CAPITOLO V.

Grandezze geometriche.

§ 1. Definizioni.

1. Sonvi delle categorie di grandezze geometriche tali che prese due grandezze della stessa categoria, non si può presentare che l'uno o l'altro di questi due casi: 1° le due grandezze si possono sovrapporre, o si possono decomporre in parti a due a due sovrapponibili; e allora si dicono *eguali;* 2° le due grandezze si possono decomporre in parti in modo che ogni parte della seconda sia eguale ad una delle parti della prima, ma non viceversa, e allora le due grandezze diconsi *diseguali*, e la prima maggiore della seconda.

Questo avviene per le lunghezze di segmenti rettilinei, per le aree piane limitate da linee rette, pei volumi di prismi o di solidi decomponibili in prismi, e per alcune altre categorie di grandezze geometriche, che soglionsi chiamare *principali.* Ma sonvi altre grandezze, per le quali può avvenire che, paragonandone due, non si presenti nè l'uno nè l'altro dei due casi suddetti. Per queste grandezze è necessario di ben definire che cosa si intenda per eguaglianza di due grandezze, e per misura d'una di tali grandezze.

2. Diremo *campo di punti*, od anche *figura*, ogni insieme di punti, in numero limitato od illimitato. Così alcuni punti in numero finito, i punti d'una linea, d'una superficie, d'un solido, sono campi di punti.

Un campo di punti si dirà *rettilineo*, se tutti i punti stanno su d'una retta; si dirà *piano*, se tutti i punti stanno in un piano. Noi cominceremo a studiare i campi rettilinei.

Sia A un campo rettilineo. Si dirà che un punto P è *interno* al campo A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti della retta, i quali distano da P meno di ρ, appartengano al campo A. Si dirà che un punto è *esterno* al campo A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti della retta, i quali distano dal punto P meno di ρ, non appartengano ad A. Un punto nè interno nè esterno ad A si dirà *punto limite* di A; quindi, se P è un punto limite di A, fissata comunque una lunghezza ρ, si troveranno sempre dei punti sulla retta, che distano da P meno di ρ, e che appartengono al campo A, e dei punti, che pure distano da P meno di ρ, e che non appartengono ad A. I punti limiti di A possono appartenere, ovvero non, al campo A; essi formano un nuovo campo, che si dirà *campo limite* di A.

È noto che ad ogni punto P d'una retta si può far corrispondere la sua ascissa, ossia il numero che misura la sua distanza da un punto fisso della retta, tenendo il debito conto del segno. Converremo che, reciprocamente, ad ogni numero corrisponda sulla retta uno ed un sol punto avente per ascissa quel numero. Quindi ad ogni campo A corrisponde un gruppo di numeri, o, come diremo, *campo di numeri;* e viceversa, ad ogni campo di numeri corrisponde un campo di punti sulla retta. A causa di questa corrispondenza univoca, potremo, ove ci convenga, invece dei campi rettilinei di punti, considerare dei campi di numeri.

Come esempi, si considerino sulla retta i punti le cui ascisse sono maggiori di 0 e minori di 1. Si avrà un campo rettilineo di punti; ogni punto del campo è interno al medesimo; i punti limiti sono i punti di ascisse 0 ed 1; ogni altro punto è esterno al campo.

Si considerino ancora i punti della retta, le cui ascisse sono numeri razionali, maggiori di 0 e minori di 1. Questo campo non avrà punti interni; i punti le cui ascisse sono $\geqq 0$, e $\leqq 1$, sono punti limiti; gli altri punti sono esterni.

Se un campo di punti contiene alcuni, ma non tutti i punti della retta, esso avrà certamente dei punti limiti. Invero, suppongasi che P sia un punto del campo dato A, e Q un punto non appartenente ad A. Siano p e q le ascisse dei punti P e Q, e sia p. e. $p < q$. I punti del campo A, le cui ascisse sono minori di q, avranno un limite superiore, non minore di p, perchè p è appunto l'ascissa d'uno di tali punti, nè maggiore di q; sia r questo limite superiore, e R il punto della retta avente per ascissa r. Dico che R è un punto limite di A. Invero, fissata ad arbitrio una lunghezza ρ, esiste qualche punto del campo A la cui ascissa è maggiore di $r - \rho$, e quindi tale che la sua distanza da R è minore di ρ; mentrechè ogni punto la cui ascissa è compresa fra r e la più piccola delle due quantità $r + \rho$ e q, i quali punti distano pure da R meno di ρ, non appargono al campo.

I punti d'una retta, che stanno fra due punti dati, contando ovvero non questi punti, formano un campo, che si dirà *segmento rettilineo*. La sua lunghezza è una grandezza principale; ogni campo formato da un numero finito di segmenti ha pure una lunghezza paragonabile a quella d'un segmento rettilineo.

Abbiasi ora un campo formato da punti in linea retta, dato in un modo qualunque. Potremo in generale immaginare dei campi formati da un numero finito di segmenti, e dei quali fa parte il campo dato; e potremo immaginare dei campi formati pure da un numero finito di segmenti, i quali fanno parte del campo dato. Ciascheduno di questi campi ha una lunghezza, e la lunghezza dei primi è maggiore della lunghezza dei secondi.

Se il limite inferiore delle lunghezze dei primi campi coincide col limite superiore delle lunghezze dei secondi, al valore comune di questi due limiti daremo il nome di *lunghezza del campo rettilineo* dato.

Ma potrebbe avvenire che questi due limiti non siano eguali, e quindi, che il limite inferiore delle prime lunghezze sia maggiore del limite superiore delle seconde. In questo caso diremo che il campo proposto non ha una lunghezza paragonabile con quella d'un segmento rettilineo; e al limite inferiore delle prime lunghezze potremo dare il nome di *lunghezza esterna* del campo dato, e chiamare *lunghezza interna* il limite superiore delle seconde. Potrebbe anche avvenire che non esistano campi formati da segmenti, i quali contengano il campo dato, nel qual caso diremo che la lunghezza esterna del campo è infinita; ovvero che non esistano segmenti contenuti nel campo dato, e allora diremo che la sua lunghezza interna è nulla. Così dei due esempi già portati, il primo campo è un segmento avente lunghezza $= 1$; il secondo campo non ha lunghezza paragonabile con quella d'un segmento; la sua lunghezza esterna vale 1, e la sua lunghezza interna è nulla.

Se da un campo formato da un numero finito di segmenti, e contenente nel suo interno A, si toglie un campo pure formato da un numero finito di segmenti, contenuto nell'interno di A, si avrà un campo formato altresì da un numero finito di segmenti, la cui lunghezza vale la differenza fra le lunghezze del primo e del secondo campo, e che contiene nel suo interno tutti i punti limiti di A. Ora affinchè A abbia una lunghezza paragonabile con un segmento, è necessario e sufficiente che la differenza fra le lunghezze dei primi campi e quelle dei secondi possa rendersi tanto piccola quanto si vuole; quindi è necessario e sufficiente che si possa costrurre un campo formato da segmenti in numero finito, contenente nel suo interno tutti i punti limiti di A, e di grandezza tanto piccola quanto si vuole. In ogni caso si vede che la differenza fra la lunghezza esterna e la lunghezza interna d'un campo A è eguale alla lunghezza esterna del campo limite di A.

3. AREE PIANE. Le cose dette pei campi rettilinei si possono ripetere pei campi di punti che giacciono in uno stesso piano. Diremo che un punto P è *interno* al campo piano A, se è possibile determinare una lunghezza ρ in guisa che tutti i punti del piano, che distano da P meno di ρ, appartengano ad A. Un punto si dirà *esterno* al campo A se è interno al campo formato dai punti non appartenenti ad A. Un punto nè interno nè esterno si dirà *punto limite.* Il campo formato dai punti limiti di A si dirà *campo limite,* o *contorno* di A.

Se il campo A contiene alcuni punti del piano, senza contenerli tutti, esso avrà dei punti limiti. Invero, se P e Q sono due punti, l'uno appartenente, e l'altro non, al campo A, si consideri il campo formato dai punti del campo A che giacciono sulla retta PQ. Esso avrà, per quanto si è sopra dimostrato, almeno un punto limite appartenente al segmento PQ, ed esso sarà un punto limite del campo A.

Abbiasi un campo piano qualunque. Potremo in generale immaginare delle aree piane limitate da linee rette, che contengono nel loro interno il campo A, e delle aree piane, pure limitate da linee rette, contenute nell'interno del campo dato. Se, come avviene nei casi più comuni, il limite inferiore delle prime aree coincide col limite superiore delle seconde, al valor comune di questi due limiti daremo il nome di *area* del campo piano dato.

Ma potrebbe avvenire che questi limiti non siano eguali; in questo caso chiameremo *area esterna* della figura data il limite inferiore delle aree poligonali che contengono nel loro interno la figura data, e *area interna* della figura il limite superiore delle aree poligonali contenute nell'interno di essa.

Se da un campo limitato da linee rette, contenente nel suo interno il campo A, si toglie un campo pure limitato da linee rette e contenuto in A, si ottiene un campo (striscia) limitato da linee rette e che contiene nel suo interno il campo limite di A. L'area di questo campo è la differenza fra le aree dei due primi. Quindi noi ci assicureremo che il limite inferiore delle prime aree coincide col limite superiore delle seconde, se la loro differenza si può rendere tanto piccola quanto si vuole; vale a dire affinchè un campo piano abbia un'area paragonabile ad un'area poligonale è necessario e sufficiente che si possa formare un campo piano limitato da rette, contenente nel suo interno tutti i punti limiti del campo dato, e la cui area sia tanto piccola quanto si vuole. Potrebbe anche avvenire che non esista alcun poligono, di area finita, contenente nel suo interno il campo dato, e allora si dirà che l'area esterna di questo campo è infinita. Se non esiste alcun poligono contenuto nell'interno del campo dato, si dirà che la sua area interna è nulla.

È noto, p. e., come si dimostri in geometria elementare che se la figura data è un cerchio, il limite superiore delle aree dei poligoni interni coincida col limite inferiore delle aree dei poligoni che comprendono il cerchio, e che quindi il cerchio abbia un'area paragonabile alle aree poligonali. Se si immagina il campo formato dai punti del piano la cui distanza da un punto fisso O è razionale (rispetto ad una lunghezza $=1$) e minore di 1, si avrà un campo piano la cui area interna è nulla, e la cui area esterna vale l'area del cerchio di raggio 1.

4. Alle aree così definite si possono estendere alcune proposizioni che si riferiscono alle aree piane. Così è noto che se si proietta ortogonalmente un'area piana poligonale sopra un secondo piano, l'area proiezione è eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo dei due piani. Sia ora A un campo piano qualunque, e sia A′ la sua proiezione ortogonale su d'un secondo piano che faccia col primo l'angolo α. Ogni poligono P contenente nel suo interno il campo A si proietta secondo un poligono P′ contenente nel suo interno A′, e viceversa, ogni poligono P′ contenente A′ è la proiezione d'un poligono P contenente A. Ma l'area del poligono P′ è eguale all'area di P moltiplicata per $\cos\alpha$; quindi il limite inferiore delle aree dei poligoni P′ è eguale al limite inferiore delle aree dei poligoni P moltiplicato per $\cos\alpha$. Ma il limite inferiore delle aree dei poligoni P è l'area esterna di A, il limite inferiore delle aree dei poligoni P′ è l'area esterna di A′; dunque l'area esterna della proiezione d'un campo dato vale l'area esterna di questo campo moltiplicata per $\cos\alpha$. In modo analogo si dimostra che l'area interna della proiezione del campo vale l'area interna di questo campo moltiplicata per $\cos\alpha$. Se il campo che si proietta ha un'area paragonabile alle poligonali, ossia se coincidono le aree esterna ed interna, si deduce che lo stesso avviene per la sua proiezione, e l'area proiezione è eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo che fanno i piani delle due aree.

Come applicazione, se si proietta un cerchio di raggio a su d'un piano che faccia col primo l'angolo α, si otterrà un'ellisse i cui semiassi sono a e $b = a \cos\alpha$; e poichè l'area del cerchio vale πa^2, l'area dell'ellisse vale $\pi a^2 \cos\alpha = \pi ab$; ossia l'area d'un ellisse è eguale all'area del cerchio il cui raggio sia la media geometrica fra i semiassi della ellisse.

In modo analogo si dimostra che in due figure piane simili le aree (esterne, o interne, o proprie) stanno come i quadrati dei lati omologhi.

5. Volumi. Abbiasi un campo di punti nello spazio. Un punto si dirà *interno* al campo se esiste una sfera di centro il punto considerato, tale che tutti i punti interni ad essa appartengano al campo. Se invece esiste una sfera di centro il punto considerato e di cui tutti i punti non appartengono al campo, questo punto si dirà *esterno*. Un punto nè interno nè esterno si dirà *punto limite*. I punti limiti formano un campo, che dicesi *campo limite*, o *contorno* del campo dato.

Dato un campo A, potremo in generale immaginare dei solidi formati da prismi (e che diremo solidi prismatici), i quali contengano nel loro interno A, e dei solidi pure prismatici, interni ad A. Se il limite inferiore dei volumi dei primi solidi coincide col limite superiore dei volumi dei secondi, al loro valore comune si darà il nome di *volume* del campo dato; e si dirà anche che il campo dato ha un volume paragonabile coi volumi di prismi.

Ma se questi volumi non coincidono, chiameremo *volume esterno* del campo il limite inferiore dei volumi dei solidi prismatici contenenti il campo dato, e chiameremo *volume interno* il limite superiore dei volumi contenuti nell'interno di esso campo. Potrebbe avvenire che non esista alcun solido prismatico contenente il campo dato, e allora si dirà che il volume esterno di quel campo è infinito; e se nessun solido è contenuto nel campo, si dirà che il suo volume interno è nullo.

