Beide Funktionaldeterminanten sind vom Grade $(d+1)(n-d)$ in $\lambda$ und vom ersten in den Determinanten der $a$ resp. $\alpha$, die nach §. 1 proportional sind. Also unterscheiden sich beide nur noch um einen unwesentlichen Faktor, den man meistens der Bequemlichkeit wegen gleich 1 setzen darf.

Dieser einfache Satz ist namentlich einer der kräftigsten Hebel zur Erforschung geometrischer Wahrheiten mittelst algebraischer Behandlung, wie sich des Weiteren zur Genüge ergeben wird.

---

# Capitel II.

# Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven.

## Abschnitt I.

## Die Normcurven (speziell der Ebene und des Raumes).

### §. 12.

### Der Normkegelschnitt der Ebene.

28. Wenn auch dieser Abschnitt mancherlei Bekanntes[20] enthalten wird, so fehlt, so viel ich weiss, doch eine systematische Zusammenstellung der Haupt-Sätze dieser Theorie, die bezweckt, die Bestimmung der Lage der Punkte (Geraden, Ebenen, überhaupt Lineargebilde) in der Ebene, im Raume (und höheren Mannigfaltigkeiten) von fest gedachten Curven (dem Normkegelschnitt der Ebene, der cubischen Normcurve des Raumes, allgemein der rationalen Normcurve $n^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $n$ Dimensionen) abhängig zu machen. Und zwar erweist es sich weiterhin im Laufe der Untersuchungen als höchst vortheilhaft, diese Normcurven nicht ganz beliebig zu wählen, sondern sie gewissen (Apolaritäts-) Bedingungen zu unterwerfen, ähnlich wie man die gewöhnlichen Coordinatensysteme den gerade vorliegenden Aufgaben gemäss möglichst bequem einrichtet. Es wird im Folgenden wesentlich auf eine geschickte Bezeichnungsweise ankommen.

29. Wir denken uns in der Ebene ein festes Dreieckscoordinatensystem und bezeichnen als Normkegelschnitt ($N_2$)

$$(1)\ \rho x_2 = \lambda^2,\ \rho x_1 = 2\lambda,\ \rho x_0 = 1,$$

wo ($\rho$ ein beliebiger Faktor und) $\lambda$ ein variabler Parameter ist. (cf. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Art. 305.)

Die gewöhnliche Gleichungsform wird dann unmittelbar

$$(2)\ 4x_0\, x_2 - x_1^2 = 0.$$

Umgekehrt kann bekanntlich *) ein beliebiger (nicht zer-

*) Man sieht dies auch aus der allgemeinsten Parameterdarstellung des Kegelschnitts, der jeder (nicht zerfallende) Kegelschnitt vermöge seiner projektivischen Erzeugung fähig ist:

$$\rho x_i = a_{i2}\,\lambda^2 + a_{i1}\,\lambda + a_{i0}\ (i = 0,\ 1,\ 2),$$

indem man auf die Punkte der Ebene eine Lineartransformation anwendet, deren Coefficienten die resp. Unterdeterminanten des Systems der $a$ sind. Dann ergiebt sich auch sofort rückwärts mit Rücksicht auf die Gleichungen (1 und 2) als Gleichung dieses Kegelschnitts in den alten Coordinaten $x$:

$$0 = \begin{vmatrix} x_i & a_{i2} & a_{i1} \\ x_k & a_{k2} & a_{k1} \\ x_l & a_{l2} & a_{l1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_i & a_{i1} & a_{i0} \\ x_k & a_{k1} & a_{k0} \\ x_l & a_{l1} & a_{l0} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_i & a_{i2} & a_{i0} \\ x_k & a_{k2} & a_{k0} \\ x_l & a_{l2} & a_{l0} \end{vmatrix}^2.$$

Dies kann man auch noch auf eine zweite Art sehr leicht ableiten, die auch bei ähnlichen Elimininationsaufgaben oft angewandt werden kann.

Man sehe in den drei Gleichungen der allgemeinen Parameterdarstellung des Kegelschnitts zunächst die Potenzen von $\lambda$ als Unbekannte in der Art an:

$$\frac{\lambda^2}{\rho} = l_2\ \frac{\lambda}{\rho}, = l_1,\ \frac{1}{\rho} = l_0,$$

berechne die drei nicht homogenen Unbekannten in der gewöhnlichen Weise und wende dann erst wieder die den $l$ zukommende Identität:

$$l_0\, l_2 - l_1^2 = 0$$

an.

So einfach diese beiden Methoden erscheinen mögen, so vergleiche man doch z. B. die mühsame Methode Salmons (Höhere ebene Curven pg. 53), die zum mindesten die charakteristische Form des Endresultats schlecht erkennen lässt.

Dasselbe Verfahren ist zunächst auf die allgemeine Parameterfallender) Kegelschnitt der Ebene in dieser Form dargestellt werden, wenn nur das Coordinatensystem passend gewählt wird (d. i. wenn man zwei Tangenten und die Berührungssehne des Kegelschnitts zu Seiten des Coordinatendreiecks nimmt). Die Form (1) sagt aus, dass jedem Punkte des Kegelschnitts (oder auch seiner Tangente) ein bestimmter Werth von $\lambda$ zukommt und umgekehrt. Daher ist es weiterhin erlaubt, einfach von einem Punkte (resp. Tangente) „$\lambda$“ des Normkegelschnitts zu sprechen.

Eine beliebige Gerade der Ebene:

$$(3) \quad u_x \equiv u_2\, x_2 + u_1\, x_1 + u_0\, x_0 = 0$$

trifft $N_2$ in dem Punktepaar der quadratischen Gleichung (wie es der Kürze wegen lauten mag):

$$(4) \quad u_\lambda \equiv u_2\, \lambda^2 + 2u_1\, \lambda + u_0 = 0.$$

Seien die Wurzeln dieser Gleichung $\alpha$, $\beta$ und

$$(5) \quad \alpha + \beta = \frac{s_1}{s_0}, \qquad \alpha\beta = \frac{s_2}{s_0},$$

so folgt aus (4) für die Coordinaten der Geraden:

$$(6) \; \tau u_2 = s_0, \;\; \tau u_1 = -\frac{s_1}{2}, \;\; \tau u_0 = s_2$$

(wo $\tau$ ein beliebiger Faktor *) sei).

Die Gerade wird (und nur dann) zur Tangente für $\alpha = \beta = \lambda$, daher ist die zu (1) dualistische Darstellung (in Liniencoordinaten):

---

darstellung der cubischen Raumcurve (cf. §. 13) und ihr Flächennetz zweiter Ordnung, sowie überhaupt in derselben Weise auf die rationale Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $n$ Dimensionen anwendbar.

Dabei zeigt sich noch der merkwürdige Umstand, den wir hier vorerst nur angeben wollen, dass die Curve

$$\rho x_i = m_i \lambda^i \;\; (i = 0, 1, \ldots d)$$

in Wirklichkeit nur von $(d-1)$ Grössen (passenden Quotienten der $d$) abhängt, während die scheinbare Abzählung deren $d$ liefert.

*) Dieser Zusatz mag bei ähnlichen Fällen von jetzt ab unterbleiben.

$$(7)\ \tau u_2 = 1, \quad \tau u_1 = -\lambda, \quad \tau u_0 = \lambda^2$$

oder in gewöhnlicher Form:

$$(8)\ u_0 u_2 - u_1^2 = 0.$$

Verfährt man jetzt wieder, wie oben mit (1), indem man (7) mit der Gleichung eines Punktes combinirt, so erhält man, parallel den Gleichungen (6):

$$(9)\ \rho x_2 = s_2, \quad \rho x_1 = s_1, \quad \rho x_0 = s_0.$$

Die in (5) eingeführten Grössen $\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}$ nennt man gewöhnlich die elementar-symmetrischen Funktionen der zwei Grössen $\alpha, \beta$; ich bezeichne, weil sich dies weiterhin als nützlich herausstellt, die Grössen $s_0, s_1, s_2$ (oder genauer $\rho s_0, \rho s_1, \rho s_2$ wo $\rho$ variabel) als die homogenen symmetrischen Funktionen von zwei Grössen (Werthen, Parametern, Argumenten) $\alpha, \beta$. (Treten weiterhin mehrere Reihen solcher Funktionen auf, so seien sie bezeichnet mit $s_0, s_1, s_2$ resp. $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, resp. $S_0, S_1, S_2$, resp. $\tau_0, \tau_1, \tau_2$ etc. oder auch kurz mit $s_i, \sigma_i, S_i, \tau_i$ etc.)*) Dann können wir unser bisjetziges Formelsystem in folgenden Satz kleiden:

*A*) „Der Normkegelschnitt der Ebene, als Ordnungscurve aufgefasst (in diesem Sinne sei er mit $N_2$ bezeichnet) ist dargestellt durch die Gleichungen (1) resp. (2); dagegen als Klassencurve (und, sofern dies hervorgehoben werden soll, sei sein Zeichen $\mathrm{N}_2$) durch die Gleichungen (7) resp. (8).

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ebene sind durch (9), die einer beliebigen Geraden durch (6) **) repräsentirt, wo die $s_i$ die

*) Dieselbe Bemerkung (und Bezeichnung) soll für die symmetrischen Funktionen von drei und mehr Werthen $\alpha, \beta, \gamma$, etc. (eines Parameters) gelten.

**) Ist in (6) und (9) das Argumentenpaar beidemal dasselbe, so ist der Punkt (9) der Pol der Geraden (6), wie auch aus Gleichung (2) direkt folgt.

homogenen symmetrischen Funktionen der beiden Parameter sind, die den vom Punkte an $N_2$ ausgehenden Tangenten resp. den auf $N_2$ durch die Gerade ausgeschnittenen Punkten angehören."

Die Einführung des Normkegelschnitts hat daher die grosse Bequemlichkeit zur Folge, die Coordinaten eines Punktes der Ebene unmittelbar mit den homogenen symmetrischen Funktionen zweier Werthe (eines variabeln Parameters) identificiren zu können.

## §. 13.

## Die cubische Normcurve des Raumes.

Ich mache hier schon auf die Abhandlung von Herrn Sturm: „Darstellung binärer Formen auf der cubischen Raumcurve" (Crelle Bd. 86) aufmerksam, die unserem Gegenstande, namentlich in diesem Abschnitte sehr verwandt ist. Es liess sich nicht vermeiden, um das Verständniss nicht zu erschweren, manche Sätze, die dort schon vorgetragen sind, noch einmal (wenn auch meistens anders und in anderem Zusammenhange, abgesehen von dem mancherlei Neuen) zu beweisen. Nur so liess sich eine, wenn auch sehr gedrängte, Systematik erreichen. Ich citire jene Abhandlung im Folgenden einfach mit Sturm.

Im Übrigen möchte ich dabei betonen, dass mir die Interpretation der binären Formen auf irgend welchen rationalen (spec. Norm-) Curven als solche nur Mittel zum Hauptzweck ist, das Auftreten der Apolarität überall nachzuweisen und vor Allem den engen Zusammenhang der binären Apolarität mit der ternären, quaternären etc. zu ergründen, wozu es erst einer Reihe von Vorbereitungen bedarf, die ich, um sie dann ein für allemal zum Gebrauche fertig zu haben, nach Möglichkeit in ein systematisches Gewand gekleidet habe.

