RELATIONS ENTRE LES COTÉS ET LES ANGLES D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE.

I. — FORMULES RELATIVES AUX TRIANGLES RECTANGLES

14. Nous allons établir les relations qui lient entre eux les différents éléments des triangles sphériques, et d'abord nous considérerons les formules relatives aux triangles rectangles, qui sont non seulement les plus simples, mais aussi les plus importantes, car les triangles obliquangles peuvent toujours se décomposer en triangles rectangles.

Soit donc (*fig.* 5) un triangle sphérique ABC, rectangle en A.

Désignons par A,B,C les angles et par a,b,c les côtés de ce triangle, c'est-à-dire les angles dièdres et les faces du trièdre dont le sommet est au centre de la sphère et dont les arêtes passent par les points A, B, C; coupons ce trièdre par le plan tangent en B à la sphère O, ou en d'autres termes par le plan mené en B perpendiculairement à OB, nous obtiendrons un triangle rectiligne TBU dont les éléments, côtés et angles, s'exprimeront aisément en fonction de ceux du triangle sphérique ABC. En effet l'angle UBT est évidemment égal à B, l'angle UTB est droit; cela résulte de ce que les deux plans UOT, UBT, étant l'un et l'autre perpendiculaires

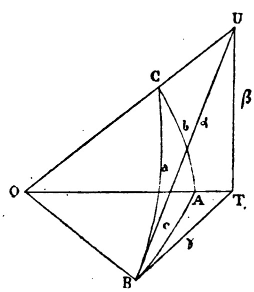

Fig. 5.

à TOB, le premier par hypothèse, le second parce qu'il est perpendiculaire à la droite OB contenue dans TOB, ont pour intersection TU, une perpendiculaire au plan TOB et par suite à la droite BT de ce plan : on trouve ensuite BUT $= 90° - B$; quant aux côtés du triangle rectiligne TBU qui sont des longueurs et que nous appelerons $\alpha =$ BU, $\beta =$ UT, $\gamma =$ TB. on a par les définitions mêmes

$$\alpha = \text{OB} \operatorname{tang} a, \qquad \gamma = \text{OB} \operatorname{tang} c$$

$$\beta = \text{OT} \operatorname{tang} b = \text{OB} \frac{\operatorname{tang} b}{\cos c}$$

Si maintenant on écrit les relations connues qui existent entre les éléments d'un triangle rectiligne rectangle et qui sont ici

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$

$$\sin B = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad \cos B = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \operatorname{tang} B = \frac{\beta}{\gamma},$$

il suffira d'y remplacer α, β, γ par leurs valeurs, et on aura

$$\operatorname{tang}^2 a = \frac{\operatorname{tang}^2 b}{\cos^2 c} + \operatorname{tang}^2 c,$$

$$\sin B = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a \cos c}, \qquad \cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \qquad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}.$$

La première de ces relations devient, en ajoutant 1 aux deux membres,

$$\frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 c} + \frac{\operatorname{tang}^2 b}{\cos^2 c} = \frac{1}{\cos^2 b \cos^2 c},$$

d'où $$\cos a = \pm \cos b \cos c;$$

et la seconde peut alors s'écrire

$$\sin B = \frac{\sin b \cos a}{\sin a \cos b \cos c} = \pm \frac{\sin b}{\sin a},$$

ce qui montre d'abord, B, a, b étant inférieurs à 180°, que le signe $+$ doit seul être pris, en sorte que l'on a

$$\cos a = \cos b \cos c, \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}.$$

et en même temps les deux formules déjà écrites

$$\cos B = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \qquad \operatorname{tang} B = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c}.$$

Ces résultats sont obtenus par la considération du triangle rectiligne rectangle UBT, résultant de l'intersection du trièdre OABC avec le plan tangent de la sphère au sommet B. Si on avait pris le triangle rectiligne analogue représentant l'intersection du même trièdre avec le plan tangent à la sphère au sommet C, on aurait trouvé trois nouveaux résultats que l'on peut avoir sur le champ en changeant B en C, C en B, b en c, c en b et qui sont