Se da un solido composto di prismi, contenente nel suo interno il campo A, si toglie un solido analogo contenuto in A, si avrà un nuovo solido che contiene i punti limiti di A, e il cui volume è la differenza dei volumi dei due solidi precedenti. Se questa differenza si può rendere tanto piccola quanto si vuole, il limite inferiore dei primi solidi è eguale al limite superiore dei secondi, e viceversa. Quindi, affinchè un campo abbia un volume paragonabile coi prismatici, è necessario e sufficiente che si possa formare un solido prismatico, il cui volume sia piccolo ad arbitrio, e che contenga nel suo interno il contorno del campo dato.

È noto dalla geometria elementare come si dimostri pei solidi più comuni, come tetraedri e poliedri in generale, sfera, ecc. che il loro volume è paragonabile con quello dei solidi prismatici.

Si osservi poi, sia a proposito dei volumi che delle aree, che se una grandezza a è il limite superiore d'un sistema di grandezze b, e se ogni grandezza b è il limite superiore di certe grandezze c, la grandezza a è pure il limite superiore delle grandezze c; e se a è il limite inferiore d'un sistema di grandezze b, e ogni grandezza b è limite inferiore di altre grandezze c, sarà a il limite inferiore delle c. Quindi, poichè l'area d'un cerchio, o d'una figura limitata da linee rette e da archi circolari, è ad un tempo il limite superiore delle aree dei poligoni interni ad essa, e il limite inferiore delle aree poligonali che la contengono, si deduce che l'area interna d'una figura qualunque è anche il limite superiore di tutte le aree piane contenute in essa, e limitate da linee rette o da archi circolari (o in generale da linee che racchiudono aree paragonabili alle poligonali); lo stesso si può dire per le aree esterne.

Ancora, siccome è facile il vedere che l'area d'un poligono è il limite superiore delle aree di figure interne ad esso, e composte di tanti rettangoli aventi due lati paralleli ad una retta fissa, ed è il limite inferiore delle aree di figure analoghe, che contengono il poligono dato, così si deduce che l'area interna d'un campo qualunque è anche il limite superiore delle aree di figure composte di rettangoli aventi una coppia di lati paralleli ad una retta fissa, e interni al campo dato, e che l'area esterna dello stesso campo è il limite inferiore delle aree di figure analoghe contenenti il campo dato.

Analogamente si può conchiudere che p. e. il volume interno d'un campo qualunque è anche il limite superiore dei volumi di solidi limitati da piani qualunque, o da superficie sferiche, o cilindriche, o coniche, ecc. (i quali solidi sono più generali di quelli impiegati nella definizione), e che esso è pure il limite superiore dei volumi di solidi formati da tanti prismi retti, le cui altezze siano parallele ad una retta fissa (solidi meno generali di quelli impiegati nella definizione).

6. Ai volumi così definiti potremo estendere alcuni teoremi che si dimostrano in geometria elementare per solidi particolari.

Sia A una figura piana; per ogni punto di A si conduca una retta parallela ad una retta fissa. Il solido formato dall'insieme di queste rette, e compreso fra il piano della figura A ed un suo parallelo, è un prisma se A è un poligono; noi lo chiameremo in generale *cilindro*. Il volume (proprio, o esterno, od interno) di questo cilindro è eguale al volume del prisma avente per base un'area poligonale eguale all'area della figura A (o propria, o esterna, od interna), e compreso fra gli stessi piani paralleli. Infatti si immagini un poliedro interno al cilindro in questione. Se per ogni punto di questo poliedro si conduce la parallela alla generatrice del cilindro, compresa fra le due basi, si otterrà, come luogo di queste rette, un prisma, maggiore o eguale al poliedro dato, e la cui base è un poligono interno ad A. Ma il limite superiore dell'area di questo poligono è l'area interna di A; il limite superiore dei volumi di quei poliedri è il volume interno al cilindro; dunque il volume interno del cilindro è eguale al volume del prisma avente per base l'area interna della base del cilindro, e la stessa altezza. Lo stesso si può dire del volume esterno, e del volume proprio, ove esista.

Se A è una figura piana, e V un punto fuori del piano, il luogo delle rette (terminate) che vanno dal punto V ai punti di A è un solido, che è una piramide, se A è un poligono, e che in generale dicesi *cono*. Si dimostrerà in modo analogo che il volume del cono è il terzo del volume del prisma avente una base eguale in area a quella di A, e la stessa altezza.

Siano A una figura piana, r una retta parallela al piano di A, e π un piano qualunque. Il luogo delle rette parallele al piano π che passano pei punti di A e incontrano la retta r, queste rette essendo comprese fra il piano A e la retta r, è un solido detto *conoide*. Il suo volume (proprio, o esterno od interno) è eguale alla metà del volume del prisma avente per base un'area eguale all'area di A (propria, o esterna od interna) e per altezza la distanza della retta r dal piano della figura A. La cosa è evidente se la figura A è un parallelogrammo avente due lati paralleli ad r, e gli altri due paralleli all'intersezione dei piani π e A. Lo stesso avviene se la figura A è la somma di più parallelogrammi di tal fatta. Se la figura A è qualunque, si immagini una figura B interna ad A e composta di tanti parallelogrammi della specie descritta, e il conoide di base B. Sarà il limite superiore delle aree B eguale all'area interna di A; il limite superiore dei conoidi di base B eguale al volume interno del conoide di base A; e poichè il conoide di base B vale la metà del prisma di egual base e di eguale altezza, si deduce che il volume interno del conoide di base A è la metà del volume del prisma di base eguale all'area interna di A, e di egual altezza. Lo stesso vale pel volume esterno, e pel volume proprio.

7. Lunghezza di archi curvilinei. Dato un arco continuo AB, lo si decomponga in parti, che siano nuovi archi continui, e si dispongano queste parti l'una dopo l'altra in modo da formare una nuova linea continua. La distanza dei punti estremi di questo nuovo arco dipenderà in generale dal modo con cui si è diviso l'arco AB e dal modo con cui si dispongono queste parti. Al limite superiore di questa distanza (ove esista) daremo il nome di *lunghezza* dell'arco dato. Dire che un arco ha una lunghezza significa che esiste questo limite superiore.

È chiaro che, decomposto l'arco AB in parti, converrà di disporre queste parti in modo che la distanza degli estremi della curva ottenuta sia massima, il che si otterrà facendo in modo che gli estremi di tutti questi archi parziali siano in linea retta; ed allora la distanza fra gli estremi dell'arco così ottenuto è la somma delle corde che sottendono gli archi in cui si è decomposta la linea data. Quindi la lunghezza d'un arco è il limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali i cui estremi sono gli estremi dell'arco, ed i cui vertici sono punti *successivi* dell'arco.

Si deduce immediatamente dalla definizione, che la lunghezza d'un arco, la quale è il limite superiore delle lunghezze delle linee poligonali i cui estremi sono gli estremi dell'arco e i cui vertici sono punti successivi dell'arco, è maggiore delle lunghezze di queste linee poligonali. Come caso particolare, la lunghezza d'un arco (continuo) è maggiore della sua corda.

TEOREMA. Se mentre un punto P percorre una linea AB da A in B, le sue tre proiezioni P' P'' P''' fatte su tre assi Ox Oy Oz, ogni proiezione essendo fatta parallelamente al piano degli altri due assi, percorrono rispettivamente i segmenti $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ sempre muovendosi nello stesso senso, la lunghezza dell'arco AB è minore della somma delle lunghezze delle sue proiezioni $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$.

La cosa è evidente se la linea AB è retta, perchè essendo il segmento AB equipollente alla risultante dei segmenti $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$, sarà $gr\, AB < gr\, A'B' + gr\, A''B'' + gr\, A'''B'''$.

Se la linea è una spezzata ACDB, sarà $gr AC < gr A'C' + gr A''C'' + gr A'''C'''$; $gr\, CD < gr\, C'D' + gr\, C''D'' + C'''D'''$; $gr\, DB < gr\, D'B' + gr\, D''B'' + gr\, D'''B'''$; quindi sommando, ed osservando che $gr\, A'C' + gr C'D' + gr\, D'B' = gr\, A'B'$, e formule analoghe, si deduce che la lunghezza della spezzata è minore della somma delle lunghezze delle sue tre proiezioni.

Se la linea è qualunque, si immagini una spezzata, i cui estremi siano A e B, e i cui vertici siano punti successivi dell'arco. La sua lunghezza sarà minore di $gr\, A'B' + gr\, A''B'' + gr\, A'''B'''$; e poichè il limite superiore della lunghezza di questa spezzata è la lunghezza dell'arco, si deduce che la lunghezza dell'arco è minore della somma delle sue proiezioni.

TEOREMA. Se un arco curvilineo ha in un suo punto P la tangente, e se questa è il limite della retta che congiunge due punti qualunque della curva, quando questi tendano a P, il rapporto d'un arco della curva alla sua corda, ove gli estremi di questo arco tendano a P, ha per limite l'unità.

Infatti, si determini un arco QR nelle vicinanze di P, in modo che ogni retta che unisce due punti di quest'arco faccia colla tangente in P un angolo minore d'un angolo ϵ fissato piccolo ad arbitrio. Sia c la corda dell'arco QR; si decomponga quest'arco in parti, le cui corde siano $c_1 c_2 \ldots c_n$. Si proiettino queste corde sulla corda QR; detti $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ gli angoli che esse fanno con questa retta, sarà

$$c = c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + \ldots + c_n \cos\alpha_n.$$

Ora, poichè gli angoli che le corde $c\ c_1\ c_2 \ldots c_n$ fanno colla tangente in P sono minori di ϵ, gli angoli $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ saranno minori di 2ϵ; quindi si deduce

$$c < c_1 + c_2 + \ldots + c_n, \quad c > (c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \cos 2\epsilon;$$

ovvero, dividendo l'ultima per $\cos 2\epsilon$ (supposto $2\epsilon < \frac{\pi}{2}$)

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n < \frac{c}{\cos 2\epsilon}.$$

Perciò la lunghezza s dell'arco QR, che è il limite superiore della somma $c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ soddisferà pure alle stesse diseguaglianze $c < s$, $c > s \cos 2\epsilon$; ossia $\frac{c}{s} < 1$, e $\frac{c}{s} > \cos 2\epsilon$. E poichè l'angolo ϵ si può prendere piccolo ad arbitrio, col prendere gli estremi dell'arco sufficientemente prossimi a P, si conchiude $\lim \frac{c}{s} = 1$, c. v. d.

Sarà utile il ricordare a questo proposito la proposizione a pag. 59: « Se il punto P è funzione della variabile t, ed ha derivata prima continua e non nulla, la tangente alla curva descritta da P è anche il limite della congiungente due punti qualunque della curva, quando questi tendano a P ».

8. Aree di superficie non piane. Abbiasi una superficie qualunque. Proiettandola ortogonalmente sopra un piano avremo una figura piana; supporremo che questo abbia un'area propria, e che la superficie data si possa decomporre in parti che godano della stessa proprietà.

Si scomponga la superficie data in parti e, dopo averle trasportate comunque nello spazio, si proiettino queste ortogonalmente su d'uno stesso piano. La somma delle aree di queste proiezioni sarà un'area piana, variabile col variare del modo di divisione della superficie e del modo con cui si dispongono queste parti. Il limite superiore dei valori di quest'area piana si dirà l'*area* della superficie data.

Si deduce immediatamente dalla definizione che l'area d'una superficie qualunque è maggiore della sua proiezione ortogonale su d'un piano qualunque.

§ 2. Funzioni distributive d'un campo.

9. Se un campo A è decomposto in parti $A_1, A_2, \ldots A_n$ esso si dirà *somma* delle sue parti, e si scriverà

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Un campo dicesi *chiuso*, se tutti i punti limiti del campo appartengono ad esso.

Un campo dicesi *finito*, se la distanza d'ogni punto del campo da un punto fisso non può superare una certa grandezza finita. È chiaro che se un campo è finito, si potrà determinare un parallelepipedo nel cui interno si trovino tutti i punti del campo proposto.

Fra le proprietà, o qualità, che possono avere i campi, alcune sono tali che se un campo ha una di esse, decomponendolo in più parti, una almeno di queste parti ha la stessa proprietà. Così se il campo ha la proprietà di contenere infiniti punti, decomponendolo in parti, una almeno di queste parti dovrà avere la stessa proprietà di contenere infiniti punti. Ci sarà utile la proposizione che segue:

Teorema. Se q è una qualità che possono avere dei campi, tale che se un campo ha la proprietà q, decomponendolo in parti, una almeno di queste parti abbia la qualità q, allora, se un campo finito A ha la proprietà q, esiste un punto P (appartenente o al campo dato o al suo campo limite) tale che, fissata ad arbitrio una lunghezza r, si può sempre determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e il quale ha pure la qualità q.

