Wir kommen nunmehr zur letzten und wichtigsten Partie des zweiten Capitels, die die Involutionen vierter Ordnung auf den cubischen Raumcurven von Neuem aufnimmt, um die tiefeingreifende Wichtigkeit der ersteren für die letztere wenigstens in den Hauptzügen darzulegen.

Abschnitt IV.

Die biquadratische Involution auf der cubischen Raumcurve. Zweiter Theil.

§. 28.

Das Schnittpunkttheorem der R_4^2 im Raume.

168. Dieser Theil untersucht des Genaueren die biquadratischen Involutionen mit (sechs) gemeinsamen Elementenpaaren, sowie die sich daran anschliessenden geometrischen Configurationen.

Wir knüpfen wieder an das Schnittpunkttheorem (pg. 239 Formel Nr. (6)) der Curven R_4^2 an. Man verfährt zunächst, wie bei Aufstellung der H-Kegelschnitte (cf. Nr. 51) und eliminirt λ_4. Dann sind die Elemententripel der dreigliedrigen Gruppe (2) (pg. 239) gegeben durch

$$(1) \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3, & a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2 + a_4 s_3, \\ b_0 s_0 + b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3, & b_1 s_0 + b_2 s_1 + b_3 s_2 + b_4 s_3 \end{vmatrix}$$
$$\equiv s_0^2 p_{01} + s_1^2 p_{12} + s_2^2 p_{23} + s_3^2 p_{34} + s_0 s_1 p_{02} + s_1 s_2 p_{13} + s_2 s_3 p_{24}$$
$$+ s_0 s_2 (p_{03} - p_{12}) + s_0 s_3 (p_{04} - p_{13}) + s_1 s_3 (p_{14} - p_{23}) = 0,$$
$$\text{wo } p_{ik} = (ab)_{ik}.$$

Aus den zwischen den p_{ik} herrschenden Relationen der Nr. 155, aus denen man jetzt als linear unabhängige etwa diejenigen drei aussuche, die den Index 0, 2, 4 resp. nicht aufweisen, folgt:

α) Um eine quaternäre quadratische Form a_s^2 in die Form (1) zu bringen, sind die drei Bedingungen*) erforderlich (u. umg.):

$$(2)\begin{cases} a_{00}a_{22}-4a_{01}a_{12}+a_{11}(2a_{02}+a_{11})=0 & \equiv A_4 \\ a_{00}a_{33}-(2a_{02}+a_{11})(2a_{13}+a_{22})+4a_{12}(a_{03}+a_{12})=0 & \equiv A_2 \\ a_{11}a_{33}-4a_{12}a_{23}+a_{22}(2a_{13}+a_{22})=0 & \equiv A_0 \end{cases}$$

169. Die Bedeutung dieser Gleichungen ist bald zu eruiren.

Auf die räumliche (cubische) Normcurve N_3 bezogen stellt (1) eine Fläche zweiter Ordnung H_2 (oder kürzer H) dar, deren Schnittpunkte mit der Curve durch die Doppelelemente der Involution (cf. vorigen §., Formel 4, 10)

$$(3)\ a_\lambda + k\, b_\lambda = 0$$

nemlich (4) $J = 0$

gegeben sind, die andrerseits (cf. Satz δ pg. 244) die Wendepunkte der R_4^2:

$$(5)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda)$$

darstellt, wo die φ die zu (3) conjugirte Gruppe zusammensetzen.

Zu jedem (1) genügenden Tripel gehört ein weiteres Element λ_4, das mit dem Tripel ein Quadrupel der Gruppe (5) bildet, die man durch drei ganz beliebig gewählte Quadrupel $\varphi(\lambda)$ festlegen kann. Dies liefert den bekannten[57] Satz**):

β) „Die Ecken irgend dreier einer cubischen Raumcurve φ umschriebenen Tetraeder liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung H. Dieser

*) Beispielsweise geht durch resp. Multiplication der zweiten und dritten Bedingung mit a_{22}, resp. $(2a_{02}+a_{11})$ und Addition die Bedingung $A_1 = 0$ hervor, der unter den p_{ik}-Relationen der Nr. 155 die den Index 1 nicht aufweisende entspricht; analog durch Multiplication der ersten und zweiten mit $2a_{13}+a_{22}$ resp. a_{11} und Addition die andere: $A_3 = 0$.

**) Über die Erweiterung desselben cf. Kap. III. Die dualistischen Gegensätze sind überall unterdrückt.

kann man ∞^2 solche Tetraeder einbeschreiben und zwar ist jeder Punkt der Fläche Eckpunkt *eines* solchen Tetraeders."

Nun entsprechen den drei Doppelpunkten der R_4^2 (5) $(\alpha_i\ \beta_i)$ drei solche Elementenpaare $(\alpha_i\ \beta_i)$, die mit unendlich vielen Paaren Quadrupel der Gruppe (5) bilden d. h.

β_1) „Die Fläche H des Satzes β) hat die Eigenschaft, dass drei Axen der Raumcurve $(\alpha_i\ \beta_i)$ ganz auf ihr liegen."

Da umgekehrt diese drei Elementenpaare $(\alpha_i\ \beta_i)$ das Schnittpunkttheorem der Curve (5), und somit die Fläche (1) eindeutig bestimmen, so folgt:

β_2) „Soll von einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine cubische Raumcurve der Satz β) gelten, so sind dazu die Bedingungen des Satzes β_1) nothwendig und hinreichend.

Diese Bedingungen sind im Falle der Normcurve durch (2) dargestellt."

In der That ist ja durch drei Gerade, die sie enthalten soll, im Allgemeinen stets eine Fläche zweiter Ordnung bestimmt. Werden von den drei Doppelpunkten der R_4^2 (5) ein resp. zwei resp. drei zu Spitzen, so werden von den bezüglichen Axen der Curve ein resp. zwei resp. drei *) zu Tangenten. Besitzt die Curve (5) einen dreifachen Punkt (α, β, γ), so wird die Fläche zum Kegel, für den die Axen $(\alpha\beta)$ $(\alpha\gamma)$ $(\beta\gamma)$ Kanten sind. Der doppelt unendlichen Schaar solcher Kegel entsprechen die drei homogenen willkürlichen Constanten (pq) (cf. pg. 268 Anm.). Und ähnlich in andern speciellen Fällen.

*) Auf die letzteren Flächen, die also drei Tangenten der Curve φ enthalten, ist schon früher (pg. 113) aufmerksam gemacht: desgleichen auf die allgemeinen Flächen H Nr. 134.

170. Von irgend einem Punkte $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ der Fläche H gehen die drei Axen $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_1 \lambda_3)$ $(\lambda_2 \lambda_3)$ aus, die aus der Fläche drei Restpunkte ausschneiden, deren Verbindungsebene nach Satz (β) eine Ebene (λ_4) der Curve ist. Dann bilden die vier λ ein Quadrupel der Gruppe (5) d. h. sie genügen dem Schnittpunkttheorem der Curve (5):

$$(6) \quad a_s = 0, \quad b_s = 0.$$

Geht man umgekehrt von einer beliebigen Curvenebene (λ_4) aus, so giebt es noch einfach unendlich viele Tetraeder des Satzes (β), die sie als eine Ebene besitzen.

Die Gegenecken der Ebene (λ_4) in allen diesen Tetraedern durchlaufen die Gerade:

$$(7) \quad \begin{aligned} A_1 + \lambda_4 A_2 &= 0 \\ B_1 + \lambda_4 B_2 &= 0 \end{aligned}$$

d. i. eine Gerade der Fläche H. Die Punkte $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ dieser Geraden repräsentiren andrerseits die Punktetripel, die in der Ebene der Curve R_4^2 (5) der Strahlbüschel des Punktes (λ_4) aus ihr ausschneidet. Und da es für jeden Punkt (λ_4) der Curve R drei Geraden giebt, die ihn mit den Doppelpunkten $(\alpha_i \beta_i)$ verbinden, so folgt:

β_3) Jede Ebene der cubischen Raumcurve φ ist eine gemeinsame Ebene von unendlich vielen φ um- und der Fläche H einbeschriebenen Tetraedern. Ihre Gegenecken in denselben durchlaufen eine Gerade der Fläche H. Diese Geraden bilden die eine Schaar der Fläche, und zwar die, der die drei Axen $(\alpha_i \beta_i)$ (der Curve φ) nicht angehören. Auf diese Weise sind also die „Geraden (λ_4) jener Schaar den Ebenen (λ_4) der Curve φ projektivisch zugeordnet“.

Somit schneiden also auf der Curvenebene (λ_4) die von den Punkten der Geraden (λ_4) an die Curve φ gehenden Ebenentripel unendlich viele Dreiecke aus, die dem der Ebene (λ_4) und der Fläche H gemeinsamen Kegelschnitt einbeschrieben sind.

Von den Ecken eines solchen Dreiecks gehen resp. die Axenpaare aus:

$$(8)\quad (\lambda_4\,\lambda_1)\,(\lambda_4\,\lambda_2);\quad (\lambda_4\,\lambda_1)\,(\lambda_4\,\lambda_3);\quad (\lambda_4\,\lambda_2)\,(\lambda_4\,\lambda_3)$$

die alle in der Ebene (λ_4) liegen.

Bekanntlich umhüllen aber alle in einer Curvenebene (λ_4) befindlichen Axen der Curve einen Kegelschnitt, den Schnitt der Ebene mit der Tangentenregelfläche der Curve. Dieser heisse der *Normkegelschnitt* *) der bez. Ebene.

Mithin giebt es in der Ebene (λ_4) unendlich viele Dreiecke, die ihrem Schnittkegelschnitt mit der Fläche H ein- und dem Normkegelschnitt der Ebene umbeschrieben sind d. h. nach der früheren Bezeichnung (Nr. 51):

$\beta_4)$ „*Jede Ebene der Curve φ trifft die Fläche H (des Satzes β) in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts.*“

---

*) Mit der doppeltzählenden Tangente (λ) der Curve bildet dieser Kegelschnitt bekanntlich den vollständigen Durchschnitt der Ebene (λ_4) und der Tangentenregelfläche der Curve.

Da z. B. die Ebene $s_3 = 0$ der Normcurve von den Ebenen (λ) der Curve:

$$s_\lambda \equiv s_0\,\lambda^3 - s_1\,\lambda^2 + s_2\,\lambda - s_3 = 0$$

in den Geraden

$$s_0\,\lambda^2 - s_1\,\lambda^2 + s_2 = 0$$

getroffen wird, die den Normkegelschnitt

$$4\,s_0\,s_2 - s_1^2 = 0$$

umhüllen, so ist die Bezeichnung „Normkegelschnitt“ einer Curvenebene gerechtfertigt.

171. Dies ist aber auch in der That die eigentliche Bedeutung der Gleichungen (2). Die erste und dritte zeigen nach pg. 99 ohne Weiteres, dass die Eigenschaft des letzten Satzes den Curvenebenen (0) (∞) zukommt.

Andrerseits ist nach beliebiger Annahme der Doppelpunktsargumente ($\alpha_i\ \beta_i$) der Curve R ihr Schnittpunkttheorem eindeutig festgelegt und demnach auch die Fläche (1), der die Eigenschaft des Satzes β_1) zukommt. Daraus ist ersichtlich, dass die Gesammtheit der Bedingungen (2) eine Eigenschaft von Fläche und Curve darstellt, die in quaternärem Sinne eine invariante ist. Da aber die Argumente (0) (∞) nur dazu dienten, die Curve auf ein passendes Coordinatentetraeder zu beziehen, so muss, was von ihnen gilt, auch von jedem andern Paar gelten, d. h. es gilt der Satz β_4).

Man kann demnach auch so sagen: Die zweite der Bedingungen (2) sagt, unter Voraussetzung der beiden andern, aus, dass nunmehr jede Ebene die Eigenschaft der Ebene (0) oder (∞) theilt, oder auch, dass nunmehr die Gleichung, die für irgend eine Fläche zweiter Ordnung F ($a_s^2 = 0$) die Curvenebenen bestimmt, die sie in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts treffen, identisch erfüllt wird.

Dies soll die Rechnung bestätigen.

172. Die Coordinaten eines Punktes einer Normcurvenebene (α) sind (cf. Nr. 30):

(9) $\rho s_0 = \sigma_0,\ \rho s_1 = \alpha\sigma_0 + \sigma_1,\ \rho s_2 = \sigma_2 + \alpha\sigma_1,\ \rho s_3 = \alpha\sigma_2$

wo die σ aus zwei Variabeln $\lambda_1\ \lambda_2$ gebildet sind.

Die Substitution in die Gleichung der Fläche F liefert:

$$(10)\quad \varphi_0 + 2\,\alpha\,\varphi_{0,\infty} + \alpha^2\,\varphi_\infty = 0$$

wo $\varphi_0 = 0$ resp. $\varphi_\infty = 0$ den Kegelschnitt darstellen, der der Fläche F und den Curvenebenen (0) resp. (∞) gemein ist und $\varphi_{0,\infty} = 0$ alle in Bezug auf F conjugirten Punktepaare, von denen immer der eine Punkt der einen und der andere der andern Ebene angehört.

Variirt α, so erhält man in Gleichung (10) alle Schnitte von F und den Ebenen der Curve.

Soll nun (10) zu einem H-Kegelschnitt des bez. Normkegelschnitts werden, so ergiebt die bekannte Bedingung der Nr. 51 nach einiger Rechnung:

$$(11) \quad \alpha^4 A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2 + \alpha A_3 + A_4 = 0.$$

Dabei sind die A_i die linken Seiten der Bedingungen {(2) (nebst anm.)} und gehen aus den linken Seiten der fünf p_{ik} Relationen (cf. pg. 248) P_i (wo in P_i der Index i nicht auftritt) mittelst der aus Gleichung (1) fliessenden Relationen hervor (und umg.):

$$(12) \quad p_{01} = a_{00},\ p_{12} = a_{11},\ p_{23} = a_{22},\ p_{34} = a_{33};$$
$$p_{02} = 2\, a_{01},\ p_{13} = 2\, a_{12},\ p_{24} = 2\, a_{23},\ p_{03} = 2\, a_{02} + a_{11},$$
$$p_{04} = 2\, (a_{03} + a_{12}),\ p_{14} = 2\, a_{13} + a_{22}.$$

Nun bestehen nach pg. 273 anm. zwischen den A die beiden Relationen:

$$(13) \quad \begin{cases} A_4\, (2\, a_{13} + a_{22}) + A_2\, a_{11} - A_0\, a_{00} & = 2\, A_3\, a_{12} \\ - A_4\, a_{33} \qquad\qquad + A_2\, a_{22} + A_0 (2 a_{02} + a_{11}) & = 2\, A_1\, a_{12} \end{cases}$$

denen gemäss (12) die andern zwischen den P correspondiren:

$$(13') \quad \begin{cases} P_4\, p_{14} + P_2\, p_{12} + P_0\, p_{10} = p_{31}\, P_1 \\ P_4\, p_{34} + P_2\, p_{32} + P_0\, p_{30} = p_{13}\, P_3 \end{cases}$$

(dabei sind vorläufig die zehn p_{ik}, aus denen die P gebildet sind, als ganz unabhängige Grössen zu denken, gerade wie die a_{ik}). Demnach gilt zuvörderst der Satz:

γ) „Es gibt im Allgemeinen immer ein Quadrupel von Ebenen (11) einer cubischen Raumcurve, die irgend eine Fläche zweiter Ordnung in einem H-Kegelschnitt (des in der Ebene befindlichen Normkegelschnitts) treffen."

Aber dieses Ebenentetraeder ist zugleich der Fläche einbeschrieben, wie nun gezeigt wird.

Durch eine lineare Transformation auf der Curve kann man erreichen, dass zwei der vier Wurzeln von (11) die Werthe 0, ∞ annehmen. Dann verschwinden A_0, A_4 (und somit auch P_0, P_4) und Gleichung (11) geht wegen der Relationen (13) über in (wenn α, β homogene Variable sind):

$$(14)\ \frac{\alpha\,\beta\,A_2}{2\,a_{12}}\,(\alpha^2\,a_{22}+2\,\beta\,\alpha\,a_{12}+\beta^2\,a_{11})=0$$

woraus in der That sofort einleuchtet, dass, wenn auch drittens A_2 (und damit P_2) verschwindet, die Gleichung (11) identisch befriedigt wird, was den Satz β_4) zur Folge hat.

„Dann werden die p_{ik} wieder die ursprünglichen Grössen $(ab)_{ik}$ und die Fläche ist durch (1) dargestellt.“

Jetzt verschwinde aber A_2 nicht.

Dann sind die Coordinaten eines Punktes der Axe (0, ∞) der Curve:

$$(13)\ \rho s_0=0,\ \rho s_1=\beta,\ \rho s_2=\alpha,\ \rho s_3=0$$

und demnach die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Fläche F gegeben durch:

$$(16)\ \alpha^2\,a_{22}+2\,\alpha\,\beta\,a_{12}+\beta^2\,a_{11}=0.$$

Die Vergleichung mit (14) beweist die aufgestellte Behauptung und wir haben somit:

γ_1) „Es giebt im Allgemeinen immer ein einziges einer cubischen Raumcurve φ um- und einer Fläche zweiter Ordnung F einbeschriebenes Tetraeder (11).

Die Ebenen desselben treffen F in einem H-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts. Giebt es noch eine fünfte Ebene mit gleicher Eigenschaft, so erfreuen sich ihrer auch alle Ebenen der Curve. Dann giebt es auch gleich doppelt unendlich viele der Fläche ein- und der Curve umbeschriebene Tetraeder.

Dann verschwindet die linke Seite von (11), eine simultane Covariante*) von Fläche und Curve, identisch.

Dies ist aber nur drei Bedingungen aequivalent, da zwischen den Coefficienten von (11) (mit Hülfe der Coefficienten von F) zwei lineare Relationen bestehen."

Dass umgekehrt aus dem ersten Satze von γ_1) wieder Satz γ) hervorgeht, ist sofort zu sehen, denn jede Ebene des der Curve um- und der Fläche einbeschriebenen Tetraeders trifft F in einem Kegelschnitt, dem ein Dreieck ein- und dem Normkegelschnitt der Ebene umbeschrieben ist. Dann aber giebt es ja unendlich viele solcher Dreiecke d. h. der erste Kegelschnitt ist ein H-Kegelschnitt des zweiten.

173. Hier bietet sich zugleich die analoge Frage nach den Ebenen einer cubischen Raumcurve, die eine Fläche zweiter Ordnung F in dem F-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts (d. i. dem den letzteren stützenden) treffen.

Die Anwendung der oft gebrauchten Bedingung auf die Kegelschnittschaar (10) liefert:

$$(17)\quad \alpha^2 (a_{13} - a_{22}) + \alpha\beta (a_{03} - a_{12}) + \beta^2 (a_{02} - a_{11}) = 0$$

oder in den p_{ik}:

$$(17')\quad \frac{1}{2}\left\{\alpha^2 (p_{03} - 3p_{12}) + \alpha\beta (p_{04} - 2p_{13}) + \beta^2 (p_{14} - 3p_{23})\right\} = \frac{1}{2} Q = 0.$$

Dies liefert zunächst:

δ) „Es giebt im allgemeinen immer ein Paar

---

*) Im Falle die Fläche die Curve stützt und aus ihr das Sextupel f ausschneidet, ist diese Covariante die einzige biquadratische Covariante der Form f vom zweiten Grade in den Coefficienten, die es bekanntlich giebt.

(17) von Ebenen einer cubischen Raumcurve, die irgend eine Fläche zweiter Ordnung in einem F-Kegelschnitt ihres Normkegelschnitts treffen." „Nur wenn die Fläche die Curve stützt, giebt es unendlich viele (d. s. alle Ebenen der Curve)."

In der That sieht man dies auch so ein. In der ganzen der Curve umschriebenen Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse giebt es eine Schaar, deren Individuen auf der Fläche F ruhen. Sie haben alle eine Raumcurve vierter Klasse gemein, die in die gegebene Curve und eine Axe derselben zerfällt. Die beiden von der Axe an die Curve gehenden Ebenen enthalten je einen Normkegelschnitt. Diese beiden Kegelschnitte sind die einzigen uneigentlichen Flächen der auf F ruhenden Schaar. Dann ruhen sie aber auch auf dem Kegelschnitte, den ihre Ebene aus F ausschneidet.

q. e. d.