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a}, \qquad \cos C = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}, \qquad \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} b}$$

Enfin des combinaisons simples et qui se présentent d'elles-mêmes donnent trois nouvelles formules

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} b}{\sin c} \cdot \frac{\operatorname{tang} c}{\sin b} = \frac{1}{\cos b \cos c} = \frac{1}{\cos a},$$

$$\frac{\sin B}{\cos C} = \frac{\sin b}{\sin a}\frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} b} = \frac{\cos b}{\cos a} = \frac{1}{\cos c} \quad \text{ou} \quad \cos C = \cos c \sin B,$$

$$\frac{\sin C}{\cos B} = \frac{\sin c}{\sin a}\frac{\operatorname{tang} a}{\operatorname{tang} c} = \frac{\cos c}{\cos a} = \frac{1}{\cos b} \quad \text{ou} \quad \cos B = \cos b \sin C.$$

15. On a donc en résumé :

$$(a) \left\{ \begin{array}{ll}
(1) & \cos a = \cos b \cos c. \\
(2) & \sin B = \dfrac{\sin b}{\sin a}, \\
(3) & \cos B = \dfrac{\operatorname{tang} c}{\operatorname{tang} a}, \\
(4) & \operatorname{tang} B = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\sin c}, \\
(5) & \sin C = \dfrac{\sin c}{\sin a}, \\
(6) & \cos C = \dfrac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}, \\
(7) & \operatorname{tang} C = \dfrac{\operatorname{tang} c}{\sin b}, \\
(8) & \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = \dfrac{1}{\cos a}, \\
(9) & \cos B = \cos b \sin C. \\
(10) & \cos C = \cos c \sin B.
\end{array} \right.$$

ou, en remplaçant les tangentes par leurs valeurs en sinus et cosinus et chassant les dénominateurs afin de n'avoir que des facteurs toujours finis,

$$
(a')\quad\left\{
\begin{aligned}
\cos a &= \cos b \cos c,\\
\sin b &= \sin a \sin \mathrm{B},\\
\sin c \cos a &= \sin a \cos c \cos \mathrm{B},\\
\sin b \cos \mathrm{B} &= \sin c \cos b \sin \mathrm{B},\\
\sin c &= \sin a \sin \mathrm{C},\\
\sin b \cos a &= \sin a \cos b \cos \mathrm{C},\\
\sin c \cos \mathrm{C} &= \sin b \cos c \sin \mathrm{C},\\
\cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C} &= \sin \mathrm{B} \sin \mathrm{C} \cos a,\\
\cos \mathrm{B} &= \cos b \sin \mathrm{C},\\
\cos \mathrm{C} &= \cos c \sin \mathrm{B}.
\end{aligned}
\right.
$$

16. Les formules précédentes constituent toutes les relations qui existent entre les 5 éléments variables d'un triangle sphérique rectangle, considérés trois à trois ; elles sont au nombre de $\frac{5.4.3}{2.3} = 10$ et fournissent immédiatement sans calculs préalables ni préparations logarithmiques la solution de tous les problèmes que présente la résolution des triangles rectangles. Ajoutons que leur emploi le plus avantageux correspond aux cas où les éléments inconnus sont donnés par leur cosinus ou leur tangente ; car alors ces éléments sont complètement déterminés, tandis qu'ils admettent deux valeurs supplémentaires l'une de l'autre lorsqu'ils sont définis par leur sinus. L'indétermination qui existe pour un élément inconnu, calculé par son sinus peut toutefois être levée dans la plupart des cas, en observant que d'après la formule (1) le nombre des côtés aigus est toujours impair, c'est-à-dire égal à 1 ou à 3, et d'après les formules (9) et (10) qu'un côté de l'angle droit b ou c et l'angle opposé B ou C sont en même temps aigus ou obtus ; et l'on reconnaît que le seul cas de la résolution des triangles sphériques rectangles qui admette réellement deux solutions impossibles à séparer, est celui où les éléments connus sont un côté de l'angle droit et l'angle opposé.