Invero, riferiti i punti del campo a tre assi cartesiani, e dette $x\, y\, z$ le coordinate d'un punto, poichè il campo è finito, i valori di queste coordinate sono compresi entro limiti finiti, che diremo (a, a'), (b, b') (c, c'); il campo proposto sarà compreso entro il parallelepipedo formato dai piani di equazioni $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$; $z = c$, $z = c'$. Si dividano gli spigoli del parallelepipedo in n parti eguali, e pei punti di divisione si conducano i piani paralleli alle faccie di esso. Si avrà decomposto il parallelepipedo dato in n^3 nuovi parallelepipedi, i cui spigoli sono l'n^{ma} parte degli spigoli del primo; e il campo dato risulterà pure decomposto in parti, il cui numero sarà o n^3, o minore di n^3 (il che avviene quando alcuno di questi parallelepipedi non contenga alcun punto del campo). Quindi, in virtù delle ipotesi fatte, una almeno di queste parti gode della proprietà q; il campo parziale, che ha la proprietà q, sia quello compreso nel parallelepipedo, i cui piani hanno per equazioni $x = a_1$, $x = a'_1$; $y = b_1$, $y = b'_1$; $z = c_1$, $z = c'_1$; sarà $a_1 \geq a$, $a'_1 \leq a'$; $b_1 \geq b$, $b'_1 \leq b'$; $c_1 \leq c$, $c'_1 \geq c$; e $a'_1 - a_1 = \frac{1}{n}(a' - a)$, $b_1' - b_1 = \frac{1}{n}(b' - b)$, $c'_1 - c_1 = \frac{1}{n}(c' - c)$. Si operi su questo nuovo campo come si è operato sul proposto; si troverà un nuovo campo avente pure la proprietà q, e in cui le coordinate dei punti sono comprese fra a_2, a'_2; b_2, b'_2; c_2, c'_2; e così via.

Le quantità a, a_1, a_2, ..., quando variano, vanno crescendo, e le

a', a'_1, $a'_2 \dots$ vanno decrescendo; e poichè le differenze $a' - a$, $a'_1 - a_1$, $a'_2 - a_2, \dots$ vanno diminuendo indefinitamente, esse tendono verso un limite x_0; analogamente le quantità b, b_1, $b_2, \dots$ e b', b'_1, $b'_2 \dots$ tendono ad uno stesso limite y_0, e le c, c_1, c_2, $\dots$ e c', c'_1, $c'_2, \dots$ verso z_0. Dico che il punto P di coordinate x_0, y_0, z_0 gode della proprietà enunciata. Invero, fissato ad arbitrio r, si determini n così grande che tutti i punti le cui coordinate sono comprese fra a_n, a'_n; b_n, b'_n; c_n, c'_n, distino da P meno di r (per il che basta prendere n in guisa che le differenze $x_0 - a_n$, $a'_n - x_0$; $y_0 - b_n$, $b'_n - y_0$, $z_0 - c_n$, $c'_n - z_0$, che hanno per limiti zero, siano minori di $\frac{1}{3} r$). Allora i punti del campo proposto, le coordinate dei quali sono compresi negli stessi intervalli, distano da P meno di r, e formano un campo avente la proprietà q.

Corollarii — 1° Se il campo finito A ha infiniti punti, esiste un punto P tale che, fissato ad arbitrio r, si può determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e che ha pure infiniti punti.

2° Se U è una grandezza funzione della posizione d'un punto P, e se l è il limite superiore dei valori di U corrispondenti ai punti d'un campo finito A, esiste un punto P tale che, fissato ad arbitrio r, si può determinare un campo, parte di A, i cui punti distano da P meno di r, e che il limite superiore dei valori di U corrispondenti ai punti di questo campo è ancora l.

3° Se U è una grandezza funzione continua della posizione del punto P, data in un campo finito e chiuso, essa assume in questo campo il suo massimo ed il suo minimo valore.

4° Se tutti i punti del campo finito e chiuso A sono interni al campo B, si può determinare una lunghezza r in guisa che ogni punto, che disti da qualche punto di A meno di r, appartenga a B.

10. Una grandezza dicesi *funzione* d'un campo, se ad ogni campo, o assolutamente arbitrario o obbligato a certe condizioni, corrisponde un valore di quella grandezza.

Una grandezza dicesi *funzione distributiva* d'un campo, se il valore di quella grandezza corrispondente ad un campo è la somma dei valori di essa corrispondenti alle parti in cui si può decomporre il campo dato.

Così, se i campi che si considerano sono segmenti d'una retta, o archi d'una linea, la loro lunghezza è una funzione distributiva, perchè la lunghezza d'un arco è la somma delle lunghezze delle sue parti. Se i campi che si considerano sono figure piane aventi aree proprie, l'area d'un campo è funzione distributiva, perchè l'area d'una figura è la somma delle aree delle sue parti; e così via per le aree di superficie qualunque, e pei volumi.

La lunghezza del campo comune ad un campo variabile e ad una retta fissa è funzione distributiva di quel campo; l'area del cono che proietta da un punto fisso un arco variabile è funzione distributiva di quest'arco, ecc. Se i campi che si considerano sono corpi materiali, la massa d'un corpo è una grandezza fisica funzione distributiva di esso, perchè la massa d'un corpo è la somma delle masse delle sue parti.

Ma il quadrato della lunghezza d'un arco non è funzione distributiva di esso, poichè questo quadrato è minore della somma dei quadrati delle lunghezze delle parti dell'arco.

Due funzioni distributive d'uno stesso campo diconsi anche, con Cauchy, *coesistenti*. La ragione di questo nome si è che, quando l'una si annulla, in generale si annulla pure l'altra.

11. Ad un campo variabile si possono far corrispondere, oltrechè grandezze, anche altri enti; e se questi sono sommabili, come avviene se sono segmenti, o campi, si potrà estendere loro la definizione di funzione distributiva.

Indicheremo con segni (lettere) le funzioni distributive. Così con *gr*A intenderemo la grandezza del campo A, cioè la sua lunghezza, o area, o volume, a seconda del numero delle sue dimensioni. Sia α il simbolo d'una funzione (o operazione) distributiva, e $\alpha(A)$, ovvero, più semplicemente, αA il valore di questa funzione corrispondente al campo A. La proprietà distributiva è indicata dalla formola

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B,$$

ove A e B sono campi.

Se α e β sono i segni di due operazioni distributive, e se αA e βA sono sommabili (il che avviene se sono numeri, o grandezze omogenee, o campi, o segmenti, ecc.) ad ogni campo A si può far corrispondere il valore $\alpha A + \beta A$, che indicheremo anche con $(\alpha + \beta)A$. L'operazione indicata col simbolo $\alpha + \beta$ è pure distributiva. Invero si ha, per definizione $(\alpha + \beta)(A + B) = \alpha(A + B) + \beta(A + B)$; e poichè α e β sono operazioni distributive,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(A + B) &= \alpha A + \alpha B + \beta A + \beta B \\ &= (\alpha + \beta)A + (\alpha + \beta)B,\end{aligned}$$

il che dimostra la proprietà distributiva dell'operazione $\alpha + \beta$.

Il prodotto di αA per un numero m, che indicheremo con $m\alpha A$, è pure funzione distributiva, poichè

$$m\alpha(A + B) = m(\alpha A + \alpha B) = m\alpha A + m\alpha B.$$

Se α è il simbolo d'una operazione distributiva d'un campo A, e β è il simbolo d'una nuova operazione distributiva eseguibile su αA, sarà $\beta\alpha A$ pure funzione distributiva. Invero si ha $\beta\alpha(A + B) = \beta(\alpha A + \alpha B)$, a causa della proprietà distributiva di α, e $= \beta\alpha A + \beta\alpha B$, a causa della proprietà distributiva di β, il che dimostra la proprietà distributiva dell'operazione $\beta\alpha$.

Si osservi che se x è un numero, ed $y = f(x)$ è una funzione numerica continua di x avente la proprietà distributiva, ossia tale che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, allora $f(x)$ è il prodotto di x per un numero costante a (V. Calcolo, pag. 28, 9°).

12. Sia $x = x(A)$ una grandezza, funzione distributiva del campo A. Supporremo che ad ogni campo che si considera corrisponda sempre un valore di x positivo e mai nullo; questo avverrà se si fa p. e. $x(A) = gr A$, e si considerano solamente quei campi la cui grandezza non è nulla.

Sia $y = y(A)$ una seconda funzione distributiva del campo A; sicchè x e y sono grandezze coesistenti. Preso un campo qualunque nelle vicinanze d'un punto P, siano Δy e Δx i valori corrispondenti di y ed x, e si immagini il loro rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ col che intenderemo o il rapporto delle due grandezze, se esse sono omogenee, ovvero il rapporto dei numeri che le misurano.

Diremo che, in un punto P, il rapporto delle due funzioni distributive y ed x d'un campo vale ρ, se ρ è il limite verso cui tende il rapporto dei valori di queste funzioni, corrispondenti ad un campo di cui tutti i punti si avvicinano indefinitamente a P.

Indicheremo alcune volte che ρ è il rapporto delle funzioni y ed x nel punto P colla notazione, analoga a quella delle derivate, $\rho = \left(\frac{dy}{dx}\right)_P$, ovvero anche $\rho = \frac{dy}{dx}$, o $dy = \rho dx$. Se ρ è il rapporto di y ed x nel punto P, diremo anche che, in questo punto, la funzione y è eguale alla funzione x moltiplicata per ρ. Il numero ρ varierà in generale col variare del punto P, e sarà una funzione della posizione di P.

Vedremo fra breve molti esempi di questi rapporti. Per ora ci limiteremo al seguente. Se i campi che si considerano sono corpi materiali, x è il loro volume, e y la loro massa, il rapporto della massa al volume d'un campo dicesi la densità media di esso. Se questo rapporto è costante, quel corpo è omogeneo; se variabile, esso è eterogeneo, e dicesi appunto densità del corpo in un suo punto il limite del rapporto della massa al volume d'un campo di cui tutti i punti si avvicinano al dato, ossia il rapporto $\frac{dy}{dx}$ in quel punto.

È chiaro che se, nel punto P, il rapporto di y ad x ha un valore ρ, non nullo, il rapporto di x ad y vale $\frac{1}{\rho}$:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

se i rapporti delle funzioni y e z alla x valgono ρ e σ, il rapporto di $y \pm z$ alla x vale $\rho \pm \sigma$:

$$\frac{d(y \pm z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \pm \frac{dz}{dx};$$

se il rapporto di z ad y vale ρ, e quello di y ad x vale σ, il rapporto di z ad x vale $\rho\sigma$:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx};$$

se $\frac{dy}{dx} = \rho$, ed m è un numero costante, sarà $\frac{dmy}{dx} = m\rho$, ossia:

$$\frac{dmy}{dx} = m\frac{dy}{dx}.$$

13. Teorema. Se il rapporto ρ delle funzioni distributive y ed x in ogni punto d'un campo finito e chiuso S è minore d'un numero M, e maggiore di m, anche il rapporto dei valori di y ed x corrispondenti ad un campo A, parte di S, sarà compreso fra M ed m:

$$m < \frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} < \mathrm{M}.$$

Infatti, pongasi per assurdo che sia $\frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} > \mathrm{M}$, ossia $y(\mathrm{A}) > \mathrm{M}x(\mathrm{A})$. Si divida il campo A in parti $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2$. Corrispondentemente ad una di queste parti dovrà essere il rapporto dei valori delle y e x maggiore di M, poichè se fosse $y(\mathrm{A}_1) < \mathrm{M}x(\mathrm{A}_1)$ e $y(\mathrm{A}_2) < \mathrm{M}x(\mathrm{A}_2)$, sommando si ricaverebbe $y(\mathrm{A}_1) + y(\mathrm{A}_2) < \mathrm{M}[x(\mathrm{A}_1) + x(\mathrm{A}_2)]$, ovvero $y(\mathrm{A}) < \mathrm{M}x(\mathrm{A})$, il che è contrario all'ipotesi fatta. Dunque la proprietà d'un campo A d'essere $\frac{y(\mathrm{A})}{x(\mathrm{A})} > \mathrm{M}$ è tale che, se A ha questa proprietà, dividendolo in parti, una di queste ha la stessa proprietà. Pertanto in virtù del teorema del N. 9, esisterà un punto P tale che, fissata ad arbitrio una lunghezza r, si può determinare un campo ΔA in modo che i suoi punti distino da P meno di r, e pel quale $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)} > M$. Ora questo è assurdo, poichè, siccome $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)}$ tende ad un limite $\rho < M$, si può determinare una lunghezza r in guisa che, per ogni campo ΔA i cui punti distano da P meno di r, sia $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)} < M$. Dunque non può essere il rapporto $\frac{y(A)}{x(A)}$ maggiore di M.

Nello stesso modo si dimostra che questo rapporto non può essere minore di m, e così si conchiude che esso è compreso fra M ed m.

Corollario I. Se il rapporto ρ delle due funzioni distributive y e x è costante in ogni punto del campo S, anche il rapporto dei valori di y ed x corrispondenti ad un campo qualunque A, parte di S, è eguale a quel valore costante di ρ.

Infatti, il rapporto $\frac{y(A)}{x(A)}$ è minore d'ogni numero maggiore di ρ, e maggiore d'ogni numero minore di ρ; dunque esso vale ρ.

Corollario II. Se il rapporto di y ed x è in ogni punto di S nullo, sarà sempre nullo il valore di y corrispondente ad un campo qualunque parte di S.

Corollario III. Se i rapporti delle funzioni y e z alla x sono eguali in ogni punto, i valori di queste funzioni corrispondenti ad un campo qualunque sono pure eguali.

Basterà applicare il corollario precedente alla funzione $z - y$.

14. Teorema. Il rapporto $\rho = \frac{dy}{dx}$ delle due grandezze coesistenti y e x, in un punto, è funzione continua del punto.

Invero, sia P un punto del campo, e sia $\rho(P)$ il valore corrispondente di ρ. Fissato ad arbitrio un numero ϵ, si potrà determinare una lunghezza r in guisa che, preso un campo qualunque ΔA i cui punti distino da P meno di r, il rapporto $\frac{y(\Delta A)}{x(\Delta A)}$ dei valori corrispondenti di y ed x differisca dal suo limite meno di ϵ, cioè sia compreso fra $\rho+\epsilon$ e $\rho-\epsilon$.

