrons

la première si, à partir du nœud que nous venons de définir, l'ordonnée y et l'abscisse x des points du grand cercle vont l'une et l'autre en augmentant avec t ; la seconde, si y va en augmentant et x en diminuant à mesure que t augmente; la troisième, si y et x vont en diminuant à mesure que t augmente; la quatrième enfin, si y va en diminuant et x en augmentant à mesure que t augmente.

98. *Distance angulaire comptée sur un arc de courbe sphérique quelconque.* On sait que l'on appelle distance angulaire comptée sur l'arc de grand cercle qui va du point A au point B, ou simplement distance angulaire entre les deux extrémités A et B de cet arc, l'angle formé par le rayon passant par A avec le rayon passant par B.

Nous allons maintenant définir ce qu'on entend par distance angulaire comptée sur un arc de courbe sphérique quelconque allant du point A au point B.

Supposons, qu'ayant pris sur un arc de courbe sphérique AB une suite de points successifs, on joigne par des arcs de grands cercles, l'extrémité A au premier point, le dernier point à l'extrémité B, et chaque point intermédiaire au suivant, de manière à former un polygone sphérique inscrit dans l'arc AB; soient a_1, a_2, \dots, a_n les côtés de ce polygone considérés toujours comme des distances angulaires: la somme

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = P$$

sera le périmètre du polygone et, par définition, la limite vers laquelle tend P, quand le nombre des côtés du polygone augmente et que tous ces côtés diminuent indéfiniment, sera la distance angulaire de A à B comptée sur l'arc de courbe AB. Reste à montrer que cette limite existe, et à en trouver la

valeur. Pour cela joignons chaque sommet du polygone sphérique au sommet suivant par une droite ; soient c_1, c_2, \dots, c_n , les côtés du polygone rectiligne ainsi obtenu ; en désignant par R le rayon de la sphère, nous aurons en général

$$c_i = 2R \sin \frac{a_i}{2} = R \left(\frac{\sin \frac{a_i}{2}}{\frac{a_i}{2}} \right) a_i$$

d'où

$$\sum c_i = R \sum \frac{\sin \frac{a_i}{2}}{\frac{a_i}{2}} a_i$$

les sommes étant respectivement étendues à tous les côtés du polygone rectiligne et du polygone sphérique. Maintenant il est aisé de voir que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ et par suite $\frac{\sin x}{x}$ décroissent à mesure que x croit de 0 à 90°; il suffit en effet de prendre la dérivée $\frac{\overline{x} \cos x - \sin x}{x^2}$ de $\frac{\sin x}{\overline{x}}$ et d'observer que $\tan x$ étant $> \overline{x}$ cette dérivée est négative : si donc on appelle a_j la plus grande des valeurs de a_i et a_k la plus petite, on aura pour toutes les valeurs de i

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a_j}{\frac{1}{2} a_j} < \frac{\sin \frac{1}{2} a_i}{\frac{1}{2} a_i} < \frac{\sin \frac{1}{2} a_k}{\frac{1}{2} a_k}$$

d'où

$$R \frac{\sin \frac{1}{2} a_j}{\frac{1}{2} a_j} \cdot \sum a_i < R \sum \frac{\sin \frac{1}{2} a_i}{\frac{1}{2} a_i} \cdot a_i$$

et

$$R \sum \frac{\sin \frac{1}{2} a_i}{\frac{1}{2} a_i} a_i < R \frac{\sin \frac{1}{2} a_k}{\frac{1}{2} a_k} \sum a_i$$

ou

$$R \frac{\sin \frac{1}{2} a_j}{\frac{1}{2} a_j} \sum a_i < \sum c_i < R \frac{\sin \frac{1}{2} a_k}{\frac{1}{2} a_k} \sum a_i$$

ou encore

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a_j}{\frac{1}{2} a_j} < \frac{\sum c_i}{R \sum a_i} < \frac{\sin \frac{1}{2} a_k}{\frac{1}{2} a_k}.$$

Jusqu'ici les valeurs de a_i , a_j , a_k , sont des mesures d'angles, prises par rapport à une unité quelconque, supposons maintenant que l'unité adoptée soit l'unité trigonométrique, les

rapports $\frac{\sin \frac{1}{2} a_j}{\frac{1}{2} a_j}$ et $\frac{\sin \frac{1}{2} a_k}{\frac{1}{2} a_k}$ tendront vers 1 quand toutes les

valeurs de a_i tendront vers 0, donc $\frac{\sum c_i}{R \sum a_i}$ tendra aussi vers

1, et si l'une des deux sommes $\sum c_i$ et $R \sum a_i$ tend vers une certaine limite l'autre tendra vers la même limite.