Soll die Gleichung (17) identisch verschwinden, so stützt nach Früherem die Fläche F die Curve und von jeder Ebene der Curve gilt der Satz δ).

Werden aber die a_{ik} den Bedingungen $A_i = 0$ (und damit die p_{ik} den Bedingungen $P_i = 0$) unterworfen, so geht die Fläche F wieder in die Fläche H (1) über.

Dann ist die linke Seite von (17') (abgesehen vom Faktor $\frac{1}{2}$) die quadratische, bilineare Combinante Q der Schnittpunkttheorems-Involution

$$(3) \quad a_\lambda + k b_\lambda = 0$$

d. h. die dritte Ueberschiebung der Formen a_λ, b_λ.

Bekanntlich ist aber nach Gordan[58] eine biquadratische Involution (3) in eindeutiger*) Weise bestimmt, sobald

*) Von diesem Satze geht auch Stephanos aus, Comptes Rendus Dec. 1881.

man neben der ersten Ueberschiebung der Formen a_λ, b_λ (d. i. ihrer Funktionaldeterminante) auch noch die angegebene quadratische Combinante kennt. Dies liefert den Satz:

ε) „Zu jeder der fünf Flächen zweiten Grades H, die durch irgend sechs Punkte einer cubischen Raumcurve gehen und drei Axen der Curve ganz enthalten, gehört ein Ebenenpaar der Curve, das die Fläche in einem ihren resp. Normkegelschnitt stützenden Kegelschnitt trifft.

Dies wird dargestellt durch die quadratische, in den p_{ik} lineare Combinante Q der zugehörigen biquadratischen Involution, deren Quadrupelgruppe conjugirt ist zur Gruppe der der Curve um- und der Fläche einbeschriebenen Tetraeder. Umgekehrt gehört zu jedem solchen Ebenenpaar nur eine *einzige* Fläche H."

Von diesem Ebenenpaar sind noch weitere Eigenschaften angebbar.

Die quadratische Combinante (17′) ist auch definirbar als dritte Ueberschiebung der nach α genommenen ersten Polaren der Formen a_λ, b_λ. Andrerseits ist dann (cf. pg. 68) die Invariante i der Funktionaldeterminante dieser Polaren das Quadrat der Form (17′).

Nun waren in Satz β_3 die Geraden (α) der einen Schaar der Fläche H den Ebenen (α) der Curve projektivisch zugeordnet. Die von den Punkten der Geraden (α) an die Curve gehenden Ebenentripel sind gerade durch die cubische Involution der angegebenen ersten Polaren dargestellt. Mithin liefert deren Funktionaldeterminante bei festem α die vier

---

Das Produkt der fünf quadratischen Combinanten, die mit einer gegebenen Funktionaldeterminante die fünf zugehörigen biquadratischen Involutionen bestimmen, ist dann eine Covariante (zehnter Ordnung) der Funktionaldeterminante.

Tangenten der Curve, die die Gerade (α) treffen. Verschwindet die Invariante i derselben, so sind die vier Tangenten aequianharmonisch und die Gerade (α) ist im Nullcomplex der Curve sich selber conjugirt. Mithin haben wir:

δ_1) „Construirt man die im Nullcomplex der cubischen Curve zur Fläche H conjugirte, so treffen sich beide in zwei Geradenpaaren, von denen das eine der einen, das andere der andern Regelschaar von H angehört. Der die drei Axen ($\alpha_i \cdot \beta_i$) der Curve enthaltenden Regelschaar (cf. Satz β_3) gehört dasjenige Paar an (das von zwei aequianharmonischen Tangentenquadrupeln der Curve getroffen wird und) das dem Ebenenpaar des Satzes δ) projectivisch zugeordnet ist."

174. Excurs. Es möge hier die fundamentale Bedeutung der quadratischen Combinante (17′) Q für die ebene Curve R, deren Schnittpunktformen die Involution (3) bilden, eingeschoben werden. Dabei werden die von Herrn Brill erhaltenen eleganten Resultate eine neue, nicht unwichtige Beleuchtung erfahren.

Der Satz δ_1) spricht sich in der Ebene ohne Weiteres so aus:

δ_2) Für irgend eine Curve R_4^2: „$\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$" giebt es immer ein Paar von Punkten auf ihr, von denen aequianharmonische Tangentenquadrupel an sie gehen. Dies ist das Paar Q, wo Q die einzige in den Coefficienten der φ_i (oder auch in den Δ_{ik} (cf. §. 1) lineare quadratische Combinante ist, von der der Gordan'sche Satz gilt."

Diesem Punktepaar kommt aber eine noch merkwürdigere Beziehung zu:

δ_3) „Das Punktepaar Q ist das von dem Brill-schen Wendekegelschnitte der Curve R (d. i. dem durch die sechs Wendepunkte gehenden) aus ihr ausserdem noch ausgeschnittene."

Herr Brill hat die Existenz des Wendekegelschnitts in der schon erwähnten Abhandlung (Math. Ann. XII „Ueber rationale Curven vierter Ordnung") erwiesen, und in einer weiteren Arbeit (Math. Ann. XIII „Ueber die Hesse'sche Curve") den Beweis erheblich vereinfacht, sodass die Rechnung fast eliminirt ist. Zugleich theilt hier d. H. V. einen weiteren eleganten Satz mit (cf. unten), der schon vermuthen lässt, dass das in Rede stehende Punktepaar eine tiefere Bedeutung für die Curve R hat.

Herr Brill geht von der Hesse'schen Curve der gegebenen aus, die ja die Wendepunkte ausschneidet (und ausserdem in den Doppelpunkten berührt), und zeigt, wie sie in den Doppelpunkten, was ihr Verhalten zur Curve betrifft, von einer andern, wesentlich einfachern Curve φ „vertreten" werden kann, woraus dann der gemeinte Satz fliesst.

Der folgende neue Beweis setzt die Kenntniss der Hesse'schen Curve nicht voraus und benützt nur die für die Curve als rationale charakteristische Form des Schnittpunkttheorems.

Mit Rücksicht auf die Argumente der Doppelpunkte $(\alpha_i\ \beta_i)$ lässt sich, wie bekannt und schon früher pg. 191 bemerkt, das Schnittpunkttheorem ersetzen durch die drei (linear abhängigen) Gleichungen

$$(18)\quad \frac{(\lambda_1-\alpha_i)\,(\lambda_2-\alpha_i)\,\ldots\,(\lambda_4-\alpha_i)}{(\lambda_1-\beta_i)\,(\lambda_2-\beta_i)\,\ldots\,(\lambda_4-\beta_i)}=\tau_i=$$
$$\frac{(\alpha_k-\alpha_i)\,(\alpha_l-\alpha_i)\,(\beta_k-\alpha_i)\,(\beta_l-\alpha_i)}{(\alpha_k-\beta_i)\,(\alpha_l-\beta_i)\,(\beta_k-\beta_i)\,\beta_l-\beta_i)}\;(i=1,2,3).$$

Dann folgt sofort, dass dasjenige für acht Punkte der Curve auf einem Kegelschnitte so lautet (wo diese drei Gleichungen linear unabhängig sind)

$$(19) \quad \frac{(\lambda_1-\alpha_i)\ldots(\lambda_8-\alpha_i)}{(\lambda_1-\beta_i)\ldots(\lambda_8-\beta_i)} = \tau_i^2 \; (i = 1, 2, 3).$$

Vermöge der linearen Transformation, die den Doppelpunkt $(\alpha_i\ \beta_i)$ zum Doppelpunkt $(0, \infty)$ macht:

$$(20) \quad \mu = \frac{\lambda-\alpha_i}{\lambda-\beta_i}$$

geht eine der Gleichungen (18) (19) in die kanonische Form über:

$$(21) \quad \mu_1\,\mu_2\,\mu_3\,\mu_4 = \tau_i, \quad \mu_1\,\mu_2\ldots\mu_8 = \tau_i^2$$

während die beiden andern Formen in ihrer Gestalt nicht verändert werden und, wenn die neuen Argumente der beiden andern Doppelpunkte jetzt $(A_k\ B_k)$ $(A_l\ B_l)$ lauten, sich so schreiben

$$(21') \quad \frac{(\mu_1-A_k)\ldots(\mu_4-A_k)}{(\mu_1-B_k)\ldots(\mu_4-B_k)} = \tau_k$$

$$\frac{(\mu_1-A_k)\ldots(\mu_8-A_k)}{(\mu_1-B_k)\ldots(\mu_8-B_k)} = \tau_k^2 \; (k = k, l)$$

Andrerseits kann man das Schnittpunkttheorem (18) dann auch darstellen durch:

$$(22) \quad \begin{cases} a_0\,s_0 + 0.s_1 + 0.s_2 + 0.\,s_3 + a_4\,s_4 = 0 \\ b_0\,s_0 + b_1\,s_1 + b_2\,s_2 + b_3\,s_3 + b_4\,s_4 = 0 \end{cases}$$

wo wegen (21): $\dfrac{-a_0}{a_4} = \tau_i$ ist.

Mithin nehmen die p_{ik} jetzt die Werthe*) an:

---

*) Mithin nimmt die Funktionaldeterminante der Schnittpunktformen vermöge (20) die Form an,

$$J \equiv p_{01} + 3\,p_{02}\,\lambda + 3\,(p_{03} + 2\,p_{12})\,\lambda^2 + (p_{04} + 8\,p_{13})\,\lambda^3$$
$$+ p_{34}\,\lambda^6 + 3\,p_{24}\,\lambda^5 + 3\,(p_{14} + 2\,p_{23})\,\lambda^4$$
$$= (a_0\,b_1) + 3\,\lambda\,(a_0\,b_2) + 3\,\lambda^2\,(a_0\,b_3) + \lambda^3\,(a_0\,b_4 - a_4\,b_0)$$
$$-(a_4\,b_3)\,\lambda^6 - 3\,(a_4\,b_2)\,\lambda^5 - 3\,(a_4\,b_1)\,\lambda^4$$

$$(23)\quad \begin{cases} p_{12}=p_{13}=p_{23}=0;\ p_{01}=a_0\,b_1,\ p_{02}=a_0\,b_2,\ p_{03}=a_0\,b_3, \\ p_{04}=a_0\,b_4-a_4\,b_0,\ p_{14}=-a_4 b_1,\ p_{24}=-a_4 b_2,\ p_{34}=-a_4 b_3. \end{cases}$$

Dies sind die erforderlichen Hülfsformeln. Man schliesst nun so.

Dass die Lage der sechs Wendepunkte keine ganz unabhängige sein kann, geht schon aus der Constantenanzahl (= 11) der Curve R hervor. Man kann keine Curve R construiren, die in sechs beliebigen Punkten Wendepunkte hätte, da dies zwölf Bedingungen zählt.

Nehmen wir jetzt für den Augenblick an, die Wendepunkte *) $(\omega_1 \ldots \omega_6)$ lägen in der That auf einem Kegelschnitt, so wäre nach der zweiten Gleichung (21)

$$(24)\quad \tau_i^2 = (\omega_1 \ldots \omega_6)\,(\mu_7\,\mu_8) = \left(\frac{p_{01}}{p_{34}}\right)(\mu_7\,\mu_8) =$$

$$-\frac{a_0\,b_1}{a_4\,b_3};\ \text{also, da} -\frac{a_0}{a_4} = \tau_i.$$

$$(25)\quad \tau_i = \frac{b_1}{b_3}\,(\mu_7\,\mu_8) \text{ und demnach}$$

$$(26)\quad (\mu_7\,\mu_8) = -\frac{a_0\,b_3}{a_4\,b_1}.$$

---

d. h. zwischen den Coefficienten von

$$J \equiv i_0 + 6\,i_1\,\lambda + 15\,i_2\,\lambda^2 + \ldots + 6\,i_5\,\lambda + i_6\,\lambda^6$$

finden die Relationen statt (cf. Brill Math. Ann. XX l. c.):

$$i_0 : 2\,i_1 : 5\,i_2 = -5 i_4 : -2\,i_5 : -i_6.$$

Umgekehrt befinden sich daher unter allen Substitutionen (20), die irgend eine binäre Form sechsten Grades in diese canonische Form bringen, jedenfalls die 3. 5 = 15, die den Elementenpaaren $(\alpha_i\ \beta_i)$ der fünf zugehörigen Involutionen vierter Ordnung entsprechen.

*) Nach pg. 244 sind sie die Wurzeln der Funktionaldeterminante der Schnittpunktformen:

$$J \equiv p_{01} + \ldots p_{34}\,\lambda^6.$$

Andrerseits war $Q \equiv (p_{03} - 3\,p_{12}) + \cdot + (p_{04} - 3\,p_{23})\,\lambda^2.$

Ist aber die Annahme richtig, so muss offenbar das vom Kegelschnitt ausgeschnittene Restpunktepaar von einer quadratischen Combinante der Schnittpunkttheorems-Involution dargestellt sein. Diese müsste durch die auf irgend einen der drei Doppelpunkte bezügliche Transformation (20) in eine solche Form übergehen, dass das Produkt ihrer Wurzeln den in (26) angegebenen Werth hat. Dies leistet aber nur die eine Combinante Q.

Nachdem man so auf die Form Q geführt ist, kehrt man den Beweis um und sagt:

„Die hinreichenden und nothwendigen Bedingungen dafür, dass die sechs Wendepunkte (ω_i) mit dem Punktepaar Q auf einem Kegelschnitt liegen, sind zunächst durch die drei Gleichungen (18) gegeben, wenn man für sechs der acht λ die ω, und für die beiden Restargumente die Wurzeln von $Q = 0$ einsetzt.

Um leichter zu erkennen, ob die auf irgend einen Doppelpunkt $(\alpha_i\, \beta_i)$ bezügliche der Gleichungen 19) in der That in der vorgeschriebenen Weise erfüllt wird, wendet man die lineare Umformung (20) an, wodurch die gemeinte Gleichung die zweite Form (21) und das lineare Schnittpunkttheorem (die erste Form (21) oder) die Form (23) annimmt.

Dann aber zeigen die Formeln (24) (25) (26) die verlangte Erfüllung. Dasselbe Verfahren wende man auf die beiden andern Doppelpunkte an, dann ist der Beweis erledigt."

Man sieht, dass ein wesentliches Hülfsmittel beim Beweise darin besteht, dass einmal von der Form (21), andrerseits von der Form (23) des Schnittpunkttheorems Gebrauch gemacht ist.

Fast in derselben Weise kann man den zweiten Brill'schen Satz beweisen:

δ_4) „Die sechs Restpunkte der Tangenten von R in den Doppelpunkten liegen mit dem

Restpunktepaar des Wendekegelschnitts auf einem Kegelschnitt."

Wie vorher, machen wir vermöge (20) einen der Doppelpunkte zu $(0, \infty)$.

Die Argumente der beiden andern seien dann $(A_k\, B_k)$, $(A_l\, B_l)$ und die bez. Produkte σ_k, σ_l.

Endlich die Restpunkte der Tangenten in ihnen seien resp. $(r_0\, r_\infty)$, (r_k, r_k'), (r_l, r_l').

Dann sind ihrer Definition nach zunächst die vier letzteren bestimmt durch:

(27) $\sigma_k\, A_k\, r_k = \tau_i,\ \sigma_k\, B_k\, r_k' = \tau_i,\ \sigma_l\, A_l\, r_l = \tau_i,\ \sigma_l\, B_l\, r_l' = \tau_i,$

also kommt durch Multiplikation:

$$(28)\ (\sigma_k\, \sigma_l)^3\, (r_k\, r_k'\, r_l\, r_l') = \tau_i^4 :\ \text{da aber:}\ \tau_i = \sigma_k\, \sigma_l :$$

$$(28)\ r_k\, r_k'\, r_l\, r_l' = \tau_i .$$

Andrerseits ergeben sich r_0, r_∞ aus der zweiten Gleichung (23)

$$(29)\ r_0 = -\frac{b_1}{b_2},\ r_\infty = -\frac{b_2}{b_3}\ \text{also}\ r_0\, r_\infty = \frac{b_1}{b_3}$$

Da endlich nach (25) $(\mu_7\ \mu_8)$ (das Produkt der Wurzeln von Q) gleich $\tau_i \frac{b_3}{b_2}$ ist, so folgt:

$$(30)\ (r_k\, r_k'\, r_l\, r_l')\, (r_0\, r_\infty)\, (\mu_7\, \mu_8) = (\tau_i) \left\{\frac{b_1}{b_3}\right\} \left\{\tau_i \frac{b_3}{b_1}\right\} = \tau_i^2 .$$

q. e. d.

Die Formel (28) ist dabei zugleich der Beweis für den gleichfalls von Herrn Brill angegebenen Satz:

„Die vier Restpunkte zweier der drei Doppelpunktstangentenpaare liegen mit den beiden bez. Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt *)."

---

*) Diese Sätze lassen sich noch mannigfach erweitern, wie folgt: Gleichung (30) schreibt sich auch so:

175. Wir kehren zurück zu unserer Fläche zweiter Ordnung H (1).

Denkt man sich in (1) ein Argument α fest, die beiden andern beweglich, so stellt (1) einmal die mit dem Punkte α der Curve R_4^2 in gerader Linie liegenden Punktepaare, oder

---

$$(r_0\, r_\infty)\, (\mu_7\, \mu_8) = \tau_i \text{ d. h.}$$

„Die zwei Restpunkte eines Doppelpunktstangentenpaares liegen mit dem Punktepaar Q und den beiden andern Doppelpunkten auf einem Kegelschnitt."

Stellt man weiterhin noch die Invariante j der Funktionaldeterminante der nach α genommenen ersten Polaren von a_λ, b_λ auf, so ist dies eine Form j_α^6, die, $= 0$ gesetzt, diejenigen sechs Punkte einer Curve R darstellt, von denen harmonische Tangentenquadrupel an sie gehen. Verfährt man wie im Texte, so wird für das Schnittpunkttheorem (23): $j_\alpha^6 = \left\{-\frac{a_0\, b_3}{6}\right\}^3 + C_1\, \alpha + \ldots C_5\, \alpha^5 + \left\{\frac{a_4\, b_1}{6}\right\}^3 \alpha^6$ und somit das Produkt ihrer Wurzeln

$$I = j_1\, j_2 \ldots j_6 = \tau_i^3 \left\{\frac{b_3}{b_1}\right\}^3 \text{ also wegen (29) } r_0\, r_\infty = \frac{b_1}{b_3}$$

Erstens $I\, (r_0 r_\infty)^3 = \tau_i^3$.

Ferner bestimme man das Restpunktepaar, in dem die Gerade, die aus R das Paar Q ausschneidet, R noch trifft. Dieses sei $(\rho_1\, \rho_2)$. Dann ist wegen (26):

$$(\mu_7\, \mu_8)\, (\rho_1\, \rho_2) = \tau_i \text{ mithin}$$

$$\rho_1\, \rho_2 = \frac{\tau_i}{\mu_7\, \mu_8} = \frac{b_1}{b_3} = r_0\, r_\infty.$$

Somit lautet die erweiterte Gleichung für die Punkte $(j_1 \ldots j_6)$:

$$I\, (r_0\, r_\infty)^3 = I\, (r_0\, r_\infty)^2\, (\rho_1\, \rho_2) = I\, (r_0\, r_\infty)\, (\rho_1\, \rho_2)^2 = I\, (\rho_1\, \rho_2)^3 = \tau_i^3.$$

Von den vier darin enthaltenen Sätzen werde etwa der letzte betont:

„Durch die sechs Punkte I auf R (von denen harmonische Tangentenquadrupel an sie gehen) lege man eine Curve dritter Ordnung, die R ausserdem in einem der beiden Restpunkte der Geraden Q osculirt. Dann osculirt sie auch in dem andern." etc.

auch die die Gerade (α) der Fläche H treffenden Axen der cubischen Raumcurve, oder endlich den Kegelschnitt dar, den die Ebene (α) der Curve aus der Fläche H ausschneidet. Damit ist die projectivische Beziehung zwischen Gerade (α) und Ebene (α) näher bestimmt. Fallen die beiden variabeln Argumente zusammen, so ergiebt sich das vom Punkte α an die R_4^2 gehende Tangentenquadrupel, oder auch das die Gerade (α) von H treffende Tangentenquadrupel der Raumcurve oder die Schnittpunkte des Normkegelschnitts der Ebene (α) mit ihrem Schnittkegelschnitt auf H.