Sia ora P′ un punto che dista da P meno di r, e sia $r' < r - gr\mathrm{PP}'$. Sia $\Delta\mathrm{A}$ un campo di punti che distano da P′ meno di r'; questi punti disteranno da P meno di r, e perciò sarà $\frac{y(\Delta\mathrm{A})}{x(\Delta\mathrm{A})}$ compreso fra $\rho+\epsilon$ e $\rho-\epsilon$.

Ma, col tendere di r' a zero, il rapporto $\frac{y(\Delta\mathrm{A})}{x(\Delta\mathrm{A})}$ tende verso il limite $\rho(\mathrm{P}') = \rho'$; e poichè quel rapporto è compreso fra $\rho+\epsilon$ e $\rho-\epsilon$, anche il suo limite ρ' sarà compreso entro le stesse quantità, e quindi la differenza $\rho'-\rho$ è minore di ϵ. Pertanto, fissato piccolo ad arbitrio un numero ϵ, si potè determinare una lunghezza r tale che il valore di ρ corrispondente ad un punto qualunque P′, che dista dal punto fisso P meno di r, differisca dal valore di ρ corrispondente al punto P meno di ϵ; quindi ρ è funzione continua del punto P.

§ 3. Applicazioni.

15. Ecco alcune applicazioni delle proposizioni che precedono.

Se, in un piano fisso, da ogni punto M d'una retta AB, si conducono, normalmente ad AB, e sempre da una stessa parte di essa, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e l'altra la cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua di M; allora, se M percorre un segmento su AB, la retta MN genera un rettangolo di area Δx, e la retta MP genera una figura, di area (esterna od interna) Δy; Δx e Δy saranno evidentemente funzioni distributive del campo descritto da M. Dico che, per ogni posizione di M, il rapporto fra le due aree descritte da MP e MN, ossia il limite del rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ove tutti i punti del campo descritto da M si avvicinino ad un punto fisso, vale il rapporto delle lunghezze delle rette MP e MN che descrivono queste aree:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}.$$

Infatti, sia Δc il campo, parte di AB, descritto di M. Dette l_1 e l_2 due lunghezze, la prima minore e l'altra maggiore delle lunghezze di MP corrispondenti ai punti del campo Δc, sarà il rettangolo di base Δc e di altezza l_1 parte della figura descritta da MP, e quindi la sua area minore di Δy; ma questa figura descritta da MP è parte del rettangolo di base Δc, e di altezza l_2, e quindi l'area Δy è minore dell'area di questo rettangolo.

Ora i rapporti delle aree dei rettangoli di basi Δc e di altezze l_1 e l_2 all'area Δx, che è pure un rettangolo di base Δc, e di altezza MN, sono eguali ai rapporti delle altezze $\frac{l_1}{\mathrm{MN}}$ e $\frac{l_2}{\mathrm{MN}}$. Quindi sarà anche

$$\frac{l_1}{\mathrm{MN}} < \frac{\Delta y}{\Delta x} < \frac{l_2}{\mathrm{MN}}.$$

E siccome la lunghezza della retta MP è funzione continua di M, potremo supporre i punti del campo Δc così prossimi ad M che le lunghezze l_1 ed l_2, le quali comprendono le lunghezze delle perpendicolari MP nei punti di Δc, differiscano da quella corrispondente al punto considerato M tanto poco quanto si vuole; quindi anche $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differirà da $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$ tanto poco quanto si vuole, ossia

$$lim\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}.$$

Da questa proposizione possiamo dedurre alcune conseguenze.

a) Se, nel piano fisso, da ogni punto M della retta terminata AB si conduce una retta MP, normale ad AB, rivolta sempre dalla stessa parte di AB, e la cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua di M, la figura descritta da MP, mentre M percorre il segmento AB, o una sua parte qualunque, ha un'area propria, ossia il limite superiore delle aree dei poligoni interni ad essa è eguale al limite inferiore delle aree dei poligoni che la contengono nel suo interno. Invero, nelle ipotesi fatte, l'area esterna e l'area interna hanno, in ogni punto M di AB, coll'area Δx rapporti eguali, e quindi sono eguali.

b) Se, nel piano fisso, da ogni punto M della retta AB si conducono normalmente ad AB due rette MN ed MP, variabili amendue in lunghezza, e funzioni continue di M, il rapporto delle aree descritte dalle due rette sarà, in ogni punto M, eguale al rapporto delle lunghezze delle rette mobili.

c) Se, nel piano fisso, da ogni punto M di AB si conducono, normalmente ad AB, una retta MN funzione continua di M, ed una seconda retta MP tale che il rapporto $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$ sia costante, anche le aree descritte da MP e MN, mentre M percorre un campo qualunque, hanno fra loro questo rapporto costante.

d) Se, nel piano, da ogni punto M di AB si conducono, normalmente ad AB, due rette MN, MP, le cui lunghezze variino continuamente con M, ed una terza retta MQ eguale in lunghezza alla somma, o differenza, delle MN e MP, anche l'area descritta da MQ è la somma, o differenza, delle aree descritte da MN e MP.

e) Cambiando lettere, e detto u il numero che misura l'area descritta da MP, x il numero che misura la lunghezza del campo descritto da M, e y la lunghezza variabile MP, supposto ancora di prendere la lunghezza costante MN per unità di misura, la formula precedente si può scrivere

$$\frac{du}{dx} = y, \text{ ovvero } du = ydx.$$

16. In modo analogo al precedente si dimostrano queste altre proposizioni:

1° Se, in un piano fisso, da ogni punto M d'una retta AB, si conducono, parallelamente ad una retta data OY, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e l'altra variabile continuamente con M, il rapporto fra l'area descritta dalla retta MP, all'area descritta da MN, è eguale al rapporto delle rette MP e MN che le descrivono.

Detto u il numero che misura l'area descritta da MP, x il numero che misura il campo descritto da M, e ω l'angolo della retta AB colla OY, il rapporto fra l'area p del parallelogrammo descritto da MN e la lunghezza del campo descritto da M vale MN$sen\omega$; quindi

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}\,\mathrm{MN}sen\omega = \mathrm{MP}sen\omega,$$

ovvero, anche, chiamando y la lunghezza di MP:

$$\frac{du}{dx} = y \operatorname{sen}\omega, \quad du = y \operatorname{sen}\omega\, dx.$$

2° Se da ogni punto M d'una figura piana fissa si conducono, normalmente a questo piano, e sempre da una stessa parte, due rette MN e MP, la prima costante in lunghezza, e la seconda variabile continuamente con M, il rapporto fra i volumi descritti dalle rette MP e MN, mentre il punto M descrive nel piano un campo parte della figura data, vale, in ogni punto M, il rapporto delle rette MP e MN che li descrivono. Detto v il volume descritto da MP, e v' quello descritto da MN, sarà quindi $\frac{dv}{dv'} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{MN}}$.

Se supponiamo che dv e dv' siano i numeri che misurano questi volumi, detto ω il numero che misura l'area piana descritta da M, il volume del cilindro v' è eguale all'area base ω moltiplicata per l'altezza MN; quindi $dv' = \mathrm{MN}d\omega$; sostituendo si ricava $dv = \mathrm{MP}d\omega$, ovvero anche, fatto $\mathrm{MP} = z$:

$$dv = z d\omega.$$

3° Se da ogni punto M d'un arco di cerchio AB si conduce il raggio OM, e si porta su esso a partire dal centro O un segmento OP la cui lunghezza, variabile con M, sia funzione continua della posizione di M sull'arco, se M descrive un arco, parte di AB, il raggio OM descriverà un settore circolare, e la retta OP una figura piana (un settore curvilineo); le aree descritte da OM e da OP sono funzioni distributive dell'arco descritto da M, ossia sono grandezze coesistenti. Dico che, per ogni posizione del punto M, il rapporto fra le aree descritte da OP e da OM è eguale al quadrato del rapporto delle lunghezze OP e OM.

Infatti, siano OP_1 e OP_2 due rette, aventi la direzione della retta mobile OM, e le cui lunghezze, fisse, comprendano i valori che assume la lunghezza di OP mentre M varia nel campo Δc. Le rette OP_1 e OP_2 descrivono due settori circolari, che comprendono l'area descritta da OP. Quindi sarà area $OP_1 <$ area OP $<$ area OP_2.

Ora le aree descritte da OP_1 e da OP_2 sono settori circolari, simili all'area descritta da OM; quindi esse stanno come i quadrati dei lati omologhi $\frac{\overline{OP_1}^2}{\overline{OM}^2}$ e $\frac{\overline{OP_2}^2}{\overline{OM}^2}$; perciò

$$\frac{\overline{OP_1}^2}{\overline{OM}^2} < \frac{\text{area OP}}{\text{area OM}} < \frac{\overline{OP_2}^2}{\overline{OM}^2}.$$

Se ora tutti i punti del campo descritto da M si avvicinano ad uno stesso punto M, le lunghezze OP_1 e OP_2, che comprendono i valori di OP, si possono rendere tanto prossime quanto si vuole al valore di OP corrispondente al punto M. Quindi il rapporto $\frac{\text{area OP}}{\text{area OM}}$ si può far differire di tanto poco quanto si vuole da $\frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}$, e

$$lim \frac{\text{area OP}}{\text{area OM}} = \frac{d \text{ area OP}}{d \text{ area OM}} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}.$$

Se indichiamo con u il numero che misura l'area descritta da OP e con α la lunghezza dell'arco descritto da OM, supposto che la lunghezza costante OM sia eguale all'unità di misura, si avrà area OM $= \frac{1}{2}\alpha$, d area OM $= \frac{1}{2}d\alpha$, e quindi, fatto ancora OP $= r$:

$$du = \frac{1}{2} r\, d\alpha.$$

4° Se da ogni punto M d'una sfera si conduce il raggio OM, e su esso si porta a partire dal centro un segmento OP la cui lunghezza varii con M, essendo però funzione continua di M; allora se M descrive un campo sulla sfera, i volumi descritti da OM e da OP sono grandezze coesistenti, ed il loro rapporto è, in ogni punto M, eguale al cubo del rapporto delle lunghezze delle rette che li descrivono.

La dimostrazione è analoga alla precedente.

Preso per unità di misura il raggio della sfera (OM $= 1$), detto v il volume descritto da OP, ω l'area sferica descritta da M, e r la lunghezza di OP, si avrà $vol\mathrm{OM} = \frac{1}{3}\omega$, $d\, vol\mathrm{OM} = \frac{1}{3}d\omega$; quindi, sostituendo in

$$\frac{d\, vol\mathrm{OP}}{d\, vol\mathrm{OM}} = \frac{\overline{\mathrm{OP}}^3}{\overline{\mathrm{OM}}^3},$$

si ricava

$$dv = \frac{1}{3} r^3\, d\omega.$$

17. Sia, nello spazio, OX un asse fisso, P un prisma indefinito, avente le generatrici parallele ad OX, ed F una figura solida finita.

Per ogni punto M di OX conducasi il piano π normale a questo asse; esso incontrerà il prisma P secondo un poligono p, ed il solido F secondo una figura piana f. Se M percorre un segmento su OX, il poligono p descrive un prisma finito, parte di P, e la figura f un solido, parte di F. I solidi descritti da p e da f sono funzioni distributive del campo percorso da M. Dico che se, per una posizione speciale di M, il piano π incontra il campo limite di F secondo una figura piana la quale si possa racchiudere con linee poligonali che comprendano un'area tanto piccola quanto si vuole (ossia, se l'area esterna dell'intersezione di Π col campo limite di F è nulla), allora il rapporto dei solidi descritti dalle figure f e p è eguale, nel punto M, al rapporto delle aree delle due figure f e p che descrivono quei solidi.

Infatti, poichè la figura F è finita, potremo immaginare un solido poliedrico S, p. e. un prisma avente le generatrici parallele ad OX, che contenga nel suo interno F. Facciasi $S = F + F'$, ossia chiamisi F' il campo formato dai punti di S non appartenenti ad F; e sia L il campo limite di F. Il piano Π incontri le figure solide S, F, F', L secondo le figure piane s, f, f', l; sarà $s = f + f'$. Sia ϵ un'area piccola ad arbitrio; in virtù delle ipotesi fatte, potremo formare un campo piano c, limitato da linee rette, che comprenda nel suo interno il campo l, e la cui area sia minore di ϵ.

I punti del campo c appartenenti ad f formano un campo che diremo c_1, e quelli appartenenti ad f' un campo c_2, sicchè $c = c_1 + c_2$. Se da f si sottrae c_1 si avrà un poligono q interno ad f, e quindi anche ad F; e se da f' si sottrae c_2 si avrà un poligono q' interno ad F'. Quindi, in sostanza, il poligono s è decomposto in quattro parti $s = q + c_1 + c_2 + q'$; $q + c_1 = f$, $c_2 + q' = f'$, $c_1 + c_2 = c$; $q + c$ è un poligono contenente f, e $c + q'$ è un poligono contenente f'.

Si immaginino ancora i prismi indefiniti aventi per basi i poligoni q, c, q', che diremo Q, C, Q'.

Poichè tutti i punti del poligono q sono interni ad F, potremo determinare una lunghezza r_1 in guisa che ogni punto distante da qualche punto di q meno di r_1, appartenga ad F (N. 9, 4°). Per la stessa ragione, potremo determinare una lunghezza r_2 in guisa che ogni punto distante da qualche punto di q' meno di r_2 appartenga ad F'. Sia r la più piccola delle lunghezze r_1 e r_2.

