Capitel I.

Die rationalen Curven.

§. 1.

Der Grassmann'sche Fundamentalsatz über die Determinanten einer Matrix.

1. Dieser Satz befindet sich mit Beweis (was ich einer Mittheilung des Herrn Dr. Mehmke in Stuttgart verdanke) in der Grassmann'schen Ausdehnungslehre vom Jahre 1862 Nr. 112.

Er bildet weiterhin die Grundlage der Abhandlung von Clebsch „Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie" Göttinger Abhandlungen Bd. XVII (1872). Clebsch stellt den Satz von Neuem auf und beweist ihn mittelst Determinantenmultiplication, spricht aber zugleich die Vermuthung aus, dass er sich schon bei Grassmann befinden könnte [1].

Ich halte einen neuen Beweis des Satzes für nützlich, der mir ziemlich einfacher zu sein scheint.

Es genügt vollständig, die Methode des Beweises an dem einfachen Fall einer Matrix von zwei Horizontal- und fünf Vertikalreihen darzulegen. Der Bequemlichkeit wegen soll, wie bei Clebsch, die Vorstellung eines Raumes von 4 (resp. n) Dimensionen beibehalten werden, um so mehr, da sie jetzt so ziemlich allgemein üblich ist.

Durch zwei Punkte (α_i) (β_i) dieses Raumes geht eine „Gerade" (1) $\rho x_i = \alpha_i \lambda + \beta_i \mu$ $(i = 0,1,2,3,4)$.

Ein Lineargebilde

(2) $u_x \equiv u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$

ist durch vier Punkte eindeutig bestimmt: durch die Gerade (1) geht also noch eine zweifach unendliche lineare Schaar d. h. die Gerade ist auch dargestellt durch das System

(3) $\sigma \mu_i = \mu_i m + \nu_i n + \pi_i p \ (i = 0, \ldots 4)$, wo $(\mu_i)\,(\nu_i)\,(\pi_i)$ irgend drei solcher Lineargebilde sind, deren gemeinsame Punkte eben die Punkte unserer Geraden sind. Dabei sind λ, μ resp. m, n, p homogene Parameter, ρ, σ beliebige Faktoren. Dann sind bekanntlich nach Plücker & Cayley als homogene Coordinaten der Geraden entweder die Determinanten der Matrix $(\alpha_i\ \beta_i)$ oder die der Matrix $(\mu_i\ \nu_i\ \pi_i)$ aufzufassen d. s. solche, die sich bei „Verschiebung" der Punkte α, β auf der Geraden resp. bei „Drehung" der Gebilde μ, ν, π um die Gerade nur je um einen gemeinsamen Faktor ändern.

Soll nun ein Punkt (α_i) in einem Lineargebilde (μ_i) liegen, so findet die Relation

$$(4) \quad \alpha_\mu \equiv \Sigma \alpha_i \mu_i = 0 \text{ statt.}$$

Da nun offenbar jeder Punkt (x_i) der Geraden in jedem ihrer Gebilde (u_i) liegt, so finden die Gleichungen statt:

$$(5) \quad \alpha_\mu = 0 \quad \beta_\mu = 0 \quad \alpha_\nu = 0 \quad \beta_\nu = 0 \quad \alpha_\pi = 0 \quad \beta_\pi = 0.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergiebt sich durch resp. Multiplication mit β_0, α_0 und Subtraktion:

$$(6) \quad \begin{cases} \mu_1 p_{01} + \mu_2 p_{02} + \mu_3 p_{03} + \mu_4 p_{04} = 0 \text{ und analog} \\ \nu_1 p_{01} + \nu_2 p_{02} + \nu_3 p_{03} + \nu_4 p_{04} = 0 \\ \pi_1 p_{01} + \pi_2 p_{02} + \pi_3 p_{03} + \pi_4 p_{04} = 0 \end{cases}$$

wo $p_{ik} = \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_k \\ \beta_i & \beta_k \end{vmatrix}$. Aus dem System (6) ergiebt sich wieder durch resp. Multiplication mit den Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 & \pi_1 \\ \mu_2 & \nu_2 & \pi_2 \end{vmatrix} \text{ und Addition}$$

$$(7)\ p_{03}\, q_{123} + p_{04}\, q_{124} = 0 \qquad \text{wo } q_{lmn} = \begin{vmatrix} \mu_l & \nu_l & \pi_l \\ \mu_m & \nu_m & \pi_m \\ \mu_n & \nu_n & \pi_n \end{vmatrix}.$$

Hätten wir statt der Indices 0, 1, 2 die andern i, n, m gewählt, so hätten wir erhalten:

(8) $p_{ik}\ q_{nmk} + p_{il}\ q_{nml} = 0$ (i, k, l, m, n sind die 5 Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 in irgend einer Folge).

Dies ist die gesuchte Relation. Dafür können wir auch schreiben

$$(8^*)\quad \frac{p_{ik}}{p_{il}} = \frac{-q_{lmn}}{q_{kmn}} = \frac{(-1)^{i+k} q_{lmn}}{(-1)^{i+l} q_{kmn}}$$

oder (9) $\rho p_{ik} = (-1)^{i+k} q_{lmn}$.

Genau in analoger Weise ergiebt sich die allgemeine Formel (10) $\rho p_{iklm\ldots} = (-1)^{i+k+l+m\ldots} q_{rstu\ldots}$.

Es gilt dabei die einfache Regel, dass die Folge der ganzen Indexreihe $0, 1, 2, \ldots d$ durch Löschen der einen Theilreihe $i, k, l, m \ldots$ in die Folge der Restreihe $r, s, t, u, \ldots$ übergeht.

Dafür kann man bekanntlich auch schreiben

(10*) $\rho p_{iklm\ldots} = q_{\rho\sigma\tau\ldots}$

wo dann $iklm \ldots \rho\sigma\tau \ldots$ eine positive Permutation der Zahlen $0, 1, \ldots d$ ist [2].

Rein algebraisch spricht sich unser Satz dann so aus:

„Die vollständigen Determinanten der Matrix

$$(11)\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{iq} \end{vmatrix} \quad i < q$$

sind (bis aufs Vorzeichen) proportional den vollständigen Determinanten der Matrix

$$(12) \quad \begin{vmatrix} a_{i+1,1} & a_{i+1,2} \dots & a_{i+1,q} \\ a_{i+1,2} & \dots & \dots \\ \vdots & & \\ a_{q,1} & a_{q,2} & a_{qq} \end{vmatrix}$$

und zwar die Determinante aus der $r_1^{\text{ten}}\ r_2^{\text{ten}} \dots r_i^{\text{ten}}$ Vertikalen der ersten proportional der aus den Restvertikalen der zweiten gebildeten d. h.

$$(13) \quad \rho p_{r_1 r_2 \dots r_i} = q_{r_{i+1} r_{i+2} \dots r_q}$$

wo wieder $r_1\ r_2 \dots r_i\ r_{i+1} \dots r_q$ irgend eine positive Permutation der Zahlen 1, 2, ... q darstellt, unter der Voraussetzung der Relationen:

$$(14) \quad a_{r1}\ a_{s1} + \alpha_{r2}\ a_{s2} + \dots a_{rq}\ a_{sq} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo } r &= 1, 2, \dots i \\ s &= i+1, i+2, \dots q \end{aligned}\right\}“$$

Für den Fall einer Matrix mit zwei resp. vier Reihen erhält man die bekannte Relation zwischen den Plücker'schen Strahlen- und Axencoordinaten einer Raumgeraden $\rho p_{ik} = q_{lm}$.

§. 2.

Die linearen Schnittpunktsgleichungen erster Ordnung für die rationalen ebenen Curven vierter Ordnung (R_4^2) (als Typus für die rationalen Curven n^{ter} Ordnung im Raum von d Dimensionen).

2. Gehen wir von der bekannten Darstellung derselben aus

$$(1) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{io}\ \lambda^4 + a_{i1}\ \lambda^3 + a_{i2}\ \lambda^2 + a_{i3}\ \lambda + a_{i4}$$
$$(i = i, k, l = 1, 2, 3)$$

so liegen vier Punkte derselben $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ auf einer Geraden

$$(2) \quad u_x \equiv u_i\ x_i + u_k\ x_k + u_l\ x_l = 0$$

wenn die λ die Wurzeln der Gleichung sind:

$$(3) \quad u_\varphi \equiv u_i \varphi_i + u_k\ \varphi_k + u_l\ \varphi_l \equiv \lambda^4\ (u_i\ a_{i0} + u_k\ a_{k0} + u_l\ a_{l0})$$

$$+ \lambda^3 (u_i a_{i1} + u_k a_{k1} + u_l a_{l1}) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (u_i a_{i4} + u_k a_{k4} + u_l a_{l4}) = 0$$

Demnach sind die elementarsymmetrischen Funktionen der λ lineare ganze Funktionen der u; die Elimination der letzteren ergiebt die gesuchten Relationen.

Wir setzen der Homogeneität wegen

$$(4)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{s_1}{s_0} \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \ldots = \frac{s_2}{s_0}$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \ldots = \frac{s_3}{s_0} \qquad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 = \frac{s_4}{s_0}$$

und verstehen unter τ einen beliebigen Faktor; dann ergiebt sich aus den Gleichungen

$$(5)\ (-1)^i \ \tau s_r = u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr}$$

die Nothwendigkeit des Verschwindens aller vollständigen Determinanten der Matrix:

$$(6) \quad \left|\begin{array}{rccc} s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} \\ -s_1 & a_{i1} & a_{k1} & a_{l1} \\ s_2 & a_{i2} & a_{k2} & a_{l2} \\ -s_3 & a_{i3} & a_{k3} & a_{l3} \\ s_4 & a_{i4} & a_{k4} & a_{l4} \end{array}\right|$$

3. Definitionen.

Wir werden weiterhin die s_i (i von 0 bis 4, allg. bis n) schlechtweg die (homogenen) symmetrischen Funktionen der 4 (allg. n) Grössen (Parameter, Argumente, Werthe, Punkte) λ nennen. Sind mehrere Reihen derselben vorhanden, so seien sie mit s_i, S_i, σ_i, τ_i, t_i, etc. bezeichnet.

Umgekehrt seien der Kürze wegen unter „die s_i, S_i etc.“ solche symmetrischen Funktionen von Grössen λ, μ etc. verstanden.

Die vollständigen Determinanten einer Matrix nennen wir ihre „Kerne“. Das Verschwinden eines Kernes involvire dann eine „Kerngleichung“.

Verschwinden alle Kerne einer Matrix, so sagen wir, „die Matrix verschwindet".

Die in (6) erhaltenen Gleichungen nennen wir die linearen Schnittpunktsgleichungen (oder die ersten Grades) der R_4^2, weil sie in den s_i linear sind; und zugleich erster Ordnung, weil sie aussagen, wann vier Punkte der Curve auf einem ebenen Punktgebilde erster Ordnung (d. h. einer Geraden $u_x = 0$) liegen.

Daraus erhellt die Bedeutung der Schnittpunktsgleichungen g^{ten} Grades m^{ter} Ordnung für irgend eine rationale Curve n^{ter} Ordnung im Raum von d Dimensionen (eine R_n^d):

$$(7)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{io}\,\lambda^n + a_{i1}\,\lambda^{n-1} + \dots a_{in} \qquad (i = 0, 1, \dots d)$$

von selbst.

Auch alle Umformungen der Schnittpunktsgleichungen (wenn nur Grad und Ordnung erhalten bleiben) sollen unter jener Bezeichnung miteinbegriffen sein.