Il résulte évidemment de là que si nous désignons par σ la longueur de l'arc de courbe AB et par s la distance angulaire

comptée sur cet arc, nous aurons

$$\bar{s} = \frac{\sigma}{R};$$

ce qui n'est autre que la généralisation du résultat admis pour un arc de grand cercle.

99. Distances angulaires infiniment petites. Soit $A\mu B$ un arc de courbe sphérique quelconque et $A\nu B$ l'arc de grand cercle de mêmes extrémités ; nous allons démontrer que la limite du rapport des distances angulaires des deux points A et B comptées respectivement sur $A\mu B$ et sur $A\nu B$ est égale à l'unité lorsque les deux points A et B se rapprochent indéfiniment.

Appelons en effet s et a les deux distances angulaires dont il s'agit, σ et α les longueurs des arcs $A\mu B$ et $A\nu B$

On aura

$$\bar{s} = \frac{\sigma}{R} \quad \text{et} \quad \bar{a} = \frac{\alpha}{R},$$

d'où

$$\frac{s}{a} = \frac{\bar{s}}{\bar{a}} = \frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\frac{\sigma}{c}}{\frac{\alpha}{c}},$$

c étant la corde AB. Or, quand le point B se rapproche indéfiniment du point A, les rapports $\frac{\alpha}{c}$ et $\frac{\sigma}{c}$ tendent vers 1, par conséquent \lim de $\frac{s}{a} = 1$.

Ainsi dans une limite de rapports ou dans une limite de sommes on peut substituer à une distance angulaire infiniment petite comptée sur un arc de courbe sphérique quelconque, la distance angulaire même c'est-à-dire la distance angulaire

comptée sur un arc de grand cercle, ayant les mêmes extrémités et réciproquement.

100. *Relation fondamentale entre les points de deux courbes sphériques correspondantes.* Considérons (fig. 11) deux courbes sphériques quelconques (C) et (C') se correspondant point par point c'est-à-dire telles que leurs points respectifs soient déterminés de position par les différentes valeurs d'un même paramètre t ; soient A et A' deux points correspondants quelconques obtenus en donnant au paramètre

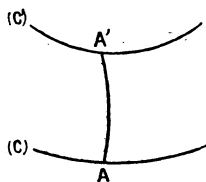


Fig. 11.

variable la valeur t ; appelons l la distance angulaire AA' , s et s' les distances angulaires respectivement comptées sur les courbes (C) et (C') à partir d'origines quelconques et terminées la première en A la seconde en A'; θ l'angle que l'arc de grand cercle tangent en A à la courbe (C) prolongé dans le sens positif forme avec AA' prolongé de A vers A' enfin θ' l'angle que l'arc de grand cercle tangent en A' à la courbe (C') prolongé dans le sens positif forme avec $A'A$ prolongé de A' vers A; les quantités, l , s , s' , θ , θ' seront des fonctions bien déterminées de t qui varieront de Δl , Δs , $\Delta s'$, lorsqu'on fera croître t de Δt c'est-à-dire lorsqu'on substituera aux deux points correspondants A et A' des courbes (C) et (C'), les deux points correspondants voisins B et B'. Ceci posé prolongeons AA' et BB' jusqu'à leur rencontre en O, puis joignons A et B, A' et B' par des arcs de grand cercle correspondants aux distances angulaires AB et A' B'.