Preso su OX un segmento ad arbitrio, di cui tutti i punti distino dal punto considerato M meno di r, siano ΔF, $\Delta F'$, ΔP, ΔS, ΔQ, $\Delta Q'$, ΔC i solidi descritti da f, f', p, s, q, q', c mentre M percorre quel segmento. Ogni punto di ΔQ dista dalla sua proiezione su q meno di r; quindi ogni punto ΔQ appartiene a ΔF. Per la stessa ragione, tutti i punti di $\Delta Q'$ appartengono alla $\Delta F'$. Il campo ΔC

si può scomporre in due parti, l'una formata dai punti appartenenti a ΔF, e che diremo ΔC_1, e l'altra, ΔC_2, formata dai punti appartenenti a $\Delta F'$. Quindi si avrà $\Delta S = \Delta Q + \Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta Q'$; $\Delta Q + \Delta C_1 = \Delta F$, $\Delta C_2 + \Delta Q' = \Delta F'$, $\Delta C = \Delta C_1 + \Delta C_2$.

Pertanto la figura ΔF comprende il prisma ΔQ, ed è compresa nel prisma $\Delta Q + \Delta C$, e il suo volume (esterno od interno) è compreso fra i volumi di ΔQ e di $\Delta Q + \Delta C$. Ora, poichè i volumi di due prismi aventi le stesse altezze stanno come le basi, si ha:

$$\frac{\text{vol}\,\Delta Q}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,q}{\text{area}\,p}, \quad \frac{\text{vol}\,\Delta Q + \text{vol}\,\Delta C}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,q + \text{area}\,c}{\text{area}\,p};$$

quindi

$$\frac{\text{area}\,q}{\text{area}\,p} < \frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P} < \frac{\text{area}\,q + \text{area}\,c}{\text{area}\,p}.$$

Ma si ha pure area $q <$ area $f <$ area $q +$ area c; quindi $\frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P}$ differisce da $\frac{\text{area}\,f}{\text{area}\,p}$ meno di $\frac{\text{area}\,c}{\text{area}\,p}$; e poichè l'area di c si può supporre piccola ad arbitrio, si conchiude

$$\lim \frac{\text{vol}\,\Delta F}{\text{vol}\,\Delta P} = \frac{\text{area}\,f}{\text{area}\,p}.$$

Se indichiamo con v il numero che misura il volume di F, e supponiamo che il poligono p, base del prisma P, sia il quadrato costrutto sull'unità di lunghezza, detta x la lunghezza del cammino descritto da M, e fatto $\omega = \text{area}\,f$, il numero che misura il volume ΔP è Δx; quindi $\lim \frac{\Delta v}{\Delta x} = \omega$, ossia $dv = \omega dx$.

Ecco alcune conseguenze della proposizione che precede:

a) Se ogni piano π incontra il campo limite di F secondo una figura piana di area nulla, allora i rapporti dei volumi esterno ed interno della figura descritta da f al volume descritto da p, sono eguali in ogni punto M di OX; quindi i volumi esterno ed interno della figura descritta da F mentre M percorre un segmento finito qualunque, sono eguali, e quella figura ha un volume proprio.

b) Se F e G sono due solidi, e per ogni punto M di OX si conduce il piano Π normale ad OX, che incontri i solidi secondo le figure piane f e g, supposto sempre che le aree delle figure intersezioni di Π coi campi limiti di F e G siano nulle, il rapporto fra i volumi descritti da f e g, mentre M varia su OX, vale, in ogni posizione di M, il rapporto delle aree delle figure piane f e g.

c) Se ogni piano Π normale all'asse OX in un suo punto qualunque M incontra i due solidi F e G secondo due figure piane eguali in area, i volumi dei due solidi, compresi fra due piani Π qualunque sono eguali.

d) Se ogni piano Π incontra i tre solidi F G H secondo figure piane tali che la somma, o differenza, delle prime due sia eguale alla terza, la somma, o differenza, dei volumi dei due primi solidi è eguale al volume del terzo.

18. Si dimostrano allo stesso modo, e con maggior facilità, queste altre proposizioni:

1° Sia F una figura piana, e nel suo piano sia segnato un asse OX. Conducasi per ogni punto M di OX la normale a questo asse, la quale incontrerà la figura F secondo un campo rettilineo f; si porti su questa normale, a partire da M, un segmento k di lunghezza costante. Se, per una posizione speciale di M, la normale ad OX incontra il campo limite di F secondo un campo lineare di lunghezza esterna nulla, allora il rapporto dell'area descritta dalla figura f, mentre M percorre un segmento di OX, all'area descritta contemporaneamente da k, è eguale, nel punto M, al rapporto delle lunghezze di f e di k che descrivono quelle aree.

2° Sia F un solido qualunque e π un piano. Per ogni punto M di π conducasi la normale a π, che incontrerà F secondo una figura rettilinea f; e si porti su questa normale, a partire da M, un segmento k costante in lunghezza. Se, per una posizione di M, la normale a π incontra il campo limite di F secondo un campo lineare di lunghezza esterna nulla, il rapporto fra il volume descritto da f mentre M descrive un campo nel piano π, al volume descritto da k, è eguale, per quella posizione di M, al rapporto delle lunghezze di f e k che descrivono quei campi.

19. Sia AB un arco curvilineo continuo, e A′B′ la sua proiezione ortogonale su d'una retta. Supporremo che ogni punto di A′B′ sia la proiezione d'un sol punto di AB; che la curva abbia in ogni suo punto una tangente, la quale si possa considerare come il limite della congiungente due punti della linea, che si avvicinano al punto dato; e che l'angolo che questa tangente fa con A′B′ non sia mai nullo. Ad ogni arco parte di AB corrisponde la sua proiezione, parte di A′B′, e viceversa; la lunghezza s dell'arco e la lunghezza x della sua proiezione sono grandezze coesistenti. Dico che, in ogni punto P di AB, il rapporto fra la lunghezza dell'arco e la lunghezza della sua proiezione è eguale al coseno dell'angolo che la tangente alla curva in P fa colla retta A′B′.

Infatti, preso un arco Δs nelle vicinanze del punto P, e detta c la sua corda, e Δx la proiezione su A′B′ sia dell'arco che della corda, sarà

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{\Delta x}{c}\,\frac{c}{\Delta s}.$$

Ora, per le ipotesi fatte (N. 7), $lim\,\frac{c}{\Delta s}=1$; il rapporto $\frac{\Delta x}{c}$ vale il coseno dell'angolo che la corda c fa colla sua proiezione, ed ha per limite il coseno dell'angolo che la tangente in P fa con A′B′. Quindi, detto θ quell'angolo, si conchiude

$$lim\,\frac{\Delta x}{\Delta s}=\frac{dx}{ds}=cos\theta,\quad dx=cos\theta\,ds,\quad ds=\frac{dx}{cos\theta}.$$

Si deduce da questa formula che, se in tutti i punti dell'arco AB l'angolo θ è compreso fra θ_0 e θ_1, il rapporto fra l'arco finito AB, e la sua proiezione è compreso fra $\frac{1}{cos\theta_0}$ e $\frac{1}{cos\theta_1}$. In particolare, se l'angolo θ è costante, come avviene p. e. nell'elica ove la si proietti sul suo asse, il rapporto fra un arco finito e la sua proiezione ha il valore costante $\frac{1}{cos\theta}$.

20. Sia A una superficie qualunque, e B la sua proiezione ortogonale su d'un piano; supporremo che ogni punto di B sia la proiezione d'un sol punto di A. Ad ogni parte di A corrisponde una parte di B e viceversa, e le aree della figura che si proietta e della sua proiezione sono grandezze coesistenti. Dico che, se in un punto P di A la superficie ha un piano tangente, e l'angolo che ogni retta che unisce due punti della superficie fa con quel piano ha per limite zero, ove i due punti tendano al punto P, allora, nel punto P, il rapporto fra l'area proiezione e l'area che si proietta vale il coseno dell'angolo λ che il piano tangente in P fa col piano su cui si proietta.

Infatti, sia α una porzione di superficie situata nelle vicinanze del punto P, e tale che l'angolo che una retta qualunque che unisce due punti di α fa col piano tangente in P sia minore ϵ. Sia β la proiezione di α su π. Si proietti ortogonalmente α su d'un nuovo piano π', e sia β' la nuova figura così ottenuta.

Se il piano π' fosse parallelo a π sarebbe l'area $\beta' = \beta$.

Se π' non è parallelo a π, sia OX la loro intersezione. Si immagini un sistema di piani normali ad OX. Uno di essi incontra α secondo una linea s, e incontra β e β' secondo due rette finite h ed h', che sono le proiezioni di s. Detta k la corda di s, sarà $h = k \cos(hk)$, $h' = k \cos(kh')$, e quindi $h' = h \dfrac{\cos(kh')}{\cos(kh)}$. Ma l'angolo $\widehat{kh}$ è minore della somma dell'angolo che k fa col piano tangente in P, e dell'angolo λ che questo piano tangente fa con π; quindi $\widehat{kh} < \epsilon + \lambda$, e $h' < \dfrac{h}{\cos(\epsilon + \lambda)}$. Ora, variando il punto di OX da cui si conduce il piano normale ad OX, le rette h e h' descrivono le aree piane β e β', e quindi sarà anche $\beta' < \beta \dfrac{1}{\cos(\lambda + \epsilon)}$.

Pertanto, se si proietta l'area α su d'un piano qualunque, o, ciò che fa lo stesso, se si sposta nello spazio in modo qualunque la figura α, e poi la si proietta su d'un piano fisso, p. e. π, si avrà per proiezione un'area minore di $\dfrac{\beta}{\cos(\lambda + \epsilon)}$.

Si decomponga ora l'area α in parti $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, e e siano $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_n$ le loro proiezioni su π. Trasportando queste parti in modo qualunque nello spazio, e proiettandole su d'un piano fisso, dette $\beta'_1\, \beta'_2 \ldots \beta'_n$ le loro proiezioni, sarà

$$\beta'_1 < \beta_1 \frac{1}{\cos(\lambda+\epsilon)}, \quad \beta'_2 < \beta_2 \frac{1}{\cos(\lambda+\epsilon)}, \ \ldots \ldots;$$

e sommando

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \ldots + \beta'_n < (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \frac{1}{\cos(\lambda+\epsilon)},$$

ossia

$$\beta'_1 + \beta'_2 + \ldots + \beta'_n < \beta \frac{1}{\cos(\lambda+\epsilon)}.$$

Ora l'area di α è appunto il limite superiore della somma $\beta'_1 + \beta'_2 + \ldots + \beta'_n$; quindi si conchiude

$$\alpha < \beta \frac{1}{\cos(\lambda+\epsilon)}. \tag{1}$$

Suppongasi ora che il piano π' sia il piano tangente alla superficie in P. Sarà l'angolo $kh' < \epsilon$, e l'angolo $kh > \lambda - \epsilon$; quindi

$$h' > h \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda-\epsilon)}, \quad \text{e} \quad \beta' > \beta \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda-\epsilon)}.$$

Ma l'area α è maggiore della sua proiezione β', quindi

$$\alpha > \beta \frac{\cos\epsilon}{\cos(\lambda-\epsilon)}. \tag{2}$$

Dalle due formule (1) e (2) si deduce immediatamente, poichè ϵ si può rendere piccolo ad arbitrio, che

$$lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\cos\lambda}$$

c. v. d.

Nella proposizione precedente si è fatta l'ipotesi che l'angolo, che la retta, la quale unisce due punti P' e P'' della superficie, fa col piano tangente in P abbia per limite zero col tendere di P' e P'' a P. È facile il vedere che se la superficie ha in ogni suo punto P un piano tangente il quale si sposti con continuità spostandosi P, la condizione precedente è soddisfatta. Invero, il piano passante per P' e P'' e normale al piano tangente in P incontrerà la superficie secondo una curva piana avente tangente in ogni suo punto. La corda $P'P''$ è parallela alla tangente all'arco $P'P''$ in un certo punto Q; quindi l'angolo che la $P'P''$ fa col piano tangente in P è uguale all'angolo che la tangente in Q alla curva $P'P''$ fa collo stesso piano. Ma la tangente in Q alla $P'P''$ è contenuta nel piano tangente in Q alla superficie; quindi l'angolo che la tangente in Q fa col piano tangente in P è minore dell'angolo che fa con esso il piano tangente in Q. Ora, per le ipotesi fatte, l'angolo dei piani tangenti in P e Q tende a zero, ove P' e P'', e quindi Q, si avvicinano indefinitamente a P. Dunque l'angolo che la $P'P''$ fa col piano tangente in P ha per limite zero col tendere di P' e P'' a P.

Dalla proposizione dimostrata risulta che se in tutti i punti della superficie A il piano tangente fa col piano di proiezione un angolo λ compreso fra λ_0 e λ_1, il rapporto fra l'area A e l'area della sua proiezione è compreso fra $\frac{1}{\cos \lambda_1}$ e $\frac{1}{\cos \lambda_0}$. In particolare, se l'angolo λ è costante, il rapporto fra l'area A e la sua proiezione vale $\frac{1}{\cos \lambda}$. Questo caso avviene p. e. nel cono di rivoluzione, ove lo si proietti sulla base; e $\cos \lambda$ vale il rapporto fra il raggio della base al lato del cono. Quindi: *l'area d'una porzione qualunque di un cono di rivoluzione sta alla sua proiezione sulla base del cono come il lato del cono sta al raggio della base.* Prendendo la porzione a considerarsi in modo che la sua proiezione sia quadrabile, si possono determinare sulla superficie conica infinite aree quadrabili.

§ 4. Integrali estesi a campi.