30. Die Behandlung dieser Normcurve des Raumes ist in ihrem ersten Theile der des Normkegelschnitts der Ebene ganz ähnlich; erst weiterhin stellen sich Besonderheiten ein, die von der gewachsenen Zahl der Raumelemente (Punkt, Ebene, Gerade) herrühren. Unter der Normcurve dritter Ordnung ($N_3$) verstehen wir, den Raum auf ein festes Tetraedercoordinatensystem bezogen gedacht, folgende:

$$(1)\ \rho x_3 = \lambda^3,\quad \rho x_2 = 3\lambda^2,\quad \rho x_1 = 3\lambda,\quad \rho x_0 = 1.$$

Wiederum kann bekanntlich *) jede, beliebig gegebene, nicht zerfallende und in keiner Ebene liegende cubische Raumcurve durch geeignete Wahl des Coordinatentetraeders in dieser Form dargestellt werden. (Dasselbe besteht dann aus den (Schmiegungs-) **) Ebenen irgend zweier Punkte der Curve

---

*) Man wende nur auf die allgemein gegebene Curve

$$\rho x_i = a_{i3}\lambda^3 + a_{i2}\lambda^2 + a_{i1}\lambda + a_{i0} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

die lineare Punkttransformation an, deren Coefficienten die Unterdeterminanten des Systems der Coefficienten $a$ sind und multiplicire dann noch ev. die neuen Coordinaten mit geeigneten Faktoren.

**) Es sei gleich hier hinsichtlich der Nomenklatur der cubischen Raumcurven Folgendes erwähnt:

„Die Schmiegungsebenen mögen einfach Ebenen der Curve ($N_3$): die „Linien zweier Schmiegungsebenen“ einfach „Axen“ der Curve ($N_3$): heissen, die also den Punkten, Sehnen der Curve ($N_3$) gegenüberstehen.

In gleicher Weise heissen die Tangentialebenen einer Fläche zweiter Classe $\Phi_2$ einfach die Ebenen der Fläche, so dass man dann z. B. sagen kann:

„Eine Raumcurve dritter Classe ($N_3$) und eine Fläche zweiter Classe ($\Phi_2$) haben sechs Ebenen gemein.“

Enthalten die Ebenen einer Fläche zweiter Classe alle Ebenen einer cubischen Raumcurve ($N_3$) so sage ich: „die Fläche ist der Curve um(be)schrieben“.

Die ganze Mannigfaltigkeit dieser Flächen zweiter Classe sei einfach: die Flächenschaarschaar (zweiter Classe) der Curve ($N_3$) gegenüber „dem Flächennetz (zweiter Ordnung) der Curve ($N_3$)“.

Zur Gleichung (4) sei bemerkt, dass, wo es nicht nothwendig ist, die nebst den beiden Tangentenebenen derselben, die resp. durch den andern Punkt hindurchgehen.)

Dann gehört jedem Werthe des Parameters $\lambda$ ein bestimmter Punkt der Curve (oder auch seine Ebene, oder auch seine Tangente) zu und umgekehrt.

Daher wird im Folgenden einfach von Punkten (Ebenen, Tangenten) $\lambda$ der Normcurve die Rede sein.

Das durch die Curve (1) gehende Flächennetz zweiter Ordnung ist, wie sofort zu sehen, dargestellt durch:

$$(2)\ (3x_1x_3 - x_2^2)\,\mu_2 + (9x_0x_3 - x_1x_2)\,\mu_1 + (3x_0x_2 - x_1^2)\,\mu_0 = 0,$$

wo die $\mu$ variabel sind.

Umgekehrt ist dann, wie man weiss, durch dieses Flächennetz zweiter Ordnung die Curve vollständig und eindeutig bestimmt. Wir kommen weiter unten auf dieses Netz von anderer Seite her zurück.

Der Schnitt mit einer beliebigen Ebene:

$$(3)\ u_x \equiv u_3x_3 + u_2x_2 + u_1x_1 = 0$$

liefert zur Bestimmung der Schnittpunkte die Gleichung:

$$(4)\ u_\lambda \equiv u_3\lambda^3 + 3u_2\lambda^2 + 3u_1\lambda + u_0 = 0.$$

Seien die Wurzeln derselben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und

$$(5)\ \alpha+\beta+\gamma = \frac{s_1}{s_0},\quad \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = \frac{s_2}{s_0},\quad \alpha\beta\gamma = \frac{s_3}{s_0}$$

so folgt aus (4):

$$(6)\ \tau u_3 = s_0,\quad \tau u_2 = -\frac{s_1}{3},\quad \tau u_1 = \frac{s_2}{3},\quad \tau u_0 = -s_3.$$

Die Ebene wird (und nur dann) zur Ebene der Curve, wenn $\alpha = \beta = \gamma = \lambda$. Daher ist die zu (1) dualistische Darstellung der Curve (in Ebenencoordinaten):

$$(7)\ \tau u_3 = 1,\quad \tau u_2 = -\lambda,\quad \tau u_1 = \lambda^2,\quad \tau u_0 = -\lambda^3,$$

---

gewöhnliche Bezeichnung einer binären Form $a_\lambda^n$, $b_\lambda^n$ etc. durch $a_\lambda$, $b_\lambda$ etc. ersetzt werde im Gegensatze zu den Formen $a_s$, $b_s$ etc., die aus den ersten durch $n$ malige Polarisation nach $n$ Grössen entstehen. (cf. §. 5) mithin ist die Schaarschaar von Flächen zweiter Klasse, deren gemeinsame (Tangential-) Ebenen die Ebenen unserer Curve sind, oder wie wir kürzer sagen wollen: die Schaarschaar der der Curve umschriebenen Flächen zweiter Klasse" bestimmt durch:

$$(8)\ (u_1 u_3 - u_2^2)\,\nu_0 + (u_0 u_3 - u_1 u_2)\nu_1 + (u_0 u_2 - u_1^2)\nu_2 = 0$$

wo die $\nu$ variabel sind.

Aus (8) geht wieder die Form (7) hervor, wie aus (2) die Form (1).

Combinirt man endlich die Gleichung eines beliebigen Punktes mit (7) und verfährt ganz wie mit (1), so erhält man als Coordinaten eines Punktes:

$$(9)\ \rho x_3 = s_3,\quad \rho x_2 = s_2,\quad \rho x_1 = s_1,\quad \rho x_0 = s_0.$$

Mit Rücksicht auf die zum Satze $A$ (§. 12) gehörige Anmerkung können wir das Bisherige in folgenden Satz zusammenfassen:

$B$) „Die räumliche Normcurve, als Curve dritter Ordnung aufgefasst (in diesem Sinne heisse sie $N_3$) ist durch die Gleichungen (1) resp. (2) dargestellt; dagegen als Curve dritter Klasse (und, sofern dies hervorgehoben werden soll, sei ihr Zeichen $\mathrm{N}_3$) durch die Gleichungen (7) resp. (8).

Die Coordinaten eines beliebigen Raumpunktes sind durch (9); die einer beliebigen Raumebene *) durch (6) repräsentirt, wo die $s_i$ die homogenen symmetrischen Funktionen der drei Parameter sind, die den drei vom Punkte an $\mathrm{N}_3$ gehenden Ebenen resp. den drei auf $N_3$ von der Ebene ausgeschnittenen Punkten zugehören."

*) Diese erhält man also allgemein nach der Regel, dass man die Punktcoordinaten umkehrt, mit abwechselndem Vorzeichen versieht, und mit den (zur Dimensionenzahl des Raumes) gehörigen Binominalcoefficienten dividirt.

Die Einführung der cubischen Normcurve bringt es daher wieder mit sich, dass die Coordinaten eines Raumpunktes geradezu mit den homogenen symmetrischen Funktionen von drei Werthen (eines Parameters) identisch sind. (Und das Entsprechende gilt, wie man sich leicht überzeugt, für beliebig hohe Räume cf. No. 28.)

## §. 14.

## Geometrische Eigenschaft der auf die Normcurven bezogenen Coordinaten.

31. Ausser dem erwähnten formalen Vorzug, den die Normcurven mittelst der auf ihnen ausgebreiteten Parametervertheilung gewähren (und dessen Wichtigkeit erst allmählich hervortreten wird) gilt noch ein zweiter geometrischer. Es spricht sich nemlich in der neuen Bedeutung der Coordinaten eine hervorragend wichtige Eigenschaft von Punkt (Gerade) einer Ebene in Bezug auf einen beliebigen Kegelschnitt in derselben, sowie von Punkt (Ebene) des Raumes in Bezug auf eine beliebige cubische Raumcurve aus, so dass diese Elementargebilde einen gewissen geometrischen Ort vorstellen.

In der That stellt ja eine Gleichung

$$(1)\ u_s \equiv u_2\, s_2 + u_1\, s_1 + u_0\, s_0 = 0$$

eine (gewöhnliche) *) Involution dar, als deren Elemente man hier die Punkte (Tangenten) $\lambda$ eines Kegelschnitts $(N_2)$ ansieht.

---

*) Ich verstehe, wie jetzt meistens geschieht, unter einer Involution $n^{ter}$ Ordnung ein binäres Formenbüschel $n^{ter}$ Ordnung „$f + k\varphi$". Diese lässt sich dann (cf. Kap. I, § 3) stets ersetzen durch $(n-1)$, in $(n+1)$ Grössen $s_i$ lineare Relationen, also eine Involution zweiter Ordnung (die ich die gewöhnliche Involution oder schlechtweg Involution nenne) durch eine Gleichung $u_s = 0$.

Für diese (Schnittpunkt-) Relationen kann man dann wieder die zugehörigen (Schnittpunkt-) „Formen" setzen d. h. die zur Involution apolare oder conjugirte Formengruppe. (cf. § 24.)

Da nun nach Satz $A$) die $s_i$ als homogene symmetrische Funktionen zweier Werthe $\alpha$, $\beta$ die Coordinaten des Punktes sind, von dem die Tangenten $\alpha$, $\beta$ an $N_2$ gehen, so liegt darin der bekannte Satz der Ebene (unter Punkt eines Linienpaares ihren gemeinsamen Punkt verstanden):

„Die Punkte der Tangentenpaare einer Involution auf einem Kegelschnitte durchlaufen eine Gerade (deren Schnittpunkte mit demselben die Doppelelemente der Involution darstellen) und umg. ist jede Gerade der Ort der Punkte der Tangentenpaare einer bestimmten Involution auf dem Kegelschnitte (und dualistisch für einen Punkt)."

Daraus folgt dann aus den geometrischen Eigenschaften der Involution, dass die Berührungspunkte eines jeden dieser Tangentenpaare harmonisch liegen zu den Schnittpunkten der Geraden mit $N_2$. Algebraisch heisst dies bekanntlich, dass die bilineare Invariante der beiden quadratischen Formen

$$(2)\begin{cases} u_2\,\lambda^2 + 2\,u_1\,\lambda + u_0 \\ s_0\,\lambda^2 - s_1\,\lambda \quad + s_2 \end{cases}$$

(abgesehen von einem Zahlenfaktor) mit $u_s$ identisch ist.

Ganz analog stellt sich die Sache für die cubische Raumcurve ($N_3$) und wir können daher ohne Weiteres den Satz aussprechen (unter dem Punkte eines Tripels von Ebenen ihren gemeinsamen Punkt verstanden):

„Besteht zwischen den Ebenen einer cubischen Raumcurve eine trilineare symmetrische Verwandtschaft in der Art, dass zu irgend zwei Ebenen der Curve stets eine dritte und zwar so gehört, dass zu je zwei Ebenen dieses Tripels immer die dritte gehört, so durchlaufen die Punkte aller dieser Ebenentripel eine Ebene (die die Curve in drei Punkten schneidet, deren Ebenen, dreifach gezählt, je ein Tripel der Verwandtschaft bilden).

Umgekehrt ist jede Ebene der Ort der Punkte der Ebenentripel einer solchen Verwandtschaft (und dualistisch für einen Punkt)."

Und auch die Folgerung ist hier eine ganz analoge.