Nun trafen die beiden Ebenen ($Q = 0$) die Fläche H in einem Kegelschnitte, der sowohl H- als F-Kegelschnitt des bez. Normkegelschnitts ist: mithin ist nach einem früheren Satze das Schnittpunktquadrupel derselben aequianharmonisch, woraus mit Hülfe des eben Bemerkten wieder die Sätze (δ_1) (δ_2) fliessen.

176. Eine grosse Menge von weiteren Eigenschaften der Fläche H erhält man unmittelbar aus ihrer Abbildung auf die ebenen Curven R: es mögen etwa noch, im Hinblick auf die Doppel- *) und Wendetangenten der letztern, die folgenden angeführt werden:

ζ) „Die acht Tangenten, die eine Fläche zweiter Ordnung mit einer cubischen Raumcurve φ gemein hat, theilen sich für eine Fläche H in vier Paare (δ_i ε_i) derart, dass die vier Berührungssehnen der Fläche Axen der Curve sind (und zwar die Axen (δ_i ε_i)).

Die sechs Tangenten an die Fläche H in den Schnittpunkten mit der Curve treffen die Fläche

*) Mithin führen auch alle früher für die Argumentenpaare der Doppeltangenten (Wendetangenten) nachgewiesenen Beziehungen zu entsprechenden Sätzen für die Flächen H.

in sechs Restpunkten r. Von einem solchen geht immer noch eine einzige Curvenaxe aus, die dann zugleich Tangente der Fläche ist." etc.

177. In Früherem (cf. Nr. 133 ff.) wurde die Hurwitz'sche cubische Raumcurve $H_3 = H$ *) betrachtet, der Ort der Ecken von unendlich vielen der Curve φ umschriebenen Tetraedern, die auf φ eine biquadratische Involution bilden. Als letztere diene jetzt die der Schnittpunktformen der Curve R, dann existirt eine grosse Zahl von eigenthümlichen Beziehungen zwischen Fläche H und Curve H, von denen einige schon behandelt sind. So waren die Tangenten der Curve φ in ihren Schnittpunkten mit der Fläche H Sehnen der Curve H. (cf. pg. 210.)

Es möge genügen, hier noch eine wichtige Beziehung zwischen Fläche und Curve H herauszugreifen, die von den Doppelpunkten $(\alpha_i\ \beta_i)$ (resp. den auf der Fläche H liegenden Axen $(\alpha_i\ \beta_i)$ der Curve φ) ausgeht.

Unter den Involutionsquadrupeln befinden sich nemlich drei von der Form:

$$(31)\quad (\lambda-\alpha_i)^4 + k\,(\lambda-\beta_i)^4.$$

Fassen wir hier für den Augenblick k als variabel auf, so tritt uns eine neue Involution vierter Ordnung, aber specieller Natur, entgegen.

Denn ihre Doppelelemente sind gegeben durch (cf. Nr. 65):

$$(32)\quad (\lambda-\alpha)^3\,(\lambda-\beta)^3 = 0.$$

Aus dem Umstande, dass es zwei Tetraeder dieser Involution giebt, deren Ebenen alle coincidirt sind (in die Ebenen (α_i) resp. (β_i)) folgt sofort, dass die durch die Involution (31)

---

*) Nach der jetzigen Bezeichnungsweise hätte man zu sagen:
„Jede Ebene der Curve φ trifft die Curve H in den Ecken eines ihrem Normkegelschnitt umbeschriebenen Dreiseits."

bestimmte specielle Curve H_3 mit der Curve φ die Punkte, Tangenten und Ebenen (α_i) (β_i) gemein hat.

Somit gilt der Satz:

η) „Unter den einer Curve H_3 ein- und einer Curve φ umbeschriebenen Tetraedern befinden sich drei ausgezeichnete. Jedes derselben ist einer weiteren speciellen Curve $H_3^{(i)}$ einbeschrieben, die mit der Curve φ zwei *Punkte*, *Tangenten*, *Ebenen* (α_i, β_i) gemein hat.

Die drei Axen $(\alpha_i\ \beta_i)$ bestimmen dann nach Satz (β_2 pg. 274) eindeutig die zur Curve H_3 gehörige Fläche H_2, die φ in den sechs Punkten trifft, deren Tangenten Sehnen von H_3 sind.

Umgekehrt gelangt man so von der Fläche H_2 zur Curve H_3."

Dieser Satz ist aber nur ein besonderer Fall einer allgemeineren Beziehung zwischen Fläche und Curve H, die selbst wieder einer weittragenden Verallgemeinerung (die in Kap. III behandelt ist) fähig ist. Diese gemeinte Beziehung ist (zunächst) in algebraischer Gestalt:

$\varkappa$) I. „Jedes der R_4^2-Gruppe:

$$(33)\quad u_0\,\varphi_0 + u_1\,\varphi_1 + u_2\,\varphi_2$$

angehörige Elemententripel (α, β, γ) entspricht einer bestimmten Form

$$(34)\quad a\,(\lambda-\alpha)^4 + b\,(\lambda-\beta)^4 + c\,(\lambda-\gamma)^4$$

der zu (33) conjugirten Gruppe

$$(35)\quad a_\lambda + kb_\lambda, \ \textit{und umgekehrt.}$$

II. Jedes der Gruppe (35) angehörige Elementenpaar $(\alpha_1\ \beta_1)$ entspricht einer bestimmten („harmonischen") Form:

$$(36)\quad (\lambda-\alpha_1)^4 + k_1 (\lambda-\beta_1)^4$$

der zu (35) conjugirten Gruppe (33), *und umgekehrt.*"

Der Beweis fliesst unmittelbar aus den früher (mit Hülfe ihrer conjugirten Gruppe) behandelten Sätzen über eine biquadratische Form f, die wir jetzt in folgenden zusammenziehen:

„Soll die Form f als Summe von zwei resp. drei Biquadraten linearer Formen $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$ (resp. $\lambda-\alpha$, $\lambda-\beta$, $\lambda-\gamma$) darstellbar sein, so müssen die ersten (resp. zweiten) nach den zwei resp. drei Elementen α, β (γ) polarisirten Differentialquotienten von f [in Zeichen „F_{11}, F_{12}, F_{22} resp. F_1, F_2"] verschwinden und umg."

Dann erledigt sich zunächst Fall I, wie folgt. (Statt $\varphi_0\ \varphi_1\ \varphi_2$ schreiben wir momentan φ, χ, ψ.)

Soll (α, β, γ) ein Tripel der Gruppe (33) sein, so genügt es ihrem Schnittpunkttheorem

$$(37)\quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$$

das wiederum zwei Gleichungen der Form:

$$(38)\quad \begin{cases} A_1 + \mu\, B_1 = 0 \\ A_2 + \mu\, B_2 = 0 \end{cases}$$

aequivalent ist. Jedem Tripel α, β, γ der verlangten Art gehört dann ein einziger Werth μ zu und umg.

Die Bedingungen (38) sagen aber gerade aus, dass die Form

$$(39)\quad a_\lambda + \mu\, b_\lambda$$

in der Gestalt (34) (mittelst der α, β, γ) darstellbar ist.

Damit ist Fall I bewiesen, und da man den Gang genau rückwärts machen kann, auch die Umkehrung.

Ganz ähnlich Fall II. Beweisen wir hier z. B. die Umkehrung zuerst.

Greifen wir irgend ein harmonisches Quadrupel der Gruppe (33) heraus, so ist dies darstellbar durch (36):

(36) $K_1 \equiv (\lambda-\alpha_1)^4 + k^1 (\lambda-\beta_1)^4 \equiv v_0 \varphi + v_1 \chi + v_2 \psi.$

Dann aber genügen $(\alpha_1 \beta_1)$ den Bedingungen (40)

$$\begin{cases} v_0 \Phi_{11} + v_1 X_{11} + v_2 \Psi_{11} = 0 \\ v_0 \Phi_{12} + v_1 X_{12} + v_2 \Psi_{12} = 0 \\ v_0 \Phi_{22} + v_1 X_{22} + v_2 \Psi_{22} = 0 \end{cases} \text{d. h. der einen} \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{22} \\ X_{11} & X_{12} & X_{22} \\ \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist genau die Bedingung, dass $(\alpha_1 \beta_1)$ ein Elementenpaar der Involution (35) ist.

Und umgekehrt wie bei Fall I.

q. e. d.

178. Fassen wir jetzt Fall II. noch näher in's Auge.

Soll eine Form (33) ein harmonisches Quadrupel darstellen, so muss, anders ausgedrückt, ihre Invariante j verschwinden:

$$(41) \quad j\,(u_0 \varphi_0 + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) = 0 \equiv K_3$$

d. h. die solche Quadrupel aus der Curve R ($\rho x_i = \varphi_i$) ausschneidenden Geraden umhüllen eine Curve dritter Klasse *) K_3 (deren mit R gemeinsame 18 Tangenten bekanntlich die 6 Wendetangenten von R, dreifach gezählt, sind).

Andrerseits durchlaufen die Punkte σ (wo die σ aus α_1, β_1 gebildet sind) in der Ebene eines Normkegelschnitts und auf diesen bezogen, eine Curve dritter Ordnung H_3 (vom Geschlecht 1), deren Punkten nach Früherem ein- eindeutig diejenigen Sehnen der Raumcurve H_3 entsprechen, die zugleich Axen der Norm- (Grund-) Curve φ sind. Dann sagt Satz $\varkappa$) II jetzt aus:

λ) „Die Curven K_3 und H_3 sind ein-eindeutig aufeinander bezogen: und zwar stellt irgend ein

*) Diese sechs Wendetangenten von R sind dann bekanntlich auch die gemeinsamen Tangenten von K_3 und demjenigen Kegelschnitt K_2, dessen Tangenten aus R aequianharmonische Quadrupel ausschneiden, und dessen Gleichung $i\,(u_0 \varphi_0 + u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2) = 0$ ist.

Quadrupel der Involution (35) einmal die Gegenecken eines bestimmten Hesse-Steiner'schen *) Vierseits der Curve H_3, andrerseits die Gegenseiten eines bestimmten Hesse-Steiner'schen Vierecks der Curve K_3 dar."

179. Ehe man die beiden Sätze $\varkappa$) in der Weise des Satzes η) auf die Curven und Flächen H überträgt, wird es nöthig sein, sich über die Natur der speciellen Gruppen (34) (36) (resp. ihrer H-Bilder) näher zu informiren. Von der H-Curve (36) ist eine Eigenschaft bereits im Satze η) niedergelegt und früher wurde nachgewiesen, dass es nur noch eine Involution giebt:

$$(42)\quad (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\beta_1)\{(\lambda-\alpha_1)^2+k(\lambda-\beta_1)^2\}$$

die mit (36) dieselben Doppelelemente (der Form (32)) gemein hat.

Wir schreiben statt α, β, γ, resp. α_1, β_1 lieber **) $y_1\, y_2\, y_3$ resp. $y_1\, y_2$.

Dann ist zunächst leicht zu sehen, wie man von der Gruppe (34) zu (36) gelangt und umg. Denn die dreigliedrige Gruppe (34) enthält drei Involutionen der Form (36): umgekehrt ist eine Involution (36) noch in einer ∞^2-Schaar von Gruppen (33) enthalten:

$$(43)\quad (\lambda-y_1)^4+k_1(\lambda-y_2)^4+k_2\,\varphi(\lambda):$$

μ_1) „Das Netz von Flächen zweiter Ordnung, die durch die zur speciellen Involution (36) gehörige Hurwitz'sche Curve (H_3^{12}) gehen, besteht aus

*) D. h. ein solches, dessen Gegenecken sich in der Hesse-Steiner-schen Correspondenz auf der Curve H_3 entsprechen.

**) Um keine Verwechslung mit den Doppelpunktsargumenten ($\alpha_i\, \beta_i$) aufkommen zu lassen. Aus analogem Grunde wird die cubische Covariante einer cubischen Form f an dieser Stelle Θ (und nicht, wie üblich Q) genannt.

den zu allen *) Gruppen (43) gehörigen Flächen (H_2^{12}). Die entsprechenden ebenen R-Curven besitzen alle zwei Undulationen (y_1 y_2)."

Unter diesen Gruppen (43) befindet sich insbesondere eine ∞^1-Schaar

$$(44)\quad (\lambda - y_1)^4 + k_1 (\lambda - y_2)^4 + k_2 (\lambda - y_3)^4$$

d. h. aber wieder die unter (34) angegebenen. Diese mögen zuerst erledigt werden.

Die entsprechenden ebenen R-Curven besitzen drei Undulationen, deren Tangenten je zwei Wendetangenten und eine Doppeltangente absorbirt haben.

Welches sind die Argumente der einen eigentlichen Doppeltangente, sowie der Doppelpunkte; welches die Combinante Q?

Wir bringen zu dem Zweck die cubische Form, deren Wurzeln y_1, y_2, y_3 sind, in die canonische Form:

$$(45)\quad f \equiv \lambda^3 - \mu^3.$$

Dann verschwinden im Schnittpunkttheorem von (44)

$$(46)\quad a_s = 0,\ b_s = 0$$

alle Coefficienten, ausser:

$$(47)\quad a_0 = 1,\ a_3 = -\frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{4},\ b_4 = -1 \text{ **)}$$

*) Nimmt man $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$, so gewinnt die Gleichung der H_2-Fläche (43) die einfache Gestalt:

$$p_{12}\,(s_0\, s_2 - s_1^2) + p_{13}\,(s_0\, s_3 - s_1\, s_2) + p_{23}\,(s_1\, s_3 - s_2^2) = 0.$$

Dies ist aber gerade, wie sich weiter unten ergiebt, die Gleichung des gemeinten Netzes.

**) Dann wird die Gleichung der H_2-Fläche (44) nach leichter Rechnung folgende:

$$(s_0 - s_3)^3 - \frac{1}{4}\,\{9\, s_0\, s_3 - s_1\, s_2\} = 0.$$

Dabei ist $s_0 - s_3 = 0$ die Ebene, die aus der Grundcurve φ das mithin ist $(0, \infty)$ die eigentliche Doppeltangente und

$$(48) \quad Q \equiv -\frac{9}{8}\lambda\mu = \frac{9}{2.8}\Delta$$

wo Δ die quadratische Covariante von f ist.

Die Argumente der Doppelpunkte findet man, wie im allgemeinen für eine Gruppe (33), so. Es giebt in der zu (44) conjugirten Gruppe (Involution) drei harmonische Quadrupel. Man sucht für jedes derselben das zu den beiden (zu einander harmonischen) Paaren, in die es sich zerlegt, zugleich harmonische Paar.

Nun enthält diese Involution die Form f (45) als festen Faktor:

$$(49) \quad a_\lambda + kb_\lambda \equiv f(\lambda - y).$$

Dann aber ist bekanntlich die Invariante j dieser Form (als Form der Variabeln y) die cubische Covariante Θ von f.

$$(50) \quad \Theta \equiv y^3 + 1.$$

Schreiben wir wieder λ statt y und stellen in der angegebenen Weise die drei gesuchten Paare auf, so liefert ihr Produkt:

(51) $\lambda^6 + \mu^6 \equiv -\frac{1}{2}\{Rf^2 - 2\,\Theta^2\}$ wo R die Discriminante von f ist.

Da aber, wie man weiss, zwischen f und ihren Covarianten die Beziehung herrscht:

$$(52) \quad \Delta^3 \equiv -\{2\,\Theta^2 + Rf^2\}$$

so hat man, wenn man die Wurzeln von Θ mit $y_1' \, y_2' \, y_3'$ bezeichnet:

Tripel f (45) ausschneidet und $9\,s_0\,s_3 - s_1\,s_2 = 0$ diejenige Fläche des „Netzes“ φ, die die beiden Tangenten 0, ∞ enthält. Daraus folgt:

„Die H_2-Fläche (44), wo die y die Wurzeln der Form f seien, berührt diejenige Fläche des „Netzes φ“, die die beiden Tangenten $\Delta = 0$ enthält, längs eines Kegelschnitts, dessen Ebene aus φ das Punktetripel $f = 0$ ausschneidet.“

μ_2) „Die Argumente der Doppelpunkte der R_4^2:

$$\rho x_i = (\lambda - y_i)^4$$

erhält man, wenn man immer das zu $(y_i\, y_k)\,(y_l\, y'_l)$ *) harmonische Paar aufsucht. Das Produkt der drei so gefundenen Paare liefert das zu Δ^3, in Bezug auf das Paar (f^2, Θ^2), vierte harmonische Sextupel.

Die Wurzeln von Δ sind Wurzeln der Combinante Q und sind die Argumente der einen eigentlichen Doppeltangente.“

180. Die entsprechende H_2-Fläche, sie sei H_2^{123}, berührt die cubische Grundcurve φ dreimal (in y_i). Solcher Flächen H_2 giebt es aber nach Satz pg. 83 fünf; wodurch ist die unsrige ausgezeichnet? Diese Frage erledigt sich leicht mittelst des früher Nr. 155 angegebenen Verfahrens.

Die R-Curve besitzt drei Undulationstangenten (y_i). Nimmt man diese als Fundamentallinien einer quadratischen Klassentransformation T, so geht die Curve über in eine mit drei Spitzen (y_i). Ausserdem wende man noch die drei Transformationen T an, deren Fundamentallinien sich aus zwei der Undulationstangenten und der einen Doppeltangente zusammensetzen. Vermöge ihrer geht die R-Curve über in drei andere mit zwei Spitzen $(y_i\, y_k)$ und einer Undulation (y_l).

Dies sind dann alle fünf Typen, für die das Wendepunktssextupel durch f^2 dargestellt ist.

Beiläufig sieht man daraus, dass es keine R-Curve mit einer Spitze und zwei Undulationen giebt:

Für die H_2-Fläche H_2^{123} folgt somit:

μ_3) „Die einer Gruppe (44) zugehörige Fläche

---

*) Diese beiden Paare sind bekanntlich bei passender Anordnung der Wurzeln von Θ, für $l = 1, 2, 3$ zu einander harmonisch, wie hier erforderlich.

H_2^{123} ist die einzige der fünf die Grundcurve φ an den Stellen (y_i) berührenden H_2-Flächen, auf der keine der Tangenten (y_i) liegt."

Der Satz (μ_2) sagt, mit Rücksicht auf die früher (Nr. 34, 35) erörterte Construction der Covarianten Δ und Θ auf φ und mit Bezug auf Nr. 32, für unsere Fläche H_2^{123} Folgendes aus:

Man lege zuvörderst die drei Flächen des „Netzes φ", die je zwei Tangenten $(y_i\ y_k)$ enthalten. Dann geht vom dritten Punkt (y_l) immer eine Sehne $(y_l\ y'_l)$ aus, die ganz auf der bez. Fläche liegt.

Des Weiteren lege man die drei Flächen des „Netzes φ", die die Sehnen $(y_i\ y_k)$ $(y_l\ y'_l)$ ganz enthalten; sie enthalten je ein Tangentenpaar $(\alpha_l\ \beta_l)$ der Curve φ.

Dann bildet die Regelschaar der drei Axen $(\alpha_l\ \beta_l)$ unsere Fläche H_2^{123}.

Die drei Sehnen $(y_l\ y'_l)$ liegen auf einer einzigen Fläche des „Netzes φ": diese enthält die Tangenten $\Delta = 0$. Diese Tangenten berühren auch unsere Fläche H_2^{123}: die Berührungssehne ist die Curvenaxe Δ. etc.

181. In ähnlicher Weise theilen wir noch einige Eigenschaften der H_3-Curve (36) mit. Solcher cubischer Curven, die mit der Grundcurve φ die beiden Punkte, Ebenen, Tangenten $(0, \infty)$ gemein haben, giebt es noch eine ∞^2-Schaar:

(53) $\rho s_0 = k_0\,\mu^3,\ \rho s_1 = 3\,k_1\,\mu^2\,\lambda,\ \rho s_2 = 3\,k_2\,\mu\,\lambda^2,\ \rho s_3 = k_3\,\lambda^3.$

In der That zählt man leicht die zehn Bedingungen ab, die die gewünschte Lage für eine cubische Curve (die von 12 Constanten abhängt) erfordert.