21. Sia x una grandezza, funzione distributiva d' un campo, e che assume soli valori positivi. Ad ogni punto dei campi considerati corrisponda un numero ρ, che può variare col punto. Dicesi *integrale di* ρdx *esteso al campo* A una grandezza tale che: 1° sia sempre maggiore del risultato che si ottiene decomponendo il campo A in parti, in modo qualunque, moltiplicando il valore di x corrispondente ad ognuna di queste parti per un numero minore di tutti i valori assunti da ρ in questo campo parziale, e sommando questi prodotti; 2° sia minore della somma dei prodotti dei valori di x corrispondenti alle parti di A per numeri rispettivamente maggiori di quelli assunti da ρ nelle parti stesse; 3° e che sia l'unica grandezza che goda di queste proprietà.

Indicheremo l'integrale di ρdx esteso al campo A colla scrittura $\int_A \rho dx$. Pertanto con $\int_A \rho dx$ intendiamo una grandezza (omogenea con x) tale che, decomposto il campo A in parti in modo qualunque $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, indicando con $x(A_1)$, $x(A_2) \ldots x(A_n)$ i valori corrispondenti di x, e detti $\rho_1' \rho_2' \ldots \rho_n'$ e $\rho_1'' \rho_2'' \ldots \rho_n''$ dei numeri, i primi minori e gli altri maggiori dei valori assunti da ρ in quei campi parziali, siano sempre soddisfatte le disuguaglianze

$$\int_A \rho\, dx > \rho_1'\, x(A_1) + \rho_2'\, x(A_2) + \ldots + \rho_n'\, x(A_n)$$

$$\int_A \rho\, dx < \rho_1''\, x(A_1) + \rho_2''\, x(A_2) + \ldots + \rho_n''\, x(A_n),$$

qualunque sia la legge di divisione del campo A, e comunque si prendano i valori di ρ'_i e ρ''_i purchè ρ'_i sia minore dei valori assunti da ρ nel campo A_i, e ρ''_i maggiore degli stessi valori; inoltre sia l'unica grandezza che soddisfi a queste condizioni. Nelle formule precedenti si può supporre che ρ'_i, che non deve superare i valori di ρ nel campo A_i, sia il limite inferiore dei valori di ρ in questo campo; e si può supporre che ρ''_i ne sia il limite superiore.

22. Suppongasi che i valori di ρ corrispondenti ai punti di A siano compresi fra limiti finiti, e si considerino le somme:

$$s' = \rho_1' x(A_1) + \rho_2' x(A_2) + \ldots + \rho_n' x(A_n)$$

e

$$s'' = \rho_1'' x(A_1) + \rho_2'' x(A_2) + \ldots + \rho_n'' x(A_n),$$

le quali dipendono dalla legge con cui si è diviso A in parti, e dalla scelta dei numeri ρ'_i e ρ''_i.

Ogni somma s' è sempre minore d'ogni somma s'', sia che esse corrispondano alla stessa divisione di A, o a divisioni diverse. La cosa è evidente se s' e s'' corrispondono alla stessa divisione di A, poichè in tal caso ρ_i' è minore di tutti i valori di ρ nel campo A_i, e ρ_i'' ne è maggiore, quindi $\rho_i' < \rho_i''$, e moltiplicando per $x(A_i)$, quantità positiva, si ha $\rho_i' x(A_i) < \rho_i'' x(A_i)$, e sommando $s' < s''$. Se poi s' e s'' corrispondessero a divisioni diverse di A, si immagini quella divisione di A che risulta dalla sovrapposizione di amendue. Sostituendo in s' e s'' ai termini $x(A_i)$ la somma dei valori di x corrispondenti alle parti in cui è decomposto A_i, s' e s'' diventano la somma dei valori di x corrispondenti a questa nuova divisione di A, moltiplicati rispettivamente per numeri minori e maggiori dei valori assunti di ρ in questi campi, e quindi sarà sempre $s' < s''$.

Pertanto, le quantità s' avranno un limite superiore, e le s'' un limite inferiore, e il limite superiore delle s' sarà minore o eguale al limite inferiore delle s''.

Se il limite superiore delle s' è eguale al limite inferiore delle s'', il loro valore comune sarà l'$\int_A \rho\, dx$, perchè questa sarà una quantità sempre maggiore dei valori di s', minore dei valori di s'', e la sola quantità compresa fra i valori di s' e di s''.

Ma se il limite superiore delle s' è minore del limite inferiore delle s'', allora questi due limiti, ed ogni quantità compresa fra essi, è maggiore delle s' è minore delle s''; e non si può più parlare di integrale nel senso precedentemente definito. Però a questi limiti daremo dei nomi; chiameremo *integrale inferiore* di $\rho\, dx$, e indicheremo con $\underline{\int}_A \rho\, dx$, il limite superiore dei valori di s', e chiameremo *integrale superiore* di $\rho\, dx$, e indicheremo con $\overline{\int}_A \rho\, dx$, il limite inferiore dei valori di s''.

Potrebbe anche avvenire che non esistano valori finiti ρ' e ρ'' entro cui siano compresi i valori di ρ; anche in questo caso non si può parlare di integrale propriamente detto, ma potrà ancora presentarsi uno dei due integrali, inferiore o superiore, o nessuno.

23. Teorema I. — L'integrale di $\rho\, dx$ (proprio, o superiore, o inferiore) esteso ad un campo somma di più campi è eguale alla somma degli integrali di ρdx estesi a questi campi.

Siano gli integrali inferiori di $\rho\, dx$ estesi ai campi A, B, e $A + B$. Dico che la somma dei due primi è eguale al terzo.

Infatti, si decomponga il campo $A + B$ in parti, in modo qualunque. Una qualunque di queste parti, che indicheremo con $(A + B)_i$ si può decomporre in due A_i e B_i, l'una appartenente al campo A, e l'altra al campo B, badando che di queste due parti una può anche mancare. Si calcoli la somma s' corrispondente a questa divisione; detto ρ_i' un numero minore dei valori di ρ nel campo $(A + B)_i = A_i + B_i$, si avrà

$$s' = \sum_i \rho'_i\, x(A_i + B_i) = \sum_i \rho'_i\, x(A_i) + \sum_i \rho'_i\, x(B_i).$$

Ora ρ'_i è minore dei valori di ρ sia nel campo A_i che nel campo B_i; quindi sarà:

$$\sum_i \rho'_i\, x(A_i) < \underline{\int}_A \rho\, dx, \text{ e } \sum_i \rho'_i\, x(B_i) < \underline{\int}_B \rho\, dx;$$

e perciò

$$s' < \underline{\int}_{A} \rho\, dx + \underline{\int}_{B} \rho\, dx.$$

D'altra parte, fissato ad arbitrio ϵ, lo si decomponga in due parti ϵ_1 ed ϵ_2; potremo dividere i campi A e B in parti, e prendere in modo i valori di ρ' che

$$\sum_i \rho'_i\, x(A_i) > \underline{\int}_{A} \rho\, dx - \epsilon_1, \quad \sum_i \rho'_i\, x(B_i) > \underline{\int}_{B} \rho\, dx - \epsilon_2;$$

onde, sommando, si conchiude che è possibile decomporre il campo $A + B$ in parti A_i e B_i in guisa che la somma dei prodotti dei valori di x corrispondenti a queste parti, per numeri minori dei valori assunti da ρ nelle medesime differisca da $\underline{\int}_{A} \rho\, dx + \underline{\int}_{B} \rho\, dx$ meno d'una quantità comunque piccola ϵ. Dunque questa somma è il limite superiore dei valori di s', ossia

$$\underline{\int}_{A} \rho\, dx + \underline{\int}_{B} \rho\, dx = \underline{\int}_{A+B} \rho\, dx.$$

Nello stesso modo si dimostra che

$$\overline{\int}_{A} \rho\, dx + \overline{\int}_{B} \rho\, dx = \overline{\int}_{A+B} \rho\, dx;$$

e se gli integrali inferiori coincidono coi superiori, ossia se $\rho\, dx$ è integrabile nei campi A e B, esso sarà pure integrabile nel campo $A + B$, e viceversa, e sarà:

$$\int_{A} \rho\, dx + \int_{B} \rho\, dx = \int_{A+B} \rho\, dx.$$

Il teorema precedente si può pure enunciare dicendo che l'integrale, proprio o inferiore o superiore, di $\rho\, dx$, esteso ad un campo, è funzione distributiva di questo campo.

TEOREMA II. — Se ρ è funzione continua del punto P, nelle vicinanze d'una sua posizione speciale P_0, il rapporto fra il valore dell'integrale (proprio, o inferiore o superiore) di ρdx, esteso ad un campo qualunque ΔA nelle vicinanze di P_0, al valore di x corrispondente a questo stesso campo, col tendere di tutti i punti di ΔA a P_0, tende verso il valore di ρ corrispondente a P_0.

Infatti, sia ρ_0 il valore di ρ che corrisponde a P_0. Fissata una quantità piccola ad arbitrio ϵ, si determini una lunghezza r in modo che il valore di ρ corrisponda ad ogni punto P che dista da P_0 meno di r, differisca da ρ_0 meno di ϵ. Sia ΔA un campo i cui punti distano da P_0 meno di r. I valori di ρ corrispondenti a ΔA saranno compresi fra $\rho_0 - \epsilon$ e $\rho_0 + \epsilon$; quindi gli integrali, proprio inferiore e superiore, di $\rho\, dx$, estesi al campo ΔA sono compresi fra $(\rho_0 - \epsilon)\, x(\Delta A)$ e $(\rho_0 + \epsilon)\, x(\Delta A)$; e i loro rapporti ad $x(\Delta A)$ sono compresi fra $\rho_0 - \epsilon$ e $\rho_0 + \epsilon$; ossia il limite del rapporto di uno qualunque di quegli integrali al valore di x vale ρ_0.

COROLLARIO. — Se in ogni punto d'un campo finito e chiuso S, ρ è funzione continua, esiste l'integrale di $\rho\, dx$ esteso al campo S, o ad una sua parte qualunque.

Infatti, poichè gli integrali inferiore o superiore di $\rho\, dx$ estesi ad un campo A, parte di S, sono funzioni distributive di questo campo A, ed in ogni punto P di S il rapporto del loro valore al valore corrispondente di x è ρ, ossia è lo stesso per amendue gli integrali, si conchiude che i valori degli integrali inferiore o superiore di $\rho\, dx$ estesi al campo S, o ad una sua parte qualunque sono eguali, ossia che esiste l'integrale proprio di $\rho\, dx$ esteso agli stessi campi.

TEOREMA III. — Se x e y sono grandezze coesistenti, funzioni distributive dei campi che fanno parte d'un campo finito e chiuso S, le quali abbiano in ogni punto P di S un rapporto $\frac{dy}{dx} = \rho$, determinato e finito, il valore di y corrispondente ad un campo qualunque A, parte di S, vale

$$y\,(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \rho\, dx.$$

Infatti, diviso il campo A in parti $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n$, se i valori di ρ corrispondenti ai punti di A_i sono maggiori di ρ'_i e minori di ρ''_i, sarà pure $y(\mathrm{A}_i) > \rho'_i\, x(\mathrm{A}_i)$ e $y(\mathrm{A}_i) < \rho''_i\, x(\mathrm{A}_i)$; quindi, sommando le varie diseguaglianze che si ottengono facendo $i = 1, 2, \ldots n$, si ricava:

$$y(\mathrm{A}) > \rho'_1\, x(\mathrm{A}_1) + \rho'_2\, x(\mathrm{A}_2) + \ldots + \rho'_n\, x(\mathrm{A}_n) = s'$$

e

$$y(\mathrm{A}) < \rho''_1\, x(\mathrm{A}_1) + \rho''_2\, x(\mathrm{A}_2) + \ldots + \rho''_n\, x(\mathrm{A}_n) = s'',$$

ossia $y(\mathrm{A})$ soddisfa alle due prime condizioni dell'integrale, di essere cioè maggiore della prima somma s' e minore della seconda s''. D'altronde, ρ è funzione continua del punto P; perciò pel corollario precedente, non esiste altra quantità compresa fra s' ed s'' che $\int_{\mathrm{A}} \rho\, dx$; quindi

$$y\,(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \rho\, dx.$$

24. Gli integrali geometrici precedentemente definiti presentano massima analogia cogli integrali definiti $\int_a^b f(x)\, dx$ che compaiono nel calcolo integrale; anzi ridurremo il calcolo dei primi al calcolo di questi. Sarà perciò utile di ben fissare il significato di quest'integrale definito, nel modo che sarà per noi più conveniente, e di ricordare a questo proposito alcune proposizioni.

Dicesi *intervallo* (a, b) il sistema di tutti i numeri compresi fra a e b, esclusi o non questi estremi.

Supponiamo, per maggior semplicità, $a < b$, benchè le proposizioni che seguono siano pure applicabili, con leggiere modificazioni, senza questa ipotesi.

Se un intervallo è decomposto in parti, dicasi che esso è *somma* delle sue parti.

Dicasi *ampiezza* d'un intervallo (a, b) la differenza $b - a$. Se l'intervallo (a, b) è decomposto in parti, la sua ampiezza è la somma delle ampiezze delle sue parti: quindi l'ampiezza d'un intervallo è funzione distributiva del medesimo.

Se una grandezza è funzione distributiva d'un intervallo, la diremo *coesistente* con quell'intervallo.

Così, se $f(x)$ è funzione della variabile numerica x, l'incremento $f(b) - f(a)$ che essa riceve mentre x varia nell'intervallo (a, b), è coesistente con questo intervallo, perchè l'incremento della funzione nell'intervallo (a, b) è la somma dei suoi incrementi nelle parti di (a, b). Così ancora, se P è un punto, la cui posizione dipende da una variabile x, variando x in un intervallo (a, b), il punto P descriverà un campo (un arco di linea) e la lunghezza di questo campo, ed ogni funzione distributiva di esso, è una quantità coesistente coll'intervallo (a, b).