4. Das Ableitungsverfahren für die Gleichungen (6) ist unmittelbar in gleicher Weise auf die R_n^d (7) anwendbar. Ihre linearen Schnittpunktsgleichungen erster Ordnung sind gegeben durch die „verschwindende" Matrix:

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{cccccc} s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{l0} & a_{m0} & \dots \\ -\ s_1 & a_{i1} & {}_{k1} & a_{l1} & a_{m1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^n s_n & a_{in} & a_{kn} & a_{ln} & a_{mn} & \dots \end{array}\right|$$

wo $i, k, l, m, \dots$ die Zahlen $0, 1, 2, \dots d$ sind.

Wo es im Weiteren nicht ausdrücklich anders betont wird, nennen wir dieses einfachste System von Schnittpunkts-gleichungen der R_n^d „ihr Schnittpunkttheorem“.

§. 3.

Umformung des Schnittpunkttheorems der R_4^2.

5. Das System der Kerngleichungen (§. 2 (6)) ist bekanntlich zwei Gleichungen aequivalent [3]. (Geometrisch heisst das, dass eine Gerade durch zwei Punkte (der Curve) bestimmt ist.) Solche zwei Gleichungen kann man im Allgemeinen aus den fünf Kerngleichungen beliebig auswählen; eine wird etwa sein

$$(1)\quad A_4 \equiv \begin{vmatrix} s_0 & a_{i0} & a_{k0} & a_{10} \\ -s_1 & a_{i1} & a_{k1} & a_{11} \\ s_2 & a_{i2} & a_{k2} & a_{12} \\ -s_3 & a_{i3} & a_{k3} & a_{13} \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir eine dreireihige Determinante, wie

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{k0} & a_{10} \\ a_{i1} & a_{k1} & a_{11} \\ a_{i2} & a_{k2} & a_{12} \end{vmatrix} \text{ mit } d_{012} \text{ (so dass } d_{012} = - d_{102} \text{ etc. ist)}$$

so stellt sich A_4 in der Form dar:

$$(3)\ A_4 \equiv s_0\, d_{123} + s_1\, d_{023} + s_2\, d_{013} + s_3\, d_{012} = 0.$$

Analoge Form haben die andern vier Gleichungen: in $A_i = 0$ kommt s_i nicht vor und der Faktor von s_r ist $d_{r_1 r_2 r_3}$, wo $r_1 r_2 r_3$ die natürliche Reihenfolge der drei Zahlen ist, die aus 0, 1, 2, 3, 4, nach Streichen von i, r restiren.

Nach dem Grassmann'schen Satze (§. 1) sind die Kerne d_{ikl} der Matrix

$$(4)\quad \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k6} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{vmatrix} .$$

proportional $(-1)^{m+n} \Delta_{mn}$, wo Δ_{mn} der jedesmal entsprechende Kern der Matrix

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} \text{ ist, d. h. } \Delta_{mn} = \begin{vmatrix} \alpha_m & \alpha_n \\ \beta_m & \beta_n \end{vmatrix}$$

[und zwar folgen sowohl in d_{ikl} als in Δ_{mn} die Indices in natürlicher Reihe] unter den Bedingungen

$$(6) \quad \begin{cases} A_i \equiv \alpha_0\, a_{i0} + \alpha_1\, a_{i1} + \ldots \alpha_4\, a_{i4} = 0, \\ B_i \equiv \beta_0\, a_{i0} + \beta_1\, a_{i1} + \ldots \beta_4\, a_{i4} = 0, \end{cases} \text{ analog}$$

$$\left.\begin{matrix} A_k = 0 & A_l = 0 \\ B_k = 0 & B_l = 0 \end{matrix}\right\}$$

Dadurch geht z. B. A_4 über in

$$(7) \; A_4 \equiv s_0\, \Delta_{40} - s_1\, \Delta_{41} + s_2\, \Delta_{42} - s_3\, \Delta_{43} + s_4\, \Delta_{44} = 0$$

(wo $\Delta_{44} = \begin{vmatrix} \alpha_4 & \alpha_4 \\ \beta_4 & \beta_4 \end{vmatrix} = 0$) und A_i in

$$(8) \; A_i \equiv \sum_0^4 {}^r (-1)^r\, s_r\, \Delta_{ir} = 0.$$

Diese Form stellt sich wieder dar als die lineare Combination

$$(9) \quad A_i \equiv \alpha_s\, \beta_i - \beta_s\, \alpha_i = 0$$

der beiden Formen

$$(10) \quad \begin{cases} \alpha_s \equiv \alpha_0 s_0 - \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 - \alpha_3 s_3 + \alpha_4 s_4 = 0 \\ \beta_s \equiv \beta_0 s_0 - \beta_1 s_1 + \beta_2 s_2 - \beta_3 s_3 + \beta_4 s_4 = 0. \end{cases}$$

Daher sind die fünf Kerngleichungen auch den zwei Gleichungen

$$\alpha_s = 0 \qquad \beta_s = 0$$

aequivalent. Das Resultat ist also folgendes:

„Das Schnittpunkttheorem der R_4^2

$$(11) \; \rho x_i = a_{i0}\, \lambda^4 + a_{i1}\, \lambda^3 + \ldots + a_{i4}$$

ist symmetrisch dargestellt durch die beiden Gleichungen

$$(12)\ \alpha_s \equiv \Sigma\alpha_i\, s_i\, (-1)^i = 0 \quad \beta_s \equiv \Sigma\beta_i\, s_i\, (-1)^i = 0$$

wo die $(\alpha\beta)_{ik}$ bestimmt sind durch die 6 Gleichungen:

$$(13)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} = 0 \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir} = 0$$

$$(i = i, k, l = 1, 2, 3)$$

Die Interpretation im Raume von 4 Dimensionen möge, als hier unwesentlich, unterdrückt werden. Das Gleiche gilt von folgender Nummer.

6. Combinirt man in gleicher Weise das Schnittpunkttheorem der R_n^d (§ 2 (8)) mit dem allgemeinen Grassmann'schen Satze (§ 1 (11—14)), so erhält man als Resultat:

„Das Schnittpunkttheorem der R_n^d

$$(14)\quad \rho x_i = a_{i0}\, \lambda^n + a_{i1}\, \lambda^{n-1} + \ldots a_{in} = \varphi_i(\lambda)$$

$$(i = 0, 1, \ldots d)$$

ist symmetrisch dargestellt durch die „n—d“ Gleichungen

$$(15)\ \mathrm{A}_{ks} \equiv \sum_0^n{}^i\ \alpha_{ki}\, s_i\, (-1)^i = 0$$

$$(k = 1, 2, \ldots (n-d))$$

wo

$$(16)\ \Sigma_r\, \alpha_{1r}\, a_{ir} = 0 \quad \Sigma_r\, \alpha_{2r}\, a_{ir} = 0 \ldots . \quad \Sigma_r\, \alpha_{(n-d),r}\, a_{ir} = 0$$

$$(i = 0, 1, \ldots d)$$

(wodurch die Determinanten der α_{kr} bestimmt sind).“

§. 4.

Reciprocität zwischen den $\varphi_i(\lambda)$ und A_{ks}.

7. Aus der Symmetrie der in den α und a bilinearen Gleichungen (16) (§ 3) (geometrisch aus der Dualität der entsprechenden Lineargebilde höherer Räume) folgt sofort die Umkehrung des letzten Satzes in folgender Weise. Es liefert diese einen Fundamentalsatz der rationalen Curven.

Satz. „Stellt das Gleichungssystem

$$(1)\ \mathrm{A}_{ks} \equiv \sum_0^n{}^i\ \alpha_{ki}\, s_i\, (-1)^i = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots (n-d)$$

das Schnittpunkttheorem der R_n^d

$$(2)\ \rho x_i = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots a_{in} \quad (i = 0, \ldots d)$$

dar, so stellt umgekehrt das Gleichungssystem

$$(3)\ A_{is} \equiv \sum_0^n k\, a_{ik}\, s_i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots d)$$

das Schnittpunkttheorem der R_n^{n-d-1}

$$(4)\ \rho x_k \equiv \alpha_{k0}\lambda^n - \alpha_{k1}\lambda^{n-1} + \ldots\ldots + (-1)^n \alpha_{kn}$$

$$(k = 0, \ldots\ldots (n-d-2)) \qquad \text{dar.}“$$

§. 5.

Die Apolarität des Schnittpunkttheorems.

8. Bekanntlich entsteht eine lineare, ganze Funktion der (aus n Grössen $\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n$ gebildeten) s_i

$$(1)\ a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + \ldots a_n\, s_n$$

(abgesehen von einem Zahlenfaktor) durch successive Polarisation nach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ aus der binären Form

$$(2)\ a_\lambda^n \equiv a_0 + na_1\lambda + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,a_2\,\lambda^2 + \ldots + a_n\,\lambda^n$$

die aus a_s durch Gleichsetzen aller λ fliesst.

(Man nennt, wenn eine binäre Form $\varphi(\lambda)$, oder homogen geschrieben $\varphi(\lambda,\mu)$, gegeben ist, den Ausdruck

$$(3)\ \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}\,\lambda_1 + \frac{\delta\varphi}{\delta\mu} \text{ (wo man wieder } \mu = 1 \text{ setzen kann)}$$

die Polare von φ, genommen nach λ_1 oder auch: die Form (3) entsteht aus φ durch Polarisation nach λ_1.)

Nach der Gordan'schen Bezeichnungsweise (Zur Theorie der binären Formen, Programm, 1875) wird durch Polarisation einer Form a_λ^n nach λ_1 „$a_\lambda^{n-1}{}_{\lambda 1}$“: durch Polarisation nach λ_1, λ_2 „$a_\lambda^{n-2}\,\lambda_1\lambda_2$“ mithin

$$(4)\ a_s \equiv a_{\lambda_1\lambda_2} \cdots {}_{\lambda_n}$$

(Die Richtigkeit dieser Formel ersieht man übrigens unmittelbar daraus, dass die rechte Seite $a_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ linear und symmetrisch in den λ sein muss und durch Gleichsetzen aller λ nach dem Euler'schen Satze über homogene Funktionen in a_λ übergeht.)

9. Nun war, um zunächst wieder an unsern Typus, die R_4^2 (§ 3) anzuknüpfen, das zu

$$(5)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + a_{i1}\lambda^3 + \ldots a_{i4} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gehörige Schnittpunkttheorem gegeben durch

$$(6)\ \alpha_s \equiv \Sigma\, \alpha_i\, s_i\, (-1)^i = 0 \qquad \beta_s \equiv \Sigma\beta_i\, s_i\, (-1)^i = 0$$

wo $(7)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} = 0 \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$

Aus α_s entsteht nach Gleichsetzung aller λ

$$(8)\ \alpha_\lambda^4 \equiv \alpha_0 - 4\,\alpha_1\,\lambda + 6\,\alpha_2\,\lambda^2 - 4\,\alpha_3\,\lambda^3 + \alpha_4\,\lambda^4.$$

Die bilineare Invariante der Formen α_λ^4 resp. β_λ^4 und $\varphi_i(\lambda)$ hat den Werth

$$(9)\ \Sigma_r\, \alpha_r\, a_{ir} \qquad \text{resp.} \qquad \Sigma_r\, \beta_r\, a_{ir}.$$

Diese verschwinden also gemäss (7) sämmtlich.

In diesem Falle heissen bekanntlich α_λ^4 resp. β_λ^4 und $\varphi_i(\lambda)$ apolar zu einander (nach Reye) oder conjugirt (nach Rosanes)[4)].