Les deux triangles sphériques qui ont pour sommets respectifs O, A, B et O, A', B' nous donneront par une des analogies de

Neper

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\text{OB} - \text{OA}) = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{AB} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\text{OAB} - \text{OBA})}{\sin \frac{1}{2}(\text{OAB} + \text{OBA})}$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\text{OB}' - \text{OA}') = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \text{A'B}' \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(\text{OA'B}' - \text{OB'A}')}{\sin \frac{1}{2}(\text{OA'B}' + \text{OB'A}')},$$

ou en négligeant des infiniment petit d'un ordre supérieur au premier par rapport à AB et à A'B', ou simplement à Δt ,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\text{OB} - \text{OA}) + \cos \theta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s &= 0, \\ \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\text{OB}' - \text{OA}') - \cos \theta' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s' &= 0, \end{aligned}$$

d'où en retranchant membre à membre

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \frac{\Delta l}{2} (1 - \cos \theta \cos \theta' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s') + \\ + \cos \theta \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s + \cos \theta' \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Delta s' = 0 \end{aligned}$$

et en négligeant de nouveaux termes infiniment petits d'un ordre supérieur au premier

$$\Delta \bar{s} \cos \theta + \Delta \bar{s}' \cos \theta' + \Delta \bar{l} = 0.$$

Cette relation qui entraîne évidemment la suivante

$$\Delta s \cos \theta + \Delta s' \cos \theta' + \Delta l = 0$$

où s, s', l sont maintenant des mesures rapportées à une même

unité d'angle tout à fait quelconque, n'est qu'approchée, mais en la divisant par Δt et passant à la limite on a la relation exacte

$$\cos \theta \frac{ds}{dt} + \cos \theta' \frac{ds'}{dt} + \frac{dl}{dt} = 0$$

que nous écrirons en multipliant par $dt = \Delta t$ sous la forme différentielle

$$(1) \quad \cos \theta ds + \cos \theta' ds' + dl = 0.$$

Ce résultat constitue la propriété fondamentale de la géométrie sphérique infinitésimale, nous allons en déduire sur le champ, plusieurs conséquences qui nous seront dans la suite d'un grand secours.

101. Courbes équidistantes ou parallèles. — Supposons (*fig. 11*) que la courbe (C') ait tous ses points également distants de la courbe (C), et soit par conséquent obtenue en prenant à partir de la courbe (C) sur tous les grands cercles normaux à cette courbe une distance angulaire constante. Si nous prenons comme point A' de (C') correspondant à un point quelconque A de (C) l'extrémité de la normale à (C) menée par A , nous aurons $l = \text{const.}$, $\theta = 90^\circ$ et la formule (1) donnera $\theta' = 90^\circ$; ainsi AA' sera aussi l'arc de grand cercle mené par A' normalement à la courbe (C); j'en conclus que les deux courbes (C) et (C') auront leurs arcs de grands cercles normaux communs, et que tous les points de chacune d'elles seront à la même distance de l'autre. Deux courbes pareilles sont appelées courbes équidistantes ou parallèles.

102. Développées et développantes. — Quand deux courbes (C) et (C') (*fig. 12*) se correspondent point par point de telle

sorte que les arcs de grand cercle tangents à (C') soient les arcs de grand cercle normaux à (C) aux points correspondants, on dit que (C') est la développée de (C) et que (C) est la développante, de (C') . Si nous appliquons à deux pareilles courbes la relation fondamentale (1) nous aurons $\theta = 90^\circ$, $\theta' = 180^\circ$ et

$$\text{par suite} \quad ds' = dl$$

$$\text{d'où} \quad s' = l + \text{const.}$$

$$\text{et enfin} \quad s'_2 - s'_1 = l_2 - l_1.$$

l_1, s'_1 et l_2, s'_2 étant deux systèmes de valeurs correspondantes de l et de s' ; ainsi la distance angulaire comptée sur (C') entre deux points quelconques A'_1 et A'_2 est égale à la différence des distances angulaires comprises entre les deux points A'_2 et A'_1 et leurs points respectivement correspondants A_2 et A_1 de (C) .