17. Les relations (a) ou (a') peuvent être considérées comme les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Nous aurons à en faire un emploi continuel et dès lors il sera fort utile de pouvoir les écrire immédiatement sans passer par leur démonstration. Or c'est ce à quoi l'on parvient aisément pourvu qu'on ait conservé un vague souvenir de leur forme et de leur composition.

En examinant avec attention les formules (a) ou plutôt leurs équivalentes (a'), on reconnaît tout d'abord qu'elles sont à deux termes et à 3 éléments, c'est-à-dire qu'elles expriment l'égalité de deux monomes fonctions de 3 des 5 éléments côtés et angles du triangle rectangle considéré. Les monomes qui constituent le premier et le second membre sont précédés du signe $+$, entiers et rationnels, sans coefficients ni exposants ; le nombre des facteurs simples dont chaque monome se compose est de trois au plus et les nombres des facteurs qui entrent respectivement dans les deux membres de la même relation diffèrent toujours de 1, en sorte que ces nombres sont 1 et 2 ou 2 et 3 ; les facteurs simples dont chaque monome ou chaque membre se compose sont : soit le sinus, soit le cosinus de l'un des trois éléments du triangle auxquels la relation se rapporte. Le sinus et le cosinus d'un même élément ne peuvent jamais se trouver ensemble dans le même membre, enfin le sinus et le cosinus de deux éléments sont nécessairement l'un dans un membre, l'autre dans l'autre, quand ces deux membres renferment respectivement deux et trois facteurs. Telles sont les propriétés dont nous supposerons que l'on ait conservé le souvenir et qui vont nous suffire pour retrouver les formules (a').

18. *Occupons-nous d'abord de la relation qui existe entre* a, b, c.

Écrivons sur une même ligne horizontale tous les facteurs qui peuvent se trouver dans chaque membre, c'est-à-dire le sinus et le cosinus de a, de b et de c.

Premier membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$, $\sin c$, $\cos c$,
Deuxième membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$, $\sin c$, $\cos c$,

puis voyons quels sont les facteurs qu'il faut supprimer et les facteurs qu'il faut conserver dans chaque membre.

Il est aisé de voir par la définition du pôle d'un grand cercle que lorsqu'un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est égal à 90°, l'hypoténuse est aussi égale à 90°, l'autre côté de l'angle droit restant d'ailleurs entièrement quelconque ; de là résulte que la relation cherchée doit se réduire à une identité $0 = 0$, lorsqu'on y fait $\cos a = 0$ et en même temps : soit $\cos b = 0$, soit $\cos c = 0$; par conséquent l'un des membres de cette relation, le premier, par exemple, contient $\cos a$ en facteur et l'autre membre contient le facteur $\cos b$ et le facteur $\cos c$, ce que nous conviendrons d'exprimer de la manière suivante :

Premier membre : $\sin a$, $\overset{+}{\cos}\, a$, $\sin b$, $\cos b$, $\sin c$, $\cos c$,

Deuxième membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\overset{+}{\cos}\, b$, $\sin c$, $\overset{+}{\cos}\, c$.

mais la présence de cos a dans le premier membre entraîne l'absence de cos a dans le deuxième membre et l'absence de sin a dans le premier, de même la présence de cos b et de cos c dans le deuxième membre, entraîne l'absence de cos b et de cos c dans le premier et celle de sin b, et sin c dans le deuxième ; donc en indiquant l'absence d'un facteur par le signe — placé au-dessus, on a en second lieu,

$$\text{Premier membre : } \overset{-}{\sin}\, a,\ \overset{+}{\cos}\, a,\ \sin b,\ \overset{-}{\cos}\, b,\ \sin c,\ \overset{-}{\cos}\, c,$$

$$\text{Deuxième membre : } \sin a,\ \overset{-}{\cos}\, a,\ \overset{-}{\sin}\, b,\ \overset{+}{\cos}\, b,\ \overset{-}{\sin}\, c,\ \overset{+}{\cos}\, c,$$

par suite, en se rappelant les différentes hypothèses faites plus haut, on voit que la relation cherchée ne peut avoir que l'une des quatre formes suivantes :