Das vollkommen analoge Resultat ergiebt sich für das Schnittpunkttheorem der R_n^d (§ 3).

Demnach hat man den wichtigen Satz:

„Setzt man im Schnittpunkttheorem einer R_n^d

$$(10)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + \ldots a_{in} \qquad (i = 0, 1 \ldots d)$$

$$(11)\ a_{1,\,s} = 0 \qquad a_{2,\,s} = 0 \ldots \qquad a_{n-d,\,s} = 0$$

alle Argumente $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ gleich λ, so sind die entsprechenden Formen

$$(12)\ \overset{n}{a}_{1,\lambda},\qquad \overset{n}{a}_{2,\lambda},\ldots\qquad \overset{n}{a}_{n-d,\lambda}$$

apolar zu den Formen $\varphi_i(\lambda)$."

Dann ist aber bekanntlich auch jede lineare Combination der Formen (12) apolar zu jeder linearen Combination der $\varphi_i(\lambda)$, oder (mit Rosanes):

„Die „$(n-d)$ gliedrige Gruppe" der $\overset{n}{a}_{k,\lambda}$ $(k = 1 \ldots (n-d))$ ist apolar zur $(d+1)$ gliedrigen Gruppe der $\varphi_i(\lambda)$ $(i = 0, 1, \ldots d)$."

Wir nennen die Formen (12) (aus denen also nach Nr. 8 mittelst successiver Polarisation nach $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die linken Seiten des Schnittpunkttheorems entstehen) die „Schnittpunktformen" der R_n^d.

Da nun alle zu $(d+1)$ binären Formen n^{ten} Grades apolaren Formen eine $(n-d)$ gliedrige Gruppe bilden (und umgekehrt), so können wir sagen:

Satz. „Die Schnittpunktformen einer R_n^d

$$(10)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + \ldots a_{in} \quad (i = 0, 1, \ldots d)$$

bilden die zu den $\varphi_i(\lambda)$ apolare Gruppe

$$(13)\ \psi_k(\lambda). \qquad (k = 1, \ldots (n-d).)\text{“}$$

Diese Fassung des Fundamentalsatzes der rationalen Curven lässt sofort die Evidenz des §. 4 bewiesenen Reciprocitätssatzes hervortreten. Denn aus der Reciprocität der Apolarität der φ_i und ψ_k folgt sofort, dass die φ_i die Schnittpunktformen der R_n^{n-d-1}

$$(14)\ \sigma x_k \equiv \psi_k \text{ sind.}$$

Fassen wir Alles zusammen, so gewinnt endlich unser Fundamentalsatz die Gestalt:

Satz. „Hat man zwei binäre Formengruppen n^{ten} Grades

$$\varphi_i(\lambda)\ (i = 0, 1, \ldots d) \qquad \psi_k(\lambda)\ (k = 0, 1 \ldots n-d-1)$$

von der Art, dass jede die *vollständige* zur andern apolare Gruppe ist, so entsteht durch Polarisation der einen Gruppe nach n Werthen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und Nullsetzen das Schnittpunkttheorem der andern Gruppe (d. h. der Curve $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ resp. $\rho x_k = \psi_k(\lambda)$)."

§. 6.

Das lineare Schnittpunkttheorem höherer Ordnung.

10. Dieses leitet sich, wie das der ersten Ordnung, mit Zugrundelegung des Hülfssatzes ab:

„Wenn unter den Werthsystemen der s_i, welche der Bedingung

$$a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + \ldots a_n s_n = 0$$

genügen, sich das Wurzelsystem einer binären Form

$$b_\lambda \equiv b_0 \lambda^n - b_1 \lambda^{n-1} + \ldots . (-1)^n b_n$$

befinden soll, so müssen die beiden Formen

$$b_\lambda, \text{ und } a_\lambda \equiv a_0 + n a_1 \lambda + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\, a_2 \lambda^2 + \ldots + a_n \lambda^n$$

apolar sein und umgekehrt."

Wir wenden diesen Satz zunächst wieder auf unser Beispiel, die R_4^2 an. Ein Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ ist durch fünf Punkte bestimmt und schneidet die R_4^2 in acht Punkten, so dass zwischen den diesen entsprechenden Werthen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_8$ drei Relationen bestehen, die linear in den s_i $(i = 0, 1, \ldots 8)$ sind.

Wollten wir direkt verfahren wie in No. 1, so würden wir die Gleichung achten Grades, deren Wurzeln $\lambda_1 \ldots \lambda_8$ sind, aufstellen. Ihre Coefficienten, homogene lineare Funktionen der sechs Coefficienten von a_x^2, sind den s_i proportional. Die Elimination der ersteren liefert eine verschwindende Matrix von 9 bez. 7 Reihen, die drei Gleichungen

$$\alpha_s = 0 \qquad \beta_s = 0 \qquad \gamma_s = 0$$

aequivalent ist. Aber in welchem engeren Zusammenhang stehen die drei Formen „α_λ, β_λ, γ_λ" zu den drei Formen $\varphi_i(\lambda)$?

Diesen finden wir nun einfach so.

Unter den Kegelschnitten $a_x^2 = 0$ (mit variablen Coefficienten) befinden sich unendlich viele Geradenpaare und doppelt zählende Gerade, deren Schnitte mit der R_4^2 durch Gleichungen von der Form „$u_\varphi\, v_\varphi = 0$, $u_\varphi^2 = 0$" dargestellt werden. Speciell, den Seiten des Coordinatendreiecks entsprechend, sind unter ihnen die Gleichungen $\varphi_i\,\varphi_k = 0$, $\varphi_i^2 = 0$ enthalten. Aus ihren linken Seiten setzt sich die gesuchte, allgemeinste Gleichung achten Grades linear zusammen.

„Demnach stellt die zu jenen sechs Gleichungen, d. h. zur Gruppe a_φ^2 conjugirte Gruppe die gesuchten drei Gleichungen $\alpha_\lambda = 0$ $\beta_\lambda = 0$ $\gamma_\lambda = 0$ oder, was dasselbe ist, die Gruppe „$\varkappa\alpha_\lambda + \lambda\beta_\lambda + \mu\gamma_\lambda$" dar (wo $\varkappa$, λ, μ variabel sind)".

So gilt allgemein der Satz:

„Das lineare Schnittpunkttheorem p^{ter} Ordnung einer R_n^d (welches dem Schnittpunktsystem der R_n^d und eines $(n-1)$fach ausgedehnten Gebildes p^{ter} Ordnung $a_x^p = 0$ entspricht) besteht aus der Gleichungsgruppe

$$a_s = 0 \qquad b_s = 0 \ldots .$$

deren zugehörige Formengruppe

$$a_\lambda,\ b_\lambda \ldots .$$

conjugirt ist zur Gruppe der $p$fachen Potenzen und Produkte der $\varphi_i(\lambda)$."

§. 7.

Einfluss von Identitäten zwischen den Potenzen und Produkten der $\varphi_i(\lambda)$ und deren Aufstellung.

11. Wie man weiss, erhöht sich die Gliederzahl der zu einer Anzahl von binären Formen gleicher Ordnung conjugirten Gruppe, wenn zwischen den ersteren eine oder mehrere Identitäten stattfinden.

Findet nun zwischen den $p$fachen Potenzen und Producten der $\varphi_i(\lambda)$ eine Identität statt, so heisst dies, geometrisch gesprochen, es existirt ein gewisses Gebilde $a_x^p = 0$, das die vorgelegte R_n^d ganz enthält und umgekehrt. So giebt es bekanntlich eine und nur eine Fläche zweiter Ordnung, die irgend eine gegebene R_4^3 enthält.

Jene sei $a_x^2 = 0$, diese $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Setzt man die $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ in a_x^2 ein, so muss der entstehende Ausdruck achten Grades in λ identisch verschwinden, d. h. zwischen den zehn binären Formen $\varphi_i\varphi_k, \ldots \varphi_i^2 \ldots$ herrscht eine Identität. Wie findet man diese in ihrer einfachsten Form? d. h. wie bestimmt man die Coefficienten in a_x^2? In diesem Falle erhielte man unmittelbar neun lineare Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung der gesuchten Coefficienten.

Es soll aber ein Verfahren angegeben werden, das in der That bei Weitem einfacher zum Ziele führt, nicht nur in diesem, sondern allen ähnlichen Fällen, in denen man meistens nicht so unmittelbar, wie eben, zur Lösung gelangen möchte. Die Kraft dieses Verfahrens erstreckt sich überhaupt tief in die Theorie der rationalen Gebilde [5].

Betrachten wir zuvor noch den nächst einfacheren Fall ebener rationaler Curven. Bei ihnen tritt der Typus des angekündigten Verfahrens am deutlichsten hervor.

Die Identität niederster Ordnung, die hier auftreten kann, ist die *eine* zwischen den *n*fachen Produkten und Potenzen der $\varphi_i(\lambda)$, die bei Ersetzung der $\varphi_i(\lambda)$ durch die x_i in die Gleichung der Curve in den Coordinaten x_i übergeht.

So erhält man beispielsweise für die R_3^2 zehn binäre Formen neunter Ordnung und zwischen ihnen eine Identität. Dann giebt es aber eine eilfte zu allen jenen conjugirte Form gleicher Ordnung. Sei diese A_λ, so stellt dann $A_s = 0$ das Schnittpunkt theorem dritter Ordnung dar.

Zwischen den vierfachen Produkten und Potenzen der $\varphi_i(\lambda)$ finden dann drei (und somit ∞^2) Identitäten statt, die aus der obigen durch Multiplication mit u_φ (mit willkürlichen u_i) hervorgehen. Daher giebt es zu jenen fünfzehn Formen zwölfter Ordnung wieder eine conjugirte etc. wie oben; etc. für eine R_n^2.

Somit ist die Frage nach den im Falle der (allgemeinen) R_n^2 überhaupt auftretenden Identitäten zurückgeführt auf Herstellung ihrer Gleichung in den Coordinaten x_i d. h. auf Elimination von ρ und λ aus dem gegebenen System

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) \qquad (i = 0, 1, 2).$$

Diese Aufgabe als solche ist schon mehrfach [6)] (so namentlich von Herrn Brill) behandelt worden: hier kommt es darauf an, unser allgemeines Verfahren an einem Beispiel zu verdeutlichen.

12. Zu dem Zwecke genügt wieder das alte Beispiel der R_4^2

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4}.$$

Combinirt man dies System mit dem andern zweier Geraden

$$u_x = 0 \qquad v_x = 0$$

so haben die beiden Gleichungen

$$u_\varphi = 0 \qquad v_\varphi = 0$$

dann und nur dann eine Wurzel gemein, wenn der Punkt (uv) auf der R_4^2 liegt.