La réciproque est également vraie si tous les arcs de grand cercle $A_1A'_1$ qui joignent les points correspondants de (C) et de (C') sont tangents à (C') et tels que la distance angulaire comptée sur (C') entre deux points quelconques A'_1 et A'_2 soit égale à la différence des distances angulaires comprises entre ces deux points A'_2 et A'_1 et les points respectivement correspondants A_2 et A_1 de (C) (fig. 12), les arcs de grand cercle AA' seront normaux à (C) ; en

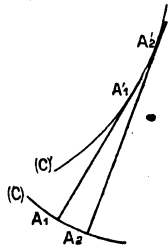


Fig. 12.

effet, on aura alors $\theta' = 180^\circ$, $l = \text{const}$ d'où $-\cos \theta' ds' = ds' = dl$, par suite $\theta = 90^\circ$. Ceci prouve qu'à toute courbe (C') considérée comme développée correspond une infinité de dévelop-

pantes, lesquelles sont toutes parallèles entr'elles. Nous verrons plus bas qu'à toute développante correspond une développée.

103. *Détermination de l'angle sous lequel une ligne sphérique quelconque coupe les lignes coordonnées. — Relations entre la différentielle de la distance angulaire comptée sur la courbe et les différentielles dx et dy des coordonnées des points de celle-ci.*

Reprenons le système de coordonnées sphériques rectangulaires correspondantes au triangle de référence 1, 2, 3 (fig. 13).

Considérons un point M situé sur une courbe quelconque que nous appellerons (M) et dont le sens positif sera supposé connu. Marquons sur (1, 2) le point Q qui occupe par rapport au pied P de l'ordonnée y du point M, la même position que 2 par

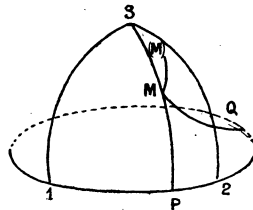


Fig. 13.

rapport à 1, point dont l'abscisse est par conséquent $x + 90^\circ$, ou $x - 270^\circ$. Suivant que x est $<$ ou $>$ 270° ; nous donnerons au grand cercle MQ prolongé de M vers Q et au grand cercle M3 prolongé de M vers 3 le nom de lignes coordonnées relatives au point M; MQ étant d'ailleurs la ligne des abscisses ou des x et M3 la ligne des ordonnées ou des y .

Appelons maintenant φ l'angle que font entre elles la courbe (M) et la ligne des x relative au point M, ces lignes étant prolongées l'une et l'autre dans leur sens positif, et afin que le sinus de cet angle soit bien déterminé comme l'est déjà le cosinus, supposons l'angle décrit dans le sens positif, c'est-à-dire dans un sens tel que φ soit égal à 90° lorsque la courbe (M) se confond avec l'axe des y , M3, relatif au point M. Si nous appliquons la formule fondamentale (1) en prenant la courbe

(M) pour courbe (C), le grand cercle (1, 2) pour courbe (C') et successivement pour point correspondant de M, d'abord le point P, puis le point Q, nous aurons

$$-\sin \varphi ds + dy = 0$$

$$\cos \varphi ds - \cos y dx = 0$$

d'où l'on déduit

$$ds = \sqrt{dy^2 + \cos^2 y dx^2},$$

$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds},$$

$$\cos \varphi = \cos y \frac{dx}{ds},$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{dy}{\cos y dx}$$

$$\cos y dx + dy = e^{i\varphi} ds,$$

s étant la distance angulaire comptée sur la courbe (M) à partir d'une origine quelconque est terminée au point M et les différentielles étant prises par rapport au paramètre t qui sert à fixer la position des différents points M de (M) de sorte que ds et dt soient toujours de même signe.

104. Si au lieu des coordonnées rectangulaires x et y on fait usage des coordonnées polaires u et ω correspondant au même triangle de référence, pour définir la position des différents points M de la courbe ; après avoir donné le nom de ligne des azimuths et de ligne des rayons vecteurs relatives au point M, au grand cercle MQ prolongé de M vers Q et au grand cercle MP prolongé de M vers P (fig. 14), nous appellerons V

l'angle sous lequel se coupent les courbes (M) et MP prolongées dans leur sens positif, cet angle étant d'ailleurs décrit dans un sens tel que $V = 90^\circ$ lorsque (M) se confond avec MQ nous aurons alors

$$V - \varphi = 90^\circ + K \cdot 360^\circ,$$

K étant un nombre entier, d'où

$$\sin \varphi = -\cos V, \quad \cos \varphi = \sin V$$

d'ailleurs on sait que

$$x = \omega, \quad y = 90^\circ - u$$

donc, les relations précédemment obtenues deviendront

$$ds = \sqrt{du^2 + \sin^2 u d\omega^2}, \quad \sin V = \sin u \frac{d\omega}{ds},$$

$$\cos V = \frac{du}{ds}, \quad \text{tang } V = \sin u \frac{d\omega}{ds}$$

$$du + i \sin u d\omega = e^{iV} ds,$$

105. *Lieu des intersections successives d'une famille de grands cercles. — Enveloppe d'une famille de grands cercles.*