Denn ist die Verwandtschaft dargestellt durch

$$(3)\ u_s \equiv u_3\, s_3 + u_2\, s_2 + u_1\, s_1 + u_0\, s_0 = 0$$

so sind die drei Ebenen der Curve, in denen je drei Ebenen eines Tripels zusammengefallen sind, repräsentirt durch:

$$(4)\ u_\lambda \equiv u_3\, \lambda^3 + 3\, u_2\, \lambda^2 + 3\, u_1\, \lambda + u_0,$$

andrerseits aber irgend ein Tripel $(s_i)$ der Verwandtschaft durch:

$$(5)\ s_\lambda \equiv s_0\, \lambda^3 - s_1\, \lambda^2 + s_2\, \lambda - s_3.$$

Dann ist wieder die bilineare Invariante beider Formen (4) (5) (abgesehen von einem Zahlenfaktor) $u_s$. Daraus folgt, wenn ich zwei Ebenentripel der Curve, deren Argumente zwei zu einander apolaren cubischen binären Formen angehören, „zu einander apolar" nenne*):

„Jedes Tripel einer trilinearen symmetrischen Verwandtschaft (dessen Punkt also auf einer festen Ebene liegt) zwischen den Ebenen einer cubischen Raumcurve ist apolar zu dem ausgezeichneten Tripel**), dessen Elemente jedes, dreifach gezählt, ein Verwandtschaftstripel bilden."

---

*) In derselben Weise soll überhaupt immer das Wort apolar von den vorkommenden Argumentgruppen auf die zugehörigen Punkt- (Ebenen, Geraden etc.) Gruppen übertragen werden dürfen.

**) Daraus folgt wieder, wenn man die Normcurve von irgend einem Punkte

$$x_\lambda \equiv x_0\, \lambda^3 - x_1\, \lambda^2 + x_2\, \lambda - x_3 \equiv x_0\, (\lambda - \lambda_1)\, (\lambda - \lambda_2)\, (\lambda - \lambda_3)$$

auf irgend eine Ebene projicirt, der alte Satz (Kap. I, §. 2) dass wenn $\rho x_i = a_i\ (\lambda - \lambda_i)^3$ (wo die $a$ beliebige Faktoren sind) eine rationale ebene

Und da eine cubische binäre Form zu sich selber apolar ist, so folgt sofort der bekannte, schon mehrfaeh [21] auch von dieser Seite her betrachtete Satz:

---

Curve dritter Ordnung ist (mit dem Wendedreiseit als Coordinatendreiseit) so stellt

$$x_s \equiv x_0\, s_3 + \frac{x_1\, s_2}{3} + \frac{x_2\, s_1}{3} + x_1\, s_0 = 0$$

ihr Schnittpunkttheorem dar.

Nimmt man noch einen zweiten Punkt zu Hülfe

$$y_\lambda \equiv y_0\, \lambda^3 - y_1\, \lambda^2 + y_2\, \lambda - y_3 \equiv y_0\, (\lambda - \lambda_1')\, (\lambda - \lambda_2')\, (\lambda - \lambda_3')$$

und projicirt die Curve $N_3$ durch die Gerade $xy$ auf eine Ebene, so repräsentirt die Gruppe

$$\begin{cases} x_0\, s_3 + \frac{x_1\, s_2}{3} + \frac{x_2\, s_1}{3} + x_3\, s_0 = 0 \equiv x_s \\ y_0\, s_3 + \frac{y_1\, s_2}{3} + \frac{y_2\, s_1}{3} + y_3\, s_0 = 0 \equiv y_s \end{cases}$$

wie man will, einen Punkt (Involution) in der Ebene der Curve

$$\rho x_i = a_i\, (\lambda - \lambda_i)^3$$

oder einen Punkt in der Ebene der Curve

$$\rho y_i = b_i\, (\lambda - \lambda_i')^3.$$

Die Involution, die das Strahlbüschel jedes Punktes aus der zugehörigen Curve ausschneidet, ist beidemal die zu

$$x_\lambda,\ y_\lambda$$

conjugirte Gruppe.

Und endlich gelangt man so mittelst dreier Punkte $x$, $y$, $z$ zu einer Geraden, die durch die Gleichungen

$$x_s = 0,\quad y_s = 0,\quad z_s = 0$$

repräsentirt ist.

Dies Verfahren soll später ganz allgemein dargelegt werden, wodurch erreicht wird, dass jede $R_n^d$, mittelst des Projicirens (dualistisch Schneidens) sowie der umgekehrten Operationen auf die bezügliche Normcurve zurückgeführt wird.

Andrerseits erkennt man schon, dass dies Verfahren im Grunde identisch ist mit dem andern, statt der Dreiecks-, Tetraeder- etc. Coordinaten Vielecks-, Polyeder- etc. Coordinaten (die dann durch eine Anzahl linearer Relationen verbunden sein müssen) einzuführen.

„Der Schnittpunkt irgend dreier Ebenen der Curve liegt auf der Ebene ihrer Schmiegungspunkte (und Punkt und Ebene besitzen dann die gleichen Argumente)".

Es hat offenbar nicht die geringste Schwierigkeit, diese Sätze für eine rationale Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung im Raume von $n$ Dimensionen auszusprechen: doch mag dies wegen der Complicirtheit der geometrischen Ausdrücke (bei algebraischer Evidenz) unterbleiben.

Der letzte Satz gilt selbstverständlich nur für Räume von ungerader Dimensionenzahl.

## §. 15.

## Die (gewöhnliche) Involution auf der cubischen Raumcurve.

32. Ehe wir zur Darstellung der Raumgeraden mittelst der Normcurve übergehen, sei erst noch der Darstellung der Punkte (Geraden) einer Ebene mittelst der Sehnen (Axen) einer cubischen Raumcurve gedacht, deren Gebrauch öfters von Nutzen ist. Nach §. 14 heisst dies Folgendes: [22)]

„Eine Involution sei auf der cubischen Raumcurve ($N_3$) gegeben; welche Fläche bilden die Sehnen der Punktepaare der Involution (oder kürzer: die Sehnen der Involution)?"

Es ist sehr leicht zu beweisen, dass diese Sehnen eine Regelschaar zweiter Ordnung bilden und umgekehrt, dass jede Fläche des durch die Curve gehenden Flächennetzes zweiter Ordnung (§. 13, (2)) durch ihre Geraden (der einen Schaar) eine bestimmte Involution auf der Curve darstellt.

Wir verfahren zu dem Zweck so.

Machen wir (durch Coordinatentransformation) die gegebene cubische Raumcurve zur Normcurve $N_3$:

$$(1)\ \rho x_3 = \lambda^3,\ \ \rho x_2 = 3\,\lambda^2,\ \ \rho x_1 = 3\,\lambda,\ \ \rho x_0 = 1,$$

deren Flächennetz zweiter Ordnung also (§. 13) gegeben ist durch:

$$(2)\ (3x_1x_3-x_2^2)\mu_2+(9x_0x_3-x_1x_2)\mu_1+(3x_0x_2-x_1^2)\mu_0\equiv\mu_x^2=0$$

und sei die vorgelegte Involution

$$(3)\ m_2\,s_2+m_1\,s_1+m_0\,s_0\equiv m_s=0$$

so frage ich:

Unter welchen Bedingungen liegt eine Sehne der Involution (3) auf einer Fläche (2)?

Irgend eine Sehne der Involution, die dem Elementenpaare $\alpha$, $\beta$ angehöre, geht durch die beiden Punkte $y$, $z$ mit den Coordinaten

$$(4)\ \lambda_1^3,\ 3\lambda_1^2,\ 3\lambda_1,\ 1;\qquad \lambda_2^3,\ 3\lambda_2^2,\ 3\lambda_2,\ 1.$$

Nun sind die Schnittpunkte einer Fläche zweiter Ordnung $a_x^2=0$ mit einer Geraden $(y, z)$ nach der Joachimsthal'schen[23) Methode gegeben durch die quadratische Gleichung:

$$(5)\ \lambda^2 a_y^2+2\lambda a_{yz}+a_z^2 \doteq 0.$$

Für eine der Flächen (2) und eine Sehne $(y, z)$ verschwinden stets die beiden äusseren Glieder der letzten Gleichung; soll also die Gerade ganz auf der Fläche liegen, so bleibt die eine Bedingung

$$(6)\ \mu_{yz}=0 \text{ oder } \Sigma z_i\frac{d\mu_y^2}{dy_i}=0,$$

durch Einsetzen der Coordinaten (4) also (nach einfacher Rechnung)

$$(7)\ 9(\lambda_1-\lambda_2)^2\,(\mu_2\,s_2+\mu_1\,s_1+\mu_0\,s_0)=0.$$

Daraus geht hervor, dass, falls die verlangte Bedingung für jede Sehne der Involution (3) gelten soll, dass die Coefficienten $\mu$ der Fläche den bezüglichen Coefficienten $m$ der Involution proportional sind, womit der Anfangs erwähnte Satz bewiesen ist.

Denn es ist klar, dass die Involutionssehnen nur die eine Regelschaar der zugehörigen Fläche zweiter Ordnung bilden, da niemals zwei der Sehnen der Involution sich treffen können. Die Geraden der andern Regelschaar interessiren im Folgenden nicht weiter. Wir drücken der Kürze wegen den erhaltenen Satz so aus:

„Die Sehnen einer auf einer cubischen Raumcurve ($N_3$) dargestellten (Punkt-) Involution $\mu_s = 0$ bilden die eine Regelschaar der Fläche $\mu_x^2 = 0 (2)$" und umg. „Die Sehnen der Curve, die ganz auf einer Fläche $\mu_x^2 = 0$ liegen, sind die Sehnen der Involution $\mu_s = 0$."

Genau ebenso beweist man den dualistischen Satz:

„Die Axen einer auf der cubischen Normcurve ($N_3$) dargestellten (Ebenen-) Involution

$$(8)\ \nu_0 \sigma_0 - \nu_1 \sigma_1 + \nu_2 \sigma_2 = 0$$

bilden die eine Regelschaar der der Curve umschriebenen Flächen zweiter Classe (§. 13):

$$(9)\ \nu_0 (u_1 u_3 - u_2^2) + \nu_1 (u_0 u_3 - u_1 u_2) + \nu_2 (u_0 u_2 - u_1^2) \equiv u_\nu^2 = 0."$$

33. Während so, gestützt auf den Involutionsbegriff, zwischen den Punkten (Geraden) einer Ebene und den Sehnen (Axen) einer cubischen Raumcurve eine ein-eindeutige lineare Verwandtschaft hergestellt ist, wobei einer Geraden der Ebene eine der durch die Curve gehenden Flächen zweiter Ordnung entspricht und umg., wird man auf geometrischem Wege sofort zu einer zweiten eindeutigen Verwandtschaft (aber von zweitem Grade), wiederum zwischen den Punkten der Ebene und den Sehnen der Curve geführt, die mit der ersten eng zusammenhängt.

Wir werden auf diese zweite Verwandtschaft noch einmal später von anderer Seite her (bei näherem Studium des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven vierter Ordnung) zurückkommen und es genüge daher, hier vorläufig nur einige Hauptpunkte anzugeben.

Denken wir uns die Ebene irgendwie im Raume gegeben (doch so, dass sie weder Schmiegungs- noch Tangentenebene der cubischen Raumcurve ist), so trifft im allgemeinen jede Sehne der Curve die Ebene in einem Punkte und umgekehrt geht bekanntlich von jedem Punkte der Ebene nur eine Sehne an die Curve. Eine Ausnahme tritt nur ein für die drei Schnittpunkte der Curve mit der Ebene $A_1$, $A_2$, $A_3$. Jedem derselben entspricht die ganze Schaar von Sehnen, die alle auf einem Kegel (zweiter Ordnung) liegen, der die Raumcurve projicirt. Andrerseits entspricht jeder der drei Verbindungssehnen der drei Punkte ein jeder Punkt auf ihr.

Betrachten wir ferner irgend eine Sehne der Curve, sie heisse $s$; ihr Treffpunkt mit unserer Ebene sei $S$.