Nun ist nach Bézout [7] die Resultante zweier binärer Formen vierter (n^{ter}) Ordnung

$$(1)\quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \dots + a_4 \\ b_\lambda \equiv b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + \dots + b_4 \end{cases}$$

in der Form (aus der ihre Combinanteneigenschaft unmittelbar erhellt) darstellbar:

$$(2)\, R \equiv \begin{vmatrix} p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{02} & p_{03}+p_{12} & p_{04}+p_{13} & p_{14} \\ p_{03} & p_{04}+p_{13} & p_{14}+p_{23} & p_{24} \\ p_{04} & p_{14} & p_{24} & p_{34} \end{vmatrix} \quad \text{wo } p_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix}.$$

In unserm Fall ist

$$(3)\quad a_\lambda \equiv u_\varphi \qquad b_\lambda \equiv v_\varphi$$

$$\text{also } (4) \begin{cases} a_r \equiv u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \\ b_r \equiv v_i\, a_{ir} + v_k\, a_{kr} + v_l\, a_{lr} \end{cases} \qquad (i, k, l = 0, 1, 2)$$

mithin nach bekannter Umformung ($(uv)_i = u_k\, v_l - u_l\, v_k$)

$$(5)\, p_{rs} \equiv \begin{vmatrix} (uv)_i & (uv)_k & (uv)_l \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} \end{vmatrix} \equiv \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} \end{vmatrix} \equiv \sigma\, D_{rs} \equiv \sigma \,|\, x A_r A_s |$$

da die $(uv)_i$ den Coordinaten x_i des Schnittpunkts (uv) proportional sind. Durch Einsetzen dieser Werthe der p_{rs} in

$$R = 0$$

gelangt man nach Abscheidung des Faktors σ^4 zu der gewünschten Gleichung (resp. Identität), die aussagt, wann ein Punkt (x) auf der R_4^2 liegt d. h. zur Gleichung der Curve in Punktcoordinaten.

Sehen wir weiter zu, wie sich der Ausdruck R, resp. die Gleichung $R = 0$ für die Curven höherer Räume modificirt.

Es wird genügen, beim nächst höheren Fall, dem Beispiel der R_4^3, stehen zu bleiben.

Die p_{rs} werden jetzt zu:

$$(6) \begin{vmatrix} u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr} + u_m a_{mr}, & u_i a_{is} + u_k a_{ks} + u_l a_{ls} + u_m a_{ms} \\ v_i a_{ir} + v_k a_{kr} + v_l a_{lr} + v_m a_{mr}, & v_i a_{is} + v_k a_{ks} + v_l a_{ls} + v_m a_{ms} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_m & u_l & u_k & u_i \\ v_m & v_l & v_k & v_i \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l & x_m \\ y_i & y_k & y_l & y_m \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \end{vmatrix} = \sigma \left| x\, y\, A_r A_s \right| = \sigma D_{rs}$$

wenn man die Axencoordinaten $(uv)_{ik}$ durch die ihnen proportionalen Strahlencoordinaten $(xy)_{lm}$ ersetzt; $p_{rs} = 0$ würde die Gleichung der Geraden darstellen, die die beiden Punkte A_r, A_s verbindet.

$R = 0$ repräsentirt dann den Complex der Geraden, die die R_4^3 treffen.

Mit Benützung der obigen, leicht zu erweiternden, Bezeichnung spricht sich dann für den Fall einer Form R das allgemeine Resultat so aus:

Satz. „Lässt man in der Bézout'schen Resultantendeterminante zweier binärer Formen n^{ter} Ordnung die p_{rs} übergehen in die ihnen proportionalen

$$(7)\ D_{rs} = \left| x\ y\ z\ \ldots\ A_r\ A_s \right|$$

(wo $D_{rs} = 0$ die Gleichung der Verbindungsgeraden der beiden Punkte A_r, A_s darstellen würde),

so repräsentirt nunmehr

$$(8)\ R = 0$$

alle Lineargebilde $(d-2)^{ter}$ Dimension, die die Curve R_n^d:

(9) $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \dots a_{in} \quad (i = 0, 1, \dots d)$ treffen, oder wenn man will: $R = 0$ ersetzt das System der Gleichungen $\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$ durch eine einzige."

13. In entsprechender Weise verfährt man, wenn man es nicht bloss mit einer Resultante R, sondern mit einem ganzen System solcher zu thun hat. Als Beispiel wählen wir hier die Ableitung einer der oben besprochenen Identitäten, und zwar für den schon hervorgehobenen Fall einer R_4^3.

Wir suchen also, geometrisch zu reden, die eine, durch eine solche Curve gehende Fläche zweiter Ordnung.

Soll der Schnittpunkt dreier Ebenen

$$(10) \quad u_x = 0 \quad v_x = 0 \quad w_x = 0$$

auf der R_4^3: $\quad (11) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda)$

liegen, so müssen die drei biquadratischen Gleichungen

$$(12) \quad u_\varphi = 0 \quad v_\varphi = 0 \quad w_\varphi = 0$$

eine Wurzel gemein haben. Man hat demnach, wenn drei biquadratische Gleichungen gegeben sind

$$(13) \quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + \dots a_4 = 0 \\ b_\lambda \equiv b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + \dots b_4 = 0 \\ c_\lambda \equiv c_0\lambda^4 + c_1\lambda^3 + \dots c_4 = 0 \end{cases}$$

diejenige Bedingung zweiten Grades in den (abc) zu suchen, die jedenfalls erfüllt sein muss, wenn eine gemeinsame Wurzel vorhanden sein soll. Hier ergiebt sich diese Bedingung sofort durch Multiplication der drei Gleichungen

$$a_\lambda = 0 \quad b_\lambda = 0 \quad c_\lambda = 0$$

mit λ und Elimination der Potenzen von λ aus den so gewonnenen sechs Gleichungen:

$$(14)\ 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} \text{ oder entwickelt:}$$

$$(15)\ 0 = \Delta_{012}\Delta_{234} - \Delta_{013}\Delta_{134} + \Delta_{014}\Delta_{124} + \Delta_{023}\Delta_{034} - \Delta_{024}^2 + \Delta_{034}\Delta_{014} \equiv \Delta.$$

Da in unserm Falle der R_4^3 die a_λ, b_λ, c_λ zu ersetzen sind durch die resp. u_φ, v_φ, w_φ, so ist

$$(16)\ \Delta_{rst} = \begin{vmatrix} u_i a_{ir} + u_k a_{kr} + u_l a_{lr} + u_m a_{mr}, & v_i a_{ir} + \ldots, & w_i a_{ir} + \ldots, \\ u_i a_{is} + u_k a_{ks} + u_l a_{ls} + u_m a_{ms}, & v_i a_{is} + \ldots, & w_i a_{is} + \ldots, \\ u_i a_{it} + u_k a_{kt} + u_l a_{lt} + u_m a_{mt}, & v_i a_{it} + \ldots, & w_i a_{it} + \ldots, \end{vmatrix}$$

$$= \sigma \begin{vmatrix} x_i & x_k & x_l & x_m \\ a_{ir} & a_{kr} & a_{lr} & a_{mr} \\ a_{is} & a_{ks} & a_{ls} & a_{ms} \\ a_{it} & a_{kt} & a_{lt} & a_{mt} \end{vmatrix} = \sigma \,|\, x A_r A_s A_t \,| = \sigma D_{rst}$$

wo wieder die $(uvw)_{lmn}$ durch die proportionalen x_i ersetzt sind. $D_{rst} = 0$ würde die Ebene der drei Punkte A_r, A_s, A_t darstellen.

Die so umgeformte Gleichung $\Delta = 0$ ist dann in der That die Gleichung der gesuchten Fläche zweiten Grades resp. wenn man für die x_i wieder die proportionalen $\varphi_i(\lambda)$ substituirt, die gewünschte Identität zwischen den zweiten Potenzen und Produkten von vier binären Formen vierten Grades *).

14. Als ein weiteres Beispiel diene noch das bekannte

---

*) Genau in derselben Weise bildet man die Gleichung der einen Fläche dritter Ordnung, die durch eine allgemeine rationale Raumcurve sechster Ordnung geht [8].

Flächennetz zweiter Ordnung, dessen Individuen sämmtlich durch eine gegebene Raumcurve dritter Ordnung gehen. Sei diese

$$(17)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\,\lambda^3 + a_{i1}\,\lambda^2 + a_{i2}\,\lambda + a_{i3}$$

so haben wir zunächst alle Combinanten, zweiten Grades in den Coefficienten, von drei binären Formen dritten Grades

$$a_\lambda^3,\ b_\lambda^3,\ c_\lambda^3$$

aufzustellen, die verschwinden, wenn die drei Formen einen gemeinsamen Faktor besitzen. Sei dieser α und die dreireihigen Determinanten (abc) mit Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 bezeichnet, so ergiebt die Auflösung der drei Gleichungen

$$(18)\quad a_\alpha^3 = 0 \qquad b_\alpha^3 = 0 \qquad c_\alpha^3 = 0:$$

$$(19)\quad \alpha^3 : \alpha^2 : \alpha : 1 = \Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3$$

d. h. es verschwinden alle Kerne der Matrix

$$\begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \end{vmatrix}$$

daher lautet die Gleichung des Flächennetzes, wenn v_1, v_2, v_3 drei homogene Parameter bedeuten, und die Δ_i wie im vorigen Beispiele in die $|x\ A_k\ A_l\ A_m|$ übergeführt sind:

$$(20)\ (\Delta_0\,\Delta_2 - \Delta_1^2)\,v_1 + (\Delta_0\,\Delta_3 - \Delta_1\,\Delta_2)\,v_2 + (\Delta_1\,\Delta_3 - \Delta_2)\,v_3 = 0.$$

Anm. Nach Gordan [9]) sind alle Combinanten eines Systems von n binären Formen n^{ten} Grades

$$a_x^n,\ b_x^n,\ c_x^n,\ \ldots\ n_x^n$$

Invarianten der einen Form n^{ten} Grades, ihrer „Fundamentalcombinante"
$Q = (ab)\,(ac)\,(ad)\ldots(an)\,(bc)\,(bd)\ldots(bn)\ldots\ldots(mn)\ a_x\, b_x\ \ldots\ n_x$
Man erkennt aus obigem Beispiel, das unmittelbar verallgemeinert werden kann, sofort den bekannten Satz:

„Die Bedingungen dafür, dass n binäre Formen n^{ten} Grades einen Faktor gemein haben, sind aequivalent den anderen, dass ihre Fundamentalcombinante Q n gleiche Wurzeln besitzt."

Eine weittragende Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, dass von n binären Formen m^{ten} Grades p Formen r gemeinsame Faktoren haben, findet sich in einem späteren Abschnitt des Werkes.

15. Aus diesen Beispielen erhellt der allgemeine Satz, dessen Ausspruch für rationale Raumcurven (R_n^3) genügen wird:

Satz. „Unter all den Bedingungsgleichungen, die stattfinden, wenn drei binäre Formen n^{ten} Grades

$$(21) \quad a_\lambda^n \quad b_\lambda^n \quad c_\lambda^n$$

einen gemeinsamen linearen Faktor besitzen, wähle man die aus, die nur von den dreireihigen Determinanten $(abc)_{rst} = \Delta_{rst}$ abhängen: ist eine derselben

$$(22) \quad R(\Delta) = 0$$

und führt man die Δ_{rst} über in die proportionalen

$$(23) \quad D_{rst} = |x \; A_r \; A_s \; A_t|$$

so stellt dann die Gleichung

$$(24) \quad R\,(D) = 0$$

immer eine Fläche dar, die die R_n^3

$$(25) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots a_{in}$$

ganz enthält, resp. die Gleichung

$$(26) \quad R\,(D_\varphi) \equiv R\,(|\varphi \; A_r \; A_s \; A_t|) = 0$$

eine Identität bestimmten Grades zwischen den φ_i. Das ganze System $R\,(D) = 0$ repräsentirt somit ein ganzes System von Flächen, deren gemeinsamer Schnitt die gegebene Curve ist."