Aber auch die Form (53) ist evident, denn nach Voraussetzung muss die rechte Seite von s_0 den Faktor μ dreimal, die von s_1 den Faktor μ zweimal, λ einmal enthalten etc.

Will man sich überzeugen, dass die 4 homogenen Grössen k in der That nur zwei *) unabhängige repräsentiren, so stelle man das Flächennetz der Curve (53) auf:

$$(54)\ \nu_0 \left(3\, s_0\, s_2 - \frac{k_0\, k_2}{k_1^2}\, s_1^2\right) + \nu_1 \left(9\, s_0\, s_3 - \frac{k_0\, k_3}{k_1\, k_2}\, s_1\, s_2\right)$$
$$+ \nu_2 \left(3\, s_1\, s_3 - \frac{k_1\, k_3}{k_2^2}\, s_2^2\right) = 0 \equiv \nu_0\, \Phi_0 + \nu_1\, \Phi_1 + \nu_2\, \Phi_2.$$

Dann sind die Parameter der drei constituirenden Flächen Φ durch die Relation verbunden:

$$(55)\ \left\{\frac{k_0\, k_2}{k_1^2}\right\} \left\{\frac{k_1\, k_3}{k_2^2}\right\} - \left\{\frac{k_0\, k_3}{k_1\, k_2}\right\} = 0.$$

q. e. d.

Stellt man andrerseits die zur Involution

$$(56)\ \lambda^4 + \varkappa\, \mu^4 = 0$$

gehörige H_3-Curve auf (mittelst des Schnittpunkttheorems von (56)), so ergiebt sich ohne Mühe:

$$(57)\ \rho s_0 = \mu^3,\ \ \rho s_1 = -\mu^2\, \lambda,\ \ \rho s_3 = \mu \lambda^2,\ \ \rho s_3 = -\lambda^3,$$

deren Flächennetz somit ist:

$$(58)\ \pi_0\, (s_0\, s_2 - s_1^2) + \pi_1\, (s_0\, s_3 - s_1\, s_2) + \pi_2\, (s_1\, s_3 - s_2^2) = 0.$$

Unter den Flächen dieses Netzes befindet sich eine ausgezeichnete:

$(59)\ \ s_0\, s_3 - s_1\, s_2 = 0$ oder in Ebenencoordinaten:

$(60)\ u_0\, u_3 - u_1\, u_2 = 0.$

Denn diese ist die einzige der Flächen (58), die zugleich der Grundcurve φ umbeschrieben ist. Andrerseits ist dies die der Gruppe:

$$(61)\ \lambda^4 + \varkappa_1\, \mu^4 + \varkappa_2\, \lambda^2\, \mu^2$$

zugehörige H_2-Fläche (cf. Satz μ_1), denn dann verschwinden

*) Darauf war schon in der anm. pg. 44 hingewiesen. Den allgemeinen Satz (cf. l. c.) beweist man ganz wie oben.

in der pg. 296 anm. angegebenen Gleichung a_2, b_2 und damit p_{12} und p_{23}, wodurch sie in (59) übergeht.

Also hat man zunächst:

μ_4) „Der zur speziellen Involution

$$(\lambda - y_1)^4 + \varkappa (\lambda - y_2)^4$$

zugehörigen H_3-Curve H_3^{12} ist eine ausgezeichnete Fläche zweiter Ordnung (59, 60) einbeschrieben, die zugleich der Grundcurve φ umbeschrieben ist, und die Tangenten (y_1, y_2) enthält*). Diese entspricht der Gruppe (61) d. h. setzt man aus *irgend zwei* zu (y_1, y_2) harmonischen Paaren ein Quadrupel zusammen, so liefert dies ein der Fläche (59) ein- und φ umschriebenes Tetraeder."

182. Diese Fläche erfreut sich noch einer weiteren interessanten Eigenschaft.

Es giebt noch eine ∞^1-Schaar von Curven (53), die auf ihr liegen: diese ist, wie die Vergleichung von (59) mit (54) lehrt, durch die Bedingung festgelegt:

$$(62) \quad 9\, k_1\, k_2 - k_0\, k_3 = 0.$$

Jede dieser Curven besitzt unendlich viele Sehnen, die zugleich Axen von φ sind, ohne eine H_3-Curve zu sein (vgl. dagegen für den allgemeinen Fall Nr. 133).

Umgekehrt lässt sich aber auch zeigen, dass wenn eine Curve (53) auch nur eine der auf der Fläche (59) liegenden Axen von φ einmal trifft, sie zu der durch (62) bestimmten Schaar gehört.

---

*) Und reciprok natürlich in demselben Sinne der Curve H_3^{12} die ausgezeichnete Fläche

$$9 s_0\, s_3 - s_1\, s_2 = 0 \text{ oder: } u_0\, u_3 - 9 u_1\, u_2 = 0$$

um- und der Curve φ einbeschrieben.

Denn irgend zwei Ebenen von φ (λ_1, λ_2) treffen eine Curve (53) in den Tripeln:

$$(63) \quad \begin{cases} k_0 \lambda_1^3 - 3 k_1 \lambda_1^2 \lambda + 3 k_2 \lambda_1 \lambda^2 - k_3 \lambda^3 = 0 \\ k_0 \lambda_2^3 - 3 k_1 \lambda_2^2 \lambda + 3 k_2 \lambda_2 \lambda^2 - k_3 \lambda^3 = 0. \end{cases}$$

Soll nun die Axe $(\lambda_1 \lambda_2)$ auf der Fläche (60) liegen, so ist $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ d. h. $\lambda_1 = -\lambda_2 = x$ und (63) geht über in:

$$(64) \quad \begin{cases} k_0 x^3 - 3 k_1 x^2 \lambda + 3 k_2 x \lambda^2 - k_3 \lambda^3 = 0 \\ k_0 x^3 + 3 k_1 x^2 \lambda + 3 k_2 x \lambda^2 + k_3 \lambda^3 = 0. \end{cases}$$

Daher haben die Wurzeln der ersten Gleichung die negativen Werthe von denen der zweiten. Haben somit für irgend einen Werth von x beide Gleichungen eine Wurzel gemein, so auch eine zweite.

Die Bézout'sche Resultante (cf. Nr. 12) wird in diesem Falle:

$$(65) \quad -8 k_0 k_3 x^9 (k_0 k_3 - 9 k_1 k_2)^2.$$

Das Verschwinden der ersten drei Faktoren (statt x^9 würde es homogen heissen: $x^9 x'^9$) bedeutet nur, dass alle Curven (53) mit (57) die beiden Tangenten 0, ∞ gemein haben; das des letzten Faktors beweist die aufgestellte Behauptung.

183. Es erübrigt noch zu zeigen, dass unter allen Curven (53) die in Rede stehende (57) in der That die einzige H_3-Curve ist. Aber dies ist evident: denn da jede Curve (53) mit unserer H_3-Curve die Ebenen, Tangenten und Punkte (0, ∞) gemein hat, so folgt aus der bekannten Beziehung zwischen φ und einer H_3-Curve, dass für eine zweite H_3-Curve jedenfalls das Element 0 mit dem dreifachen Elemente 0 und das Element ∞ mit dem dreifachen Elemente ∞ zwei Quadrupel der zugehörigen Involution bildet. Dies ist aber nur die Involution (56).

Und da jedes Quadrupel (56) sich in zwei zu einander harmonische Paare zerlegt, die beide zum Paar 0, ∞ harmonisch sind, so folgt:

μ_5) „Unter allen Curven des Systems (53) ist die Curve H_3^{12} die einzige H_3-Curve, während es noch eine ∞^1-Schaar des Systems giebt, die unendlich viele Sehnen besitzen, die zugleich Axen von φ sind, und die alle mit H_3^{12} auf der Fläche (59) liegen. Auf dieser lassen sich die Geraden der einen Schaar, der die Tangenten (0, ∞) von φ angehören, in Paaren einer (gewöhnlichen) Involution anordnen, deren Doppelelemente jene Tangenten sind.

Jedes dieser Paare bildet zwei Gegenkanten eines φ um- und H_3^{12} einbeschriebenen Tetraeders, und umgekehrt besitzt ein jedes solches Tetraeder ein Paar Gegenkanten, das auf der Fläche liegt und ein Paar der Involution bildet.“

184. Irgend eine Grundcurve φ und eine H_3-Curve sind projektivisch aufeinander bezogen. Denn jedem Punkte von H_3 entspricht die eine Ebene von φ, die Gegenebene des von ihm ausgehenden, H_3 ein- und φ umbeschriebenen Tetraeders ist und umgekehrt.

μ_6) „Für die canonische Gleichungsform (57) von H_3^{12} ist diese projektivische Beziehung zwischen H_3^{12} und φ einfach durch

$$(66) \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda}$$

ausgedrückt.“

In der That, durch die angegebene Substitution entsprechen sich zunächst Punkt 0 (∞) von H_3 und Ebene 0 (∞) von φ. Würde noch etwa dem Punkt 1 von H_3^{12} auch die

Ebene 1 von φ entsprechen, so kann die projektivische Beziehung zwischen beiden Curven nur die Form (66) haben.

Nun bildet das Argument $\lambda = 1$, mit dem Tripel (-1, $+i$) ein Quadrupel der Involution (56). Vom Punkte 1 auf H_3^{12} geht aber an φ das Ebenentripel:

$$(67)\quad \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 \equiv (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)$$

mithin ist 1 die Gegenebene (auf φ) des vom Punkte 1 (auf H_3^{12}) ausgehenden Tetraeders *).

q. e. d.

184. Nach diesen Erörterungen über die Curven H_3^{12} und Flächen H_2^{123} und ihren Zusammenhang können wir die Sätze *k*) geometrisch so aussprechen:

ν) „Man denke sich auf einer cubischen Raumcurve φ, deren Ebenen man als Elemente auffasst, eine biquadratische Involution nebst ihrer conjugirten (dreigliedrigen) Gruppe gegeben.

Dann sind die Quadrupel der Involution dargestellt durch ∞^1 φ um- und einer Hurwitz'schen Curve H_3 ein-; desgleichen die Quadrupel der conjugirten Gruppe durch ∞^2 φ um- und einer Fläche H_2 einbeschriebene Tetraeder.

Jede Kante eines der ersteren Tetraeder ist zugleich Axe von φ und Sehne von H_3 und repräsentirt ein Elementenpaar $(x_1\, x_2)$ der Involution.

---

*) Denkt man sich also auf der Curve H_3^{12} die Substitution (66) ausgeführt, so geht ihre Gleichung (wenn man wieder λ für λ' setzt) über in:

$$\rho s_0 = \lambda^3,\ \rho s_1 = -\lambda^2,\ \rho s_2 = \lambda,\ \rho s_3 = -1.$$

Die Curve H_3^{12} ist also in Bezug auf das Normtetraeder $(0, \infty)$ (cf. Nr. 30) zur Curve φ vollkommen dualistisch. Zugleich bedingt die projektivische Beziehung beider Curven $(\lambda = \lambda)$ eine räumliche reciproke Verwandtschaft, in der jedem Punkt $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$ die Ebene $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$ entspricht.

Jeder Eckpunkt eines der letzteren Tetraeder, d. i. jeder Punkt der Fläche H_2 repräsentirt ein Elemententripel (y_1, y_2, y_3) der conjugirten Gruppe.

Dann trifft die durch ein Tripel (y_1, y_2, y_3) bestimmte spezielle Fläche H_2^{123} die Curve H_3 in sechs solchen Punkten, dass vier von ihnen die Ecken eines φ umbeschriebenen Tetraeders sind.

Und die durch ein Paar (x_1, x_2) bestimmte spezielle Curve H_3^{12} trifft die Fläche H_2 gleichfalls in sechs solchen Punkten."

Damit verlassen wir die biquadratische Involution als Repräsentantin des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung und beenden diesen Abschnitt und damit das zweite Capitel dieses Buches mit der vollständigen Lösung der in den Hauptzügen schon behandelten Aufgabe die Anzahl und Natur der biquadratischen Involutionen mit (sechs) gemeinsamen Doppelelementen resp. Elementenpaaren zu ergründen, sowie mit der Folgerung der wichtigen Sätze, die sich daraus für die Theorie der cubischen Raumcurven überhaupt von selbst ergeben.

§. 29.

Die fünf Involutionen vierter Ordnung mit sechs gemeinsamen Doppelelementen.

185. In Nr. 156 wurde der Satz bewiesen:

„Ist (ε, η) das Argumentenpaar einer Doppeltangente einer R_4^2, so nimmt ihr Wendepunktsextupel J (d. i. eine allgemeine binäre Form sechsten Grades) durch die Substitution:

(1) $\lambda' = k \dfrac{\lambda - \varepsilon}{\lambda - \eta}$ (wo k gleich Eins angenommen werde)

eine Form an, in der die Coefficienten von λ'^5 und λ' verschwunden sind.“

Mithin musste umgekehrt das Problem, die Doppeltangenten der R-Curven mit gemeinsamem Sextupel J (und damit auch das andere, die verschiedenen biquadratischen Involutionen mit gemeinsamer Funktionaldeterminante J) aufzustellen, in dem allgemeineren enthalten sein, die Substitutionen (1) zu finden, die eine binäre Form sechsten Grades in die angegebene Gestalt überführen.

Es fragt sich aber jetzt, ob umgekehrt jede dieser Substitutionen auf eine Doppeltangente einer R_4^2 mit den Wendepunkten J führt, oder ob es noch weitere Substitutionen giebt, die dieser Frage fremd sind. Dies soll vorerst erledigt werden.

War das Schnittpunkttheorem einer R_4^2:

$$(2) \quad a_s = 0, \quad b_s = 0,$$

also die Involution der Schnittpunktformen:

$$(3) \quad a_\lambda + k\, b_\lambda = 0$$

so war das Sextupel der Wendepunkte der Curve (2) (der Doppelelemente der Involution (3)):

$$(4) \quad J \equiv p_{01}\, \mu^6 + 3\, p_{02}\, \mu^5 \lambda + \ldots + 3\, p_{24}\, \mu\lambda^5 + p_{34}\, \lambda^6 = 0.$$

Wir denken uns die Substitution (1), wo ε, η einer Doppeltangente der Curve (2) angehören, ausgeführt und dann wieder λ (homogen λ, μ) statt λ' geschrieben.

Dann verschwinden a_2, b_2, und somit

$$(5) \quad p_{02} = 0, \quad p_{24} = 0.$$

Gehen wir umgekehrt von diesen Bedingungen aus, so verfahren wir wie in Nr. 66.

Die Gleichungen (5) haben entweder zur Folge, dass:

(6a) $a_2 = b_2 = 0$ und damit auch $p_{21} = p_{23} = 0$, oder dass:

(6b) $p_{04} = 0$.

Im ersten Falle ist in der That (ε, η) eine Doppeltangente der Curve (2), von der wir ausgingen, im zweiten scheint eine fremde Lösung vorzuliegen. Welche?

Die Gleichungen (5) (6b) sind ersetzbar durch:

$$(7)\quad a_0 + k'b_0 = 0,\ a_2 + k'b_2 = 0,\ a_4 + k'b_4 = 0$$

wo k' einen bestimmten, wenn auch noch unbekannten Faktor vorstellt. Dann hat das Quadrupel $a_\lambda + k'b_\lambda$ die Form:

$$(8)\quad a_\lambda + k'b_\lambda \equiv \lambda\mu\,(\lambda^2 + k''\,\mu^2) = 0.$$

(Denken wir uns für den Moment k'' variabel, so stellte (8) genau diejenige (einzige) Involution dar, die mit $\lambda^4 + m\mu^4$ die gleichen Doppelelemente (λ^3, μ^3 d. h. 0^3, ∞^3) gemein hat.) Mithin ist ($\varepsilon\,\eta$) in diesem Fall ein Paar, das mit einem zu ihm harmonischen ein Quadrupel der Involution (3) bildet. Nach Früherem giebt es drei Quadrupel der Involution (3), die aus zwei solchen Paaren bestehen; das zu beiden Paaren zugleich harmonische ergiebt jedesmal einen Doppelpunkt ($\alpha_i\,\beta_i$) der Curve (2).

Demnach giebt es, wenn man von der Curve (2) ausgeht, einmal 4 Werthepaare $\varepsilon_1\,\eta_1$ erster Art (den Doppeltangenten zugehörig), die die vorgelegte Aufgabe (der canonischen Form von 7) lösen: dann aber noch 3 . 2 = 6 weitere Paare zweiter Art $\varepsilon_2\,\eta_2$, die drei harmonische Quadrupel der Involution (3) bilden. Diese 6 Paare stehen aber nach Nr. 152 in sehr einfachem Zusammenhang.

Wurde nemlich die Involution (3) auf einem Kegelschnitt φ durch ein φ stützendes Kegelschnittbüschel D ausgeschnitten, sodass die Grundpunkte des letzteren ein Polviereck von φ bildeten, so repräsentirten auf φ bezogen diese 4 Eckpunkte die 4 Werthepaare ($\varepsilon_1\,\eta_1$) erster Art und die 3 . 2 Seitenpaare des Vierecks die 3 . 2 Paare zweiter Art d. h. diese sechs letzteren Paare ($\varepsilon_2\,\eta_2$) sind die Funktionaldeterminanten der vier ersteren. (Die Doppelpunkte der Curve (2) waren dann durch die Ecken des Polardreiecks des Büschels vorgestellt.) Diese 10 Paare bildeten einen Cyclus von fünf Quadrupeln (indem jedes Element ε doppelt auftrat), so dass jedes dieser Quadrupel mit dem Restsextupel in der oben angegebenen Weise je einer der fünf R-Curven angehören, aus der die vier übrigen durch vier Klassentransformationen T_i hervorgingen, deren Fundamentallinien je drei der vier Doppeltangenten waren.

Legt man die Schaar von Kegelschnitten, die dem Doppeltangentenvierseit einbeschrieben sind, so hat diese mit der vorliegenden R-Curve die zu ihr gehörige (Tangenten-) Involution (3) gemein. Die 3.2 Tangentenpaare von den Gegenecken des Vierseits an die Curve bilden die 3.2 Paare ε, η der zweiten Art ($\varepsilon_2\ \eta_2$).

Betrachtet man eines dieser sechs Paare zweiter Art als die Doppelelemente einer (gewöhnlichen) Involution auf der R-Curve, so umhüllen die Geraden, die die Punktepaare der Involution aus R ausschneiden, nach Nr. 165 eine rationale Curve dritter Classe, deren eine Doppeltangente gerade die beiden Punktepaare der Involution ausschneidet, die auf gerader Linie liegen. So gelangt man zu 6 rationalen Curven dritter Classe, deren 6 Doppeltangenten somit gerade die 6 Quadrupel ausschneiden, die sich in zwei zu einander harmonische Paare zerlegen, so dass das zu ihnen zugleich harmonische Paar ein Paar ($\varepsilon\ \eta$) der zweiten Art ist. Nennen wir diese die 6 Doppeltangenten ($\varepsilon_2\ \eta_2$), so haben wir, alles zusammengefasst, Folgendes:

α) „Es giebt mindestens *einen* Cyclus von zehn Substitutionen (1), die eine allgemeine binäre Form sechsten Grades in die canonische Form (5) überführen. Die zugehörigen Werthepaare ($\varepsilon_i\ \eta_i$) bilden *in der That* (doppelt gezählt) die 5 Doppeltangentenquadrupel von fünf durch den Transformationsprocess T_i cyclisch verbundenen

Curven R mit demselben (gegebenen) Wendepunktssextupel.

Für jede einzelne der fünf Curven R zerlegen sich die 10 Paare $(\varepsilon\ \eta)$ in vier erster Art $(\varepsilon_1\ \eta_1)$ {die Doppeltangenten(argumenten)paare} und sechs zweiter Art $(\varepsilon_2\ \eta_2)$, die 3.2 Tangentenpaare, die von den Gegenecken des Doppeltangentenvierseits an die Curve gehen.