Dann befindet sich unter den Flächen des Netzes $\mu_x^2 = 0$ (2) ein Büschel von Flächen, die alle diese Sehne $s$ ganz enthalten, mithin ist der Punkt $S$ der vierte Grundpunkt eines Kegelschnittbüschels, dessen drei weitere Grundpunkte in $A_1$, $A_2$, $A_3$ liegen.

Nun entsprechen die Sehnen der Curve einmal nach der ersten (linearen) Verwandtschaft den Punkten der Ebene (und dann die Flächen des Netzes $\mu_x^2 = 0$ den Geraden der Ebene): andererseits eindeutig nach der zweiten Verwandtschaft gleichfalls den Punkten der Ebene.

Daher ist zwischen den Punkten der Ebene ein Entsprechen hergestellt, das genau mit der zweiten Verwandtschaft äquivalent ist, so dass es genügt, diese Verwandtschaft in der Ebene zu studiren.

Diese ist aber offenbar eine quadratische, ein-eindeutige, involutorische mit dem Fundamentaldreieck $A_1 A_2 A_3$, in der jeder Geraden ein Kegelschnitt durch die Ecken dieses Dreiecks, also einem Punkte (als Centrum eines Strahlbüschels) der vierte Basispunkt eines bestimmten Kegelschnittbüschels $A_1$, $A_2$, $A_3$ entspricht.

Wir werden weiter unten (worauf schon hingewiesen ist) leichter zeigen, dass diese quadratische Transformation in unserer Ebene sich dadurch näher bestimmt, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen der Curve (in $A_1$, $A_2$, $A_3$) (der ja in unserer Ebene liegt) einer der vier (fest bleibenden) Einheitspunkte der quadratischen Transformation ist.

Dann giebt es immer einen bestimmten Kegelschnitt unserer Ebene (der dann als Normkegelschnitt zu nehmen ist), der dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ einbeschrieben ist und für den der eben bezeichnete Punkt derjenige ist, in dem sich bekanntlich die drei Verbindungslinien der Punkte $A$ mit den Berührungspunkten der resp. gegenüberliegenden Seiten treffen.

Dieser Kegelschnitt ist vermöge unserer quadratischen Transformation das Bild der Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen in $A_1$, $A_2$, $A_3$, die durch den Schnitt unserer Ebene mit der Tangentenregelfläche der cubischen Raumcurve erzeugt wird.

## §. 16.

## Die Covarianten einer binären cubischen Form $f$.

34. Der analytische Ausdruck der eben erörterten quadratischen Transformation ergiebt sich aus Früherem unmittelbar, andrerseits führt er uns zur Bedeutung der quadratischen (Hesse'schen) Covariante $H$ der Form $f$:

$$(1)\ H = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}.$$

Denn das durch die Normcurve gehende Flächennetz zweiter Ordnung war (cf. §. 15) dargestellt durch

$$(2)\ \mu_2 (3x_1 x_3 - x_2^2) + \mu_1 (9 x_0 x_3 - x_1 x_2) + \mu_0 (3 x_0 x_2 - x_1^2) = 0.$$

Legen wir also eine beliebige Ebene

$$(3)\ u_x = 0$$

zu Grunde und nehmen drei ganz beliebige Linien in derselben

$$(5)\ y_2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_0 = 0$$

zu Geraden eines Coordinatendreiecks, so ist d i e f r a g l i c h e

Transformation in allgemeinster Weise gegeben durch

(6) $\tau y_2 = 3x_1 x_3 - x_2^2,\ \tau y_1 = 9x_0 x_3 - x_1 x_2,\ \tau y_0 = 3x_0 x_2 - x_1^2$

wo zwischen den $x$ die Relation (3) besteht.

Andrerseits aber hat bekanntlich die Form $f$ die Eigenschaft, auf eine Weise als lineare Combination von zwei Cuben linearer Ausdrücke $\lambda - \alpha$, $\lambda - \beta$ darstellbar zu sein, deren Wurzeln diejenigen der Covariante $H$ sind.

Dies heisst aber offenbar (cf. §. 17 Anhang) (cf. Sturm pg. 124):

„Die Hesse'sche Covariante der Form (des Punktes) $f$ stellt vermöge ihrer Wurzeln das Argumentenpaar der einen vom Punkte an die Normcurve $N_3$ gehenden Sehne dar."

Diese Covariante lautet entwickelt:

(7) $H \equiv \lambda^2 (3x_0 x_2 - x_1^2) - \lambda (9x_0 x_3 - x_1 x_2) + (3x_1 x_3 - x_2^2)$.

Daraus folgt aber, nach dem letzten Satze und der Construktion voriger Nummer der mit dem eben noch angegebenen Ausdruck der quadratischen Transformation inhaltlich übereinstimmende Satz:

„Vermöge irgend einer beliebig, aber festgegebenen linearen Relation zwischen den Coefficienten von $f$, $u_x = 0$ kann man immer drei aus ihnen linear zusammengesetzte Ausdrücke den Coefficienten von $H$ proportional setzen; dann ist dies der Ausdruck für die (allgemeinste) quadratische Transformation in der Ebene $u_x = 0$."

35. Eine ähnliche, aber räumliche eindeutige Transformation knüpft sich an die Covariante $Q$ von $f$:

$$(8)\ Q = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}.$$

Vermöge der bekannten Eigenschaften von $Q$ in Bezug auf $f$ und $H$ hat man sofort zunächst (cf. Sturm pg. 124):

„Construirt man auf der einen durch einen Punkt $(f)$ gehenden Sehne (von $N_3$) den zum Punktepaare der Curve und zum Ausgangspunkte harmonischen Punkt, so ist seine Darstellungsform $Q$."

Dadurch ist zwischen den Punkten des Raumes eine eindeutige involutorische Beziehung gegeben mit der Fundamentalcurve $N_3$, denn nur für die Punkte dieser Curve wird die Beziehung unbestimmt.

Dies ist aber bekanntlich derjenige spezielle Fall derjenigen eindeutigen Raumtransformation dritten Grades, die durch die in Bezug auf ein Flächennetz zweiter Ordnung conjugirten Punktepaare bestimmt ist, wenn die Flächen des Netzes durch eine cubische Raumcurve gehen, d. h. wenn die Fundamentalcurve der Transformation (die im Allgemeinen die Kegelspitzencurve des Netzes ist) in die doppelt zählende cubische Curve ausartet *). Man hat daher:

---

*) Ein analoger Satz gilt für alle Normcurven ungerader Ordnung. So erhält man, von der nächst höheren Art, den Normcurven fünfter Ordnung (im Raume von fünf Dimensionen) ausgehend:

„Unterwirft man die Coefficienten *zweier* binären Formen fünfter Ordnung

$$a_\lambda \equiv a_0 \lambda^5 + 5\, a_1 \lambda^4 + 10 a_2 \lambda^3 + 10\, a_3 \lambda^2 + 5\, a_4 \lambda + a_5$$

$$b_\lambda \equiv b_0 \lambda^5 + 5\, b_1 \lambda^4 + 10 b_2 \lambda^3 + 10\, b_3 \lambda^2 + 5\, b_4 \lambda + b_5$$

zwei beliebig aber fest gewählten linearen Relationen (mit den Coefficienten $x$, resp. $y$)

$$u_x = 0 \quad u_y = 0$$

so reduciren sie sich auf zwei cubische Formen $F$, $\Phi$, deren Gerade (Functionaldeterminante) ein- eindeutig in quadratischer Verwandtschaft der Combinant-Covariante vierten Grades $J$ der Formen $a_\lambda$, $b_\lambda$, zugeordnet ist. Diese Form ist die Invariante $J$ (cf. Salmon, Höhere Algebra Art. XIX) der Form $a_\lambda + k b_\lambda$ und ihre Wurzeln sind durch die Gleichungen bestimmt:

„Die durch die in Bezug auf das Flächennetz zweiter Ordnung der Normcurve $N_3$ conjugirten Punktepaare bestimmte ein-eindeutige involutorische Verwandtschaft dritten Grades ist *unmittelbar* dargestellt durch die respective Proportionalität der Coefficienten von

$$f = x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3$$

mit denen von $Q = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}$“

In der That überzeugt man sich auch durch leichte Rechnung bei Benützung der Gleichung (2) von der Richtigkeit dieses Satzes.

Endlich ist ebenfalls bekannt, dass der durch sieben Raumpunkte bestimmte achte, der mit ihnen die Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung bildet, kein anderer ist als der irgend einem der sieben Punkte in obiger Transformation entsprechende, wenn man die Fundamentalcurve dritter Ordnung durch die sechs andern bestimmt sein lässt. Wir können daher auch so sagen:

„Die Punkte $f$ und $Q$ bilden mit jedem beliebigen Punktsextupel der Normcurve die Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung.“

---

$$\begin{cases} a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_2 s_1 + a_4 s_0 = 0 \\ a_1 s_4 + a_2 s_3 + a_3 s_2 + a_4 s_1 + a_5 s_0 = 0 \\ b_0 s_4 + b_1 s_3 + b_2 s_2 + b_3 s_1 + b_4 s_0 = 0 \\ b_1 s_4 + b_2 s_3 + b_3 s_2 + b_4 s_1 + b_5 s_0 = 0. \text{“} \end{cases}$$

Diese letztere Covariante $J$ stellt dann, wie leicht mit Hüife des Satzes Kap. I, §. 2 zu sehen, die einzige Quadrisekante einer rationalen Curve fünfter Ordnung (im gewöhnlichen Raum) dar, deren „Schnittpunktformen“ $a_\lambda$, $b_\lambda$ sind, d. h. die zu $a_\lambda$, $b_\lambda$ apolare Gruppe enthält eine Involution fünfter Ordnung mit dem festen Faktor $J$.

Und ähnlich für die höheren Fälle. Ich behalte mir vor, anderswo auf diese eindeutigen Verwandtschaften näher einzugehen.

Wie sich die sonstigen, von den Formen $f$, $H$, $Q$ geltenden Sätze im Sinne unserer Theorie aussprechen, ist wesentlich so einfach, dass es übergangen werden kann.

Zur Vervollständigung mag noch der Satz bemerkt werden, der wie die obigen über $H$ und $Q$ nahezu evident ist:

„Die Invariante (Discriminante) der Form $f$ (zugleich Discriminante von $H$) stellt unmittelbar, $= 0$ gesetzt, die Tangentenregelfläche der Normcurve in Punktcoordinaten dar."

In ähnlicher Weise gelingt die Interpretation der simultanen In- und Covarianten von mehreren quadratischen und cubischen Formen ohne wesentliche Schwierigkeiten: sie mag übergangen werden, um nicht unsern Hauptzweck, die Verknüpfung der Apolarität mit den Normcurven, zu sehr aus dem Auge zu verlieren.

Dagegen soll der schon in diesem Paragraphen evident hervortretende Zusammenhang der linearen Transformationen auf der Normcurve mit den Collineationen des bezüglichen Raumes später im Allgemeinen besprochen werden.

Dasselbe gilt von den Modificationen, die die fundamentalen Eigenschaften der Normcurven bei irgend welchen Projektionen der Normcurven in niedrigere Räume erleiden, und die sich speziell für die cubischen Normcurven an die Erörterungen des §. 14 anschliessen würden. Auch diese sollen an geeigneter Stelle im Zusammenhange besprochen werden.

Bisher war die Theorie der cubischen Normcurve der des Normkegelschnitts wesentlich ähnlich: durch die nun folgende Berücksichtigung des neuen im Raume sich selbst dualistischen Elements, der Geraden, entfernt sie sich eine Zeit lang scheinbar von der Theorie der Ebene immer mehr, bis sich später, bei Gelegenheit der Apolaritätstheorie für die Kegelschnitte beide Theorien wieder vereinigen werden. Auf diese Weise (die bei Betrachtung der höheren Normcurven immer wiederkehrt) wird das Princip, den Apolaritätsbegriff in den Vordergrund zu stellen, allmählich immer mehr seine Rechtfertigung finden.