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos c,$$

$$\cos a \sin c = \sin a \cos c \cos b,$$

$$\cos a \sin b \sin c = \cos b \cos c\ ;$$

or, la deuxième et la troisième sont inacceptables parce qu'elles ne sont pas symétriques par rapport à b et à c, la quatrième doit aussi être rejetée car si on y fait a, b et c très petits, le premier membre est très petit et le second très près de 1. On a donc nécessairement

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

19. *Passons à la relation qui lie l'hypoténuse a aux deux angles variables B et C.*

Écrivons comme plus haut tous les facteurs simples qui peuvent se trouver dans chacun des deux membres de la relation cherchée, à savoir :

Premier membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$,

Deuxième membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$;

il est aisé de voir que lorsque l'hypoténuse est égale à 90° en même temps que l'un des angles variables, l'autre angle variable peut être entièrement quelconque, j'en conclus en raisonnant comme plus haut que le premier membre de la relation contient $\cos a$ en facteur et que le deuxième contient à la fois $\cos B$ et $\cos C$, ce qui donne

Pour le premier membre : $\sin a$, $\overset{+}{\cos}\, a$, $\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$,

Pour le deuxième membre : $\sin a$, $\cos a$, $\sin B$, $\overset{+}{\cos}\, B$, $\sin C$, $\overset{+}{\cos}\, C$;
par suite,

Pour le premier membre : $\overset{-}{\sin}\, a$, $\overset{+}{\cos}\, a$, $\sin B$, $\overset{-}{\cos}\, B$, $\sin C$, $\overset{-}{\cos}\, C$.

Pour le deuxième membre : $\sin a$, $\overset{-}{\cos}\, a$, $\sin B$, $\overset{+}{\cos}\, B$, $\sin C$, $\overset{+}{\cos}\, C$;

mais d'autre part, pour $B = 90°$ et $C = 0$, de même que pour $C = 90°$ et $B = 0$, a peut avoir une valeur quelconque ; cela prouve que $\sin B$ et $\sin C$ se trouvent dans le premier membre. Enfin $\sin B$ et $\cos B$ de même que $\sin C$ et $\cos C$ étant dans les deux membres, $\sin a$ et $\cos a$ doivent ne pas s'y trouver d'après nos hypothèses, $\sin a$ n'est donc pas dans le deuxième membre et la relation n'admet que la forme

$$\cos a \sin B \sin C = \cos B \cos C.$$

20. *Passons à la relation qui lie un côté de l'angle droit b aux deux angles variables **B** et **C**.*

Écrivons toujours les deux groupes de facteurs susceptibles d'entrer dans les deux membres, nous aurons :

Pour le premier membre : $\sin b$, $\cos b$, $\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$.

Pour le deuxième membre : $\sin b$, $\cos b$, $\sin B$, $\cos B$, $\sin C$, $\cos C$;

Il est aisé de voir que pour $b = 90°$, qui entraine $B = 90°$, C reste quelconque, donc $\cos B$ entre en facteur dans le premier membre et $\cos b$ entre en facteur dans le deuxième, et l'on a,

Pour le premier membre :

$$\sin b,\ \cos b,\ \sin B,\ \overset{+}{\cos} B,\ \sin C,\ \cos C.$$

Pour le second membre :

$$\sin b,\ \overset{+}{\cos} b,\ \sin B,\ \cos B,\ \sin C,\ \cos C;$$

par suite

Pour le premier membre :

$$\sin b,\ \overset{-}{\cos} b,\ \overset{-}{\sin} B,\ \overset{+}{\cos} B,\ \sin C,\ \cos C.$$