Se una grandezza y è coesistente coll'intervallo percorso dalla variabile x, potremo considerare il limite verso cui tende il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ del valore Δy di y corrispondente ad un intervallo qualunque (a, b), all'ampiezza Δx di questo intervallo, ove si facciano tendere i suoi estremi ad uno stesso valore x. Indicheremo questo limite con $\frac{dy}{dx}$, e lo chiameremo, conformemente a quanto si è fatto, il valore di $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ pel valore considerato di x. Così, se la quantità coesistente coll'intervallo (a, b) descritto da x è l'incremento $f(b) - f(a)$ d'una funzione $f(x)$, se questa funzione $f(x)$ ha una derivata continua $f'(x)$, sarà

$$\lim \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x).$$

Risulta dalle cose dette che se y è una grandezza coesistente coll'intervallo descritto da x, e per ogni valore di x esiste il rapporto $\frac{dy}{dx}$, questo rapporto è funzione continua di x.

25. Essendo $f(x)$ una funzione di x, indicheremo con $\int_a^b f(x)\,dx$ una quantità tale che: 1° sia maggiore della somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli parziali in cui si può dividere l'intervallo (a, b) per valori minori dei valori assunti da $f(x)$ negli stessi intervalli; 2° sia minore della somma dei prodotti delle ampiezze degli intervalli in cui si può decomporre (a, b) per valori maggiori di quelli assunti da $f(x)$ negli stessi intervalli; 3° e che sia l'unica quantità che soddisfi a queste proprietà.

La funzione $f(x)$ si dice *integrabile* nell'intervallo (a, b) se esiste una quantità che goda di tutte le proprietà enunciate.

Sia dalla teoria precedente degli integrali geometrici, sia da proposizioni dimostrate nel calcolo integrale (N. 190-193) si deduce:

I. L'integrale di $f(x)\,dx$ preso nell'intervallo (a, b) è la somma degli integrali di $f(x)\,dx$ presi negli intervalli in cui si può decomporre l'intervallo (a, b):

$$\int^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

In altre parole, l'integrale di $f(x)\,dx$ preso in un intervallo (a, b) è coesistente con questo intervallo.

II. Se $f(x)$ è funzione continua di x, il rapporto dell'integrale di $f(x)dx$ esteso ad un intervallo qualunque (a, b), all'ampiezza $b - a$ di questo intervallo, ove a e b tendano ad uno stesso valore x, ha per limite $f(x)$:

$$\lim \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(x).$$

III. Se y è una grandezza coesistente coll'intervallo descritto dalla variabile x, e se il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ del valore Δy di y corrispondente ad un intervallo qualunque, all'ampiezza Δx di questo intervallo, tende al limite $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ove i limiti di quell'intervallo tendano ad x, il valore di y corrispondente all'intervallo finito (a, b) vale $\int_a^b f(x)\, dx$.

In questa proposizione sta la regola più comune per calcolare un integrale definito. Se $f(x)$ è funzione continua, si determini, colle regole del calcolo integrale, quella funzione $F(x)$ avente per derivata $f(x)$. Allora il rapporto fra l'incremento di $F(x)$ in un intervallo qualunque all'ampiezza di questo intervallo, col tendere degli estremi di questo intervallo ad uno stesso valore x, ha per limite $f(x)$; quindi l'incremento di $F(x)$ nell'intervallo (a, b) è eguale all'integrale di $f(x)\,dx$ preso in quell'intervallo:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

§ 5. Calcolo di alcune aree piane.

26. *Coordinate cartesiane.*

Teorema I. — Se la funzione positiva $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b), l'area descritta dall'ordinata MP d'un punto P della curva, la cui equazione in assi cartesiani ortogonali è $y = f(x)$, mentre l'ascissa x varia da a a $b > a$, è misurata da

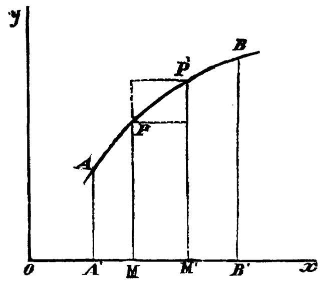
$$u = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Infatti, decomposto l'intervallo (a, b) in parti coi valori $x_0 = a$ x_1, x_2, $\ldots x_{n-1}$, $x_n = b$, e detti $y'_1\ y'_2 \ldots y'_n$ dei numeri minori dei valori assunti da $f(x)$ rispettivamente in ciascheduno di quegli intervalli parziali, e detti $y''_1\ y''_2 \ldots y''_n$ dei numeri maggiori dei valori di $f(x)$ in quegli intervalli parziali, poichè per ipotesi $f(x)$ è integrabile nell'intervallo (a, b), l' $\int_a^b f(x)\,dx$ sarà una grandezza maggiore della somma

$$s' = (x_1 - x_0)\,y'_1 + (x_2 - x_1)\,y'_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})\,y'_n$$

e minore della somma

$$s'' = (x_1 - x_0)\,y''_1 + (x_2 - x_1)\,y''_2 + \dots + (x_n - x_{n-1})\,y''_n,$$



e sarà l'unica grandezza sempre maggiore dei valori della prima somma, e minore di quelli della seconda, comunque varii la divisione dell'intervello (a, b), e la scelta dei valori di y'_i e y''_i.

Ora i rettangoli aventi rispettivamente per base i segmenti descritti da M, mentre x varia in ciascheduno di quegli intervalli parziali, e per altezza $y'_1\, y'_2 \dots y'_n$ sono interni alla figura data, e la loro area totale è misurata da s'. Analogamente la figura formata dai rettangoli aventi le stesse basi e per altezze $y''_1\, y''_2 \dots y''_n$, contiene nel suo interno l'area data, e la sua area è misurata da s''. Pertanto il numero che misura l'area (interna, o esterna, o propria) della figura descritta da MP è maggiore di s' e minore di s''. Ma il sol numero $\int_a^b f(x)\,dx$ gode di questa proprietà; dunque l' $\int_a^b f(x)\,dx$ misura l'area descritta dall'ordinata MP.

Se la funzione $f(x)$ non è integrabile nell' intervallo (a, b), ma ammette solo gli integrali inferiore e superiore, questi misurano le aree interna ed esterna della figura descritta da MP.

TEOREMA II. — L'area descritta dall'ordinata MP d'una curva di equazione $y = f(x)$ in assi cartesiani obliqui che fanno fra loro l'angolo ω, mentre x varia nell'intervallo (a, b), supposta la $f(x)$ positiva e integrabile in quell'intervallo, e $a < b$, è misurata da

$$\operatorname{sen} \omega \int_a^b f(x)\, dx.$$

La dimostrazione si ottiene dalla precedente sostituendo alla considerazione dei rettangoli aventi le basi sull'asse delle x e per altezze le y, i parallelogrammi aventi le stesse basi, e gli altri lati paralleli all'asse delle y e misurati dai valori delle ordinate.

TEOREMA III. — Se nel piano della figura F si segna un asse OX, e da ogni punto M di quest'asse si conduce la perpendicolare ad OX, che incontra la F secondo una figura rettilinea, se il campo formato dai punti d'incontro di questa retta col campo limite di F ha una lunghezza esterna nulla, detta x l'ascissa del punto M, e h la lunghezza della intersezione della perpendicolare in M col campo F, l'area di quella parte della figura F formata dai punti le cui ascisse sono comprese fra a e b è misurata da $\int_a^b h\, dx$.

Infatti, sia Δu il numero che misura l'area formata dai punti di F le cui ascisse sono comprese in un intervallo di ampiezza Δx. Si consideri l'area del rettangolo avente per base il segmento Δx e per altezza 1, la quale è misurata da Δx. In virtù delle ipotesi fatte (N. 18, 1°) col tendere degli estremi dell' intervallo Δx ad uno stesso valore x, $\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} = h$; quindi il valore di u corrispondente all' intervallo (a, b) vale $\int_a^b h\, dx$.

27. Applicheremo le formole precedenti ad alcuni esempi.

Parabole. — Nella parabola d'ordine m si ha

$$y = ax^m,$$

e quindi l'area descritta dall'ordinata, mentre l'ascissa fra i valori x_0 ed x_1 è misurata da

$$\operatorname{sen}\omega \int_{x_0}^{x_1} ax^m \, dx = \operatorname{sen}\omega \frac{ax_1{}^{m+1} - ax_0{}^{m+1}}{m+1}, \text{ supposto } m \gtrless 1.$$

Se m è positivo, si può fare $x_0 = 0$, e ponendo x invece di x_1 l'area della parabola, contata a partire dall'origine, vale

$$\frac{ax^{m+1}}{m+1} \operatorname{sen}\omega = \frac{xy \operatorname{sen}\omega}{m+1},$$

ossia vale l'$(m+1)^{ma}$ parte dell'area del parallelogrammo costrutto sull'ascissa e sull'ordinata del punto estremo dell'arco considerato.

Se $m = -1$, si ha $y = \frac{a}{x}$, e la curva è un'iperbole riferita ai suoi asintoti. La sua area sarà misurata da

$$\operatorname{sen}\omega \int_{x_0}^{x_1} \frac{a}{x} \, dx = a \operatorname{sen}\omega \log \frac{x_1}{x_0}.$$

Ellisse. — L'equazione dell'ellisse, riferita ai suoi assi, è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

da cui si ricava

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'area descritta dall'ordinata, mentre l'ascissa varia fra i valori

0 ed x, è misurata da

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Si scriva l'integrale del membro di destra sotto la forma

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^x \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}\; x\, dx,$$

e poi si integri per parti, prendendo come fattore ad integrarsi $x\, dx$; si avrà

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x^2 \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{a^2}{x \sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1}}\, dx,$$

ovvero

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\, x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

e siccome

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sen}\, \frac{x}{a},$$

si deduce infine

$$u = \frac{1}{2}\, x\, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}\, ab\, \text{arc sen}\, \frac{x}{a}.$$

Se si fa $x = a$, si avrà l'area della quarta parte dell'ellisse $\frac{1}{4}\pi ab$; quindi l'area totale dell'ellisse di semiassi a e b vale πab come già si era trovato.

Iperbole. — Già si è trovata l'area dell'iperbole riferita agli asintoti. Se la si riferisce agli assi, la sua equazione sarà

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

da cui si ricava

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

e l'area descritta dall'ordinata mentre l'ascissa varia fra i valori a ed x è misurata da

$$u = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Integrando per parti, prendendo come fattore ad integrarsi $x\,dx$, si ha:

$$u = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} ab \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}};$$

ed infine

$$u = \frac{1}{2} \frac{b}{a} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} ab \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Curva logaritmica. — La sua equazione è

$$y = a^x,$$

e, supposti gli assi ortogonali, variando x fra i valori x_0 ed x_1, l'area corrispondente è misurata da

$$\int_{x_0}^{x_1} a^x\, dx = \frac{a^{x_1} - a^{x_0}}{\log a}.$$

Osservando che $\frac{1}{\log a}$ è la lunghezza della sottotangente, si deduce che l'area compresa fra un arco di curva logaritmica, le ordinate estreme e l'asse delle x, è eguale all'area d'un rettangolo di base la sottotangente e di altezza la differenza delle ordinate estreme.

Supposto $a > 1$, se si fa tendere x_0 verso $-\infty$, $\lim a^{x_0} = 0$, e l'area precedente ha per limite $\frac{a^{x_1}}{\log a}$. Contemporaneamente la figura di cui si determina l'area acquista dei punti che si allontanano indefinitamente dall'origine; il limite trovato misura l'area interna compresa fra l'asse delle x, il ramo infinito della logaritmica, e l'ordinata che corrisponde all'ascissa x_1.

28. *Curve riferite a coordinate polari.*

Teorema. — Se $r = f(\alpha)$ è l'equazione d'una curva riferita a coordinate polari, e r è funzione continua di α, l'area descritta dal raggio vettore, mentre α varia nell'intervallo (α_0, α_1) è misurata da

$$u = \frac{1}{2}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} r^2\, d\alpha.$$

Infatti, sia OP il raggio vettore di lunghezza r, e che fa coll'asse polare l'angolo α. Sia OM il raggio vettore avente la stessa direzione di OP, e di lunghezza $= 1$. Mentre α descrive un intervallo di ampiezza $\Delta\alpha$, OM descrive un settore circolare di area $\frac{1}{2}\Delta\alpha$, e OP un settore Δu della curva data. Ora, supponendo che gli estremi dell'intervallo descritto da α tendono ad uno stesso valore α, si è visto che

$$\lim \frac{\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta\alpha} = \frac{r^2}{1},$$

quindi

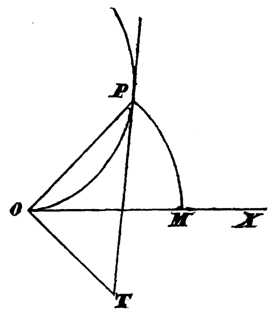
$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta \alpha} = \frac{du}{d\alpha} = \frac{1}{2} r^2, \quad du = \frac{1}{2} r^2 \, d\alpha, \quad \text{e} \quad u = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha,$$

l'integrale essendo preso fra i limiti α_0 e α_1.