## §. 17.

### Die Darstellung der Geraden mittelst der Normcurve.

36. Auch in diesem Gebiet können wir uns auf das für das Folgende Nothwendigste beschränken und im Übrigen auf die Sturm'sche Arbeit verweisen, deren Resultate theilweise hier recapitulirt werden, von deren Gang wir jedoch im Folgenden öfters wesentlich abweichen. Auch eine Anzahl neuer Resultate wird sich dabei ergeben.

Eine Gerade ist durch zwei Punkte $x$, $y$ bestimmt:

$$(1)\begin{cases} f \equiv x_0\lambda^3 - x_1\lambda^2 + x_2\lambda - x_3 \\ \varphi \equiv y_0\lambda^3 - y_1\lambda^2 + y_2\lambda - y_3. \end{cases}$$

Da ein beliebiger Punkt der Geraden (und sonst kein Punkt des Raumes) durch $x + ky$ gegeben ist, so folgt sofort der zum Satze der Ebene (§. 14) in zweiter Linie analoge Satz (cf. die erste Analogie §. 14):

„Die (Schnitt-) Punkte der Ebenentripel einer auf $N_3$ (d. h. einer beliebigen Raumcurve dritter Klasse) gegebenen Involution dritter Ordnung durchlaufen eine Gerade und umgekehrt ist jede Gerade die Reihe der Punkte der Ebenentripel einer bestimmten Involution dritter Ordnung auf $N_3$.

Dualistisch drehen sich die Ebenen der Punktetripel einer auf $N_3$ gegebenen Involution dritter Ordnung um eine Gerade und umgekehrt ist jede Gerade die Axe der Ebenen der Punktetripel einer bestimmten Involution auf $N_3$."

Daher ist es die nächste Aufgabe, für die durch (1) gegebene Gerade die zugehörige Involution ihres Ebenenbüschels zu finden.

Es seien irgend zwei der Ebenen dieses Büschels

$$(2) \quad u_s = 0, \quad v_s = 0$$

so muss die gesuchte Involution die Form $F + k' \Phi$ haben, wo

$$(3) \quad \begin{cases} F \equiv u_3 \lambda^3 + 3u_2 \lambda^2 + 3u_1\lambda + u_0 \\ \Phi \equiv v_3 \lambda^3 + 3v_2 \lambda^2 + 3v_1\lambda + v_0. \end{cases}$$

Da aber bekanntlich die Axencoordinaten der Geraden $\begin{vmatrix} u_l & u_m \\ v_l & v_m \end{vmatrix} = (uv)_{lm} = q_{lm}$ $(l, m = 0, 1, 2, 3)$ den Strahlencoordinaten $\begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix} = (xy)_{ik} = p_{ik}$ proportional sind (und zwar so, dass die Indices $i, k, l, m$ immer die vier Zahlen 0, 1, 2, 3 in einer cyclischen Aufeinanderfolge sind), so haben wir den Satz:

„Die beiden Involutionen (1) (3) bilden immer dann die beiden Involutionen einer und derselben (Geraden auf $\mathrm{N}_3$ resp. $N_3$ bezogen), wenn die Bedingungen

$$(4) \quad \rho\,(x\,y)_{ik} = (uv)_{lm}$$

erfüllt sind und umgekehrt."

In der That bilden ja nach dem ersten Capitel (§. 3) unter den Bedingungen (4) die Gleichungen (2) den Ersatz der Involutionsgleichungen (1): diese Gleichungen (2) gehen aber wieder durch Combination mit den Gleichungen der Normcurve $N_3$ in (3) über.

Beide Involutionen (1) (3) haben nach Capitel I §. 11 dieselben Combinanten und diese stellen offenbar, gleich Null gesetzt, die (im quaternären) Sinne invarianten Eigenschaften der zugehörigen Geraden in Bezug auf die Normcurve dar. Dies soll später noch genauer explicirt werden.

37. Daran knüpfe sich die Wiederaufnahme einer schon einmal behandelten Frage (cf. Cap. I §. 7 Nr. 17), nemlich der nach der Darstellung einer cubischen Raumcurve in Liniencoordinaten. Damals handelte es sich darum, zu zeigen, dass es genüge, diese Frage für die Normcurve zu lösen und dass es dann leicht sei, die bez. Formeln für eine beliebige andere cubische Raumcurve anzugeben.

Hier wollen wir daher die Frage an der Hand der Normcurve weiterführen mittelst gleichzeitigen Gebrauchs zu einander dualistischer Formeln.

Sollte, um dies aus Kap. I l. c. kurz zu wiederholen, die Gerade (2) die Normcurve treffen, so musste die Resultante von $F$ und $\Phi$ verschwinden. Diese war aber in der Bézout'schen Gestalt:

$$(5) \quad R = 27 \begin{vmatrix} q_{32}, & q_{31}, & \frac{q_{30}}{3} \\ q_{31}, & \frac{q_{30}}{3} + 3\, q_{21}, & q_{20} \\ \frac{q_{30}}{3}, & q_{20}, & q_{10} \end{vmatrix}$$

oder wegen der Relationen (4) (wo wir noch der Bequemlichkeit wegen den Faktor $\rho = 1$ setzen):

$$(6) \quad R = -27 \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} \\ p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} + 3\, p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}}{3}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = -27\, R'.$$

Bei variabeln $p_{ik}$ stellt daher $R = 0$ die Gleichung der Normcurve d. h. ihres Treffgeradencomplexes in Axen- resp. Strahlencoordinaten dar.

Soll andrerseits eine Gerade (1) in einer Ebene der Curve liegen, so muss die Resultante von $f$, $\varphi$ verschwinden. Diese ist aber:

$$(7)\quad P = - \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03} + p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix}.$$

$P = 0$ stellt demnach bei variabeln $p_{ik}$ den Complex der Geraden dar, die in den Ebenen der Curve liegen.

Gehen wir jetzt auf die absoluten Werthe von $R$ resp. $P$ näher ein, so bemerken wir zunächst, dass der Ausdruck $R$ in $P$ (abgesehen vom Zahlenfaktor 27) übergeht (und umg.) durch Vertauschung der beiden Grössen $p_{03}$ und $\frac{p_{12}}{3}$, so dass sie unter der Bedingung

$$(8)\quad 3\,p_{03} - p_{12} = 0$$

coincidiren.

Andrerseits ist aber die bilineare Invariante der Formen $f, \varphi$ (1) (ebenso wie die der Formen $F, \Phi$ (3), abgesehen vom Zahlenfaktor 3)

$$(9)\quad (f\varphi)^3 = - \left\{p_{03} - \frac{p_{12}}{3}\right\} \text{ (cf. Sturm pg. 123)}$$

so dass wir zunächst den Satz gewinnen:

„Die den Complexen $R = 0$, $P = 0$ gemeinsame Congruenz ist dieselbe wie die den Complexen $R = 0$ (resp. $P = 0$), $(f\varphi)^3 = 0$ gemeinsame und besteht aus den Strahlbüscheln der Punkte der Curve in ihren bezüglichen Ebenen."

Der lineare Complex $(f\varphi)^3 = 0$ aber ist, wie schon damals (Nr. 17) bewiesen, kein anderer als der zur Normcurve gehörige Nullcomplex, was übrigens auch aus dem Apolaritätssatze des §. 14 sofort hervorgeht.

Denn dieser sagt, in anderer Form ausgesprochen, aus, dass wenn zwei cubische binäre Formen apolar sind, die durch sie dargestellten Punkte von der Art sind, dass die Nullcomplex-Ebene eines jeden auch durch den andern Punkt geht, so dass ihre Verbindungsgerade im Nullcomplexe sich selber conjugirt ist, d. h. sie ist eine Gerade des Complexes. (Cf. Sturm pg. 123.)

38. Zu den beiden Ausdrücken $R$, $P$ gelangen wir aber noch auf eine andere[24] Weise und gerade diese erlaubt es, eine Reihe wichtiger Beziehungen zu ermitteln.

Eine Gerade (1) wird von vier Tangenten der Curve getroffen, von denen nur dann zwei coincidiren, wenn die Gerade entweder die Curve trifft oder in einer Ebene der Curve liegt. Dies ist geometrisch evident. Mithin muss die Discriminante der biquadratischen binären Form, deren Wurzeln die Argumente jener vier Tangenten sind, die beiden Ausdrücke $R$, $P$ als Faktoren enthalten. Da aber, wie gleich gezeigt wird, diese biquadratische Form die (Jacobi'sche) Funktionaldeterminante der Formen $f$, $\varphi$ und daher linear in den $p_{ik}$ ist, so ist ihre Discriminante vom sechsten Grade in denselben und muss folglich (abgesehen von einem Zahlenfaktor) aus dem Produkte $R$, $P$ selbst bestehen.

Den Zahlenfaktor werden wir durch passende Specialisirung ermitteln, die zugleich einen zweiten rechnerischen Beweis des Satzes erlaubt. Dass die gesuchte biquadratische Form (die Darstellungsform der vier Tangenten, die eine gegebene Gerade (1) resp. (3) treffen) durch die Funktionaldeterminante der Formen $f$, $\varphi$ (oder auch $F$, $\Phi$) gegeben ist, ergiebt sich sofort so:

Soll von einem Punkte der Geraden (1)

$$f + k\varphi$$

eine Tangente an die Curve gehen, so fallen von den drei an die Curve gehenden Ebenen des Punktes zwei zusammen (und umg.), d. h. es verschwinden die beiden Differentialquotienten der Form $f + k\varphi$ (nach den beiden homogenen Variabeln genommen):

$$(10) \quad \begin{cases} f_1 + k\varphi_1 = 0 \\ f_2 + k\varphi_2 = 0 \end{cases}$$

d. h. die gesuchte Form ist

$$(11)\ J \equiv \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix} \equiv p_{01}\lambda^4 - 2p_{02}\lambda^3 + \lambda^2(3p_{03}+p_{12}) - 2p_{13}\lambda + p_{23}$$

(cf. Sturm pg. 134).

Mittelst ihrer beiden Invarianten $i$, $j$ drückt sich bekanntlich die Discriminante einer biquadratischen binären Form so aus

$$(12)\quad D = i^3 - 6j^2.$$

In unserem Falle wird $i$ (mit Benützung der Identität zwischen den $p_{ik}$):

$$(13)\, i = 2\left\{p_{01}\,p_{23} - p_{02}\,p_{13} + \frac{(3p_{03}+p_{12})^2}{12}\right\} = \frac{3}{2}\left\{p_{03} - \frac{p_{21}}{3}\right\}^2$$

und

$$(14)\ j = 6\begin{vmatrix} p_{01}, & \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{03}}{2}+\frac{p_{12}}{6} \\ \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{03}}{2}+\frac{p_{12}}{6}, & \frac{p_{31}}{2} \\ \frac{p_{03}}{2}+\frac{p_{12}}{6}, & \frac{p_{31}}{2}, & p_{23} \end{vmatrix}.$$

Wir machen jetzt die immer erlaubte *) Annahme, dass in (1)

$$(15)\quad x_1 = y_1 = 0,$$

dann wird

$$(16)\quad i = \frac{3}{2}\,p_{03}^2,\quad j = -\frac{3}{4}\,(p_{03}^3 + 2p_{20}^2\,p_{23})$$

*) Dies sieht man am einfachsten geometrisch ein. Denn wegen der Lage des Coordinatentetraeders zur Curve $N_3$ (cf. §. 13 pg. 47) sagt die Bedingung (15) nur aus, dass unsere Gerade (1) in einer Ebene durch die Tangente „$\infty$" liege. Legt man daher einer der vier Tangenten, die unsere Gerade treffen, das Argument $\infty$, sowie dem Restpunkt, den die zugehörige, zugleich durch die Gerade gehende Tangentenebene aus $N_3$ ausschneidet, das Argument 0 bei, so ist die Bedingung (17) erfüllt. Dann verschwinden in der biquadratischen Form $J$ (11) die Coefficienten von $\lambda^4$ und $\lambda$. Dies Verfahren wird später mit Vortheil noch weiter ausgedehnt.

und es ergiebt sich einmal

$$(17)\ D = i^3 - 6\,j^2 = -\frac{1}{2}\ p_{20}^2\, p_{23}\left\{p_{03}^3 + p_{20}^2\, p_{23}\right\}$$

andrerseits

$$(18)\quad \sqrt{i^3} \pm j\,\sqrt{6} = \frac{p_{03}^3 \mp (p_{03}^3 + 2\,p_{20}^2\, p_{23})}{\sqrt{2^3}}$$ (unter den Wurzeln die absoluten Werthe verstanden), woraus wieder (17) hervorgeht.