Pour le second membre :

$$\overset{-}{\sin} b,\ \overset{+}{\cos} b,\ \sin B,\ \overset{-}{\cos} B,\ \sin C,\ \cos C;$$

mais en posant $B = 90°$ et $C = o$, on peut supposer b quelconque, donc $\sin C$ entre en facteur dans le deuxième membre et par suite manque dans le premier, l'on a donc

Pour le premier membre :

$$\sin b,\ \overset{-}{\cos}\, b,\ \overset{-}{\sin}\, B,\ \overset{+}{\cos}\, B,\ \overset{-}{\sin}\, C,\ \cos C,$$

Pour le second membre :

$$\overset{-}{\sin}\, b,\ \overset{+}{\cos}\, b,\ \sin B,\ \overset{-}{\cos}\, B,\ \overset{+}{\sin}\, C,\ \overset{-}{\cos}\, C\ ;$$

cela posé, la relation ne peut avoir que l'une des quatre formes suivantes :

$$\cos B = \cos b \sin C,$$

$$\cos B \sin b \cos C = \cos b \sin C,$$

$$\cos B \sin b = \cos b \sin C \sin B,$$

$$\cos B \cos C = \cos b \sin C \sin B\ ;$$

mais la deuxième et la troisième sont inadmissibles car elles conduisent à une impossibilité en faisant b très petit et B et C finis ; la quatrième donne b par une fonction symétrique de B et de C et ne peut pas non plus être exacte, il ne reste donc que la relation

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

21. Il nous reste à considérer les formules qui contiennent deux côtés et un angle, formules qui sont au nombre de trois à savoir : celle qui contient l'hypoténuse, un côté de l'angle droit et l'angle opposé, celle qui contient l'hypoténuse, un côté de l'angle droit et l'angle adjacent, enfin celle qui contient les deux côtés de l'angle droit et l'angle adjacent à l'un de ces côtés. Nous aurons besoin d'un théorème relatif aux triangles infiniment petits que nous allons immédiatement établir dans toute sa généralité pour ne pas avoir à y revenir plus tard.

Soit ABC un triangle sphérique rectangle ou non, dont A, B, C sont les angles et a, b, c les côtés opposés. Menons les cordes BC, CA, AB des arcs correspondants aux côtés, nous formerons un triangle rectiligne que nous appellerons le triangle des cordes et dont nous désignerons les angles par A′, B′, C′ et les côtés qui sont ici des longueurs, par α, β, γ; l'on aura d'abord

$$(b) \qquad \pm(A-A') < \frac{1}{2}(b+c), \qquad \pm(B-B') < \frac{1}{2}(c+a), \qquad \pm(C-C') < \frac{1}{2}(a+b)$$

celà résulte de ce que dans un angle polyèdre une face est toujours plus petite que la somme de toutes les autres ; et en second lieu,

$$\alpha = 2R \sin\frac{1}{2}a, \quad \beta = 2R \sin\frac{1}{2}b, \quad \gamma = 2R \sin\frac{1}{2}c.$$

R étant le rayon de la sphère ; d'où l'on tire

$$(c) \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a}.$$

Cela posé, écrivons sur une première ligne horizontale, les six quantités

$$A, B, C, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}$$

et sur une seconde ligne horizontale les six quantités correspondantes

$$A', B', C', \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}$$

puis faisons tendre vers zéro deux des côtés du triangle sphérique, de sorte que le troisième côté qui est toujours plus petit que la somme des deux premiers et les trois demi-sommes

$$\frac{1}{2}(b+c), \qquad \frac{1}{2}(c+a), \qquad \frac{1}{2}(a+b)$$

tendent aussi vers zéro ; on verra d'abord d'après les relations (b) et (c) que si un terme quelconque de l'une des deux lignes horizontales tend vers une limite bien déterminée et finie, le terme correspondant de l'autre ligne horizontale tendra vers une limite égale à la première ; mais, les six termes de la deuxième ligne horizontale sont liés par quatre relations ou identités, savoir