Considérons un grand cercle défini par son nœud dont nous désignerons l'abscisse par x_0 et par son obliquité que nous appellerons ε . Supposons que les deux éléments x_0 et ε soient des fonctions d'un paramètre variable t , à chaque valeur de t , répondra une position particulière du grand cercle et si l'on donne à t successivement toutes ses valeurs on aura toutes les positions successives du grand cercle dont l'ensemble constituera ce qu'on nomme une famille de grands cercles.

Ceci posé, soit (fig. 14) AT le grand cercle dans la position correspondante à la valeur t du paramètre variable, A'T le grand cercle dans la position voisine correspondante à la valeur $t + \Delta t$ du paramètre variable, nommons Δx_0 l'accroissement AA' que reçoit l'abscisse $1A = x_0$ du nœud, $\Delta \varepsilon$ l'accroissement que subit l'obliquité $(TA.2) = \varepsilon$,

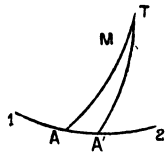


Fig. 14.

croissement que subit l'obliquité $(TA.2) = \varepsilon$, quand on passe de AT à A'T. Si T est un des points de rencontre, défini par le signe de son ordonnée, des deux grands cercles AT et A'T je dis que ce point a une position limite bien déterminée M, lorsque laissant t fixe on fait décroître Δt indéfiniment. En effet le triangle sphérique TAA' donne

$$\begin{aligned} \cos TA \sin \Delta x_0 \sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon) + \cos (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \sin TA \sin \varepsilon = \\ = \sin TA \sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \cos \varepsilon \cos \Delta x_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{tang TA} &= \frac{\sin \Delta x_0 \sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon)}{\sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \cos \varepsilon \cos \Delta x_0 - \sin \varepsilon \cos (\varepsilon + \Delta \varepsilon)}; \\ &= \frac{\sin \Delta x_0 \sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon)}{\sin \Delta \varepsilon - 2 \sin^2 \Delta x_0 \sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon) \cos \varepsilon}, \end{aligned}$$

divisant par Δt et passant à la limite il vient

$$\lim \text{tang TA} = \text{tang } \lim \text{TA} = \frac{\frac{d\bar{x}_0}{dt} \sin \varepsilon}{\frac{d\varepsilon}{dt}} = \sin \varepsilon \frac{dx_0}{d\varepsilon}$$

Ce qui prouve bien l'existence de la position limite M du point T. On peut en outre observer en passant que l'angle T sous lequel se coupent les deux grands cercles AT et A'T est

infiniment petit du même ordre que Δx_0 , $\Delta \varepsilon$ ou Δt ; en effet le même triangle ATA' donne

$$\frac{\sin ATA'}{\sin AA'} = \frac{\sin (\varepsilon + \Delta \varepsilon)}{\sin AT}.$$

Or, le premier membre a la même limite que $\frac{AT'A}{\Delta x_0}$ et le deuxième membre a pour limite la quantité finie et bien déterminée $\frac{\sin \varepsilon}{\sin AM}$.

La limite M du point de rencontre T des deux grands cercles AT et AT' est d'après ce que nous venons de démontrer un point bien déterminé situé sur le grand cercle AT qui correspond à la valeur t du paramètre variable, on peut donc le considérer comme défini de position par ce paramètre et si celui-ci varie et prend toutes les valeurs possibles, le point M décrira une courbe sphérique à laquelle on a donné le nom de lieu des intersections successives du grand cercle mobile; ceci posé, on a les deux théorèmes suivants.