Diese sechs Paare zweiter Art bilden zugleich die Lösung der Aufgabe, „für die vorliegende Curve R die Argumente der Doppelpunkte zu finden". Man erhält sie, wenn man die zu den drei „Paarpaaren" harmonischen Paare sucht.

Fasst man die sechs Paare zweiter Art $(\varepsilon_2\ \eta_2)$, jedes als die Doppelelemente einer Involution zweiter Ordnung auf, so giebt es für jede *eine* Gerade der Ebene, die zwei Punktepaare der Involution aus R ausschneidet. Diese sechs Geraden {die Doppeltangenten $(\varepsilon_2\ \eta_2)$ von sechs bestimmten Curven dritter Klasse} umhüllen nebst den sechs Wendetangenten eine bestimmte Curve dritter Klasse, deren Tangenten aus R die harmonischen Quadrupel ausschneiden."

186. Dass es aber in Wirklichkeit nur einen solchen Substitutionencyclus (1) giebt, lässt sich z. B. (abgesehen von weiteren Bestätigungen) mittelst einer direkten Methode nachweisen, die auch die Zehnzahl ohne Weiteres erscheinen lässt und mit gleichem Erfolge auf die allgemeine Aufgabe (für eine Form n^{ten} Grades die Substitutionen (1) zu finden, vermöge deren die Coefficienten von λ^{n-1} und λ^1 verschwinden) anwenden lässt.

Geht eine gegebene Form

$$(9)\quad f \equiv a_\lambda^6 \equiv a_0\,\lambda^6 + 6\,a_1\,\lambda^5 + \ldots\ 6\,a_5\,\lambda + a_6$$

vermöge der Substitution

$$(10)\quad \lambda' = \frac{\lambda - \varepsilon}{\lambda - \eta} \text{ oder } \lambda = \frac{\lambda'\eta - \varepsilon}{\lambda' - 1}$$

über {nach Multiplication mit $(\lambda'-1)^6$} in eine solche Form von λ', dass die Coefficienten von χ^5 und λ' verschwinden, so liefert die Taylor'sche Entwicklung die beiden Bedingungen (zur Bestimmung von α, β):

$$(11)\quad \mathrm{E} \equiv a_{\varepsilon^5\eta} = 0, \quad \mathrm{H} \equiv a_{\eta^5\varepsilon} = 0.$$

Statt dieser wählen wir irgend zwei der fünf linearen Combinationen beider:

$$(12)\ \mathrm{E}-\mathrm{H}=0,\ \mathrm{E}\eta-\mathrm{H}\varepsilon=0,\ \mathrm{E}\eta^2-\mathrm{H}\varepsilon^2=0,\ \ldots \mathrm{E}\eta^4-\mathrm{H}\varepsilon^4=0$$

z. B. *) die erste und letzte, die entwickelt nach Weglassung des Faktors $(\varepsilon-\eta)$ lauten $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \varepsilon + \eta,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \varepsilon\eta\right)$:

$$(13)\ \begin{cases} a_0\,\sigma_1\,\sigma_2\,(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_0\,\sigma_2) + a_1\,(\sigma_1^4 - 4\,\sigma_2^2\,\sigma_0^2 + 2\,\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_0) \\ a_6\,\sigma_0\,\sigma_2\,(\sigma_1^2 - 2\,\sigma_0\,\sigma_2) + \qquad . \qquad + \qquad . \end{cases}$$

$$\begin{cases} + 5\,a_2\,\sigma_1^3\,\sigma_0 + 10\,a_3\,\sigma_1^2\,\sigma_0^2 + 10\,a_4\,\sigma_1\,\sigma_0^3 + 4\,a_5\,\sigma_0^4 \equiv \mathrm{E}-\mathrm{H}=0 \\ + \quad . \quad + \quad . \quad + \quad . \quad + 4\,a_1\,\sigma_2^3 \equiv \mathrm{E}\eta^4 - \mathrm{H}\varepsilon^4 = 0 \end{cases}$$

wo die zweite aus der ersten durch gleichzeitige Vertauschung von a_i mit a_{6-i} und σ_0 mit σ_2 hervorgeht.

Die gemeinsamen Lösungen von (11) sind auch in den gemeinsamen Lösungen von (13) enthalten, umgekehrt aber enthält (13) noch fremde Lösungen, die durch Verschwinden von

$$(14)\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \eta^4 & \varepsilon^4 \end{vmatrix} \equiv (\varepsilon-\eta)\,(\varepsilon+\eta)\,(\varepsilon^2+\eta^2) = 0$$

---

*) Die Entwicklung gilt für irgend ein Paar der Bedingungen (12) in ganz analoger Weise. Dann treten als fremde Lösungen noch die Werthe ε (resp. η) $= 0$, ∞ auf, denen Schnittpunkte der bezüglichen Curven (13) mit den Geraden $\sigma_2 = 0$, $\sigma_0 = 0$ entsprechen. Die aus den fünf Curven (12) linear zusammengesetzte Schaar ist dann keine andere, als die ganze ∞^4 durch die zehn Punkte (ε, η) gehende Schaar von Curven vierter Ordnung.

entstehen, wo aber der erste Faktor schon bedeutungslos geworden ist, da er in (13) weggelassen wurde.

Die beiden andern Faktoren führen, wie leicht zu zeigen, zu $2 + 4 = 6$ fremden Lösungen. Bezogen auf irgend einen Normkegelschnitt, stellen die Gleichungen (13) zwei Curven vierter Ordnung dar, mit je einem Doppelpunkte in resp. $(\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = 0)$. Die Tangenten in diesen sind resp.

(15) $\sigma_0 = 0, a_0 \sigma_1 + 2 a_1 \sigma_0 = 0$; und $\sigma_2 = 0, a_6 \sigma_1 + 2 a_5 \sigma_2 = 0.$

Daher treffen sich die Curven (13) auf der Geraden $\varepsilon + \eta \equiv \sigma_1 = 0$ in einem Punktepaar

$$(16)\quad a_1 \sigma_2^2 - a_5 \sigma_0^2 = 0.$$

Dies sind die dem Faktor $(\varepsilon + \eta)$ in (14) zugehörigen fremden Lösungen. Die für den zweiten

$$(17)\quad \varepsilon^2 + \eta^2 = \sigma_1^2 - 2 \sigma_0 \sigma_2 = 0$$

erhält man durch den Schnitt dieses Kegelschnitts, der den Normkegelschnitt in den Punkten $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0$ und $\sigma_2 = 0, \sigma_1 = 0$ berührt, mit den Curven (13). Setzt man z. B. in die erste den Werth (17): $\sigma_2 = \dfrac{\sigma_1^2}{2 \sigma_0}$ ein, so kommt:

(18) $\sigma_0^4 (a_1 \sigma_1^4 + 5 a_2 \sigma_1^3 \sigma_0 + 10 a_3 \sigma_1^2 \sigma_0^2 + 10 a_4 \sigma_1 \sigma_0^3 + 4 a_5 \sigma_0^4) = 0,$

d. i. die erste Curve (13) hat nicht nur, wie (15) zeigt, in dem Doppelpunkt $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0$, der ja ein Punkt des Normkegelschnitts ist, dessen Tangente $(\sigma_0 = 0)$ als die eine Doppelpunktstangente, sondern osculirt auch noch den Kegelschnitt (17) in ihm.

Das Entsprechende gilt für die zweite Curve (13) und ihren Doppelpunkt. Demnach schneiden sich beide Curven (13) nur noch in vier Punkten auf dem Kegelschnitt (17).

β) „Die übrigen $10 = 16 - 6$ Schnittpunkte des Curvenpaares (13) müssen somit die Werthepaare

(ε, η) liefern, die die gestellte Frage lösen. Diese bilden dann gerade den Cyclus des Satzes α)" *).

§. 30.

Die biquadratischen Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren.

187. Man verdankt Cremona[59] die drei Sätze:

γ) „I. Zwei cubische Raumcurven haben im Allgemeinen *zehn* gemeinsame Axen (Sehnen).

---

*) Die zehn Werthepaare (ε, η), die die Aufgabe somit lösen, waren die vier Argumentenpaare ψ_i der Doppeltangenten einer R_4^2 (mit den Wendepunkten $J = 0$) nebst ihren sechs bez. Funktionaldeterminanten ψ_{ik}. Diese letzteren bildeten drei (harmonische) Quadrupel der Involution $a_s = 0$, $b_s = 0$.

War diese Involution auf dem Normkegelschnitt N_2 dargestellt, so repräsentirten ihre Elementenpaare die Punkte einer H_3-Curve, die aus N_2 das Sextupel J ausschnitt.

Andererseits bildeten nach Nr. 152 (nur dass wir uns jetzt dualistisch ausdrücken) die vier Geraden, die aus N_2 die Paare ψ_i ausschneiden (von deren Schnittpunkten also die Tangentenpaare ψ_{ik} an N_2 gehen) ein Polvierseit von N_2. Da aber seine Gegeneckenpaare drei Quadrupel der Involution bilden, so ist dies Polvierseit der H_3-Curve einbeschrieben: somit ist die letztere (cf. Nr. 148) in der Form darstellbar:

$$\Sigma \frac{m_i}{D_i} = 0$$

wo die $D_i = 0$ die Seiten des Polvierseits sind.

„Mithin ist eine Form sechsten Grades J auf fünf bestimmte Weisen in der Form

$$\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \Sigma \frac{m_i}{\psi_i} \equiv J$$

darstellbar, wo die ψ die fünf Quadrupel bilden, in die sich die zehn Werthepaare ε, η (doppelt gezählt) anordnen."

(Jedem Quadrupel gehört eine bestimmte Gruppe der Constanten m_i an.)

II. Jede derselben besitzt im Allgemeinen *sechs* Axen (Sehnen), die Sehnen (Axen) der andern sind.

III. Es giebt im Allgemeinen sechs cubische Curven, die sechs beliebige Raumgerade zu Axen (Sehnen) haben."

Diese Sätze ermöglichen in Verbindung mit der Theorie der Hurwitz'schen Curven H_3 eine höchst fruchtbare Behandlung unserer Involutionen (spec. der Titelfrage) auf cubischen Raumcurven.

Diese stellt sich dann so:

Wieviel Curven H_3 giebt es, die sechs beliebig gewählte Axen der gegebenen cubischen Curve φ zu Sehnen haben?

Diese Frage ist offenbar eine Verallgemeinerung der im vorigen §. behandelten, auf die man wieder zurückgeführt wird, wenn man die sechs Axen von φ zu Tangenten werden lässt.

Dann giebt es nach (γ III) sechs cubische Curven, die diese Tangenten zu Sehnen haben; eine von ihnen ist aber ersichtlich φ selbst. Daher zeigen die Ergebnisse des vorigen §. zunächst:

δ) „Die fünf cubischen Curven, die sechs beliebige Tangenten ω der gegebenen, φ, zu Sehnen haben, sind identisch mit den fünf Curven H_3 des Satzes (pg. 211), deren zugehörige Involutionen diejenigen sind, die die Doppelelemente ω gemein haben.

Für jede der Curven H_3 und φ gilt dann Satz

[Auch diesen Satz findet man bei H. Brill (Math. Ann. XX pg. 355), wenn auch ganz anders bewiesen, wie ich nachträglich zu bemerken habe. Anfang Februar 1883.]

γ II nicht mehr, da es unendlich viele Axen von φ giebt, die Sehnen von H_3 sind."

Die näheren Beziehungen zwischen diesen Curven ergeben sich sofort mit Hülfe der uns schon bekannten Involutionssätze und des Satzes γ I: sie fliessen aber als specielle Fälle aus der Configuration, die die allgemeinere (Titel-)Frage nach sich ziehen wird.

188. Zunächst giebt es wieder sechs cubische Curven Γ, die sechs beliebige Axen $(u_i\ v_i)$ von φ zu Sehnen haben. Von diesen muss mindestens eine den Satz γ II befriedigen. Dann nach Satz γ III kann man sich die Curve φ entstanden denken, als eine von denen, die sechs ganz beliebige Raumgerade zu Axen $(u_i\ v_i)$ haben. Würde es dann für jede Curve Γ unendlich viele Sehnen geben, die Axen von φ wären, so wäre Satz γ II unmöglich *).

Andrerseits giebt es aber, wie wir wissen (cf. pg. 308) mindestens fünf Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren, also giebt es nur eine Curve Γ, die den Satz γ II befolgt, während die übrigen fünf H_3-Curven sind. Dann aber geht aus dem „Pentaedersatze" pg. 247 nunmehr der folgende hervor:

ε) I. „Von den sechs cubischen Curven Γ, die sechs beliebige Axen der Curve φ zu Sehnen haben, sind immer fünf H_3-Curven. Je zwei derselben haben noch drei, je drei noch eine Sehne gemein, die zugleich Axen von φ sind. Diese stellen die Restelementenpaare dar, die je zwei resp. drei der fünf zugehörigen Involutionen noch gemein haben.

*) In genau derselben Weise schliesst man, dass für je zwei der fünf H_3-Curven oder auch je zwei der sechs Curven a (cf. Nr. 189) der Satz γ I gelten muss. Denn man gehe umgekehrt von zwei Curven des Satzes γ I aus, greife aus den zehn gemeinsamen Axen sechs heraus und verfahre dann, wie im Texte.

II. Stehen zwei cubische Curven in der Beziehung, dass es unendlich viele Sehnen der einen giebt, die zugleich Axen der andern sind, so ist diese Beziehung auch eine Hurwitz'sche, d. h. diese Geraden ordnen sich an als die Gegenkanten von unendlich vielen der ersten Curve ein- und der zweiten umbeschriebenen Tetraedern."

Zu Satz I ist zu bemerken, dass in der That die drei Sehnen, die je zweien der fünf Curven H_3 noch gemein sind (und zugleich Axen von φ sind) mit der vierten (die zugleich Sehne der sechsten Curve Γ ist cf. unten) und mit den ursprünglichen sechs Axen von φ die zehn Sehnen bilden, die nach Satz γ I beiden Curven gemein sein müssen.

Satz II gilt, weil man von den vorausgesetzten unendlich vielen Axen von φ (die Sehnen der zweiten Curve sind) irgend sechs herausgreifen und auf diese den Satz I anwenden kann.

189. Wir vervollständigen jetzt unsere Figur dadurch, dass wir noch die fünf weiteren Curven legen, die unsere sechs Axen von φ gleichfalls zu Axen haben. Nennen wir alle diese die Curven α_i, dagegen jene, die sie zu Sehnen haben, a_i ($i = 1, 2, \ldots 6$), so haben wir eine Configuration von $2 . 6$ cubischen Curven, die der bekannten einer Doppelsechs einer Fläche dritter Ordnung analog ist. Gerade wie da jeder Geraden der einen Sechs eine einzige der andern entspricht und umg. (die zu ihr windschief ist, während sie die fünf andern trifft), so folgt hier unmittelbar aus Satz ε I:

ζ) „Die beiden Sechsen von Curven a_i, α_i ($i = 1 \ldots 6$), die sechs beliebige Raumgerade g zu Sehnen resp. Axen haben, stehen in dem eigenthümlichen Verhältniss, dass jede Curve a_i einer bestimmten Curve α_i (denen daher der gleiche Index beigelegt wird) u. umg. eindeutig entspricht, so, dass die sechs Geraden g die *einzigen* sind, die Sehnen von a_i und Axen von α_i sind.

Dagegen stehen je zwei Curven a_i, α_k ($i \gtrless k$) in der Hurwitz'schen Beziehung, d. h. es giebt ausser den Geraden g *noch unendlich viele* Sehnen von a_i, die Axen von α_k sind."

Daher erweitert sich mit Hülfe des Satzes γ I der Satz ε I zu folgendem, der die sechs Curven a_i (α_i) ganz gleichmässig behandelt:

η) „Die sechs cubischen Curven a_i (die sechs beliebige Gerade g zu Sehnen haben) besitzen ausser diesen noch zu je zweien vier gemeinsame Sehnen, also im Ganzen $\frac{6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2} \cdot 4 = 60$.

Diese reduciren sich aber auf 20, da jede von ihnen gemeinsame Sehne s_{ikl} von drei der Curven a_i, a_k, a_l ist (also dreimal auftritt).

Diese 20 Linien sind zugleich die entsprechenden 20 weiteren Axen σ von je dreien der Curven α_i (die die Geraden g zu Axen haben) und zwar ist immer

$$s_{ikl} = \sigma_{mnp} \; (i, k, l, m, n, p = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Desgleichen sind die vier Sehnen, die je dreien der Curven a gemein sind:

$$s_{ikl} \quad s_{ikm} \quad s_{ilm} \quad s_{klm}$$

nebst den 6 Geraden g die 10 gemeinsamen Axen der beiden Curven α_n α_p.

Die sechs Geraden, die je vier der sechs Curven a

$$a_i \quad a_k \quad a_l \quad a_m$$

mit einer der beiden übrigen a_n zu gemeinsamen Sehnen haben, ordnen sich in drei Paare

$$\begin{Bmatrix} s_{nik}, & s_{nil}, & s_{nkm} \\ s_{ilm}, & s_{nkm}, & s_{nkl} \end{Bmatrix}$$

die Gegenkanten dreier Tetraeder sind, die a_n ein- und α_p umbeschrieben sind."

Desgleichen gelten die reciproken Sätze (indem man die a mit den resp. α vertauscht), so dass man den Satz η als „Hexaeder"-Satz kurz so formuliren kann:

η_1) „Die beiden Sechsen von Curven a, α sind in Bezug auf ihre gemeinsamen Sehnen, resp. Axen gruppirt, wie die Ecken resp. Ebenen eines Hexaeders resp. Sechsecks, wo das letztere dem ersteren um- (und damit das erstere dem letzteren ein-) beschrieben ist."

190. Andrerseits waren (Nr. 155) fünf Involutionen mit sechs gemeinsamen Elementenpaaren (u_i v_i) dargestellt durch die vier Strahl- und das Kegelschnittbüschel (D_k, D) von vier Doppelpunkten einer rationalen ebenen Curve sechster Ordnung R_6^2 mit den sechs weiteren Doppelpunkten (u_i v_i), und zwar schneiden diese fünf Büschel die Involutionen aus der Curve aus.

Weiter unten wird gezeigt, dass umgekehrt die sechs Argumentenpaare u_i v_i für die Curve ganz beliebig angenommen werden dürfen, dann aber alle übrigen Singularitätenargumente bestimmt sind.

Dann sind aber gerade die Argumentenpaare (ε_k η_k) der vier Doppelpunkte D_k solche vier Elementenpaare, die je dreien von irgend vier der fünf in Rede stehenden Involutionen gemein sind: mithin folgt daraus und aus Satz η):

$\varkappa$) „Die zehn Argumentenpaare der Doppelpunkte einer R_6^2 stehen in derselben Beziehung zu einander, wie die zehn Argumentenpaare einer cubischen Raumcurve, die zehn Axen (Sehnen) zugehören, die zugleich Axen (Sehnen) einer zweiten solchen Curve sind."

Umgekehrt bestimmen also irgend zwei in allgemeiner *) Lage befindliche cubische Raumcurven sowohl durch ihre gemeinsamen Axen als auch Sehnen je eine Klasse **) von R_6^2, deren Individuen projektivisch in einander überführbar sind.

Aus dem Dualismus von Axe und Sehne folgt weiter:

$\varkappa_1$) „Jeder R_6^2 ist eine bestimmte andere eindeutig zugeordnet und umg.: ihre Doppelpunktsargumente entsprechen den gemeinsamen Axen und Sehnen zweier cubischer Raumcurven."

191. Geht man von zwei cubischen Raumcurven α_5, α_6 aus, greift aus ihren zehn gemeinsamen Axen irgend sechs heraus, so sind stets die vier übrigen nach dem Schema des Satzes η)

$$s_{123} \quad s_{124} \quad s_{134} \quad s_{234}$$

Sehnen von vier weiteren Curven a_1, a_2, a_3, a_4. Dies führt zu dem Satz, den ich nachträglich auch bei H. Em. Weyr[60] gefunden habe:

λ) „Die zehn gemeinsamen Axen (Sehnen) zweier cubischer Raumcurven sind zu je neun Sehnen (Axen) einer weiteren cubischen Curve."