$$A'+B'+C'=180^\circ, \quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=1, \quad \frac{\sin A'}{\sin B'}=\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\sin B'}{\sin C'}=\frac{\beta}{\gamma}.$$

qui permettent, deux de ces termes étant connus, d'avoir les quatre autres ; nous en conclurons que si deux des termes de la deuxième ligne et aussi par conséquent si deux termes de la première ligne tendent vers des limites déterminées et finies, il en sera de même de tous les termes de la deuxième ligne et aussi de tous les termes de la première ligne. Et les conditions que nous conviendrons de regarder comme nécessaires pour que les triangles tendent vers zéro suivant une loi bien déterminée, seront satisfaites.

22. Ces remarques très simples fournissent le moyen de trouver *a priori* ce à quoi se réduit une relation quelconque bien définie mais de forme inconnue

$$(1) \qquad \varphi(a, b, c, A, B, C) = 0,$$

entre certains éléments d'un triangle sphérique dont les côtés sont infiniment petits, et qui tend vers zéro suivant une loi bien déterminée, c'est-à-dire pour lequel deux des quantités

$$A, B, C, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a},$$

tendent vers des limites finies et déterminées. En effet soit

$$(2) \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, A', B', C') = 0$$

la relation correspondante à (1) pour le triangle rectiligne que nous avons appelé le triangle des cordes. Cette relation sera d'abord homogène par rapport à α, β, γ qui représentent des longueurs et pourra par conséquent être mise sous la forme

$$(3) \qquad \chi\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}, A', B', C'\right) = 0,$$

mais sous les hypothèses qui ont été faites, on a quand on passe à la limite :

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{a}{b}, \quad \lim \frac{\beta}{\gamma} = \lim \frac{b}{c}, \quad \lim \frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{c}{a},$$

$$\lim A' = \lim A, \ \lim B' = \lim B, \ \lim C' = \lim C\,;$$

donc la relation (3) et aussi la relation (1) deviennent

$$\chi\left(\lim \frac{a}{b}, \lim \frac{b}{c}, \lim \frac{c}{a}, \lim A, \lim B, \lim C\right) = 0\,;$$

où il ne faut pas perdre de vue que, $\lim \frac{a}{b} . \lim \frac{b}{c} . \lim \frac{c}{a} = 1$.
et $\lim A + \lim B + \lim C = 180°$.

Telle est la relation limite cherchée. Elle exprime, comme on voit le théorème suivant :

23. *Théorème.* — Pour avoir la limite vers laquelle tend une relation

$$(1) \qquad \varphi(a, b, c, A, B, C) = 0,$$

entre certains éléments d'un triangle sphérique dont les côtés sont infiniment petits et qui tend vers zéro, suivant une loi déterminée ; il suffit de prendre la relation

$$(2) \qquad \psi(\alpha, \beta, \gamma, A', B', C') = 0,$$

correspondante à (1) pour le triangle des cordes, laquelle se ramènera toujours à la forme

$$(3) \qquad \chi\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\gamma}, \frac{\gamma}{\alpha}, A', B', C'\right) = 0$$

et d'y remplacer

$$\frac{\alpha}{\beta}, \ \frac{\beta}{\gamma}, \ \frac{\gamma}{\alpha} \qquad \text{par} \qquad \lim \frac{a}{b}, \ \lim \frac{b}{c}, \ \lim \frac{c}{a}$$

et

$$A', B', C' \qquad \text{par} \qquad \lim A, \lim B, \lim C$$

24. Appliquons ces considérations générales aux trois relations qui existent entre B, a, b, entre B, a, c et entre B, b, c dans un triangle sphérique rectangle en A, lesquelles ne sont qu'un cas particulier de celles qui existent entre A, B, a, b, entre A, B, a, c et entre A, B, b, c dans un triangle sphérique quelconque.