16. Es ist ersichtlich, wie sich der Satz nach drei Richtungen erweitert; einmal, wenn an Stelle der Δ_{rst} der Reihe nach $|x, y, A_r \; A_s \; A_t|$; $|x, y, z, A_r \; A_s \; A_t|$ etc. treten: andrerseits, wenn sich die Zahl der binären Formen gleichen Grades, die einen gemeinsamen Faktor haben, vergrössert, und endlich, wenn dieser Faktor nicht nur ein linearer, sondern von höherer Ordnung ist.

Wir kommen später von anderer Seite darauf zurück: hier möge dagegen hervorgehoben werden, in welcher Beziehung die explicirte Umformung der Determinanten (ab), (abc) etc. zu dem bekannten Hesse-Clebsch'schen Uebertragungsprincipe steht. Dieses lautet in seiner einfachsten Form (vgl. z. B. die Darstellung in den Vorlesungen über Geometrie von Clebsch-Lindemann) [10], wenn wir zum bequemeren Anschluss an das Obige die zur gewöhnlichen dualistische Formulirung wählen:

„Soll in einer Ebene von einem Punkte an eine Curve n^{ter} Classe eine Tangentengruppe mit einer besondern projektivischen Eigenschaft gehen, so erhält man die Gleichung für den Ort dieses Punktes auf die Weise: Man stelle die Invariante der binären Form n^{ter} Ordnung, deren Verschwinden die geforderte Eigenschaft aussagt, symbolisch dar und ersetze jede in ihr vorkommende Determinante (ab) durch eine dreigliedrige (abx), wo die x die Coordinaten des Punktes und die $a, b, \ldots$ Symbole der gegebenen ternären Form oder wie man auch sagen kann, die Coordinaten eines Punktes bedeuten, der $n$fach gezählt, die gegebene Classencurve symbolisch repräsentirt."

Die Erweiterung dieses Prinzipes besteht dann einmal darin, dass man die Determinanten (ab) der Reihe nach überführt in (abx) $(abxy)$ $(abxyz)$ etc.; andrerseits von den Invarianten ternärer, quaternärer etc. Formen ausgeht, die als symbolische Aggregate von Determinanten (abc) $(abcd)$ etc. auftreten.

Nun ist offenbar die angegebene Ränderung dieser Determinanten (ab) (abc) $(abcd)$ etc. genau dieselbe wie bei unseren Betrachtungen, nur dass diese Determinanten keine symbolischen sind, sondern real aus den Coefficianten der gegebenen binären (ternären etc.) Formen gebildet sind.

Nimmt man den Gordan'schen [11] Satz zu Hülfe, dass alle Combinanten eines Systemes von m binären (ternären etc.) Formen gleicher Ordnung (d. h. diejenigen simultanen Invarianten des Systemes, die sich bei Ersetzung der ursprünglichen Formen durch lineare Combinationen derselben nur um einen Faktor ändern) ganze Funktionen der aus den Coefficienten zu bildenden Determinanten m^{ter} Ordnung sind, so kann man unser Princip im einfachsten Falle so ausdrücken:

Ein Strahlbüschel, der eine ebene rationale Curve R_n^2 in einer solchen Schaar (Involution) von Punktgruppen trifft, dass je zwei von ihnen in einer und derselben, vorgegebenen, projektivischen Beziehung zu einander stehen, heisse „ein in Bezug auf die R_n^2 zu sich selbst conjugirter Strahlbüschel“.

Die Gleichung für den Ort der Büschelspitze erhält man so: „Sei die R_n^2 dargestellt durch

$$(27) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots a_{in} \quad (i = 1, 2, 3,)$$

so bilde man für irgend zwei binäre Formen n^{ten} Grades (etwa zwei der φ_i selbst) die Combinante, deren Verschwinden aussagt, dass die beiden Formen in der vorgegebenen Beziehung zu einander stehen, und ersetze jede Coefficientendeterminante $(A_i\ A_k)$ durch $|x\ A_i\ A_k|$, wo die x Coordinaten des Punktes und die A_i, A_k *) die resp. Verticalcoefficienten der drei φ_i sind.“

Daraus ergiebt sich die Formulirung des Prinzipes für den allgemeinsten Fall von selbst.

Man bemerkt, dass in den oben gegebenen Anwendungen des Prinzips nur von der projektivischen Beziehung Gebrauch gemacht ist, dass die beiden Punktgruppen einen Punkt gemeinsam haben.

---

*) Fasst man diese als Coordinaten von Punkten auf, wie es bereits oben geschehen, und später noch weiter verfolgt werden soll, so tritt die Analogie des Prinzipes mit dem Hesse-Clebsch'schen noch mehr hervor. Dasselbe gilt für das erweiterte Prinzip.

Ausgedehntere Anwendungen ergeben sich zur Genüge im Laufe der Entwicklung: nur ein einfaches und sehr bekanntes Beispiel diene vorläufig zur Illustration des Gesagten.

17. Die einfachste Combinant-Invariante zweier cubischer binärer Formen (28) a_λ^3, b_λ^3 ist

$$(29)\quad (ab)^3 = (ab)_{03} - \frac{1}{3}(ab)_{12}$$

Ihr Verschwinden bedingt die Apolorität beider Formen.

Somit giebt es für eine R_3^2

$$(30)\quad \rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}$$

eine invariante Gerade

$$(31)\quad \Delta_{03} - \frac{1}{3}\Delta_{12} \equiv |x\,A_0\,A_3| - \frac{1}{3}|x\,A_1\,A_2| = 0,$$

der Ort der Punkte, deren Strahlbüschel Punktgruppen ausschneiden, die zu einander apolar sind. Der Schnitt dieser Geraden mit der Curve wird bestimmt durch die Gleichung:

$$(32)\quad -\lambda^3\frac{\Delta_{012}}{3} + \Delta_{103}\lambda^2 + \Delta_{203}\lambda - \frac{\Delta_{302}}{3} = 0$$

deren Wurzeln die Argumente der drei Wendepunkte*) sind.

Bei der Erweiterung des Verfahrens auf den Raum erhält man [12]): durch jeden Punkt im Raume geht eine Ebene (Strahlbüschel), die die Osculationspunkte der drei vom gegebenen Punkte an eine feste Raumcurve dritter Ordnung

*) Dies ergibt sich auch unmittelbar aus dem bekannten [13]) Satze, dass, wenn von zwei zu einander apolaren, binären Formen n^{ter} Ordnung die eine eine n^{te} Potenz ist, $= (\lambda-\alpha)^n$, so ist $(\lambda-\alpha)$ ein Faktor der andern.

Daraus folgt für unsern Fall, dass, wenn sich in der Involution $a_\lambda^3 + \nu b_\lambda^3$ eine Potenz $(\lambda-\alpha)^3$ befindet, alle Formen des Systems den Faktor $(\lambda-\alpha)$ gemeinsam haben. Daher müssen die Schnittpunkte unserer invarianten Geraden mit der R_n^2 zugleich ihre Schnittpunkte mit den Wendetangenten sein, d. h. die Wendepunkte selber.

gehenden Osculationsebenen enthält (das Möbius'sche Nullsystem). Ist die Curve dargestellt durch

(33) $\rho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3}$

so ist das System dargestellt durch:

(34) $|x\, y\, A_0\, A_3| - \frac{1}{3}\ |x\, y\, A_1\, A_2| = 0$ oder entwickelt nach den Liniencoordinaten p_{ik}:

(35) $$\Sigma p_{ik} \begin{vmatrix} a_{10} & a_{13} \\ a_{mo} & a_{m3} \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\Sigma p_{ik} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{m1} & a_{m2} \end{vmatrix} = 0$$

oder in abgekürzter Bezeichnung: (36) $\Sigma p_{ik}\,(\varphi_l\,\varphi_m)^3$

$$\equiv \Sigma p_{ik}\ \left\{(lm)_{03} - \frac{1}{3}\ (lm)_{12}\right\} = 0 \qquad (i, k, l, m = 1, 2, 3, 4.)$$

§. 8
Weitere Entwicklung des linearen Schnittpunkttheorems mit Hülfe des Satzes $\Phi_{n,\mu} \equiv |\varphi_i(\lambda_1)\ \varphi_i(\lambda_2) \ldots \varphi_i(\lambda_\mu)| = D_\mu(\lambda)\ \mathrm{A}_{n,\mu}$ $(i = 1, 2, \ldots \mu)$.

18. Dieser Satz behauptet die Zerlegbarkeit der Determinante der φ_i wo wieder

(1) $\varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^n + a_{i1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{in}$

in zwei Faktoren, deren einer $D_\mu(\lambda)$ das Differenzenprodukt der μ Argumente λ_i ist, der andere A gleich der $(n+1)$-reihigen Determinante

$$\mathrm{A}_{n,\mu} \equiv \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & \ldots & a_{i\mu} & a_{i,\mu+1} & a_{i,\mu+2}, & \ldots & a_{in} \\ a_{k0} & a_{k1} & \ldots & a_{k,\mu} & a_{k,\mu+1}, & a_{k,\mu+2}, & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & & \cdots \\ \ldots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdot\ \cdot & \alpha_\mu & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \ldots & \alpha_{\mu-1}, & \alpha_\mu & 0 & \cdot\ \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 \ldots & \alpha_{\mu-2}, & \alpha_{\mu-1}, & \alpha_\mu, & & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdots \end{vmatrix}$$

in der die α durch die Gleichung bestimmt sind:

$$(3)\ \psi(\lambda) \equiv \alpha_0 \lambda^{\mu} + \alpha_1 \lambda^{\mu-1} + \dots \alpha_{\mu} \equiv \alpha_0(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_{\mu})$$

Dass Φ das Differenzenprodukt $D(\lambda)$ als Faktor enthält, erhellt sofort daraus, dass Φ verschwindet, sobald zwei der λ_i einander gleich werden. Dass der zweite Faktor A in obige Form gebracht werden kann, hat Garbieri [14] nachgewiesen.

Wir wollen dies Resultat auf einem andern, höchst einfachen Wege nachweisen, der zugleich für die weiteren Entwicklungen äusserst fruchtbar ist.

Die Methode des Beweises wird hinlänglich an unserem alten Beispiele klar, für das $\mu = 3$, $n = 4$ ist. Wir knüpfen zu dem Zwecke wieder an die Entwicklungen des §. 2 an.

Zunächst ist

$$(4)\quad \Phi_{4,3} = |\varphi_i(\lambda_1)\ \varphi_i(\lambda_2)\ \varphi_i(\lambda_3)|\ (i = 1, 2, 3)$$

die linke Seite der Bedingungsgleichung, die aussagt, dass drei Punkte mit den Argumenten

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ der R_4^2: (5) $\rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + a_{i1}\lambda^3 + \dots a_{i4}$

auf einer Geraden liegen.

In §. 2 wurde die Bedingung aufgesucht, dass vier Punkte der R_4^2: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ auf einer Geraden liegen. Dies führte auf die Aufgabe, aus den Gleichungen

$$(6)\quad \rho s_r\ (-1)^r = u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \begin{Bmatrix} i, k, l = 1, 2, 3 \\ r = 0, 1, ..4 \end{Bmatrix}$$

ρ und die u zu eliminiren. Hierbei waren die s_r die elementarsymmetrischen Funktionen der λ.

Soll dagegen jetzt die gesuchte Bedingung die sein, dass drei Punkte $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in gerader Linie liegen, so haben wir aus demselben Gleichungssystem nebst ρ und den u noch λ_4 zu eliminiren. Zu dem Zweck hat man die s_r durch λ_4 und die elementarsymmetrischen Funktionen σ_ν der drei Argumente $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auszudrücken. „Dies kann aber geschehen, ehe man ρ und die u eliminirt hat oder auch nachher. So gelangt man zu zwei verschiedenen Formen der gesuchten Bedingung und somit auch zu zwei Formen für den Factor A, deren eine die Garbieri'sche ist, deren andere aber in engstem Zusammenhange mit den Gordan'schen Betrachtungen über Combinanten steht."