Ausserdem wissen wir von ihnen:

---

*) Haben die beiden Curven resp. ein, zwei, drei Ebenen (Punkte) gemein, so haben sie nach Cremona (l. c.) nur noch resp. sechs, drei, eine Axe (Sehne) gemein. Deren Elementenpaare entsprechen dann, wie hier nur angeführt sei, den Doppelpunkten einer R_5^2, R_4^2, R_3^2, die aus der R_6^2 continuirlich in einander übergehen können.

**) Eine solche ganze Klasse (algebraisch „die zugehörige Formengruppe") ist immer (wie auch schon bis jetzt) durch das Zeichen R repräsentirt; zur Abkürzung ist gewöhnlich nur „von einer Curve R" die Rede.

λ_2) „Jede dieser zehn (zehn) weiteren Curven ist eine Hurwitz'sche H_3-Curve der Originalcurve d. h. je neun der zehn zugehörigen Elementenpaare sind die einer Involution vierter Ordnung."

Aus dem Bilde der R_6^2 lassen sich mit Leichtigkeit noch weitere Beziehungen zwischen diesen 10 Involutionen ablesen.

Die zehn Axen seien bezeichnet mit $(u_r\, v_r)$ $(r = 1, 2, .. 10)$: die entsprechenden zehn Involutionen mit J_r. In jeder giebt es neun weitere Elementenpaare, die mit den neun gegebenen neun Quadrupel der Involution bilden. Solcher weiteren Paare giebt es im Ganzen $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, da jedes zweimal auftritt.

Man gelangt zu ihnen auch dadurch, dass je zwei der zehn Involutionen noch ein weiteres Elementenpaar gemein haben. Dies sind die 45 Paare.

Zu je sieben der zehn Paare $(u_r\, v_r)$ gehören immer drei der 45 weiteren Paare in der Weise, dass diese keiner der sieben Involutionen J_s $(s = 1, 2, .. 7)$ angehören.

„Diese sieben + drei Paare bestimmen zehn Axen, die wieder zugleich Axen einer weiteren cubischen Curve sind. Solcher weiteren Curven giebt es daher 120."

Diese Eigenschaften, die leicht noch weiter ausgedehnt werden können, mögen hier genügen. Greift man irgend sechs der zehn Axen heraus, so kommt man wieder zur ursprünglichen Doppelsechs zurück, die somit nur ein specieller Fall des jetzigen ist.

§. 31.

Fortsetzung. Das Schnittpunkttheorem der R_6^2, auf der cubischen Normcurve studirt.

192. Das weitere Studium der aus zwei cubischen Raumcurven bestehenden Figur wird sich auf die Fläche (vierter

Ordnung) concentriren, auf der die zehn gemeinsamen Axen beider liegen. Dies geschieht mit grosser Leichtigkeit mit Hülfe des Schnittpunkttheorems der R_6^2, oder was dasselbe ist, mit Hülfe der Theorie der zweigliedrigen Gruppen sechster Ordnung resp. ihrer conjugirten. Man wird also behufs eingehenden Studiums der biquadratischen Involution jetzt zum zweiten *) Mal auf die Theorie der Gruppen sechster Ordnung verwiesen.

Die projektivischen Eigenschaften einer R_6^2 (d. h. einer dreigliedrigen Gruppe sechster Ordnung) hängen ersichtlich von 12 Constanten ab. Demgemäss kann man nach denjenigen R_6^2 fragen, für die sechs ihrer zehn Doppelpunkte g a n z b e l i e b i g gewählte Argumentenpaare $(u_i v_i)$ besitzen. Man denke sich eine Curve mit dieser Eigenschaft gegeben. Dann lege man ein Dreieck, dessen Seiten immer zwei der sechs Doppelpunkte enthalten. Dann giebt es in der Gruppe der R_6^2 drei Formen der Art:

$$(1) \quad f_1 \cdot f_2 \cdot f_{12}; \; f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34}; \; f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}$$

wo $(u_i v_i)$ die Wurzeln der quadratischen Form f_i sind: während die f_{12}, f_{34}, f_{56} drei unbekannte quadratische Formen vorstellen. Sollen die $(u_i v_i)$ in der That Doppelpunkten zugehören, so sind sechs Bedingungen dazu nothwendig und hinreichend von der Form:

$$(2) \quad \left\{\frac{f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34}}{f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}}\right\}_{\lambda = u_1} = \left\{\frac{f_3 \cdot f_4 \cdot f_{34}}{f_5 \cdot f_6 \cdot f_{56}}\right\}_{\lambda = v_1}$$

wo die Variable λ links durch u_1, rechts durch v_1 ersetzt ist.

Dies liefert zur Bestimmung der sechs Unbekannten (der Restpunktepaare der Seiten des Dreiecks oder der Wurzeln von f_{12}, f_{34}, f_{56}) sechs Gleichungen.

---

*) Das erste Mal in Nr. 132 zu e i n e r Form sechster Ordnung und ihrer conjugirten Gruppe.

Aber eine solche Bestimmungsweise ist bekanntlich unsicher: die sechs Gleichungen (2) könnten abhängig von einander sein, und somit auch die Wurzeln der f_i.

Dann gäbe es im Allgemeinen keine aus (1) (wo die f die vorgegebene Bedeutung haben sollen) zusammensetzbare dreigliedrige „$(R_6^2)^\alpha$"-Gruppe: würde es aber im besondern eine geben, so auch unendlich viele.

Die Unmöglichkeit des letzteren Falles soll dargethan werden: dann existiren Lösungssysteme von (2). Nun aber existirte für den Fall $u_i = v_i$ nach Früherem nur eine endliche Zahl von (5) Lösungen: also auch im Allgemeinen und zwar dann wie wir wissen, die gleiche Zahl. *q. e. d.* Somit gilt:

α) „Bei beliebiger (nur nicht specieller*)) Annahme der $(u_i\, v_i)$ d. i. der f_i giebt es fünf Lösungssysteme für die Coefficienten der f_{12}, f_{34}, f_{56} in (2)."

193. Das Schnittpunkttheorem einer R_6^2 lautet nach dem allgemeinen Satz der Nr. 6:

$$(3)\quad a_s = 0,\ b_s = 0,\ c_s = 0,\ d_s = 0$$

wo diese Formen aus den „Schnittpunktformen" a_λ, b_λ, c_λ, d_λ durch Polarisation nach sechs Elementen entstehen. Diese letzteren Formen bilden die zu (1) conjugirte Gruppe, deren Combinanten mit denen der Gruppe der R_6^2 identisch sind (cf. Nr. 26). Diese Formen, mithin auch die Formen (3) sind demnach ganz beliebig wählbar.

---

*) Wählt man z. B. für die $(u_i\, v_i)$ die Argumente der sechs Doppelpunkte einer R_5^2, so giebt es, wie leicht zu sehen, unendlich viele Lösungen. Denn dann giebt es unendlich viele Curven H_3, die die bezüglichen sechs Axen der cubischen Grundcurve φ zu Sehnen haben.

Gemäss der Entwicklung der Nr. 23 kann man sie auch so schreiben:

$$(4)\quad a_\sigma a_\tau = 0,\ b_\sigma b_\tau = 0,\ c_\sigma c_\tau = 0,\ d_\sigma d_\tau = 0.$$

Diese Gleichungen sagen dann aus, dass das Punktepaar σ, τ in Bezug auf die Flächen

$$(5)\quad a_\sigma^2 = 0,\ b_\sigma^2 = 0,\ c_\sigma^2 = 0,\ d_\sigma^2 = 0$$

(und damit auch in Bezug auf das ganze aus ihnen linear constituirte „Gebüsch“) conjugirt sind. Jede Fläche des Gebüsches stützt die Normcurve N_3.

Werden die partiellen Differentialquotienten von a_σ^2 nach σ_i mit A_i bezeichnet, analog die von b_σ^2 mit B_i etc., so liefert die Elimination der τ aus (4) das biquadratische Schnittpunkttheorem erster Ordnung der R_6^2 (1) (oder (3)) (wegen des Ausdrucks cf. §. 2):

$$(6)\quad F_4 \equiv \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Fläche vierter Ordnung, die sogenannte Jakobi'sche[61] der Flächen (5) (d. i. der Ort der Spitzen aller Kegel ihres Gebüsches) heisse kurz „die Darstellungsfläche des Schnittpunkttheorems einer R_6^2 oder noch kürzer die Darstellungsfläche einer R_6^2“.

Die Punkte der Fläche sind sich involutorisch in der Art zugeordnet, dass zu jedem Punkte von ihr ein zweiter solcher gehört und zu diesem wieder der erste, die dann die Gegenecken eines der Normcurve N_3 umschriebenen gemeinsamen Polsechsflachs des Gebüsches (5) bilden, mithin neun weitere solche Punktepaare (als die weiteren Gegenecken des Sechsflachs) nach sich ziehen.

Die Schnittpunkte von F_4 mit N_3 sind durch die Funktionaldeterminante der Formen a_λ, b_λ, c_λ, d_λ gegeben, stellen somit nach Satz pg. 41 die zwölf Wendepunkte der R_6^2 dar. Aus dem Begriff der Wendetangente folgt ohne Weiteres für die Fläche:

β) „Die Tangente der Normcurve N_3 in einem ihrer Schnittpunkte W mit F_4 trifft diese in drei weiteren Punkten $P_1\, P_2\, P_3$. Von jedem geht noch *eine* Ebene an N_3 (λ_1 resp. λ_2 resp. λ_3). Die drei Axen dieses Trieders osculiren die Fläche im Punkte W.“

Eine R_6^2 besitzt bekanntlich 24 Doppeltangenten $(d_i\, e_i)$: andrerseits die Fläche F_4 (wie jede Fläche vierter Ordnung) 48 mit N_3 gemeinsame Tangenten.

Aus dem Begriff der Doppeltangente folgt:

γ) „Die 48 der Fläche F_4 mit der Curve N_3 gemeinsamen Tangenten theilen sich in 24 Paare derart, dass für jedes Paar $(d_i\, e_i)$ die Berührungssehne der Fläche die Axe $(d_i\, e_i)$ von N_3 ist.“

Jede Gerade in der Ebene der R_6^2 trifft sie in sechs Punkten, die zehn Tripelpaare σ, τ bilden. Diese bilden im Raume gerade die zehn Gegeneckenpaare eines N_3 um- und F_4 einbeschriebenen Sechsflachs (eines Polsechsflachs des Gebüsches (5)): also:

δ) „Es giebt ∞^2 gemeinsame Polsechsflache des Gebüsches (5), die der Jacobi'schen Fläche F_4 derselben ein- und einer *auf dem Gebüsch ruhenden cubischen* Raumcurve umbeschrieben sind.“

Es seien $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_6$ sechs Punkte der R_6^2 auf einer Geraden. Demnach trifft die Axe $(\lambda_1\, \lambda_2)$ von N_3 die F_4 in vier Punkten:

(7) $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$ $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_4)$ $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_5)$ $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_6)$.

Ist aber $(\lambda_1 \lambda_2)$ ein Doppelpunkt der R_6^2, so werden die Restpunkte unbestimmt und ihre Elemente bilden eine biquadratische Involution. Demnach haben wir:

ε)*) „Den zehn Doppelpunkten $(u_i\ v_i)$ der R_6^2 entsprechen zehn Axen $(u_i\ v_i)$ von N_3, die ganz auf der Fläche F_4 liegen. Die den Punkten einer solchen Geraden auf der Fläche involutorisch zugeordneten Punkte durchlaufen eine H_3-Curve (H_3^i)."

194. Nach Satz κ) Nr. 190 bilden aber diese zehn Axen von N_3 zugleich zehn Axen einer zweiten cubischen Curve ψ: welche Beziehung hat sie zum Gebüsch (5)?

Nimmt man ψ für den Augenblick zur Normcurve, so gilt für sie gemäss dem citirten Satze in Bezug auf die R_6^2 dasselbe, wie für N_3: d. h. die zehn Axen liegen auf einer zweiten F_4. Da aber auf dieser auch die zehn H_3-Curven liegen, die je neun der zehn Axen zu Sehnen haben, so müssen beide Flächen identisch sein (da ihre Schnittcurve ja von höherer als der 16. Ordnung wäre). Dies liefert den Reyeschen[62] Satz:

ζ) „Die Fläche vierter Ordnung F_4, die durch die zehn gemeinsamen Axen zweier cubischer Raumcurven geht (und dadurch völlig bestimmt ist) ist die Jacobi'sche Fläche eines beide Curven stützenden Gebüsches von Flächen zweiter Ordnung.

---

*) Die Sätze (β) bis (ε) bilden die Analogien zu den Eigenschaften einer H_2-Fläche der cubischen Curve.

Die zehn Axen sind die Geraden der zehn im Gebüsch befindlichen Ebenenpaare."

Das Letzte ergiebt sich hier leicht aus dem Begriff eines Doppelpunktes (sowie auch aus Nr. 137). Denn ist α, β einer der Doppelpunkte der R_6^2, so ist eine der aus den Formen (3) linear zusammensetzbaren von der Gestalt:

$$(\gamma)\quad \delta_s \equiv (\lambda_1 - \alpha) \ldots (\lambda_6 - \alpha) - \tau\,(\lambda_1 - \beta) \ldots (\lambda_6 - \beta)$$

d. h. eine Form der zur R_6^2 conjugirten Gruppe ist als Summe von zwei sechsten Potenzen (von $(\lambda - \alpha)$ und $(\lambda - \beta)$) darstellbar. Dann aber wird die zu (8) gehörige Fläche:

$$(9)\quad A^2 - \tau\, B^2 = 0$$

wo $A = 0$, $B = 0$ die Ebenen α, β der Normcurve darstellen; sodass das Ebenenpaar (9) zu ihnen harmonisch ist.

Mithin ist jede Axe $(u_i\, v_i)$ Gerade eines Ebenenpaares des Gebüsches (5).

Solcher Ebenenpaare giebt es aber bekanntlich zehn *).

Die Gleichung (9) lehrt:

ζ_1) „Die dem Flächengebüsch des Satzes ζ) angehörigen zehn Ebenenpaare erhält man als die resp. Ebenenpaare, die zu den beiden von je einer der zehn Axen an die beiden cubischen

---

*) Dass es kein weiteres Ebenenpaar des Gebüsches (5) (das, wie sich gleich zeigen wird, ein ganz allgemeines Gebüsch ist) giebt, ist leicht so einzusehen. Für ein Ebenenpaar verschwinden alle ersten Unterdeterminanten seiner Determinante (und umgekehrt sind dies für eine F_2 die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass sie ein Ebenenpaar wird).

Diese Unterdeterminanten sind aber für den Fall einer eine cubische Curve stützenden F_2 identisch mit den Kernen der Matrix der pg. 216. Dann aber ist, wie damals gezeigt wurde, die Form, die die sechs Schnittpunkte von Fläche und Curve darstellt, als Summe von zwei sechsten Potenzen darstellbar. Mithin muss auch jedem Ebenenpaar des Gebüsches (5) ein Doppelpunkt der R_6^2 entsprechen. Deren giebt es aber nur zehn.

Curven gehenden Ebenenpaaren *harmonisch* sind."

Die Wichtigkeit des Satzes ζ) tritt aber erst durch seine Umkehrung hervor (die gleichfalls schon Reye[62] behandelt hat), indem man von einem beliebigen Flächengebüsch zweiter Ordnung ausgeht. Wir verfahren hier so.

Für eine cubische Curve sind es drei Bedingungen, damit sie auf einer F_2 ruht: mithin zwölf Bedingungen, sofern sie auf einem ganzen Gebüsch von F_2 ruhen soll.

Gäbe es trotzdem im Allgemeinen keine Curve dieser Art, so müssten es ihrer, wenn eine existirt, unendlich viele geben. Existirt aber eine, so giebt es nach Obigem weder eine unendliche Anzahl, noch mehr als eine einzige zweite, deren mit der ersten gemeinsame Axen die Geraden der zehn Ebenenpaare des Gebüsches sind.

„Beides folgt daraus, dass man *sechs* solcher zehn Axen beliebig wählen darf." Denn dann giebt es, wie wir wissen, nur fünf weitere Curven, die diese sechs Axen ebenfalls zu solchen haben, und unter diesen nur eine, für die auch die vier weiteren Axen solche sind. *q. e. d.* Dies ist die Reye'sche*) Umkehrung von ζ):

ζ_2) „Es giebt zwei cubische Raumcurven, die auf einem Flächengebüsch zweiter Ordnung ruhen. Ihre gemeinsamen zehn Axen sind die Kanten der zehn Ebenenpaare des Gebüsches."

Daraus folgt dann wieder:

---

*) [Die Sätze ζ) ζ_2) glaubte ich als neue gefunden zu haben und habe sie in dieser Meinung auch in der kurzen Note Math. Ann. XXI pg. 133 mitgetheilt. Herr Reye war so gütig, mich darauf aufmerksam zu machen, dass sie sich bereits in seiner Abhandlung Crelle's Journal Bd. 82 pg. 78, 79 befänden, was meinem Gedächtniss entfallen war, da ich diesen Aufsatz schon vor mehreren Jahren gelesen hatte.

Nachträgliche Bemerkung, Anfang Februar 1883.]

ζ_3) „Die Sätze β) bis ε) gelten für beide cubische Curven (ψ, N_3) ganz gleichmässig."

Also ist z. B. jedes (in Bezug auf das Flächengebüsch) conjugirte Punktepaar der Fläche F_4 ein Paar Gegenecken von zwei Polsechsflachen des Gebüsches, von denen das eine der einen, das andere der andern cubischen Curve umbeschrieben ist.

Da man aus den sechs cubischen Curven, die sechs beliebige Raumgerade zu Axen haben, 15 Paare bilden kann, so gilt auch der Satz:

ζ_4) „Nimmt man sechs beliebige Raumgerade als Kanten von sechs (noch unbestimmten) Ebenenpaaren eines Flächengebüsches zweiter Ordnung, so giebt es fünfzehn solcher Gebüsche, denen fünfzehn Jacobi'sche Flächen zugehören."

Diese Betrachtung ist ähnlicher Natur wie die von Rosanes[63] angestellte, der von vier Kanten von vier *) bestimmten Ebenenpaaren ausgeht und daraus die sechs folgenden Kanten bestimmt.

§. 32.

Fortsetzung. Das Schnittpunkttheorem der R_6^3, auf der cubischen Curve studirt.

195. Unser Flächengebüsch zweiter Ordnung (5) schneidet, wie wir wissen, aus der Normcurve N_3 (d. h. der einen der beiden auf ihm ruhenden cubischen Curven, auf die wir uns jetzt wieder beschränken) das „Sextupelgebüsch":

*) Diese Aufgabe kommt also wegen Satz ζ_1) auf die andere hinaus: Eine cubische Raumcurve zu construiren, die vier gegebene Raumgerade so zu Axen hat, dass das von je einer derselben an die Curve gehende Ebenenpaar immer einer bestimmten (Ebenen-) Involution (zweiten Grades) angehört.

Solcher Curven giebt es dann nach Obigem zwei etc.

$$(10)\ \mathrm{L} \equiv \lambda_a\, a_\lambda + \lambda_b\, b_\lambda + \lambda_c\, c_\lambda + \lambda_d\, d_\lambda\ (=0)$$

aus. Die dazu conjugirte Gruppe sei bezeichnet mit

$$(11)\ \mathrm{M} \equiv \mu_\alpha\, \alpha_\lambda + \mu_\beta\, \beta_\lambda + \mu_\gamma\, \gamma_\lambda$$

wo die μ, wie in (10) die λ, variable Constanten sind.

Zu jedem Sextupel M von Ebenen der Curve N_3 gehört eine bestimmte Fläche zweiter Klasse Φ_2, die diese Ebenen mit N_3 gemein hat und zugleich auf N_3 ruht. Der ganzen Gruppe (11) gehört also eine Schaarschaar von Flächen Φ zu: sie heisse M_2. In gleicher Weise heisse unser Flächengebüsch das Gebüsch L_2. Dann wissen wir nach Satz Nr. 128:

η) „Die auf der Curve N_3 ruhende Schaarschaar M_2 ruht auch auf dem die Curve N_3 stützenden Gebüsch L_2 und zwar besteht sie aus *allen* auf der Curve und zugleich auf dem Gebüsch L_2 ruhenden Φ_2." „Und umgekehrt stützt das Gebüsch L_2 die Schaarschaar M_2 und zwar besteht es aus *allen* die Curve und die Schaarschaar M_2 stützenden F_2."