Endlich wird vermöge unserer Annahme

$$(19)\ R' = -\begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} \\ p_{20}, & \frac{p_{12}}{3} + 3\,p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}}{3}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = p_{23}\, p_{02}^2$$

$$P = -\begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03} + p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} = p_{03}^3 + p_{20}^2\, p_{23}$$

und demnach endlich

$$(20)\qquad -2D = R'P. = \frac{R.P}{27}\ \text{(cf. (6))}.$$

Drücken wir noch die in $R,P$ vorkommenden $p_{ik}$ durch die Wurzeln der biquadratischen Form aus, so haben die den Grundstock des Weiteren bildenden Formeln:

$$(21)\ s_0 = p_{01},\ s_1 = 2p_{02},\ s_2 = 3p_{03} + p_{12},\ s_3 = 2p_{13},\ s_4 = p_{23},$$

und mit Benützung der Identität zwischen den $p_{ik}$:

$$(22)\ \ 3p_{03} = \frac{s_2}{2} \pm \frac{3i}{\sqrt{6}},\ p_{12} = \frac{s_2}{2} \mp \frac{3i}{\sqrt{6}}\ \text{(cf. Sturm pg. 134).}$$

Diese Ergebnisse fassen wir so zusammen (vgl. die Bemerkungen von Sturm pg. 135)

„Die Zerlegung der Discriminante einer allgemeinen biquadratischen binären Form

$$(12)\ D = i^3 - 6\,j^2$$

in die beiden Faktoren

$$(18)\quad (\sqrt{i^3}+j\sqrt{6})(\sqrt{i^3}-j\sqrt{6})$$

lässt sich, abgesehen von der Quadratwurzel aus $6i$ stets auf rationale Weise ausführen und zwar gehen diese Faktoren mittelst der durch die Gleichungen

$$(21)\quad (22)$$

bestimmten $p_{ik}$ in die Formen

$$(19)\quad R,\ P$$

über.

Diese letzteren sind die Resultanten von zwei Paaren cubischer Formen, deren Gruppen (Involutionen) zu einander conjugirt sind.

Umgekehrt sind die Resultanten von irgend zwei Paaren cubischer Formen, deren Gruppen zu einander conjugirt sind, die Faktoren der Discriminanten ihrer (gemeinsamen) Funktionaldeterminante.“

39. Da die Invariante $i$ (13) das Quadrat von $(f\,\varphi)^3$ ist, so haben wir auch den Satz (cf. Sturm pg. 137):

„Der (lineare) Nullcomplex der Normcurve ist auch durch

$$(23)\quad i=0$$

dargestellt d. h. die vier Tangenten der Curve, die irgend eine Gerade des Complexes treffen, bilden ein aequianharmonisches Quadrupel, und umgekehrt.“

40. Ehe wir die Formeln (21) (22) weiter verwenden, möge erst noch die Zerlegung der Discriminante einer biquadratischen binären Form nach einer andern Seite hin ergänzt werden. Sie beruht wesentlich darauf, dass wir die biquadratische Form als Hesse'sche Covariante einer andern biquadratischen Form ansehen.

In der That giebt es bekanntlich nach Clebsch[25] im Allgemeinen stets zwei Formen der Involution (3) $F+k'\,\Phi$, die

die Differentialquotienten einer biquadratischen Form $B$ sind und zwar, wenn (homogen geschrieben)

$$(3)\quad \begin{cases} F \equiv u_3\,\lambda^3 + 3u_2\,\lambda^2\mu + 3u_1\,\lambda\mu^2 + u_0\,\mu^3 \\ \Phi \equiv v_3\,\lambda^3 + 3v_2\,\lambda^2\mu + 3v_2\,\lambda\mu^2 + v_0\,\mu^3 \end{cases}$$

und die gesuchte Form

$$(24)\quad B_\lambda^4 \equiv b_0\,\lambda^4 + 4b_1\,\lambda^3\,\mu + 6b_2\,\lambda^2\,\mu^2 + 4b_3\,\lambda\mu^3 + b_4\,\mu^4$$

so wird (wie auch durch ganz einfache elementare Rechnung folgt)

$$(25)\quad B = F\,(\alpha\lambda + \mu\alpha_1) + \Phi\,(\beta\lambda + \mu\beta_1)$$

$$\text{wo}\ \rho\alpha = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_0 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} - \rho\alpha_1 = \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & v_2 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_0 & u_1 & u_2 \end{vmatrix}\ \rho\beta = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \rho\beta_1 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Dabei sind (26) $\alpha\lambda + \mu\alpha_1$; $\beta\lambda + \mu\beta_1$ zwei lineare Covarianten von $F$, $\Phi$ *).

Dann folgt sofort, dass die Hesse'sche Form von $B$

$$(27)\quad H = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_1 & F_2 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{vmatrix} J$$

wird.

In derselben Weise giebt es zwei Formen der Involution (1) $f + k\varphi$, die die Differentialquotienten einer andern biquadratischen Form $A$ sind. (Diese findet man §. 22.)

Dann wird, wenn analog

---

*) Diese stellen, $= 0$ gesetzt, wie man mit Hülfe des Satzes des §. 14 und aus ihrer Bildung leicht folgt, folgendes Punktepaar der Curve dar. Man lege (dualistisch) durch die Punkte $f$, $\varphi$ die beiden Sehnen an die Curve, sowie durch die Gerade $(f, \varphi)$ die beiden Ebenen, die diese Sehnen resp. enthalten. Diese Ebenen schneiden ausserdem noch das gesuchte Punktepaar aus. Umgekehrt gehört, wie auch aus dem Clebsch'schen Satze folgt, zu einem beliebigen Punktepaar der Curve, wenn ausserdem die Gerade $(f, \varphi)$ gegeben ist, ein bestimmtes Punktepaar $f$, $\varphi$ auf der letzteren, das die Punkte des ersten Paares zu den angegebenen Covarianten hat,

$$(28)\ A \equiv f\,(\alpha'\lambda + \mu\alpha'_1) + \varphi\,(\beta'\lambda + \mu\beta'_1)$$

die Hesse'sche Form von $A$

$$(29)\ H' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'_1 \\ \beta' & \beta'_1 \end{vmatrix} J$$

so dass wir den Satz gewonnen haben:

„Eine gegebene Form vierten Grades (11) $J$ kann (wie bekannt) auf doppelte Weise als Hesse'sche Form von zwei anderen biquadratischen Formen $A, B$ angesehen werden, und zwar mittelst der Gleichungen (21) (22) (24) bis (29). Zunächst erscheint die gegebene Form $J$ als Functionaldeterminante von zwei cubischen Formenpaaren

$$f + k\varphi, \qquad F + k'\Phi$$

deren Gruppen einander conjugirt sind. In jeder dieser Gruppen giebt es zwei Formen, die die Differentialquotienten einer biquadratischen Form sind; diese beiden letzteren sind dann die Formen $A$, $B$."

Man kann diesen Satz auch folgendermassen aussprechen:

„Die zur Involution dritter Ordnung der ersten Polaren einer biquadratischen binären Form conjugirte Involution enthält die beiden ersten Differentialquotienten einer andern biquadratischen Form, deren Hesse'sche Form identisch ist mit der Hesse'schen Form der gegebenen Form."

41. Man kann sich aber auch bei Untersuchung der Discriminante von $J$ auf eine der Involutionen (1) (3) beschränken. Die beiden Faktoren der Discriminante sagten durch ihr Verschwinden aus, dass eine Gerade ($J$) die Curve $N_3$ trifft, resp. in einer Ebene von $N_3$ liegt.

Im ersten Falle aber verschwindet die Resultante der Formen $F$, $\Phi$ (3), im andern giebt es eine Form der Gruppe $F + k'\Phi$, die dritte Potenz eines linearen Ausdrucks ist. Das

Umgekehrte gilt von der Gruppe (1). In der That folgt dies ja auch aus dem einfachsten Satze [26] aus der Theorie der conjugirten binären Formen:

„Ist eine Form $n^{\text{ten}}$ Grades zu einer $n^{\text{ten}}$ Potenz (eines linearen Ausdrucks $(\lambda - \alpha)$ apolar, so ist $\alpha$ eine Wurzel der ersten Form und umgekehrt."

Wir können daher auch sagen:

„Die Faktoren der Discriminante von $J$ sind für jede der Involutionen (1) $f + k\rho$; (3) $F + k'\Phi$ einmal die Resultante, andrerseits die linke Seite der Bedingung, dass eine Form der Involution die dritte Potenz (eines linearen Ausdrucks) ist."

In dieser Form lassen sich die Sätze der Nummern 38 bis 41 auf Involutionen beliebiger Ordnung ausdehnen, was später bei Gelegenheit der Involutionen vierter Ordnung ausgeführt werden soll.

42. Die weitere Untersuchung knüpft an die Gleichungen (11) (21) (22) an. Zunächst liegt in ihnen der wichtige Satz:

„Die Form (11) ist die Darstellungsform einer beliebigen Geraden (und zugleich ihrer im Nullcomplex conjugirten) im Raume: ihre Coordinaten bestimmen sich aus den Wurzeln der Form nach (21) (22)."

Fallen alle Wurzeln der Form zusammen, so wird die dargestellte Gerade (und nur dann) zur Tangente der Curve. Eine solche ist also *) repräsentirt durch (mit Wiedereinführung des Proportionalitätsfaktors)

$$(30)\ \rho p_{01} = 1,\ \rho p_{02} = 2\lambda,\ \rho p_{03} = \lambda^2,\ \rho p_{12} = 3\lambda^2,\ \rho p_{13} = 2\lambda^3,\ \rho p_{23} = \lambda^4.$$

(Cf. Sturm pg. 134.)

*) Die Gleichungen (30) kann man natürlich auch direkt aus der Gleichung der Normcurve mit Hülfe des für alle rationalen Curven geltenden Clebsch'schen Verfahrens [27] erhalten, oder auch aus den Gleichungen 32), die gleichfalls sich direkt leicht ergeben.

Da zwei Gerade $p_{ik}$, $q_{ik}$ sich bekanntlich unter der Bedingung treffen

$$(31)\ \Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0$$

so drückt die Gleichung

$$(11)\ J = 0$$

nichts anderes aus, als dass die Gerade $p_{ik}$ eine Tangente $\lambda$ der Curve trifft, mithin, da $J$ für vier Werthe verschwindet, dass die Gerade vier Tangenten der Curve trifft, wie es sein muss.