106. THÉORÈME. — *Ayant les mêmes données qu'au numéro 105, le grand cercle mobile pris dans une quelconque de ses positions est tangent au lieu des intersections successives et le point de contact est le point de ce lieu qui correspond à la position considérée du cercle mobile.*

Soient (*fig. 15*) M et M' deux points du lieu des intersections successives, MA , $M'A'$ les positions du grand cercle mobile auxquelles ils se rapportent. Supposons, M , MA fixes et M' et $M'A'$ respectivement infiniment voisins de M et de MA , il sera démontré que AM est l'arc de grand cercle tangent au point M au lieu des points M , si nous faisons voir que la distance angu-

laire $M'P$ du point M' à AP est infiniment petite d'un ordre supérieur à MM' où à Δt ; en effet, menons l'arc de grand cercle MM' , l'angle $M'MP$ dont le sinus est $\frac{\sin M'P}{\sin MM'}$ sera alors infini-

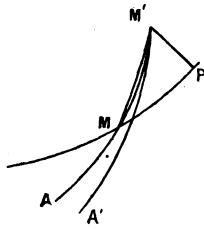


Fig. 15.

ment petit et la limite de la direction de MM' c'est-à-dire celle de la tangente au lieu des points M se confondra avec AM . Or le triangle $M'TP$ donne $\sin M'P = \sin M'T \sin M'TP$ mais $\sin M'TP$ est du même ordre que MM' comme on l'a vu plus haut, $\sin M'T$ est infiniment petit car M' et T ont

l'un et l'autre le point M pour limite et par suite se confondent à la limite, donc $M'P$ est d'un ordre supérieur à $M'M$, donc, etc.

107. Corollaire. De la propriété précédente résulte qu'à toute développante répond une développée.

108. THÉORÈME. — *Lorsque tous les grands cercles d'une même famille sont tangents chacun en un point particulier à une même courbe que l'on nomme leur enveloppe, celle-ci peut aussi être considérée comme le lieu des intersections successives des différents grands cercles, les points de ce lieu étant d'ailleurs les points de contact des grands cercles avec leur enveloppe.*

Prenons (fig. 16) deux des grands cercles, le premier fixe, le second infiniment voisin du premier, appelons M et M' les points de contact avec leur enveloppe et abaissons $M'P$ perpendiculaire sur MT , cette distance sera infiniment petite d'un ordre supérieur à MM' ou Δt , $M'TP$ est d'ailleurs du même ordre que Δt d'après ce qu'on a vu plus haut; donc MT dont le sinus est $\frac{\sin M'P}{\sin MM'}$ est infiniment petit, cela revient à dire que si l'un des

deux points M ou T a une position limite bien déterminée, l'autre à la même position limite. Or M' a M pour position limite, donc T a aussi le point M pour limite et le lieu des intersections successives se confond bien avec l'enveloppe.

107. Courbure géodésique d'une courbe sphérique. Soit une courbe sphérique (M) (fig. 16).

Prenons sur cette courbe un point déterminé M et un second point M' variable et infiniment voisin de M . Menons en M et M' des arcs de grand cercle tangents à (M) qui prolongés tous les deux dans le sens positif se coupent en

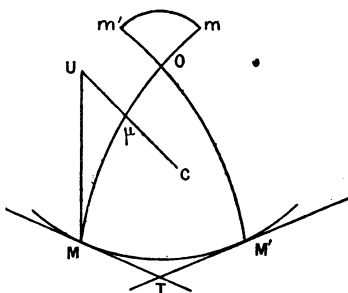


Fig. 16.

T sous un angle infiniment petit ε ; le rapport de cet angle ε à la distance angulaire s de M à M' comptée sur la courbe (M) tendra vers une limite qui sera ce qu'on appelle la courbure géodésique de la courbe (M) au point M , et que nous représenterons par $\frac{1}{\rho_g}$, ρ_g étant le rayon de la courbure géodésique.