Les côtés du triangle étant infiniment petits, supposons que A soit toujours égal à 90°, et que B conserve aussi la même valeur, le triangle tendra vers zéro suivant une loi bien déterminée ; donc nous aurons ce que deviennent à la limite les relations considérées, en prenant les relations analogues, relatives au triangle des cordes, qui ici, consistent respectivement en

$$\beta \sin A' = \alpha \sin B', \quad \alpha \sin \overline{A' + B'} = \gamma \sin A', \quad \gamma \sin B' = \beta \sin \overline{A' + B'}$$

ou

$$\sin B' = \frac{\beta}{\alpha} \sin A', \qquad \sin (A' + B') = \frac{\gamma}{\alpha} \sin A'$$

$$\sin B' = \frac{\beta}{\gamma} \sin (A' + B')$$

et y remplaçant $\frac{\beta}{\alpha}$ par $\lim \frac{b}{a}$, $\frac{\gamma}{\alpha}$ par $\lim \frac{c}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ par $\lim \frac{b}{c}$, A′ par 90° et B′ par B, ce qui donnera

$$\sin B = \lim \frac{b}{a}, \qquad \cos B = \lim \frac{c}{a}, \qquad \sin B = \lim \frac{b}{c} \cos B$$

25. Montrons maintenant comment on passe des formules limites que nous venons d'obtenir aux formules générales correspondantes.

Considérons la première relation limite,

$$\sin B = \lim \frac{b}{a}.$$

La relation générale correspondante devra être de la forme $K \sin B = H$, où K et H sont des fonctions de $\sin a$, $\cos a$, $\sin b$, $\cos b$. En effet, B restant invariable quand on passe à la limite, le terme en sin B et le terme indépendant de sin B et de cos B doivent se trouver dans la relation générale, sans quoi ils ne pourraient pas être dans la relation limite; au contraire, la présence de cos B est impossible puisque nos relations ne peuvent avoir que deux termes. Cela posé, il suffira d'exiger que $\lim \frac{H}{K} = \lim \frac{b}{a}$. Or, pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que H contienne sin b et par suite ne contienne pas cos b, puis, que K contienne sin a et par suite ne contienne pas cos a, ce qui donne deux résultats possibles : soit

$$\sin a \sin B = \sin b,$$

soit

$$\sin a \cos b \sin B = \sin b \cos a \ ;$$

dont le premier est seul acceptable, car le second exprime une impossibilité lorsque $a = 90°$ et $b \lessgtr 90°$.

On verrait tout aussi simplement que la relation générale correspondante à la condition limite : $\cos B = \lim \frac{c}{a}$ est

$$\sin a \cos c \cos B = \sin c \cos a$$

et que la relation générale correspondante à la condition limite $\sin B = \lim \frac{b}{c} \cos B$, est

$$\sin c \cos b \sin B = \sin b \cos B.$$

26. Nous terminerons ce qui se rapporte aux triangles sphériques rectangles, en démontrant deux formules qui, sans avoir l'importance des formules (a), recevront cependant de nombreuses applications. Ces formules sont à deux termes comme les formules (a), mais contiennent 4 éléments au lieu de 3.

La première fait connaître le produit du sinus de l'hypoténuse par le cosinus de l'un des angles adjacents, la seconde le produit du sinus de l'un des angles de valeur indéterminée par le cosinus de l'hypoténuse. Voici comment ont les établit :

Considérons l'expression sin a cos B.

On sait que

$$\cos B = \cos b \sin C$$

donc

$$\sin a \cos B = \sin a \sin C \cos b = \sin c \cos b$$

Considérons, en second lieu.

$$\sin B \cos a.$$

On sait que

$$\cos a = \cos b \cos c$$

donc,

$$\text{sur } B \cos a = \sin B \cos b \cos c = \cos b \cos C.$$