§. 9.

Erste Form des Faktors A.

19. Die s_r drücken sich, wie man sich leicht überzeugt (der allgemeine Beweis für derartige Zerlegungen folgt weiter unten) folgendermassen durch die σ_r und λ_4 aus:

$$(1) \begin{cases} s_0 = \sigma_0 + 0\ \lambda_4 & \begin{Bmatrix} s_0 = 1 \\ \sigma_0 = 1 \end{Bmatrix} \\ s_1 = \sigma_1 + \sigma_0\ \lambda_4 & \\ s_2 = \sigma_2 + \sigma_1\ \lambda_4 \\ s_3 = \sigma_3 + \sigma_2\ \lambda_4 \\ s_4 = 0 + \sigma_3\ \lambda_4 \end{cases}$$

Setzt man dies in das Gleichungssystem

$$(2)\quad \rho s_r\ (-1)^r = u_i\ a_{ir} + u_k\ a_{kr} + u_l\ a_{lr}$$

ein, so kann man sofort die homogenen Variabeln

$$\rho,\ \rho\lambda_4,\ u_i,\ u_k,\ u_l$$

eliminiren. Ersetzt man im Eliminationsresultat die σ_v wieder durch die Coefficienten des Ausdrucks

$$(3)\ \alpha_0\ \lambda^3 + \alpha_1\ \lambda^2 + \alpha_2\ \lambda + \alpha_3 \equiv \alpha_0\ (\lambda-\lambda_1)\ (\lambda-\lambda_2)\ (\lambda-\lambda_3)$$

so werden die abwechselnden Vorzeichen, die vom Faktor $(-1)^r$ herrührten, aufgehoben und man erhält die gesuchte Bedingung in der Form:

$$(4)\quad 0 = \begin{vmatrix} a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l0} & a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} \equiv A'_{4,3}$$

Nun ist

$$(5)\quad \Phi_{4,3} = D_3(\lambda)\, A_{4,3} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)\, A_{4,3} = 0$$

dieselbe Bedingung; da aber $A'_{4,3}$ im Falle des Gleichwerdens zweier λ nicht verschwindet, so ist

$$(6)\quad A'_{4,3} = C A_{4,3}$$

wo der Faktor C noch zu bestimmen ist.

Sowohl $A'_{4,3}$ als $A_{4,3}$ sind vom zweiten Grade in den $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, so dass der Faktor C von diesen unabhängig ist.

Ferner sind beide vom ersten Grade in den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$; mithin hängt C auch von diesen nicht ab.

Entwickelt man endlich $\Phi_{4,3}$ nach den dreireihigen Determinanten, die man aus den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$ bilden kann, so ist z. B. der Faktor von

$$(7)\quad \Delta_{234} = \begin{vmatrix} a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \end{vmatrix} \text{ die Determinante}$$

$$(8)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1) = -D(\lambda)$$

d. h. der Faktor von Δ_{234} in $A_{4,3}$ ist $= -1$.

Entwickelt man ebenso A'_{43}, so ergiebt sich als Faktor von Δ_{234}

$$(9)\quad \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & \alpha_0 \end{vmatrix} = \alpha_0^2$$

demnach ist (10) $-\dfrac{1}{\alpha_0^2} A'_{4,3} = A_{4,3}$, also

$$(11)\quad \Phi_{4,3} \equiv |\, \varphi_i(\lambda_1)\, \varphi_i(\lambda_2)\, \varphi_i(\lambda_3) \,| = -\, D(\lambda)\, A_{4,3}.$$

Man hat daher nur immer darauf zu achten, dass das Differenzenprodukt das richtige Vorzeichen erhält.

20. Es ist nun noch zu zeigen, wie sich diese Betrachtungen für den allgemeinen Fall der Zerlegung von $\Phi_{n,\mu}$ in $D(\lambda)\, A_{n,\mu}$ erweitern.

Was zunächst die Umformung der s_i betrifft, so zerlege man jetzt die n Argumente $\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ in zwei Gruppen

$$(12)\quad \begin{cases} \lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu \\ \lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2}, \ldots \lambda_n \end{cases}$$

von μ resp. $(n-\mu)$ Argumenten und bilde in beiden die bezüglichen elementarsymmetrischen Funktionen

$$(13)\quad \begin{cases} \sigma_0\, \sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_\mu \\ \tau_0\, \tau_1 \ldots \tau_{n-\mu} \end{cases}$$

dann gilt die allgemeine Formel [15]):

$$(14)\quad s_k = \tau_0\, \sigma_k + \tau_1\, \sigma_{k-1} + \tau_2\, \sigma_{k-2} + \ldots \tau_{n-\mu}\, \sigma_{k-(n-\mu)}$$

wo nur zu beachten ist, dass für alle σ, deren Index negativ wird, der Werth 0 einzusetzen ist.

Angenommen, diese Formel sei erwiesen, so setze man diese Werthe der s_k $(k = 0, 1, 2 \ldots n)$ in das Gleichungssystem

$$(15)\quad \rho s_k\, (-1)^k = u_1\, a_{1,k} + u_2\, a_{2,k} + \ldots u_\mu\, a_{\mu,k}$$

ein und eliminire die Grössen

$$\rho\tau_0, \rho\tau_1, \ldots \rho\tau_{n-\mu}, u_1, u_2, \ldots u_\mu.$$

Ersetzt man dann im Eliminationsresultat die σ durch die Coefficienten der Form

$$(16)\quad \psi(\lambda) \equiv \alpha_0\, \lambda^\mu + \alpha_1\, \lambda^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$(17)\quad A'_{n,\mu} = 0$$

Jetzt schliesst man weiter, wie oben:

$A'_{n,\mu}$ und $A_{n,\mu} = \frac{\Phi_{n,\mu}}{D_\mu(\lambda)}$ sind vom Grade $n + 1 - \mu$ in den μ Argumenten λ und vom ersten in den μ-reihigen Determinanten der Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$. Der Faktor C, um den sich $A_{n,\mu}$ und $A'_{n,\mu}$ unterscheiden wird daher bestimmt, indem man zwei entsprechende Glieder aufsucht, z. B. die beiden constanten Glieder. Er ergiebt sich gleich $+$ resp. $- \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}}$ so dass schliesslich

$$(18)\quad \Phi_{n,\mu} = \pm D(\lambda)\, A_{n,\mu}$$

Man kann das doppelte Vorzeichen vermeiden, wenn man $D(\lambda)$ gleich der Determinante

$$(19)\quad \begin{vmatrix} \lambda_1^{\mu-1} & \lambda_2^{\mu-1} & \dots & \lambda_\mu^{\mu-1} \\ \lambda_1^{\mu-2} & \dots & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1 \end{vmatrix}$$

nimmt, so dass es immer dasselbe Vorzeichen erhält wie das Glied

$$(20)\quad \lambda_1^{\mu-1} \,.\, \lambda_2^{\mu-2} \,.\, \lambda_3^{\mu-3} \dots . 1$$

und zugleich $A_{n,\mu}$ in der Form schreibt:

$$(21)\; A_{n,\mu} = \frac{1}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \dots\dots & \alpha_\mu & 0 & 0 \dots . 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \dots & \alpha_{\mu-1} & \alpha_\mu & 0 \dots . 0 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \dots\dots & \alpha_\mu & 0 \,. . 0 \\ \dots\dots & & & & & \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \dots\dots\dots & & a_{in} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \dots\dots\dots & & a_{kn} \\ \dots\dots & & & & & \end{vmatrix}$$

dann ist immer

$$(22)\quad \Phi_{n,\mu} = + D(\lambda) A_{n,\mu}$$

21. Es erübrigt noch der Beweis der Beziehung:

(14) $s_k = \tau_0 \sigma_k + \tau_1 \sigma_{k-1} + \tau_2 \sigma_{k-2} + \ldots \tau_{n-\mu} \sigma_{k-(n-\mu)}$.

s_k ist ganz und linear, sowie symmetrisch in den Argumenten der Gruppe $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\mu)$, wie in denen der andern $(\lambda_{\mu+1} \lambda_{\mu+2} \ldots \lambda_n)$ ist daher nach einem bekannten Satze als ganze lineare Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen jeder der beiden Gruppen darstellbar: d. h. s_k ist eine ganze bilineare Funktion der σ und τ. Andrerseits ist s_k vom Gewichte k d. h. jedes Glied von s_k besteht aus k Faktoren λ. Dasselbe Gewicht muss jeder Summand $\sigma_\alpha \tau_\beta$ der bilinearen Funktion besitzen, d. h. $\alpha + \beta$ ist $= k$ und man erhält so zunächst:

(15) $s_k = \beta_0 \tau_0 \sigma_k + \beta_1 \tau_1 \sigma_{k-1} + \ldots \beta_{n-\mu} \tau_{n-\mu} \sigma_{k-n-\mu}$

wo die β noch zu bestimmende Zahlenfaktoren sind.

Irgend ein Glied des Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ kann in keinem andern Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ auftreten, da es ja gerade α Faktoren λ aus der ersten Gruppe enthält.

Andrerseits kann dasselbe aber überhaupt nur einmal in s_k also auch in $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ auftreten, so dass $\beta_{k-\alpha} = 1$ d. h. alle $\beta_{k-\alpha}$ sind $= 1$, deren zugehörige Faktoren $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$ überhaupt Glieder von s_k enthalten.

Ausgeschlossen sind erstens die, wo der Index $k-\alpha$ grösser als k d. h. wo α negativ ist; diese können überhaupt nicht auftreten, d. h. ihr Coefficient β ist $= 0$.

Dasselbe gilt von den Summanden $\sigma_\alpha \tau_{k-\alpha}$, für die α grösser als μ ist d. h. für die $k-\alpha$ kleiner als $k-\mu$ ist.

Demnach ist

(14) $s_k = \tau_0 \sigma_k + \tau_1 \sigma_{k-1} + \ldots \tau_{n-\mu} \sigma_{k-(n-\mu)}$

unter der Festsetzung, dass alle σ mit einem Index, der grösser als μ oder kleiner als 0 ist, gleich 0 zu setzen sind.

§. 10.

Zweite Form des Faktors A.

22. Auch diese wollen wir erst an unserem Beispiel der R_4^2 darlegen. Wir werden also aus dem Gleichungssystem

$$(1)\quad \rho s_r(-1)^r = u_i\, a_{ir} + u_k\, a_{kr} + u_l\, a_{lr} \begin{Bmatrix} r = 0, 1, . 4 \\ i, k, l, = 1, 2, 3 \end{Bmatrix}$$

die u nebst ρ eliminiren, im Resultate die s_r durch die σ_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3$) und λ_4 ausdrücken, und endlich aus den so gewonnenen Gleichungen wieder λ_4 eliminiren.

Die erste Elimination führt nach §. 3 zum linearen Schnittpunkttheorem der R_4^2:

$$(2)\quad \begin{cases} a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + \dots + a_4\, s_4 = 0 \\ b_s \equiv b_0\, s_0 + b_1\, s_1 + \dots + b_4\, s_4 = 0 \end{cases}$$

wo die $(ab)_{ik}$ den aus den Coefficienten der $\varphi_i(\lambda)$ gebildeten Determinanten Δ_{lmn} proportional sind.