Démontrons que la limite de $\frac{\varepsilon}{s}$ existe et cherchons-en la valeur. Menons par M' un arc de grand cercle normal à (M) et prenons $M'm' = 90^\circ$; lorsque le point M' en se rapprochant indéfiniment de M décrira l'arc MM' , le point m' décrira un arc de courbe parallèle $m'm$ en se rapprochant du point m situé sur l'arc de grand cercle normal en M à (M) à une distance angulaire de M égale à 90° . Cela posé, considérons les triangles sphériques dont m', O et m , M', O et M sont les som-

mets respectifs, nous en déduirons successivement.

$$\sin O \cos OM = \sin mm' \sin mm'O$$

$$\sin O \sin OM = \sin MM' \sin MM'O$$

et en divisant membre à membre

$$\cot OM = \frac{\sin mm'}{\sin MM'} \cdot \frac{\sin mm'O}{\sin MM'O};$$

faisant maintenant tendre M' vers M le point O tendra vers le point μ correspondant à M dans la développée de la courbe (M) considérée comme développante, $\sin mm'O$, et $\sin MM'O$ tendront vers 1, enfin $\frac{\sin mm'}{\sin MM'}$ tendra vers $\frac{mm'}{MM'}$ ou vers $\frac{1}{\rho_g}$, donc on aura

$$\frac{1}{\rho_g} = \cot \psi,$$

en appelant ψ la distance angulaire du point M au point μ distance que nous appellerons rayon géodésique, le point μ recevant lui-même le nom de centre géodésique.

108. Le centre μ et le rayon $M\mu$ jouissent de plusieurs propriétés qui permettent de considérer ce centre et ce rayon sous divers points de vue différents. Observons d'abord que les plans des grands cercles MO , $M'O$ étant les plans normaux de la courbe (M) aux points M et M' , ont pour intersection à la limite, l'axe du cercle de courbure de (M) en M ; donc ψ est l'angle que fait le plan osculateur de la courbe (M) avec le plan tangent à la sphère, mais ρ étant le rayon de courbure de la courbe (M) et R le rayon de la sphère, on a, d'après

le théorème de Meunier,

$$R \sin \psi = \rho$$

donc

$$R \cos \psi = \frac{\rho}{\rho_g}$$

ajoutons encore que si on mène la tangente en M au grand cercle $M\mu$ et que U soit son point de rencontre avec le prolongement du rayon $C\mu$, ce point U sera un point de l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à la sphère tout le long de (M) ; de plus on aura $MU = R\rho_g$.

La courbure géodésique est un élément qui figure dans l'expression d'un grand nombre d'infiniment petits d'ordre élevé. C'est ce que nous allons faire voir après avoir démontré un théorème qui fournit le moyen d'obtenir l'ordre infinitésimal et la valeur principale d'autant d'infiniment petits que l'on veut.

109. THÉORÈME. — *Soient deux fonctions X et Y d'une variable indépendante x , qui s'annulent l'une et l'autre pour $x = 0$, si le*

rapport $\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$ des dérivées de ces fonctions tend vers une limite

déterminée et finie lorsque x tend vers zéro, le rapport $\frac{Y}{X}$ des fonctions tendra vers la même limite.

Considérons X et Y comme les coordonnées cartésiennes des points d'une courbe plane (*fig. 17*). Cette courbe passera par l'origine O , puisque $X = 0$ et $Y = 0$, pour $x = 0$; de plus, si après avoir pris un de ses points M_1 on mène la corde OM_1 , il sera possible de trouver un point M_2 compris entre

O et M_1 pour lequel la tangente à la courbe sera parallèle à OM_1 . Cela revient à dire que la valeur de $\frac{Y}{X}$ correspondante

à une valeur quelconque x_1 de x est égale à la valeur de $\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$

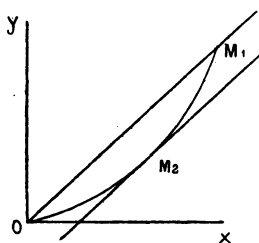


Fig. 17.

correspondante à une autre valeur x_2 de x plus petite que x_1 . Ceci posé, faisons tendre x_1 vers zéro, d'une manière absolument arbitraire, x_2 qui est constamment $< x_1$ tendra aussi vers zéro mais avec cette différence qu'il ne sera

pas possible de disposer de sa loi de décroissance ; quoi

qu'il en soit, comme $\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}$ admet par hypothèse une limite

bien déterminée, il en sera de même de $\frac{Y}{X}$ qui lui est constamment égal. C. Q. F. D.

110. Ceci posé, soient sur une courbe sphérique (M) deux points l'un fixe M et l'autre M' variable et infiniment voisin de M ; menons l'arc de grand cercle tangent en M à la courbe (M) et proposons-nous de trouver l'ordre infinitésimal et la valeur principale de la distance angulaire M'P du point M' à l'arc tangent MT.