Schliesslich gelangen wir auch von (21) (22) zur Gleichung einer Sehne (Axe) der Curve. Seien die Argumente irgend zweier Punkte der Curve $\alpha$, $\beta$ und die bez. homogenen symmetrischen Funktionen $\sigma_0$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, so haben wir:

$$(32)\begin{cases} \text{Sehne)} & \rho p_{01} = \sigma_0^2,\ \rho p_{02} = \sigma_1\sigma_0,\ \rho p_{13} = \sigma_1\sigma_2,\ \rho p_{23} = \sigma_2^2 \\ \text{Axe)} & \rho p_{01} = \sigma_0^2,\ \rho p_{02} = \sigma_1\sigma_0,\ \rho p_{13} = \sigma_1\sigma_2,\ \rho p_{23} = \sigma_2^2 \\ \text{oder:} & \tau q_{23} = \sigma_0^2,\ \tau q_{31} = \sigma_1\sigma_0,\ \tau q_{20} = \sigma_1\sigma_2,\ \tau q_{01} = \sigma_2^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Sehne)} & \rho p_{12} = \quad 3\sigma_2\sigma_0 \quad \rho p_{03} = \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3} \\ \text{Axe)} & \rho p_{12} = (\sigma_1 - \sigma_0\sigma_2),\ \ \rho p_{03} = \sigma_2\sigma_0 \\ \text{oder:} & \tau q_{03} = (\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2),\ \ \tau q_{12} = \sigma_2\sigma_0. \end{cases}$$

43. Hieran reiht sich unmittelbar die für das Folgende wichtige Untersuchung der Sehnen (Axen) der Normcurve, die einem allgemeinen linearen Complexe angehören. Diese Sehnen (nebst den Axen) liegen bekanntlich [28] auf einer Regelfläche vierter Ordnung und Klasse, die die Normcurve zur Doppelcurve besitzt. Da diese Fläche schon zur Genüge untersucht ist, so soll es sich hier nur darum handeln, die nöthigen Grundformeln aufzustellen.

Ein allgemeiner linearer Complex ist dargestellt durch:

$$(33)\ \Sigma\Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0 \qquad (i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$$

wo die $p$ Liniencoordinaten, die $q$ aber ganz beliebige Coefficienten sind. Diesem gehört irgend eine Sehne (32) unter der Bedingung an:

$$(34)\sigma_0^2 q_{23}+\sigma_0\sigma_1 q_{31}+\sigma_1\sigma_2 q_{20}+\sigma_2^2 q_{01}+3\sigma_0\sigma_2 q_{03}+\frac{\sigma_1^2-\sigma_0\sigma_2}{3}q_{12}=0$$

oder nach den Potenzen und Produkten von $\sigma$ geordnet:

$$(35)\sigma_0^2 q_{23}+\sigma_0\sigma_1 q_{31}+\sigma_1\sigma_2 q_{20}+\sigma_2^2 q_{01}+\frac{\sigma_1^2}{3}q_{12}+\sigma_0\sigma_2(3q_{03}-\frac{q_{12}}{3})=0.$$

Während also (cf. §. 15) eine lineare Relation zwischen den $\sigma$ die Geraden einer Regelschaar zweiter Ordnung liefert, so haben wir den brauchbaren Satz [29]:

„Eine allgemeine Relation zweiten Grades zwischen den symmetrischen Funktionen $\sigma_i$ liefert alle Sehnen, die einem bestimmten linearen Complex angehören und umgekehrt" *).

Gerade also wie man damals die Gleichung der der Geraden

$$m_2\sigma_2+m_1\sigma_1+m_0\sigma_0=0$$

entsprechenden Fläche zweiter Ordnung durch die Substitutionen

$$(36)\ \rho\sigma_2=3x_1x_3-x_2^2,\ \rho\sigma_1=9x_0x_3-x_1x_2,\ \rho\sigma_0=3x_0x_2-x_1^2$$

erhielt, so geht hier durch dieselben Substitutionen die Gleichung (35) in die der Regelfläche über **), die der Ort aller

---

*) Vertauscht man (wie aus (32) hervorgeht) in (34) (35) $3\sigma_0\sigma_2$ mit $(\sigma_1^2-\sigma_0\sigma_2)$ oder, was damit aequivalent ist, $3q_{03}$ mit $q_{12}$, so resultirt die Gleichung für die (Argumentenpaare der) Axen der Curve, die dem Complex (33) angehören und daher nach dem Clebsch-Cayley'schen Satz mit den Sehnen (35) auf derselben Regelfläche liegen (cf. Salmon, Raumgeometrie pg. 438). Die Gleichung derselben in Ebenencoordinaten ergiebt sich ganz ebenso, wie die in Punktcoordinaten, mittelst der Entwicklungen des §. 15. Geht man, statt von den Hülfsgleichungen (32) direkt von der Darstellungsform (11) aus, so liefert die Bedingung des Complexes (33) das Produkt der beiden Gleichungen für die dem Complexe angehörigen Sehnen und Axen der Curve.

**) Man sieht dies noch deutlicher mit Hülfe der Bedeutung der Covariante $H$ einer cubischen Form $f$ (§. 16) ein.

Denn da diese, wenn

Sehnen des linearen Complexes (33) ist. (Cf. Salmon, Raumgeometrie pg. 436.)

Dem linearen Complexe gehören speciell vier Tangenten der Normcurve an, die sich aus (35) ergeben, wenn man die Argumente $\alpha, \beta$, aus denen die $\sigma_i$ gebildet sind, gleich $\lambda$ setzt:

$$(37)\ \lambda^4 q_{01} - 2\lambda^3 q_{02} + \lambda^2 (q_{12} + 3\, q_{03}) - 2\lambda\, q_{13} + q_{23} = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung (11) $J = 0$, nur dass hier statt der Coefficienten $p$ die $q$ stehen; wir wollen sie daher jetzt mit $J' = 0$ bezeichnen.

Dividirt man daher die Gleichung des Complexes durch $q_{01}$, wie auch die Gleichung (37), so erkennt man, dass die einfach unendliche Schaar von Complexen, die alle dieselben Tangenten (37) enthalten, durch die Relation

$$(38)\ \frac{q_{12}}{q_{01}} + \frac{3\, q_{03}}{q_{01}} = \text{const.} = S_2 \text{ oder } q_{12} + 3\, q_{03} - S_2\, q_{01} = 0$$

verbunden sind. Alle übrigen $q$, dividirt durch $q_{01}$, sind fest und zwar die bezüglichen elementar-symmetrischen Funktionen der vier Wurzeln von (37).

Die Gleichung (38) ist ersetzbar durch folgende:

$$(39)\ \frac{q_{12}}{q_{01}} = \frac{S_2}{2} + 3\,\mu, \quad 3\frac{q_{03}}{q_{01}} = \frac{S_2}{2} - 3\,\mu$$

wo $\mu$ ein variabler Parameter ist.

Daher sind alle linearen Complexe, die dieselben vier Tangenten (37) $J' = 0$ mit der Curve gemein haben, in der Form enthalten:

---

$$f \equiv x_0 \lambda^3 - x_1 \lambda^2 + x_2 \lambda - x_3,$$

den Werth hat $H = \lambda^2 (3\, x_0\, x_2 - x_1^2) - \lambda (9\, x_0\, x_3 - x_1 x_2) + (3 x_1 x_1 - x_2^2)$ und das Punktepaar (der Curve) auf der durch den Punkt $f$ gehenden Sehne darstellt, so braucht man nur die Coefficienten von $H$ für die $\sigma_i$ in (34) einzusetzen, um alle Punkte $f$ (d. h. mit den Coordinaten $x_i$) unserer Regelfläche zu erhalten.

$$(40)\left\{\left\{p_{01}\frac{q_{23}}{q_{01}}+p_{23}+p_{02}\frac{q_{31}}{q_{01}}+p_{31}\frac{q_{02}}{q_{01}}\right\}+\frac{S_2}{6}(3\,p_{03}+p_{12})\right\}$$
$$+\mu\,(3\,p_{03}-p_{12})=0$$

oder wenn man für $S_2$ wieder seinen Werth $\frac{3\,q_{03}+q_{12}}{q_{01}}$ einsetzt

$$(40)\left\{p_{01}\,q_{23}+p_{23}\,q_{01}+p_{02}\,q_{31}+p_{31}\,q_{02}+\frac{(3p_{03}+p_{12})(3\,q_{03}+q_{12})}{6}\right\}$$
$$+\mu\,(3\,p_{03}-p_{12})\,q_{01}=0.$$

Nun ist aber der erste Theil dieser Gleichung (der von $\mu$ frei ist) nichts anderes als die bilineare Invariante der Formen:

$$(11)\ J=p_{01}\,\lambda^4-2\,p_{02}\,\lambda^3+\lambda^2\,(3p_{03}+p_{12})-2\,\lambda\,p_{13}+p_{23}$$

$$(37)\ J'=q_{01}\,\lambda^4-2\,q_{02}\,\lambda^3+\lambda^2\,(3\,q_{03}+q_{12})-2\,\lambda\,q_{13}+q_{23}$$

während der Faktor von $\mu$, $=0$ gesetzt, den Nullcomplex der Curve darstellt *).

Mithin ist die allen Complexen der zum Quadrupel $J'$ gehörigen Schaar gemeinsame Congruenz dieselbe, wie die diesen beiden speciellen Complexen gemeine.

Um diese zu finden, beweist man den wichtigen Satz:

„Soll eine Gerade des Geradenpaares ($J$) (d. h. des Paares, das die vier Tangenten $J=0$ trifft) eine Gerade des Geradenpaares ($J'$) treffen, wo $J$, $J'$ irgend zwei zu *einander apolare* Quadrupel sind, so ist dies nur so möglich, dass eine der beiden Invarianten $i$, $i'$ verschwindet, d. h. wenn die Geraden wenigstens eines Paares coincidiren. Dann aber trifft diese eine Gerade beide des andern Paares.“

---

*) Dieser ist noch insofern ein ausgezeichneter Complex der Schaar (40), als er nicht nur die vier Tangenten $J'=0$, sondern alle Tangenten der Curve enthält. (Cf. im übrigen §. 19.)

In der That ist ja die Apolaritätsbedingung für $J, J'$ durch das Verschwinden des ersten Theiles der Gleichung (40) ausgedrückt:

$$(41)\ (p_{01}q_{23}+p_{23}q_{01}+p_{02}q_{31}+q_{02}p_{31})+\frac{(3p_{03}+p_{12})(3q_{03}+q_{12})}{6}=0$$

Soll diese mit der Bedingung des Schneidens einer Geraden $p$ und einer Geraden $q$ identisch sein, so muss der letzte Term:

$$(42)\ \frac{(3\,p_{03}+p_{12})\,(3\,q_{03}+q_{12})}{6}=p_{03}\,q_{12}+p_{12}\,q_{03}$$

sein, d. h. es findet die Bedingung:

$$(43)\ (3\,p_{03}-p_{12})\,(3\,q_{03}-q_{12})=0$$

statt: mithin muss eine der beiden Invarianten $i$, $i'$ verschwinden *).

Verschwindet aber $i$, so trifft dann offenbar die Gerade $p$ jede der beiden Geraden $q$.

Damit ist der angegebene Satz bewiesen.

Dann aber verschwindet Gleichung (40) für jeden Werth von $\mu$ und wir haben zunächst:

„Die Directricen der allen linearen Complexen, die dieselben vier Tangenten der Curve enthalten, gemeinsamen Congruenz sind die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels.“

Insbesondere gilt dieser Satz für den Complex

$$(41)\ (JJ')^4=0$$

in folgender Weise (cf. Sturm pg. 142), wenn wir mittelst der homogenen symmetrischen Funktionen $\tau_i$ der Wurzeln von $J'=0$ die Gleichung (41) so schreiben:

---

*) Es geht dies auch so hervor. Eine Gerade des Geradenpaares $(J)$ trifft eine solche des Paares $(J')$ (wo aber jetzt $J, J'$ ganz beliebig seien) unter der Bedingung (wie man leicht ausrechnet): (wenn $(JJ')^4$ die bilineare Invariante von $J, J'$ bezeichnet) $(JJ')^4 = ii'$. Verschwindet also eine Seite dieser Gleichung, so auch die andere.

$$(42)\ p_{01}\,\tau_4 - \frac{p_{02}}{2}\,\tau_3 + \frac{3\,p_{03}+p_{12}}{6}\,\tau_2 - \frac{p_{13}}{2}\,\tau_1 + p_{23}\,\tau_0 = 0.$$

„Die Gleichung

$$(43)\ a_\tau \equiv a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2 + a_3\,\tau_3 + a_4\,\tau_4 = 0$$

stellt einen linearen Complex dar, dessen mit dem Nullcomplex der Curve gemeinsame Congruenz zu Directricen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels

$$(44)\ a_\lambda \equiv a_0 + 4\,a_1\,\lambda + 6\,a_2\,\lambda^2 + 4\,a_3\,\lambda^3 + a_4\,\lambda^4$$

besitzt.