Die Ersetzung der s_r durch σ_ν und λ_4 in $a_s = 0$, $b_s = 0$, verbunden mit der Elimination von λ_4 liefert als Bedingung, dass drei Punkte $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ der R_4^2 auf gerader Linie liegen, (3)

$$\begin{vmatrix} a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\sigma_3, & a_1\sigma_0 + a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3 \\ b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\sigma_3, & b_1\sigma_0 + b_2\sigma_1 + b_3\sigma_2 + b_4\sigma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass die linke Seite dieser Gleichung mit der Form $A_{4,3}$ identisch ist, abgesehen von dem Proportionalitätsfaktor, um den sich die $(ab)_{ik}$ und Δ_{lmn} unterscheiden.

Führt man die ersten Differentialquotienten der Formen

$$(4)\quad \begin{cases} a_\lambda \equiv a_0\, \mu^4 + 4\, a_1\, \lambda\mu^3 + \dots + a_4\, \lambda^4 \equiv f \\ b_\lambda \equiv b_0\, \mu^4 + 4\, b_1\, \lambda\mu^3 + \dots + b_4\, \lambda^4 \equiv \varphi \end{cases}$$

und bezeichnet sie mit f_1, f_2, φ_1, φ_2, so ist z. B.

„$a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3$" die nach den drei Argumenten λ_1, λ_2, λ_3 polarisirte Form f_2, oder was dasselbe ist (cf. §. 5) gleich $\frac{1}{\alpha_0}(f_2\,\overset{3}{\alpha_\lambda})^3$ wo

$$(5)\ \psi \equiv \overset{3}{\alpha_\lambda} = \alpha_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \alpha_0\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3$$

und $(f_2\,\overset{3}{\alpha_\lambda})^3$ die dritte Überschiebung der Formen f_2 und $\overset{3}{\alpha_\lambda}$ repräsentirt.

Daher ist, wenn $\Delta_{lmn} = \rho\,(ab)_{ik}$, (6) $A_{4,3} \equiv$

$$\frac{1}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \\ a_{k0} & a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & a_{k4} \\ a_{l0} & a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & a_{l4} \end{vmatrix} = \frac{\rho}{\alpha_0^2}\begin{vmatrix} (f_1\psi)^3 & (f_2\psi)^3 \\ (\varphi_1\psi)^3 & (\varphi_2\psi)^3 \end{vmatrix} = \frac{|\varphi_i(\lambda_1)\varphi_i(\lambda_2)\varphi_i(\lambda_3)|}{D_3(\lambda)}.$$

Es möge hier, ehe wir zum analogen Ausdruck für $A_{n,\mu}$ übergehen, eine Bemerkung Platz finden, die später von Nutzen sein wird.

Wir gelangten zu beiden Formen von $A_{4,3}$ mit Hülfe der Zerlegungen:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{rcll} s_0 & = & \sigma_0 + 0.\,\lambda_4 & \big|\,\lambda^4 \\ -\,s_1 & = & -\,\sigma_1 - \sigma_0\,\lambda_4 & \big|\,\lambda^3\mu \\ s_2 & = & \sigma_2 + \sigma_1\,\lambda_4 & \big|\,\lambda^2\mu^2 \\ -\,s_3 & = & -\,\sigma_3 - \sigma_2\,\lambda_4 & \big|\,\lambda\mu^3 \\ s_4 & = & \sigma_4 + \sigma_3\,\lambda_4 & \big|\,\mu^4 \end{array}\right.$$

Führen wir die angedeutete Multiplication aus, so kommt

$$\begin{aligned} (8)\quad (s_0\,\lambda^4 - s_1\lambda^3\,\mu + s_2\lambda^2\mu^2 - s_3\lambda\mu^3 + s_4\mu^4) &\equiv \\ \lambda\,(\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\,\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3) \\ -\,\lambda_4\cdot\mu(\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\,\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3) \\ \equiv (\sigma_0\,\lambda^3 - \sigma_1\,\lambda^2\mu + \sigma_2\lambda\mu^2 - \sigma_3\,\mu^3)\,\{\lambda - \lambda_4\mu\} \\ \equiv \frac{1}{\alpha_0}\,\psi(\lambda)\,\{\lambda - \lambda_4\,\mu\}. \end{aligned}$$

Fassen wir hier λ_4 als beweglich auf, so stellt dies die linke Seite einer Involution vierten Grades mit der festen cubischen Form $\psi(\lambda)$ dar. Bezeichnet man als Coefficienten einer binären Involution

$$a_\lambda^n + k\, b_\lambda^n$$

die Determinanten $(ab)_{ik}$ (von denen allein ja alle invarianten Eigenschaften der Involution abhängen), so erkennt man durch die Entwicklung von $A_{4,3}$ nach den Δ_{lmn} resp. $(ab)_{ik}$ den Satz:

„Die Bedingung, dass drei Punkte einer R_4^2 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (Wurzeln der Gleichung $\psi(\lambda) = 0$) auf einer Geraden liegen, lässt sich in die Form bringen:

$$(9) \quad 0 = A_{4,3} = \Sigma_{ik}\, p_{ik}\, (ab)_{ik} \equiv \Sigma_{ik}\, p_{ik}\, \Delta_{lmn} = 0$$

wo die p_{ik} die Coefficienten einer Involution vierten Grades mit gemeinsamer cubischer Form $\psi(\lambda)$ sind.“

23. Gehen wir jetzt zum allgemeinen Fall über, so haben wir im linearen Schnittpunkttheorem einer $R_n^{\mu-1}$

$$(10) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\, \lambda^n + \alpha_{i1}\, \lambda^{n-1} + \ldots a_{in} \quad (i = 1, \ldots \mu)$$

das aus $(n + 1 - \mu)$ Gleichungen

$$(11) \quad a_s = 0,\ b_s = 0,\ c_s = 0, \ldots \quad (n + 1 - \mu)_s = 0$$

besteht, die $n - \mu$ Argumente

$$\lambda_{\mu+1}, \lambda_{\mu+2}, \ldots \lambda_n$$

zu eliminiren.

Mit Hülfe der Relationen (cf. Nr. 21)

$$(12) \quad s_k = \tau_0\, \sigma_k + \tau_1\, \sigma_{k-1} + \ldots \quad \tau_{n-\mu}\, \sigma_{k-(n-\mu)}$$

geht eine Form

$$(13) \quad a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + \ldots a_n\, s_n$$

über in:

$$(14) \quad \tau_0\, (a_0\, \sigma_0 + a_1\, \sigma_1 + a_2\, \sigma_2 + \cdot + a_\mu\, \sigma_\mu)$$
$$+ \tau_1\, (a_1\, \sigma_0 + a_2\, \sigma_1 + a_3\, \sigma_2 + \cdot + \alpha_{\mu+1}\, \sigma_\mu)$$

$+ \dots\dots$

$+ \tau_{n-\mu} (a_{n-\mu} \sigma_0 + a_{n-\mu+1} \sigma_1 + a_{n-\mu+2} \sigma_2 + \dots + a_n \sigma_\mu)$

oder nach den σ geordnet in:

$$\sigma_0 (a_0 \tau_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2 + \dots + a_{n-\mu} \tau_{n-\mu})$$
$$+ \sigma_1 (a_1 \tau_0 + a_2 \tau_1 + a_3 \tau_2 + \dots + a_{n-\mu+1} \tau_{n-\mu})$$
$$+ \dots\dots$$
$$+ \sigma_\mu (a_\mu \tau_0 + a_{\mu+1} \tau_1 + a_{\mu+2} \tau_2 + \dots + a_n \tau_{n-\mu}).$$

Die Klammercoefficienten sind die nach μ Argumenten $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\mu$ polarisirten μ^{ten} Differentialquotienten von a_λ resp. die nach $(n-\mu)$ Argumenten polarisirten $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von a_λ oder auch, wenn diese Argumente als Wurzeln der Formen $\psi \equiv \alpha_\lambda^\mu$ resp. $\chi \equiv \beta_\lambda^{n-\mu}$ betrachtet werden, die μ^{ten} resp. $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Ueberschiebungen der bezüglichen Differenzialquotienten über diese beiden Formen.

Bezeichnet man die μ^{ten} Differentialquotienten von

$$a_\lambda \equiv f_0 \text{ mit } \overset{0}{f_0}, \overset{1}{f_0}, \overset{2}{f_0}, \dots \overset{\mu}{f_0}$$

entsprechend die der andern Formen

$$b_\lambda \equiv f_1, \quad c_\lambda \equiv f_2, \dots (n+1-\mu)_\lambda \equiv f_{n-\mu}$$

so ergiebt sich durch Elimination der τ bei Benützung der ersten Entwicklung einer Form a_s:

$$(15)\ 0 = \left| (\overset{0}{f_i}\psi)^\mu, (\overset{1}{f_i}\psi)^\mu, (\overset{2}{f_i}\psi)^\mu, \dots (\overset{(n-\mu)}{f_i}\psi)^\mu \right| \ (i = 0, 1, \dots n-\mu)$$

und man hat wie oben

$$(16)\quad A_{n,\mu} \equiv \frac{\rho}{\alpha_0^{n+1-\mu}} \left| (\overset{0}{f_i}\psi)^\mu, (\overset{1}{f_i}\psi)^\mu, \dots (\overset{(n+\mu)}{f_i}\psi)^\mu \right|$$
$$= \frac{|\, \varphi_i(\lambda_1)\, \varphi_i(\lambda_2) \dots \varphi_i(\lambda_\mu) \,|}{D_\mu(\lambda)}$$

Ferner ergiebt sich, wie oben: (17)

$$A_{n,\mu} = 0 = \Sigma_{i_0\, i_1\, i_2 \dots i_{n-\mu}}\ p_{i_0\, i_1\, i_2 \dots i_{n-\mu}}\ \Delta_{i_{n-\mu+1}\, i_{n-\mu+2} \dots i_{n+1}}$$

wo die Δ die Determinantencoefficienten der Gruppe

$$(18)\quad u_1\, \varphi_1(\lambda) + u_2\, \varphi_2(\lambda) + \dots u_\mu\, \varphi_\mu(\lambda)$$

und die p die entsprechenden Coefficienten der Gruppe

$$(19)\quad \psi_\mu \{v_0\gamma_0 + v_1\gamma_1 + \ldots v_{n-\mu}\gamma_{n-\mu}\},$$

wo die v (wie die u) willkürliche Parameter und die γ beliebige binäre Formen $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grades vorstellen.

Nach dem Grassmann'schen Satze kann man wieder statt der Δ die entsprechenden Determinanten der Schnittpunkttheoremgruppe

$$(20)\quad a_s,\ b_s,\ c_s,\ \ldots (n+1-\mu)_s$$

substituiren.

§. 11.
Zusammenhang der zweiten Form von $A_{n,\mu} = \left|(f_i^0\,\psi)^\mu\ (f_i^1\,\psi)^\mu, \ldots (f_i^{(n-\mu)}\psi)^\mu\right|$ mit den Gordan'schen Untersuchungen über Combinanten.