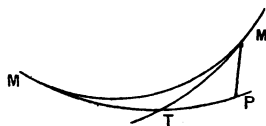


Fig. 18.

Je pose (fig. 18) $M'P = y$ et je conserve toutes les notations des numéros précédents.

Le triangle sphérique dont M', M et P sont les sommets, nous

donnera

$$\sin y = \sin u \sin \omega$$

d'où en différenciant par rapport à s

$$\cos y \frac{d\bar{y}}{ds} = \cos u \sin \omega \frac{d\bar{u}}{ds} + \cos \omega \sin u \frac{d\bar{\omega}}{ds}$$

et en remplaçant $\frac{d\bar{u}}{ds}$ et $\frac{d\bar{\omega}}{ds}$ par leurs valeurs obtenues précédemment (n° 104)

$$\cos y \frac{d\bar{y}}{ds} = \cos u \sin \omega \sin V + \cos \omega \sin V$$

mais le deuxième membre équivaut à

$$\sin \varepsilon \cos M'T = \sin \varepsilon \cos y \cos TP$$

d'après une des formules à cinq éléments et une autre relative aux triangles rectangles, donc on a simplement

$$\frac{d\bar{y}}{ds} = \sin \varepsilon \cos TP,$$

de sorte qu'en divisant par \bar{s} , on pourra écrire

$$\frac{d.\bar{y}}{d.\frac{1}{2}\bar{s}^2} = \frac{\sin \varepsilon}{\bar{s}} \cdot \cos TP.$$

Or, si l'on fait tendre s vers zéro, le deuxième membre tendra vers $\frac{\varepsilon}{s} = \frac{1}{\rho_g}$; il en sera donc de même du premier, et comme celui-ci est le rapport de deux différentielles, nous

trouverons enfin d'après le théorème précédemment démontré

$$\lim \frac{2\bar{y}}{s^2} = \frac{1}{\rho_g} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\bar{s}^2}{2} \cdot \frac{1}{\rho_g} (1 + \eta),$$

η , étant infiniment petit avec s ; ce résultat conduit à un grand nombre de conséquences.

111. En effet, si on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur à ceux que l'on conserve, on a

$$\bar{y} = \bar{s}\bar{\omega}, \quad \bar{y} = \frac{\varepsilon}{2} s,$$

d'où

$$\omega = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega + V - \varepsilon = 0, \quad V = \omega = \frac{\varepsilon}{2},$$

par suite

$$MT = AT = \frac{s}{2} = \frac{u}{2}.$$

112. Conservant les hypothèses et les définitions précédentes, proposons-nous encore de déterminer l'ordre infinitésimal et la valeur principale de la différence δ entre la distance angulaire s comptée sur (M) et comprise entre M et M, et la distance angulaire u comprise entre les deux mêmes points. Posons

$$\delta = s - u, \text{ par suite } \bar{\delta} = \bar{s} - \bar{u}$$

et différencions par rapport à \bar{s} , nous aurons

$$\frac{d.\bar{\delta}}{d\bar{s}} = 1 - \frac{d\bar{u}}{d\bar{s}} = 1 - \cos V = 2 \sin^2 \frac{V}{2}$$

divisant par \bar{s}^2 , nous pourrions d'abord écrire le premier membre de la manière suivante

$$\frac{d.\bar{\delta}}{d.\frac{\bar{s}^3}{3}}$$

quant au second il tendra vers une limite facile à calculer et qui sera

$$\lim \frac{2 \sin^2 \frac{V}{2}}{\bar{s}^2} = \lim \frac{\bar{V}^2}{\bar{s}^2} = \lim \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{s}^2} = \frac{1}{8} \lim \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2$$

Mais cette limite est aussi celle du premier membre, donc celui-ci étant le rapport de deux différentielles, nous trouvons enfin d'après le théorème précédemment démontré

$$\lim \frac{3\bar{\delta}}{\bar{s}^3} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \bar{\delta} = \frac{\bar{s}^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_g}\right)^2 (1 + \eta),$$

η étant infiniment petit avec \bar{s}