Die Linien der Congruenz sind die (einzigen) Treffgeraden aller zu $a_\lambda$ apolaren und aequianharmonischen Tangentenquadrupel."

Aus Gleichung (41) folgt weiter unmittelbar, dass alle Geraden $p$, die dem Complex $(JJ')^4 = 0$ genügen, die Treffgeradenpaare aller zu $J'$ apolaren Tangentenquadrupel sind, so dass wir den eben aufgeführten Satz noch in der Art ergänzen können, dass wir sagen:

„Die Gleichung $a_\tau = 0$ (die ja nach Kap. I, §. 5 alle zu $a_\lambda$ apolaren Quadrupel darstellt) ergiebt vermöge aller Werthsysteme $\tau_i$, die ihr genügen, die dreifach unendliche zu $a_\lambda$ apolare Tangentenquadrupelschaar, deren Treffgeraden die Geraden des zugehörigen linearen Complexes sind."

Verschwindet im Speciellen die Invariante $i$ von $a_\lambda$, so hat das Tangentenquadrupel $(a_\lambda)$ selbst nur eine Treffgerade und diese wird nach dem aus den Gleichungen (41) (42) (43) abgeleiteten Satze von allen Treffgeradenpaaren der zu $a_\lambda$ apolaren Quadrupel getroffen d. h.:

„Der lineare Complex

$$(43)\ a_\tau = 0$$

wird dann (und nur dann) zum speciellen, wenn das Tangentenquadrupel aequianharmonisch ist und daher nur eine Treffgerade (die Axe des speciellen Complexes) besitzt."

Die Ableitung weiterer hervorragender Eigenschaften des Complexes $a_\tau = 0$ soll dem nächsten Abschnitt vorbehalten bleiben, der eine eingehende Discussion dieser Gleichung (im Apolaritätssinne) enthält.

Im Übrigen sehe man nach bei Sturm, der auch eine Interpretation der Covarianten von $a_\lambda$ mit diesem Complexe verknüpft, auf die wir gleichfalls noch genauer zurückkommen.

44. Dieser Abschnitt über die Normcurven soll einen vorläufigen Abschluss erhalten durch einen Satz, der ebenfalls später zu weiterer Verwerthung herangezogen wird und theilweise von Sturm (l. c. pg. 139) herrührt. Er bildet eine unmittelbare Anwendung des letzten Satzes. Zu diesem gelangt man, wenn man die fundamentale Eigenschaft der Darstellungsform (11) der Geraden, dass ihre Coefficienten vermöge der Gleichungen (21) (22) die beiden Treffgeraden des Tangenten-Quadrupels (11) darstellen, auf eine Involution vierter Ordnung

$$(45)\ a_\lambda^4 + k b_\lambda^4 = 0$$

überträgt, und nach Kap. I, §. 3 diese Involution ersetzt durch das Gleichungssystem (mit der dort eingeführten Abkürzung)

$$(46)\ \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0,$$

wo die aus den Formen $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$ zusammengesetzte Gruppe die zur Involution (45) conjugirte Gruppe ist, und wo alle den Gleichungen (46) genügenden Werthsysteme $s_i$ die Wurzelsysteme aller Gleichungen (45) repräsentiren. Daraus folgt mit Hülfe der Entwicklungen der letzten Nummer sogleich:

„Die Treffgeradenpaare aller Tangentenquadrupel (45) einer Involution vierter Ordnung bilden die eine Regelschaar eines Hyperboloides, das den drei linearen Complexen (46) gemeinsam ist."

oder in anderer Fassung:

„Die zwei Geradenpaare, die zwei beliebige Tangentenquadrupel der Curve treffen, liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung. Auf dieser liegen dann noch unendlich viele solche Geradenpaare, die alle der einen Schaar *) (auf der Fläche) angehören."

Ein anderer Beweis dieser Sätze, der zugleich zur Bedeutung der andern auf der Fläche zweiter Ordnung liegenden Regelschaar führt, führt sich so **):

Jeder der beiden linearen Complexe

$$(47)\ a_s = 0,\ b_s = 0$$

hat mit dem Nullcomplex der Curve eine Congruenz gemein, deren Directricen die Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel $a_\lambda$ resp. $b_\lambda$ sind; mithin müssen alle Geraden, die diesen beiden Complexen mit dem Nullcomplex gemein sind, beide Geradenpaare $(a_\lambda)$ $(b_\lambda)$ treffen. Da es aber ihrer unendlich viele sein müssen, so treffen sie alle diese beiden Geradenpaare und bilden somit diejenige Regelschaar einer so bestimmten Fläche zweiter Ordnung, der jene beiden Geradenpaare nicht angehören.

Wir drücken dies Resultat so aus:

„Die beiden Regelschaaren, die auf der durch

*) Die Geraden dieser Schaar sind daher paarweise in Bezug auf den Nullcomplex der Curve conjugirt, mithin herrscht zwischen ihnen eine projektivisch-involutorische Beziehung, deren Doppelelemente die beiden sich selbst conjugirten Geraden sind, die den beiden in der Involution (45) enthaltenen aequianharmonischen Quadrupeln entsprechen.

**) Gerade wie dies gewöhnlich für irgend drei lineare Complexe bewiesen wird.

die Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung

$$(45) \quad a_\lambda^4 + k\, b_\lambda^4 = 0$$

bestimmten Fläche zweiter Ordnung liegen, sind dargestellt, einmal durch die drei linearen Complexe

$$(46) \quad \alpha_s = 0,\ \beta_s = 0,\ \gamma_s = 0,$$

andrerseits durch die drei anderen:

$$(48) \quad a_s = 0,\ b_s = 0,\ i = 0 \text{ (oder } 3p_{03} - p_{12} = 0).\text{“}$$

Nun giebt es, wie bekannt, sechs Quadrupel der Involution (45) der Form

$$\text{„}\alpha,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\text{“}$$

wo die $\alpha$ die sechs (durch die Funktionaldeterminante von $a_\lambda^4$, $b_\lambda^4$ dargestellten) Doppelelemente der Involution sind.

Diese sechs Tangenten-Quadrupel stellen die einzigen der Involution dar, für die zwei Tangenten sich (auf einem Punkte der Curve) treffen und (zugleich) in einer Ebene (der Curve) liegen.

Die beiden Treffgeraden der vier Tangenten $\alpha$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind daher einmal eine Gerade, die durch den Punkt $\alpha$ der Curve geht, andrerseits eine solche, die in der Ebene $\alpha$ der Curve liegt. Und da bekanntlich jede Ebene durch eine Gerade einer Fläche zweiter Ordnung eine (Tangential-) Ebene der Fläche ist, so haben wir für unsere Involution den dritten Satz:

„Die durch eine Involution vierter Ordnung (45) bestimmte Fläche zweiter Ordnung trifft die Curve $N_3$ in sechs Punkten, deren Ebenen zugleich die der Fläche (als Klassenfläche) mit der Curve ($N_3$) gemeinsamen Ebenen sind.“

Und mit Hülfe des später zu erweisenden Satzes, dass es 5 Involutionen vierter Ordnung mit denselben (sechs) Doppelelementen giebt, folgt hier:

„Durch irgend sechs Raumpunkte gehen fünf Flächen zweiter Ordnung der Art, dass ihre Tangentialebenen in den Punkten immer *dieselben* sind und zwar die Ebenen der durch die sechs Punkte bestimmten cubischen Raumcurve.“

Mithin sind diese fünf Flächen einmal in der Form

$(i = 1, \ldots 5)\ \lambda_{i1} f_1 + \lambda_{i2} f_2 + \lambda_{i3} f_3 + \lambda_{i4} f_4 = 0,$

und zugleich in der andern:

$$l_{i1} F_1 + l_{i2} F_2 + l_{i3} F_3 + l_{i4} F_4 = 0$$

darstellbar, wo die $f_i = 0$ vier Flächen zweiter Ordnung mit sechs gemeinschaftlichen Punkten und die $F_i = 0$ vier Flächen zweiter Classe mit sechs gemeinschaftlichen Tangentialebenen sind.

Auf die Eigenschaften der Involutionen vierter Ordnung auf cubischen Raumcurven im Weiteren können wir erst nach Vermehrung unserer Hülfsmittel von anderer Seite her des Genaueren eingehen. Es hat ja auch dieser Abschnitt nur den Zweck, mit den elementarsten Grundeigenschaften der Normcurven bekannt zu machen, um so einen Untergrund für die folgenden, ganz allmählich verwickelter werdenden Untersuchungen über die Apolarität zu gewinnen.

Zum Schluss soll noch einmal daran erinnert werden, dass alle Formeln dieses Abschnittes mittelst des Kap. I §. 7 dargelegten Verfahrens auf einen beliebigen Kegelschnitt resp. cubische Raumcurve (d. h. genauer, die auf ein beliebiges Coordinatensystem bezogen sind) übertragen werden können.

Die nächsten Abschnitte entwickeln einige Hülfsformeln für die einfachsten Fälle, dass ein (sonst) beliebiger Kegelschnitt zum Normkegelschnitte, resp. eine (sonst) beliebige Fläche zweiter Ordnung zur cubischen Normcurve apolar ist, was wiederum genügen wird, die allgemeinen Formeln deutlich hervortreten zu lassen. Diese Hülfsformeln führen dann von selbst zur Betrachtung der invarianten (Apolaritäts-) Eigenschaften der binären Formen vierten und sechsten Grades.

---

## Abschnitt II.

# Die binäre biquadratische Form und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

### §. 17

### Der Normkegelschnitt.

45. Nach Reye [30)] heissen zwei Kegelschnitte (1)

$$\begin{cases} a_x^2 \equiv \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k \equiv a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + 2a_{01}\, x_0 x_1 + \ldots = 0 \\ u_\alpha^2 \equiv \Sigma\Sigma\, \alpha_{ik}\, u_i\, u_k \equiv \alpha_{00}\, u_0^2 + \alpha_{11}\, u_1^2 + \alpha_{22}\, u_2^2 + 2\alpha_{01}\, u_0 u_1 + \ldots = 0 \end{cases}$$

(zu einander) apolar, wenn ihre bilineare Invariante verschwindet d. h. wenn

$$(2)\ (a\alpha)^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}\, \alpha_{ik} \equiv a_{00}\, \alpha_{00} + a_{11}\, \alpha_{11} + a_{22}\, \alpha_{22} + 2a_{01}\, \alpha_{01} + 2a_{02}\, \alpha_{02} + 2a_{12}\, \alpha_{12} = 0,$$

und zur genaueren Unterscheidung führt er weiter die Benennung ein:

„Der (Ordnungs-)Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ stützt (trägt) in diesem Falle den (Klassen-) Kegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$: umgekehrt stützt sich dann (ruht) der letztere auf den (dem) ersteren."

Dann giebt es bekanntlich, wie zuerst Hesse [31)] gefunden, ein und damit (einfach) unendlich viele Polardreiecke von $a_x^2 = 0$, die $u_\alpha^2 = 0$ *um*-, und (dualistisch) zugleich unendlich viele Polardreiecke von $u_\alpha^2 = 0$, die $a_x^2 = 0$ einbeschrieben sind.