24. Gordan's [16] erster Satz über Combinanten binärer Formen (auf die wir uns hier beschränken) lautet:

„Eine jede Combinante einer Anzahl binärer Formen n^{ten} Grades:

$$(1)\quad \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \varphi_\mu(\lambda)$$

ist eine Invariante der binären Form von μ Variabeln

$$(2)\quad \Phi_{n,\mu} = \left|\varphi_i(\lambda_1), \varphi_i(\lambda_2) \ldots, \varphi_i(\lambda_\mu)\right| \quad (i = 1, 2, \ldots \mu)$$

(und ist folglich eine ganze Funktion der μ-reihigen Determinantencoefficienten der φ_i)." Der umgekehrte Satz gilt selbstverständlich, da $\Phi_{n,\mu}$ resp. $A_{n,\mu}$ selbst eine Combinante der $\varphi(\lambda)$ ist, also auch jede Invariante von Φ resp. A eine Combinante der $\varphi(\lambda)$. Es lässt sich $\Phi_{n,\mu}$ einfacher durch $A_{n,\mu}$ ersetzen, wo

$$(3)\quad \Phi_{n,\mu} = D_\mu(\lambda)\, A_{n,\mu}$$

Der geometrische Sinn dieses Satzes ist sehr einfach, wir wollen ihn wieder zunächst für den Fall $\mu = 3$ erläutern.

Dann stellen alle Combinanten der drei Formen $\varphi_i(\lambda), = 0$

gesetzt, geometrische Eigenschaften resp. Gebilde dar, die zur Curve

$$(4)\ \rho x_i = \varphi_i(\lambda)$$

in projektivisch unzerstörbarer Beziehung stehen.

Die letztere ist aber dadurch völlig charakterisirt, dass sowohl die Punkte der Ebene, als die Geraden derselben einander eindeutig zugeordnet sind. Das letztere findet aber statt, wenn irgend drei Punkten auf gerader Linie andere drei Punkte in gerader Linie entsprechen.

Daher hängen alle projektivisch unzerstörbaren Eigenschaften der R_n^2 allein von der Bedingung ab, die aussagt, wann drei Punkte derselben in gerader Linie liegen d. h. von der Gleichung

$$(5)\ \Phi_{n,\mu} = 0 \text{ resp. } A_{n,\mu} = 0$$

ab. Genau das Analoge gilt offenbar von der $R_n^{\mu-1}$, nur dass statt der Geraden hier ein Lineargebilde

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_\mu x_\mu = 0$$

an die Stelle tritt.

25. Für $A_{n,\mu}$ sind beide, von uns abgeleitete Formen zulässig, wir fassen jetzt die zweite in's Auge.

Der zweite Gordan'sche Satz [17] lautet:

„Eine jede Combinante von μ binären Formen n^{ter} Ordnung

$$(6)\ \varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots \varphi_\mu(\lambda)$$

ist eine Invariante der binären Form mit $(n-\mu+1)$ Variabeln

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-\mu+1}: \qquad (7)$$

$$B_{n,\mu} = \left|(\varphi_{i1}\chi)^{n-\mu+1}, (\varphi_{i2}\chi)^{n-\mu+1}, \ldots (\varphi_{i\mu}\chi)^{n-\mu+1}\right| (i=1,2,\ldots\mu)$$

wo $\chi(\lambda) = \alpha_0(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_{n-\mu+1})$,

ferner φ_{ir} der $(\mu-1)^{\text{te}}$ Differentialquotient von $\varphi_i(\lambda, \mu)$ ist, $(\mu-r)$mal nach λ, $(r-1)$mal nach μ genommen, und $(\varphi_{ir}, \chi)^{n-\mu+1}$ die $(n-\mu+1)^{te}$ Ueberschiebung der Formen φ_{ir} und χ darstellt."

$B_{n,\mu}$ ist hier evidenter Weise eine Combinante der $\varphi(\lambda)$, also nmgekehrt auch jede Invariante von $B_{n,\mu}$ eine Combinante der $\varphi(\lambda)$."

26. Dieser zweite Gordan'sche Satz leitet sich aber ohne Mühe aus dem ersten mit Hülfe der früheren Betrachtungen über die Reciprocität des Schnittpunkttheorems (§. 4) und der zweiten Form von $A_{n,\mu}$ ab.

Der Inhalt jener Reciprocität lässt sich mit Rücksicht auf die Ableitung dieser Form von $A_{n,\mu}$ kurz so aussprechen:

„Die Form $A_{n,\mu} = \left|(f_i^0\ \psi)^\mu,\ (f_i^1\ \varphi)^\mu, \ldots (f_i^{(n-\mu)}\psi)^\mu\right|$ verhält sich zur Gruppe der φ_k $(k = 1, \ldots \mu)$ gerade so wie die Form

$$B_{n,\mu} = \left|(\varphi_{i1}\chi)^{(n-\mu+1)},\ (\varphi_{i2}, \chi)^{(n-\mu+1)} \ldots (\varphi_{i\mu}, \chi)^{n-\mu+1}\right|$$

zur Gruppe der f_i $(i = 0, 1, \ldots n-\mu)$."

(Dabei sind die f die Schnittpunktformen der φ, und umgekehrt.)

Nun ist zu Folge des ersten Gordan'schen Satzes jede Combinante der μ Formen φ eine Invariante von $A_{n,\mu}$ (zweite Form), also auch evidenter Weise eine Combinante der $(n+1-\mu)$ Formen f, mithin unter nochmaliger Anwendung des ersten Gordan'schen Satzes eine Invariante von $B_{n,\mu}$. Dies ist aber der zweite Gordan'sche Satz.

Mit Weglassung der Zwischenformen $A_{n,\mu}$ resp. $B_{n,\mu}$ können wir demnach den Inhalt beider Hauptsätze so zusammenfassen:

„Jede Combinante der μ Formen φ ist eine Combinante der $(n+1-\mu)$ Schnittpunktformen f und umgekehrt *)."

*) vgl. die historische Bemerkung der Einleitung.

Man wird daher mit Vortheil immer die Form $A_{n,\mu}$ resp. $B_{n,\mu}$ zu Grunde legen, die aus der kleineren Anzahl von Formen gebildet ist.

Um diese Sätze auf die rationalen Curven anwenden zu können, genügen einige Bemerkungen.

Eine jede solche Curve lässt sich bekanntlich immer eindeutig, Punkt für Punkt auf eine Gerade abbilden und die Darstellungsfunktionen $\varphi(\lambda)$ lassen sich nach Lüroth[18] immer in eine solche Form bringen, dass jedem Punkt der Curve resp. Geraden immer nur ein Argument λ zugehört. (Es werden uns weiterhin noch Beispiele solcher Umformungen begegnen.)

Daher ist eine jede nicht zerfallende rationale Curve R_n^d als Interpretationsgebiet der Invariantentheorie binärer Formen zulässig. Dann sind offenbar die simultanen Invarianten und Covarianten der dargestellten Formen unabhängig von einer Collineation des Raumes, in dem sich die rationale Curve befindet.

Wie weit aber umgekehrt alle Eigenschaften der rationalen Curve, die bei Collineationen des bezüglichen Raumes invariant bleiben, von den Invarianten binärer Formen abhängen und was für specielle Raumcollineationen mit den linearen Transformationen auf rationalen Curven verknüpft sind, diese allgemeine Frage möge verschoben bleiben, bis erst ein hinreichendes Material gewonnen ist, das diesen abstrakten Untersuchungen eine concrete Unterlage gewähren soll.

Vor allem soll erst das wichtigste Hülfsmittel des Folgenden, die Theorie der Normcurven, in kurzen Zügen, nur soweit es erforderlich, abgehandelt werden; dabei wird sich schon, und dies allmählich in steigendem Masse der grosse Nutzen herausstellen, den der Gebrauch der in diesem Capitel erörterten Prinzipien und Sätze, vor allem des letzten gewährt

In den einzelnen Fällen wird sich auch die eben aufgeworfene Frage leichter übersehen und beantworten lassen.

Den Abschluss dieses Capitels bilde ein Satz, der einen unmittelbaren Ausfluss des letzten Satzes bildet, und der zwar implicite schon in den Untersuchungen der früheren Paragraphen enthalten ist, jedoch noch nicht mit der nöthigen Schärfe betont ist und der kurz so ausgesprochen werden kann (mit der Beschränkung auf binäre Formen, wenn dies auch nicht erforderlich ist):

„Die Funktionaldeterminanten conjugirter Gruppen binärer Formen sind dieselben."

In der That gehen wir wieder von der R_n^d aus:

$$\rho x_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 0 \ldots d) = a_{in}\lambda^n + \ldots a_{i0}$$

mit den Schnittpunktsrelationen

$$\alpha_{1s} = 0,\ \alpha_{2s} = 0, \ldots \alpha_{n-d,s} = 0$$

so folgt zunächst aus dem Früheren augenblicklich, dass die Forderung, es sollen n benachbarte Punkte λ der Curve sich auf einem Lineargebilde d^{ter} Stufe befinden, so viel Lösungen λ zulässt, als die Funktionaldeterminante der Formen:

$$\alpha_{1\lambda},\ \alpha_{2\lambda}, \ldots \alpha_{n-d,\lambda}$$

Wurzeln hat.

Andererseits erhält man diese Forderung auch im Verschwinden der Determinante der $\varphi_i(\lambda)$ ausgedrückt, wenn man in den einzelnen Columnen derselben für λ die Werthe setzt

$$\lambda,\ \lambda + d\lambda,\ \lambda + 2d\lambda + d\lambda^2 \text{ etc.} \ldots$$

Diese geht aber, wie z. B. Clebsch[19] öfters an einzelnen Fällen nachgewiesen hat, mittelst der gleichen Methode, indem man nur noch nebst den gewöhnlichen Umformungen von Determinanten solcher Art den Euler'schen Satz über die Darstellung binärer Formen mittelst ihrer (nach zwei homogenen Variabeln) genommenen Differentialquotienten wiederholt anwendet, in die Funktionaldeterminante der Formen $\varphi_i(\lambda)$ über.

Beide Funktionaldeterminanten sind vom Grade $(d+1)(n-d)$ in λ und vom ersten in den Determinanten der a resp. α, die nach §. 1 proportional sind. Also unterscheiden sich beide nur noch um einen unwesentlichen Faktor, den man meistens der Bequemlichkeit wegen gleich 1 setzen darf.

Dieser einfache Satz ist namentlich einer der kräftigsten Hebel zur Erforschung geometrischer Wahrheiten mittelst algebraischer Behandlung, wie sich des Weiteren zur Genüge ergeben wird.

Capitel II.

Die Reye'sche Apolarität und die Normcurven.

Abschnitt I.

Die Normcurven (speziell der Ebene und des Raumes).

§. 12.

Der Normkegelschnitt der Ebene.

28. Wenn auch dieser Abschnitt mancherlei Bekanntes[20] enthalten wird, so fehlt, so viel ich weiss, doch eine systematische Zusammenstellung der Haupt-Sätze dieser Theorie, die bezweckt, die Bestimmung der Lage der Punkte (Geraden, Ebenen, überhaupt Lineargebilde) in der Ebene, im Raume (und höheren Mannigfaltigkeiten) von fest gedachten Curven (dem Normkegelschnitt der Ebene, der cubischen Normcurve des Raumes, allgemein der rationalen Normcurve n^{ter} Ordnung im Raume von n Dimensionen) abhängig zu machen. Und zwar erweist es sich weiterhin im Laufe der Untersuchungen als höchst vortheilhaft, diese Normcurven nicht ganz beliebig zu wählen, sondern sie gewissen (Apolaritäts-) Bedingungen zu unterwerfen, ähnlich wie man die gewöhnlichen Coordinatensysteme den gerade vorliegenden Aufgaben gemäss möglichst bequem einrichtet. Es wird im Folgenden wesentlich auf eine geschickte Bezeichnungsweise ankommen.