„Dies ist das quaternäre Gegenstück zu dem binären Satze, dass die Gruppen L und M conjugirt sind."

Nun bildet aber die Gruppe (10) „L" die Gruppe einer R_6^3, deren Schnittpunkttheorem durch

$$(12)\ \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0\ ,\ \gamma_s = 0 \text{ oder auch durch}$$

$$\mathrm{M}_s \equiv \mu_\alpha\, \alpha_s + \mu_\beta\, \beta_s + \mu_\gamma\, \gamma_s = 0$$

gegeben ist.

Aus M_s geht aber nach pg. 199 die Gleichung der Schaarschaar M_2 in der Weise hervor, dass wir aus (12) zuerst die Gleichungen

$$(13)\ \alpha_\sigma^2 = 0,\ \beta_\sigma^2 = 0,\ \gamma_\sigma^2 = 0 \text{ oder auch}$$

$$M_2 \equiv M_\sigma^2 \equiv \mu_\alpha\, \alpha_\sigma^2 + \mu_\beta\, \beta_\sigma^2 + \mu_\gamma\, \gamma_\sigma^2 = 0$$

und aus ihnen sodann mittelst der Substitutionen:

$$(14)\ \rho u_0 = \sigma_3,\ \rho u_1 = -\frac{\sigma_2}{3},\ \rho u_2 = \frac{\sigma_1}{3},\ \rho u_3 = -\sigma_0$$

die entsprechenden bilden:

$$(15)\ \mathrm{M}_2 \equiv \mathrm{M}_u^2 \equiv \mu_\alpha \mathrm{A}_u^2 + \mu_\beta \mathrm{B}_u^2 + \mu_\gamma \Gamma_u^2 = 0.$$

„Demnach stellt (15) die Schaarschaar M_2 dar."

Solange es aber nur auf die Eigenschaften der Gruppe (10) resp. ihres Schnittpunkttheorems (12) ankommt, benützen wir lieber die letztere Gleichung resp. die sie ersetzende (13) und übertragen das so Gewonnene auf die Schaarschaar M_2.

196. Eine R_6^3 besitzt bekanntlich acht dreimal berührende Ebenen.

In der That müssen diese durch die gemeinsamen Werthsysteme σ von (13) gegeben sein. Diese Gleichungen stellen aber ein die Curve N_3 stützendes Flächennetz zweiter Ordnung M_σ^2 dar: ihre 8 Grundpunkte die gewünschten Werthsysteme σ.

„Vermöge der Substitutionen (14) ist die Schaarschaar M_2 die dem Netze M_2 im Nullcomplexe der Curve N_3 conjugirte*)."

$\varkappa$) „Somit repräsentiren die acht Grundebenen**) der Schaarschaar M_2, bezogen auf N_3, die acht dreimal berührenden Ebenen der R_6^3 (10)."

$\varkappa_1$) „Durch irgend vier***) (beliebig annehm-

*) Denn die Substitution (13) ordnet jedem Punkte die durch ihn gehende Ebene des Nullcomplexes von N_3 zu.

**) Die acht „Grundebenen" einer Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse stehen den Grundpunkten eines Netzes von Flächen zweiter Ordnung dualistisch gegenüber.

***) Da die Darstellungsformen der (auf die Normcurve N_3 bezogenen) 8 Grundebenen der Schaarschaar M_2 diejenigen acht cubischen Formen bare) Grundebenen ist unsere ganze Configuration eindeutig bestimmt."

---

sind, deren Quadrate sich in der Gruppe L befinden, und zwischen irgend fünf Formen dieser Gruppe stets eine lineare Identität herrschen muss, so gilt der interessante Satz (über den noch allgemeineren Satz cf. Kap. III):

„Irgend vier cubische (binäre) Formen bestimmen im allgemeinen stets vier andere, so dass nicht nur zwischen solchen acht Formen selbst (wie bekannt), sondern auch zwischen ihren Quadraten vier lineare Identitäten stattfinden. Solche acht Formen stellen immer die Grundpunkte eines eine cubische Raumcurve stützenden Flächennetzes zweiter Ordnung dar."

In dieser Gestalt erkennt man sofort die Verallgemeinerung des ternären Satzes pg. 241:

„Irgend drei quadratische Formen bestimmen im allgemeinen stets eine vierte, sodass zwischen den Quadraten der vier Formen eine lineare Identität gilt. Solche vier Formen stellen die Grundpunkte eines einen Kegelschnitt φ stützenden Kegelschnittbüschels dar."

Es möge hier ein noch einfacherer Beweis dieses Satzes mitgetheilt werden, der zugleich den Sinn der Identität klarer macht.

Von den Grundpunkten ($u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, $u_4 = 0$) eines φ stützenden Kegelschnittbüschels waren drei beliebig annehmbar, der vierte eindeutig bestimmt. Die Punkte bildeten ein Polviereck von φ. Daher muss bekanntlich φ in der Form darstellbar sein:

$$\varphi \equiv \Sigma\, k_i\, u_i^2 = 0.$$

Setzt man daher statt der u_i die quadratischen Formen ein, die die von den Punkten an φ gehenden Tangentenpaare darstellen (d. h. sucht man die φ mit sich selbst gemeinsamen Tangenten), so muss die Gleichung für φ in die gewünschte Identität übergehen. *q. e. d.*

Wir wollen bei dieser Gelegenheit noch einige besondere Fälle in's Auge fassen. Liegen drei der Punkte in gerader Linie g (d. h. verschwindet die Combinantinvariante der zugehörigen quadratischen Formen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$), so zerfällt das φ stützende Büschel in die Gerade g und das Strahlbüschel P_4 der zu g in Bezug auf φ conjugirten Geraden.

Somit ist der Pol P_4 von g der gesuchte vierte Punkt, und der Satz bleibt vollkommen erhalten.

In der That giebt es nur eine einzige Schaarschaar M_2, für die sie vier der (acht) Grundebenen sind, und die auf der Curve N_3 ruht. Damit ist aber auch das Gebüsch L_2 bestimmt.

Statt der drei ersten φ kann man dann irgend drei lineare Combinationen derselben wählen, ohne dass die vierte Form φ_4 sich ändert.

Fragen wir jetzt, wann der Satz nicht mehr gilt d. h. wann die vierte Form φ_4 unbestimmt wird, so kann dies nur eintreten, wenn alle Kegelschnitte des durch die drei ersten Punkte ($P_1\, P_2\, P_3$) bestimmten Netzes φ stützen, im Speciellen also auch die drei Seitenpaare des Dreiecks $P_1\, P_2\, P_3$.

Dann muss jede Seite zu jeder andern conjugirt sein (in Bezug auf φ) d. h. das Dreieck ein Poldreieck von φ sein. Dann findet (indem man beweist wie oben) zwischen den Quadraten der drei φ_i eine lineare Identität statt und umgekehrt bedingt dies die Existenz eines Poldreiecks. Dann bilden die Formen der zugehörigen R_4^2-Gruppe eine Involution auf derjenigen Geraden, die einfach gezählt die R_4^2 jetzt darstellt.

Nach Früherem (pg. 109) stellen die Ecken eines solchen Poldreiecks (von φ) die Covariante Θ einer biquadratischen Form f d. h. die Doppelelemente der Involution $f + k\ H = 0$ dar. Die sämmtlichen Kegelschnitte, die aus φ die Formen dieser Involution ausschneiden, sind alle diejenigen, die das Dreieck $P_1\ P_2\ P_3$ zum Poldreieck haben.

Die zur Involution $f + k\ H$ conjugirte Gruppe stellt eine solche R_4^2 dar, deren Wendepunkte in den Doppelpunkten liegen. Dann giebt es noch eine ∞^2-Schaar von Wendekegelschnitten (cf. pg. 284) d. h. die quadratische Combinante Q der Gruppe (und damit der Involution) verschwindet identisch. Umgekehrt ist dies wieder die Bedingung eines Poldreiecks ($\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$), wie die Bildung von Q direkt zeigt. Die zur Involution $f + k\ H$ gehörigen Curven F_3 und H_3 (cf. Nr. 147) fallen beide in unser Poldreieck. Man hat demnach als Resultat:

„Der Satz über die lineare Identität der vier quadratischen Formen $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4$ versagt, wenn zwischen den Quadraten von *dreien* der φ eine lineare Identität herrscht, d. h. wenn drei der φ^2 *einer Involution* angehören und umgekehrt. Diese Involution ist dann von der Form $f + k\ H$ und die Combinante Θ das Product der drei φ,

197. Ferner besitzt, wie man weiss, eine R_6^2 sechs vierfache Sekanten (die auf der einzigen durch die Curve gehenden Fläche dritter Ordnung eine halbe Doppelsechs bilden). D. h. algebraisch:

λ) „In der Gruppe L (10) giebt es sechs Involutionen (sechsten Grades), deren jede in ein festes Quadrupel und eine Involution zweiter Ordnung zerfällt."

Daraus folgt mit Anwendung der Sätze pg. 236 und pg. 237 anm. sofort:

λ_1) „In unserem Gebüsch L_2 (das die Curve N_3 stützt), giebt es sechs ausgezeichnete Büschel, die aus der Curve N_3 (je vier feste Punkte abgerechnet) eine Involution zweiter Ordnung ausschneiden.

Jede derselben besitzt ein Paar von Doppelelementen.

Die fünf biquadratischen Involutionen, die diese sechs Paare zu Elementenpaaren besitzen, haben jede sechs Doppelelemente.

Die fünf Sextupel werden von fünf Flächen des Gebüsches aus der Curve N_3 ausgeschnitten.

Dies sind zugleich die fünf H_2-Flächen des Gebüsches d. h. solche, denen (zweifach) unend-

---

während das vierte φ identisch verschwindet, wie auch die quadratische Combinante Q der Involution. Das Poldreieck (Θ) stellt *zugleich* die dieser Involution zugehörige F_3-und H_3-Curve dar."

Andrerseits hat dann die der Involution (auf der cubischen Curve betrachtet) zugehörige Fläche H_2 die Eigenschaft, im Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirt zu sein.

Damit ist zugleich die früher aufgeworfene Frage nach der besondern Natur der Involution $f + k\ H$ erledigt.

lich viele Tetraeder ein- und der Curve umbeschrieben sind."

Den letzten Satz von λ_1) können wir separatim so formuliren:

λ_2) „In irgend einem Flächengebüsch zweiten Grades giebt es je fünf H_2-Flächen der beiden auf ihm ruhenden cubischen Curven."

Besonders beachtenswerth ist aber, dass hier der Zusammenhang zwischen der Theorie einer biquadratischen Involution und der einer drei- (vier-) gliedrigen Gruppe sechsten Grades, der schon oben betont ist, klar hervortritt. Denn vermöge der bekannten Abbildung der einen einer R_6^3 einbeschriebenen Fläche dritter Ordnung auf die Ebene (des Normkegelschnitts), die dem Satze λ_1 implicite zu Grunde liegt, erkennt man, wie die obigen Raumsätze über die R_6^3 (und damit zweier cubischer Curven) sofort auf die Configuration der durch sechs Punkte einer Ebene gehenden H_3-Curven eines Kegelschnitts übertragen werden können.

198. Welche Eigenschaft der Gruppe (11) entspricht der Eigenschaft λ) der conjugirten Gruppe (10)?

Die Antwort lautet:

λ_3) „Es giebt sechs Quadrupel (d. s. die des Satzes λ) $\delta_{1i}, \delta_{2i}, \delta_{3i}, \delta_{4i}$ $(i = 1, \ldots 6)$ von der Art, dass die sechs zugehörigen Involutionen der Gruppe (11) die Form annehmen:

$$(16) \quad \sum_1^4 r\,(a_r + kb)\,(\lambda - \delta_{ri})^6.$$

Dies sind umgekehrt die *einzigen* Involutionen der Gruppe (11), deren Formen als Summen je *derselben* vier sechsten Potenzen darstellbar sind."

Erster Beweis.

Wir gehen vom Satze λ) aus. Eines der Quadrupel sei $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3\,\delta_4$. Dann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für seine Existenz, dass die drei Schnittpunktgleichungen:

$$(17)\ \alpha_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0 \quad \beta_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0 \quad \gamma_{\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \lambda_1 \lambda_2} = 0$$

sich auf e i n e reduciren, d. h. genauer, dass es noch eine ∞^1-lineare Schaar (Involution) von Paaren $\lambda_1 \lambda_2$ giebt, die diese Gleichungen befriedigt. Nennen wir die nach den δ polarisirten zweiten Differentialquotienten von α_λ „A_{00}, A_{01}, A_{02}", analog die von $\beta_\lambda, \gamma_\lambda$, so schreibt sich (17) auch so:

$$(18)\ \begin{cases} \sigma_0 A_{00} + \sigma_1 A_{01} + \sigma_2 A_{11} = 0 \\ \sigma_0 B_{00} + \sigma_1 B_{01} + \sigma_2 B_{11} = 0 \\ \sigma_0 \Gamma_{00} + \sigma_1 \Gamma_{01} + \sigma_2 \Gamma_{11} = 0 \end{cases}$$

oder auch

$$(18^a)\ \begin{cases} \varkappa A_{00} + \lambda B_{00} + \mu \Gamma_{00} = 0 \\ \varkappa A_{01} + \lambda B_{01} + \mu \Gamma_{01} = 0 \\ \varkappa A_{11} + \lambda B_{11} + \mu \Gamma_{11} = 0 \end{cases}$$

Dann muss es also auch ein ∞^1-lineares System von Werthsystemen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ geben, die (18^a) befriedigen.

Aber diese Gleichungen (18^a) sind, wie wir wissen, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass sich die Form

$$(19)\ f \equiv \varkappa\alpha_\lambda + \lambda\beta_\lambda + \mu\gamma_\lambda$$

als Summe von den vier sechsten Potenzen $(\lambda - \delta_i)^6$ darstellen lässt.

Da es aber ein ∞^1-lineares System von Werthen $(\varkappa, \lambda, \mu)$ giebt, so auch eine Involution von Formen (19) (d. h. der Gruppe 11), die die Form (16) annehmen.

Genau in der umgekehrten Weise beweist man die Umkehrung des Satzes.

q. e. d.

Zweiter Beweis.

Zuerst verfahren wir wie oben. Für ein Quadrupel des Satzes λ) $(\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4)$ müssen die drei Schnittpunktgleichungen

(12) $\alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0$

wenn man für vier der sechs Elemente $\lambda_1 \ldots \lambda_6$ die δ einsetzt, sich auf eine reduciren d. h. man muss aus (12) drei solche Formen linear zusammensetzen können, so, dass zwei von ihnen für unsere Substitution identisch verschwinden.

Man bezeichne mit $\psi(\lambda)$ die Form

(20) $\psi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_6)$.

Soll nun eine in den s_i lineare und ganze Funktion für irgend eine der Substitutionen $\delta_1 = \lambda_k$ ($k = 1 \ldots 6$) verschwinden, so ist sie bekanntlich mit $\psi(\delta_1)$ identisch.

Soll sie verschwinden für die Substitutionen $\delta_1 = \lambda_k$, $\delta_2 = \lambda_{k'}$ ($k \gtrless k' = 1, 2 \ldots 6$), so kann sie nur von der Form sein:

$$k_1\, \psi(\delta_1) + k_2\, \psi(\delta_2).$$

So fährt man fort. Soll sie endlich verschwinden, wenn man für irgend eines der λ setzt δ_1: für irgend ein zweites δ_2: ein drittes und viertes resp. δ_3, δ_4, so ist sie nothwendig von der Form:

(21) $\delta_s \equiv k_1\, \psi(\delta_1) + k_2\, \psi(\delta_2) + k_3\, \psi(\delta_3) + k_4\, \psi(\delta_4)$.

Somit giebt es für jedes Quadrupel $\delta_1\, \delta_2\, \delta_3\, \delta_4$ des Satzes λ) zwei (linear unabhängige) Formen der Gruppe (12) (und damit auch alle aus ihnen linear zusammensetzbaren), die die Gestalt (21) annehmen.

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_6$ gehen aber einerseits die Formen (12) in die zu (10) conjugirte Gruppe über, andrerseits die sämmtlichen Formen (21) in (16).

q. e. d.

In dieser Weise ist der Satz λ_3) eine Verallgemeinerung des Satzes pg. 293: cf. den ganz allgemeinen Satz Kap. III, für den der Beweis ganz analog ist, wie die beiden eben geführten.

Zwischen den sechs Quadrupeln (δ) findet ein einfacher Zusammenhang statt.

λ_4) Man kann irgend drei der sechs Quadrupel (δ) beliebig annehmen: dann sind die drei übrigen eindeutig bestimmt.

In der That, bei der schon öfters benützten Abbildung (der durch die R_6^3 gehenden F_3 auf die Ebene) gehen die sechs Quadrupel (δ) über in diejenigen, die die durch je fünf von sechs Punkten gehenden Kegelschnitte aus einem festen (Norm-) Kegelschnitt ausschneiden.

Nimmt man somit auf dem letzteren irgend drei Quadrupel an, so hat man drei Kegelschnitte durch sie so zu legen, dass sie drei Punkte gemein haben. Solcher Punktetripel giebt es aber nur eines, das die Doppelpunkte einer R_4^2 repräsentirt, deren Gruppe sich aus den drei gegebenen Quadrupeln linear zusammensetzt.

q. e. d.

199. Wenden wir diese Ergebnisse auf unsere aus Gebüsch L_2 und Schaarschaar M_2 bestehende Figur an, so haben wir nur noch zu bemerken, dass die einer Form δ_s (21) entsprechende Fläche $\delta_\sigma^2 = 0$ und damit auch die zugehörige Klassenfläche $\Delta_u^2 = 0$ sich als Summe von vier zweiten Potenzen darstellen lässt, die $= 0$ gesetzt, die Gleichungen der vier Ebenen δ_i resp. der vier Punkte δ_i der Normcurve (N_3, N_3) sind. Dann gilt mithin nach Obigem der Satz:

λ_5) „Die sechs der Curve einbeschriebenen Tetraeder des Satzes λ_1) (die zugleich den gemeinsamen Grundcurven (vierter Ordnung) von sechs Büscheln des Gebüsches L_2 einbeschrieben sind), sind zugleich Polvierflache von sechs Schaaren der Schaarschaar M_2.

Drei dieser Tetraeder kann man der Curve beliebig einbeschreiben, dann ist unsere ganze Configuration dadurch eindeutig bestimmt."

Ganz analog dem Satze λ_3) (und seinen Beweisen) spricht (und beweist) man folgende Sätze über die conjugirten Gruppen M, L der R_6^2 und R_6^3 aus:

μ) I. „Jede Form der Gruppe M ist auf ∞^1 Arten als Summe von vier sechsten Potenzen darstellbar. Die diese Darstellung leistenden Quadrupel sind die sämmtlichen Elementenquadrupel der Gruppe L und zwar gehört zu jedem solchen Quadrupel nur eine Form M und eine Form L.“

II. „Es giebt ∞^1 Formen der Gruppe M, die als Summen von drei sechsten Potenzen darstellbar sind. Die bezüglichen Elemententripel entsprechen den dreifachen Sekanten der R_6^3 d. h. denjenigen Involutionen der Gruppe L, die einen festen cubischen Factor haben.

Jedem solchen Tripel entspricht eine solche Involution der Gruppe L und eine bestimmte Form der Gruppe M.“

III. „Es giebt ∞^2 Formen der Gruppe L, die als Summe von drei sechsten Potenzen darstellbar sind. Die bezüglichen Elemententripel sind die sämmtlichen Elemententripel der Gruppe M. Dieser letztere Satz ist nur der algebraische Ausdruck für die Existenz der Fläche F_4, der Jacobi'schen des Gebüsches L_2.“ etc.

Diese Sätze sind wieder ohne Weiteres in ihre geometrische Form zu kleiden z. B. Satz II. und I:

μ II) „Die Ebenen der in der Schaarschaar M_2 befindlichen Kegelschnitte umhüllen bekanntlich eine Curve sechster Klasse *). Irgend eine

*) Diese ist also ein- eindeutig abgebildet auf die Curve vierter Klasse B (M) $=0$, die aus der R_6^2 (11) diejenigen Sextupel ausschneidet, für

Schmiegungsebene derselben trifft die Curve N_3 in drei Punkten, durch die ein Büschel des Gebüsches L_2 geht und umg. Speciell ist diese Curve also den sechs Tetraedern des Satzes (λ_5) einbeschrieben." *)

μ I) „Geht durch vier Punkte der Curve N_3 eine Fläche des Gebüsches L_2, so ist ihr Tetraeder Polvierflach einer bestimmten Fläche der Schaarschaar M_2 und umg." etc.

Die weiteren zahlreichen Anwendungen der R_6^2- und R_6^3-Gruppen auf unser Flächengebüsch L_2 seien dem Leser überlassen. Statt der Curve N_3 kann man natürlich immer auch die zweite auf L_2 ruhende cubische Curve substituiren.

Desgleichen mag auf die Untersuchung der vielen speciellen Arten von Jacobi'schen Flächen eines Flächengebüsches zweiter Ordnung verzichtet werden. Besonders treten hervor einmal das Gebüsch mit sechs gemeinsamen Grundpunkten, von dem man zur Hierholzer'schen[64] **) Fläche gelangt, und

---

welche die Invariante B (cf. Nr. 137) verschwindet. (Dualistisch gesprochen) kann man demnach die bekannte Hesse'sche Abbildung der Kegelspitzencurve eines Flächennetzes zweiter Ordnung auf eine ebene allgemeine Curve vierter Ordnung noch auf ∞^3 Weise so vollziehen, dass die letztere Curve eine „Curve B" wird, da es noch ∞^3 cubische Curven giebt, die auf einem F_2-Netz ruhen.

*) Irgend dreien dieser Tetraeder kann man nach Satz pg. 221 eine bestimmte Fläche zweiter Klasse einbeschreiben. Dann sind die zwölf Ebenen der drei Tetraeder gerade diejenigen, die sie mit der Curve sechster Klasse gemein hat.

**) Haben die Flächen des Gebüsches (5) einen Punkt (λ_1 λ_2 λ_3) gemein, so sind andrerseits dies die Argumente einer dreifachen Tangente der R_6^2. Also ist das ebene Bild der Hierholzer'schen Fläche eine R_6^2 mit sechs dreifachen Tangenten, die 18 von den 24 Doppeltangenten der Curve absorbiren.

zweitens das Gebüsch der ersten Polaren einer Fläche dritter Ordnung, dessen Jacobi'sche Fläche mit ihrer Steiner'schen Kernfläche identisch ist. Nur der letzteren sei ein specieller Excurs gewidmet.

Dagegen möge noch Einiges über die Bestimmungsarten einer biquadratischen Involution, sowie ihre Erzeugung auf der cubischen Raumcurve am Schlusse unseres zweiten (Haupt-) Capitels Platz finden, um so die Theorie dieser Involution in gewisser Richtung abzuschliessen.

Excurs. 200. Wir behandeln hier die Grundlage einer Apolaritätstheorie der allgemeinen Fläche dritter Ordnung und ihrer Steiner'schen (Kern-)fläche.

Gehen wir vorerst von der Fläche dritter Ordnung aus. Diese ist bekanntlich nach Sylvester als Summe von fünf Cuben darstellbar (und nur in einer Weise):

$$(1)\quad F \equiv \Sigma k_i \, A_i^3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei sind die Ebenen $A_i = 0$ die des „Pentaeders" der Fläche, dessen 10 Kanten auf der Steiner'schen Fläche von F (der Jacobi'schen ihres Polarengebüsches), deren Gleichung von der Gestalt ist:

$$(2)\quad S \equiv \Sigma \frac{k_i'}{A_i} = 0$$

liegen. Wir wählen irgend eine der (∞^2) Schaar von den dem Pentaeder einbeschriebenen cubischen Curven zur Normcurve N_3. Die Argumente der fünf Ebenen seien α_i. Dann kann man setzen:

$$(3)\quad A_i \equiv s_3 - s_2 \, \alpha_i + s_1 \, \alpha_i^2 - s_0 \, \alpha_i^3.$$

Dann ergiebt sich:

$$(4)\quad \frac{\delta F}{\delta s_r} \equiv F_r = (-1)^r \sum_i k_i \, A_i^2 \, \alpha_i^r \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

und die Bedingung für ein in Bezug auf $F_r = 0$ conjugirtes Punktepaar (σ, τ) lautet:

$$(5) \quad \sum_i k_i \, \alpha_i^r \, A_i(\sigma) \, A_i(\tau) = 0.$$

Gehen von den Punkten σ, τ resp. die Ebenen $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ an N_3 und setzt man

$$(6) \quad \psi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots . (\lambda - \lambda_6) \quad .$$

so ist die Form (5) identisch mit:

$$(5) \quad \sum_i k_i \, \alpha_i^r \, \psi(\alpha_i) = 0.$$

Andererseits bestimmen wir die Schnittpunkte der Fläche F und ihres Polarengebüsches mit der Curve N_3. Es schneidet F die Curve in den neun Punkten:

$$(6) \quad f \equiv \Sigma k_i (\lambda - \alpha_i)^9 = 0$$

und ihr Polarengebüsch in dem Sextupelgebüsch der Gruppe:

$$(7) \quad f_r \equiv \Sigma k_i \, \alpha_i^r (\lambda - \alpha_i)^6 = 0 \quad (r = 0, 1, 2, 3).$$

I. „Die Gruppe (7) ist keine andere als die der dritten Polaren der Form (6). Aus ihnen geht durch Polarisation nach sechs Elementen λ die Gruppe (5) hervor. Diese ist das Schnittpunkttheorem einer R_6^2 mit dem fünffachen Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$. Daher stützt eine Fläche dritter Ordnung F jede ihrem Pentaeder einbeschriebene cubische Raumcurve und umgekehrt ruht eine gegebene cubische Curve auf der ganzen (∞^4 linearen) Schaar von Flächen dritter Ordnung (1), die ein gegebenes der Curve umschriebenes Pentaeder zu ihrem „Pentaeder“ haben. Die zehn Kanten des Pentaeders sind die gemeinsamen Axen aller (∞^2) ihm einbeschriebenen cubischen Curven. Durch diese zehn Geraden geht noch eine ∞^4 lineare Schaar von Flächen vierter Ordnung S, von denen jede die Steiner'sche Fläche einer bestimmten der Flächen F ist.“

Dies fliesst unmittelbar aus den Entwicklungen der letzten Nummern.

Eine weit grössere Wichtigkeit hat aber die Umkehrung unseres Verfahrens, indem man von einer R_6^2 mit fünffachem Punkt (α_i) ausgeht. Da ein solcher drei Bedingungen erheischt, so kann das Schnittpunkttheorem dann nur noch von $12 - 3 = 9$ Constanten abhängen, also ausser den α noch von vier.

In der That, verfährt man wie in Nr. 198, so gelangt man zu folgender Form des Schnittpunkttheorems:

(8) $\Sigma\, a_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, b_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, c_i\, \psi(\alpha_i) = 0 \quad \Sigma\, d_i\, \psi(\alpha_i) = 0$

mithin die Gruppe ihrer Schnittpunktformen:

(9) $\Sigma\, a_i\, (\lambda - \alpha_i)^6, \quad \Sigma\, b_i\, (\lambda - \alpha_i)^6, \quad \Sigma\, c_i\, (\lambda - \alpha_i)^6, \quad \Sigma\, d_i\, (\lambda - \alpha_i)^6.$

II. „Diese Gruppe (9) ist die Gruppe der dritten Polaren einer bestimmten Form neunten Grades

$$(6)\; f \equiv \Sigma\, k_i\, (\lambda - \alpha_i)^9 \equiv k_\lambda^9.$$

Enthält daher eine dreigliedrige Gruppe sechster Ordnung eine Involution mit einem festen Faktor fünfter Ordnung, so ist die conjugirte Gruppe durch die nach drei variabeln Constanten μ_1, μ_2, μ_3 polarisirte Form einer bestimmten Form neunten Grades (6):

$$(7)\quad k_{\lambda}^{6}{}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} = 0$$

dargestellt."

Wir haben nun den ersten Theil des Satzes zu beweisen, da der zweite nur der daraus folgende algebraische Ausdruck der Existenz des fünffachen Punktes der R_6^2 ist.

Die Gruppe (9) hängt ausser von den α nur von den (vierreihigen) Determinanten der Coefficienten a_i, b_i, c_i, d_i ab. Diese seien mit K_i bezeichnet. Sollen diese identisch sein mit den bezüglichen Determinanten der Gruppe (7), so ergeben sich die Bedingungen:

$$(10)\quad \rho\, K_i = \frac{D_i}{k_i} \text{ (ρ ist ein beliebiger Faktor).}$$

Dabei sind die D_i die Differenzenprodukte derjenigen vier α, die den Index i nicht aufweisen.

Setzt man also voraus, dass weder eines der K noch eines der k verschwinden darf, so bestimmen die Grössen der einen Art eindeutig die der andern und umgekehrt. q. e. d.

Dann ist aber auch das Gebüsch (4) und damit die Fläche F eindeutig bestimmt, deren Steiner'sche Fläche (2) die F_4-Fläche der R_6^2 wird, wo die Coefficienten k_i' mit den K_i in (10) identisch sind.

III. „Bekanntlich ist aber eine allgemeine binäre Form f neunten Grades stets und zwar nur auf eine Weise als Summe von fünf neunten Potenzen $\{(\lambda-\alpha_i)^9\}$ darstellbar. Dabei sind die α_i die Wurzeln ihrer (Sylvester'schen) Canonizante.

Andererseits geht durch irgend neun Punkte einer cubischen Curve (N_3) stets nur eine Fläche dritter Ordnung F, die die Curve stützt.“

In der That überzeugt man sich sofort, dass die letztere Eigenschaft einer Fläche dritter Ordnung zehn (in den Coefficienten lineare) Bedingungen erfordert und wir wissen zugleich aus Früherem, dass wenn die neun gegebenen Punkte durch eine Form $a_\lambda^9 = 0$ dargestellt sind, die zugehörige Fläche keine andere ist als

$$(11)\quad F \equiv a_{\lambda_1^3\,\lambda_2^3\,\lambda_3^3} = 0.$$

Und genau wie in Nr. 137 folgt dann die Reihe von Sätzen:

IV. „Die zur Gruppe der 0^{ten}, 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Polaren von f apolare Gruppe stellt resp. die ∞^8, ∞^6, ∞^4, ∞^2, ∞^0 (lineare) Schaar der der Curve umschriebenen Polneun-acht-sieben-sechs-fünfflache der Fläche dritter Ordnung F (11) dar.

Im letzten Fall giebt es nur *ein* Polfünfflach, „das Pentaeder" von F."

Speciell mit Rücksicht auf das letztere folgt dann aus der Art der obigen Umformung unserer Formeln der merkwürdige Satz:

V. „Die Sylvester'sche Canonization der quaternären (ganzen) Form dritten Grades (d. h. ihre Darstellung als Summe von fünf Cuben) ist *vollkommen identisch* mit der Sylvester'schen Canonization der binären Formen neunten Grades (d. h. ihrer Darstellung als Summe von fünf neunten Potenzen)."

Denn dass die erstere Darstellung auch auf unserem Wege sich nur als eine einzige ergiebt, folgt indirekt sofort. Denn im andern Falle wäre auch die zweite Darstellung eine mehrdeutige, was, wie auch aus dem Satze IV. hervorgeht, unmöglich ist.

Dies mag genügen, um die Bedeutung des Apolaritätsstandpunktes auch für die Flächen dritter Ordnung erkennen zu lassen. Die mancherlei weiteren neuen Eigenschaften, die aus der Übertragung der R_6^2-Sätze auf diese Flächen resultiren, mögen unberücksichtigt bleiben.

201. Wir haben uns die Involution ursprünglich durch zwei Quadrupel gegeben gedacht, d. h. wir nahmen zwei der Curve N_3 (φ) umschriebene Tetraeder an, die dann nebst noch unendlich vielen andern einer bestimmten Hurwitz'schen H_3-Curve einbeschrieben waren.

Diese Involutionsquadrupel sind leicht durch ein Flächenbüschel auszuschneiden. Man nehme eine beliebige Raumebene an. Diese trifft die beiden N_3 umschriebenen Tetraeder in je vier Geraden. Dann giebt es je einen Kegelschnitt, der die vier Geraden und die eine in der Ebene liegende Curvenaxe berührt. Diese beiden Kegelschnitte bestimmen dann eine Schaar.

ν_1) „Jeder Kegelschnitt dieser Schaar wird (ausser von zwei festen) von vier beweglichen Curvenebenen berührt. Diese bestimmen die Quadrupel der Involution“ (u. dual.).

In der That bestimmen die zwei Kegelschnitte (die selbst in der angenommenen Ebene durch die zwei Ebenenquadrupel von N_3 bestimmt sind) ihre Schaar gerade so, wie diese Quadrupel ihre Involution. q. e. d.

Man erhält aber eine noch einfachere Construktion, wenn man die Involution durch drei ihrer Elemententripel bestimmt sein lässt.

Es gilt nemlich der Satz:

ν_2) „Durch irgend drei Raumpunkte $P_1 P_2 P_3$ geht eine einzige H_3-Curve einer gegebenen cubischen Curve φ. Die φ um- und ihr einbeschriebenen Tetraeder erhält man so.

Man verbinde die drei gegebenen Punkte durch Geraden $p_1 p_2 p_3$: die in ihrer Ebene liegende Axe (von φ) sei a, ihre Ebenen an φ α_1, α_2.

Dann bilden die Quadrupel von Ebenen von φ, die (ausser den festen Ebenen α_1, α_2) die Kegelschnitte *der dem Vierseit $p_1 p_2 p_3 a$ einbeschriebenen* Schaar berühren, die gewünschten Involutionstetraeder“ (u. dual.).

Der Beweis ist dem vorigen ähnlich. Jeder Kegelschnitt der Schaar wird von sechs Ebenen der Curve φ berührt, von denen aber zwei immer die festen Ebenen α_1 α_2 sind.

In der Schaar existiren drei zerfallende Kegelschnitte, die drei Paar Gegenecken des Vierseits (a p_1 p_2 p_3). Jedes

Paar besteht aus einem Punkte P_i und dem Schnittpunkt von a und p_i.

Mithin sind die von den Punkten P_i an φ gehenden Ebenentripel in der That Elemententripel der Involution. Und die ein solches Tripel (P_i) zum Quadrupel der Involution ergänzende vierte Ebene von φ ist die dritte (ausser α_1, α_2) vom Punkte $(a\, p_i)$ an φ gehende Ebene. *q. e. d.*

202. Diese Bestimmungsart der Involution ist aber nur ein weiterer besonderer Fall: alle überhaupt möglichen Fälle sind mit den zugehörigen Anzahlen von Involutionen in folgender Tabelle enthalten, wo die Paare, Tripel etc. die gegebenen Elementenpaare, -Tripel etc. der Involution bedeuten:

(22)

Anzahl	Paare	Tripel	Quadrupel
5	6		
3	4	1	
1	3		1
2	2	2	
1	1	1	1
1		3	
1			2

Dabei unterliegen die Anzahlen m_1 der Paare, m_2 der Tripel, m_3 der Quadrupel offenbar der Bedingung:

$$(23)\quad m_1 + 2\,m_2 + 3\,m_3 = 6\,*).$$

Die Fälle, in denen kein Quadrupel auftritt, leiten sich

*) Genau dieselbe Bedingung galt für m_1 Sechs- m_2 Fünf- m_3 Vierflache, die einer cubischen Curve umbeschrieben waren, wenn sie Polvielflache einer (dann bestimmten) die Curve stützenden F_2 sein sollten.

ohne Weiteres aus dem ersten ab, indem man als Bild die R_6^2 zu Grunde legt und immer drei Doppelpunkte (was man sich durch einen continuirlichen *) Process vorstellen kann) durch einen dreifachen Punkt ersetzt.

Die Fälle mit Quadrupel leiten sich aus dem Verfahren des Beweises zu den Sätzen ν) mit Leichtigkeit ab.

Für den zweiten und vierten Fall gilt dann noch als Modification des Hauptsatzes (pg. 247):

π) „I. Die drei Involutionen mit gemeinsamen 4 Paaren und 1 Tripel haben noch zu je zweien zwei weitere Paare miteinander gemein nach dem Schema

1.	φ_2	φ_3	φ_{21}	φ_{31}
2.	φ_1	φ_3	φ_{21}	φ_{32}
3.	φ_1	φ_2	φ_{31}	φ_{32}

zusammen also 3. 2 weitere Paare **).

II. Die zwei Involutionen mit gemeinsamen 2 Paaren und 2 Tripeln haben noch ein einziges weiteres Elementenpaar gemein."

Die Modificationen, die die Fläche F_4 dadurch erhält, sind leicht angebbar und mögen unterlassen werden.

---

*) Der umgekehrte Weg ist leichter zu erkennen. Eine R_6^2 mit drei dreifachen Punkten ist dargestellt durch:

$$\begin{cases} \rho x_0 = (\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)(\lambda-\beta_3)(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)(\lambda-\gamma_3) = \varphi_0 \\ \rho x_1 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\gamma_1)(\lambda-\gamma_2)(\lambda-\gamma_3) = \varphi_1 \\ \rho x_2 = (\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)(\lambda-\beta_3) = \varphi_2 \end{cases}$$

Setzt man nun etwa succ. in φ_0 für β_3: $(\beta_3 + \varepsilon_2)$: für γ_3 $(\gamma_3 + \varepsilon_3)$ und in φ_1 für α_2 : $(\alpha_2 + \varepsilon_1)$, wo die ε beliebig kleine Grössen sind, so lösen sich die drei dreifachen Punkte succ. in je drei Doppelpunkte auf.

**) Für eine solche R_6^2 reduciren sich die vier T-Processe T_i (cf. pg. 246) auf einen, durch den nur die φ_i in die φ_{kl} übergehen und umgekehrt.

Desgleichen unterbleibe die Uebertragung aller für die cubischen Raumcurven gewonnenen Sätze auf die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung, wie sie in §. 26 prinzipiell erörtert wurde, da im Wesentlichen keine neuen Resultate dabei erscheinen würden.

Damit ist die systematische Vorarbeit dieses Capitels, die eine künftige Darstellung der Verknüpfung der Apolaritätsverhältnisse in Räumen von beliebig hohen Dimensionen ermöglichen sollte, prinzipiell *) durchgeführt und es sollen im folgenden dritten Capitel nur noch die Grundlinien dieser künftigen in sehr allgemeinen Sätzen sich ergehenden Theorie angedeutet werden, indem eine Anzahl der wichtigsten Verallgemeinerungen der in diesem Werke untersuchten Beziehungen (zum Theil ganz ohne Beweis, um nicht zu weit auszuholen) formulirt werden soll, wenigstens mit Angabe der in diesem Werke an der betr. Stelle angewandten ganz analogen Methoden.

---

*) Es ist keine Frage, dass sich im Einzelnen noch viele Lücken befinden. So z. B. ist die Invariantentheorie der binären Form sechsten Grades erst zum kleinsten Theile verwerthet: so ist von der äusserst wichtigen Frage (von der nur ein besonderer Fall pg. 330 Anm. untersucht ist), wann eine biquadratische Involution durch sechs Elementenpaare (oder überhaupt durch sechs Bedingungen) noch nicht bestimmt ist, d. h. es ihrer noch unendlich viele giebt wie z. B. wenn die sechs gegebenen Elementenpaare die Argumentenpaare der Doppelpunkte einer R_5^2 sind, Umgang genommen.

Dass die Theorie der R_6^2 und R_6^3 zusammenfällt mit der Betrachtung der drei- und viergliedrigen Gruppen sechster Ordnung auf der Normcurve sechster Ordnung (im Raume von sechs Dimensionen), aus der durch geeignete Projektion in den gewöhnlichen Raum und die Ebene (ganz wie in Nr. 110, 111) die R_6^2 und R_6^3 entstehen, braucht wohl nur angegeben zu werden.