29. Ecco alcune applicazioni di questa formula.

Nella *spirale d'Archimede*, in cui

$$r = a\alpha,$$



l'area generata dal raggio vettore, mentre l'argomento varia da 0 ad α, è misurata da

$$\frac{1}{2} \int_0^\alpha a^2 \alpha^2 \, d\alpha = \frac{1}{6} a^2 \alpha^3,$$

e quindi essa vale la terza parte dell'area del settore circolare OPM avente per raggio $r = a\alpha$, e per angolo al centro α, ovvero la terza parte del triangolo OPT limitato dal raggio vettore OP, la tangente PT, e la sottotangente OT.

Nella *spirale logaritmica*, in cui $r = Ce^{a\alpha}$, l'area descritta dal raggio vettore sarà

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} C^2 e^{2a\alpha} \, d\alpha = \frac{C^2}{4a} (e^{2a\alpha_1} - e^{2a\alpha_0}).$$

Se qui si fa tendere α_0 a $-\infty$, supposto $a > 0$, l'area considerata, che consta di infinite parti sovrapposte, tende ad un limite finito $\frac{C^2}{4a} e^{2a\alpha_1}$, ed è facile il riconoscere che questa vale la metà dell'area del triangolo compresa fra il raggio vettore, la tangente e la sottotangente.

Sia $r = f(\alpha)$ l'equazione d'una curva riferita a coordinate polari; si immagini la sua *concoide*, con polo in O, e sia h la lunghezza costante che si porta sul prolungamento del raggio vettore. Detto r_1 il raggio vettore della concoide, sarà $r_1 = r + h$, ovvero

$$r_1 = f(\alpha) + h.$$

Dette A e A_1 le aree descritte dai raggi r ed r_1 mentre α varia fra α_0 ed α_1, sarà

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha, \text{ e } A_1 = \frac{1}{2} \int r_1^2 \, d\alpha = \frac{1}{2} \int (r + h)^2 \, d\alpha,$$

ovvero

$$A_1 = \frac{1}{2} \int r^2 \, d\alpha + h \int r \, d\alpha + \frac{1}{2} h^2 \int d\alpha,$$

gli integrali essendo tutti presi fra i limiti α_0 ed α_1. Delle tre parti di cui consta A_1 la prima rappresenta l'area A della curva data; la terza vale $\frac{1}{2} h^2 (\alpha_1 - \alpha_0)$, ossia è l'area d'un settore circolare di angolo $\alpha_1 - \alpha_0$ e di raggio h; la seconda poi dipende dall' $\int r \, d\alpha$, e una volta calcolato questo integrale, si potrà determinare l'area di tutte le concoidi della curva data corrispondenti ai varii valori di h.

Se si fa

$$B = \frac{1}{2} \int r \, d\alpha, \quad C = \frac{1}{2} \int d\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0),$$

si avrà

$$A_1 = A + 2Bh + Ch^2,$$

e così A_1 è una funzione di secondo grado in h. Essa si può scrivere

$$A_1 = C\left(h + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C}.$$

Si scorge di qui che, variando h, varia pure A_1; il suo minimo valore corrisponde ad $h = -\frac{B}{C}$, ed è $\frac{AC - B^2}{C}$; quindi questa ultima quantità è di necessità positiva, e nulla sol quando sia $r_1 = 0$, e quindi $r =$ costante. I valori di A_1, corrispondenti a due valori di h la cui semisomma sia eguale a $-\frac{B}{C}$, sono eguali; se si fa $h = -\frac{2B}{C}$, l'area A_1 diventa eguale all'area della curva data A.

§ 6. Formule d'approssimazione per le aree.

30. L'area piana descritta dall'ordinata $y = f(x)$ d'una curva, in assi cartesiani ortogonali, mentre x varia fra a e b, è, per approssimazione, eguale all'area del trapezio costrutto sulle ordinate estreme. Così facendo, si sostituisce all'arco della curva la sua corda, e all'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$, che misura l'area in questione, la quantità

$$(b - a)\,\frac{f(b) + f(a)}{2},$$

che misura l'area del trapezio.

Potremo facilmente stimare l'errore che si commette sostituendo all'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ il valore approssimato $(b - a)\,\frac{f(b) + f(a)}{2}$.

Invero, se la funzione $f(x)$ ha derivata seconda $f''(x)$ pei valori di x compresi fra a e b, si ha dalla teoria delle funzioni interpolari che

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, f(a, b) + (x - a)(x - b) \frac{f''(u)}{1 \cdot 2},$$

ove $f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, e u è un valore, che dipende da x, e che, se x è compreso fra a e b, è pure compreso fra gli stessi limiti. Quindi

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \left[f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^b (x - a)(x - b)\, f''(u)\, dx.$$

Il primo integrale del membro di destra vale appunto

$$(b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2},$$

ossia il valore approssimato dell'integrale dato. Il secondo integrale rappresenta perciò l'errore che si commette prendendo invece del vero valore dell'integrale, il suo valore approssimato. Chiamandolo R, si avrà:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2} \int_a^b (x - a)(x - b)\, f''(u)\, dx.$$

E poichè il fattore $(x - a)(x - b)$ conserva un segno costante mentre x varia nell'intervallo (a, b), potremo portare il fattore $f''(u)$ fuori dell'integrale, e si ha così:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2} f''(u) \int_a^b (x - a)(x - b)\, dx,$$

ovvero, eseguendo l'integrale del secondo membro:

$$R = -\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(u),$$

ove u è un valore di x compreso fra a e b. Sostituendo si deduce

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(u).$$

Così si ha il vero valore dell'integrale espresso mediante un suo valore approssimato, più un resto nel quale comparisce la quantità incognita u di cui si sa solo che è compresa fra a e b. Sostituendo invece di $f''(u)$ il massimo ed il minimo valore che esso assume mentre u varia nell'intervallo (a, b), si ottengono due espressioni entro cui è compreso il resto.

Ad esempio se si fa in questa formula

$$f(x) = \frac{1}{x},\ a = 1,\ b = 2,\ f''(x) = \frac{2}{x^3},$$

si ha

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\frac{1}{u^3},$$

ossia

$$\log 2 = 0{,}75 + R;$$

il primo termine è il valore approssimato di $\log 2$; il secondo $R = -\frac{1}{6u^3}$ rappresenta l'errore. Siccome u è compreso fra 1 e 2, si deduce $-\frac{1}{6} < R < -\frac{1}{6.8}$, ossia 0,75 è un valore maggiore di $\log 2$, e si ha precisamente $0{,}5933 < \log 2 < 0{,}739166$.

Il resto R si può anche mettere sotto forma d'integrale definito. Invero, si ha applicando due volte l'integrazione per parti:

$$\int f(x)\,\varphi''(x)\,dx = f(x)\,\varphi'(x) - f'(x)\,\varphi(x) + \int \varphi(x) f''(x)\,dx.$$

Pongasi $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)$; si avrà

$$\int f(x)\,dx = f(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2} f'(x)(x-a)(x-b) + \\ + \frac{1}{2}\int (x-a)(x-b) f''(x)\,dx.$$

Prendendo gli integrali fra i limiti a e b si ottiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b) f''(x)\,dx.$$

Il primo termine del secondo membro è il valore approssimato dell'integrale; il secondo è quindi l'errore che si commette in questa approssimazione.

31. Potremo avere un valore più approssimato dell'area, decomponendo l'intervallo (a, b) in n parti eguali, segnando pei punti di divisione le ordinate della curva, e costruendo sopra queste successive ordinate i trapezii, come si è detto. La somma di questi trapezii sarà un valore approssimato dell'area.

Dette $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$ le ordinate di questa curva corrispondenti agli $n+1$ punti di divisione di (a, b), le aree di questi trapezii valgono

$$\frac{b-a}{2n}(y_0+y_1),\ \frac{b-a}{2n}(y_1+y_2),\ \ldots,\ \frac{(b-a)}{2n}(y_{n-1}+y_n);$$

quindi, sommando, si avrà per approssimazione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

L'errore che si commette adoperando questa formola, ossia la quantità R che bisogna aggiungere al membro di destra per avere il vero valore di quello di sinistra, è la somma degli errori commessi in ciascheduno di quegli intervalli parziali, vale a dire

$$R = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^3}\left[f''(u_1)+f''(u_2)+\ldots+f''(u_n)\right],$$

dove $u_1\ u_2 \ldots u_n$ sono valori di x compresi rispettivamente in quegli intervalli parziali. La quantità entro parentesi si può mettere sotto la forma $n\,f''(u)$, ove u è un valore medio fra i precedenti; quindi il resto si può esprimere mediante la formola

$$R = -\frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} f''(u).$$

Così, se nell'esempio precedente $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ si fa $n=10$, la formola ora trovata dà per approssimazione

$$\log 2 = 0{,}69377,$$

e il resto $R = -\frac{1}{6\,.\,100\,.\,u^3}$, ove u è compreso fra 1 e 2. Quindi il valore precedente è approssimato per eccesso, e differisce dal valore vero meno di $\frac{1}{600}$, e più di $\frac{1}{4800}$.

32. Se la funzione $y=f(x)$ è di grado non superiore al terzo, l'area descritta dall'ordinata $f(x)$, mentre x varia nell'intervallo (a, b), vale esattamente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

ove y_0 e y_2 sono le ordinate corrispondenti alle ascisse estreme a e b, cioè $y_0=f(a)$ e $y_2=f(b)$, e y_1 è l'ordinata corrispondente all'ascissa media $\frac{a+b}{2}$.

Infatti, conservando fisso l'asse delle x, si prenda per nuova origine il punto medio di a e b; ossia facciasi nell'integrale

$$x = \frac{a+b}{2} + X,$$

e pongasi

$$\frac{b-a}{2} = h.$$

La funzione $f(x)$ di x, di grado non superiore al terzo, diventerà una funzione dello stesso grado in X, quindi si potrà porre

$$f(x) = A + BX + CX^2 + DX^3,$$

e $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-h}^{+h} (A + BX + CX^2 + DX^3)\,dX = 2Ah + \frac{2}{3} Ch^3.$

Ma, facendo $X = 0, -h, +h$, la x diventa $\frac{a+b}{2}$, a, b, e $f(x)$ assume i valori y_1, y_0, y_2,; onde si ha

$$\begin{aligned} y_1 &= A, \\ y_0 &= A - Bh + Ch^2 - Dh^3 \\ y_2 &= A + Bh + Ch^2 + Dh^3; \end{aligned}$$

e

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6A + 2Ch^2;$$

quindi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Sostituendo in questa formola ad h il suo valore $\frac{b-a}{2}$ si ha la formola a dimostrarsi.

33. La formola

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

vera quando $f(x)$ è una funzione intera di grado non superiore al terzo, può ritenersi ancora vera per approssimazione, anche quando $f(x)$ non soddisfa a queste condizioni. Così facendo, si commette un errore R, tale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \mathrm{R};$$

noi ci proponiamo di calcolare approssimativamente questo errore. Perciò facendo come prima

$$x = \frac{a+b}{2} + \mathrm{X},\quad h = \frac{b-a}{2},\quad \text{e } f\left(\frac{a+b}{2} + \mathrm{X}\right) = \varphi(\mathrm{X}),$$

si avrà

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-h}^{+h} \varphi(\mathrm{X})\,d\mathrm{X},$$

e $$\varphi(-h) = y_0,\ \varphi(0) = y_1,\ \varphi(+h) = y_2.$$

Si determini quella funzione F(X), intera di terzo grado in X, che per $\mathrm{X} = -h,\ 0,\ +h$ assume i valori y_0, y_1, y_2, e che per $\mathrm{X} = 0$ ha la stessa derivata di $\varphi(\mathrm{X})$, ossia $\mathrm{F}'(0) = \varphi'(0)$. Allora si ha che, per ogni valore di X compreso fra $-h$ e $+h$,

$$\varphi(\mathrm{X}) = \mathrm{F}(\mathrm{X}) + \mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2 - h^2)\,\frac{\varphi^{\mathrm{IV}}(u)}{4!},$$

ove u è un valore di X medio fra h e $-h$ (*). Quindi, integrando,

$$\int_{-h}^{+h} \varphi(X)\, dX = \int_{-h}^{+h} F(X)\, dX + \frac{1}{4!} \int_{-h}^{+h} X^2(X^2 - h^2)\, \varphi^{IV}(u)\, dX.$$

Ma l'integrale del primo membro vale $\int_a^b f(x)\, dx$; il primo integrale del secondo membro, poichè $F(x)$ è di terzo grado, vale appunto

$$\frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2);$$

quindi

$$R = \frac{1}{4!} \int_{-h}^{+h} X^2(X^2 - h^2)\, \varphi^{IV}(u)\, dX.$$

Per avere un'espressione più conveniente di R, si osservi che il fattore $X^2(X^2 - h^2)$ è costantemente negativo, mentre X varia fra $-h$ e $+h$; quindi portando fuori l'altro fattore, si ha

$$R = \frac{\varphi^{IV}(u)}{4!} \int_{-h}^{+h} X^2(X^2 - h^2)\, dX;$$

(*) In generale, data una funzione $f(x)$, si può sempre determinare una funzione intera $\varphi(x)$ di x, di grado n, tale che soddisfi alle condizioni

$$\varphi(x_0) = f(x_0),\ \varphi'(x_0) = f'(x_0), \ldots\ \varphi^{(\alpha)}(x_0) = f^{(\alpha)}(x_0),$$
$$\varphi(x_1) = f(x_1), \ldots\ \varphi^{(\beta)}(x_1) - f^{(\beta)}(x_1), \ldots$$
$$\varphi(x_m) = f(x_m) \ldots\ \varphi^{(\lambda)}(x_m) = f^{(\lambda)}(x_m),$$

ove
$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + \ldots + (\lambda + 1) = n + 1.$$

Allora si ha:

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)^{\alpha+1}(x - x_1)^{\beta+1} \ldots (x - x_m)^{\lambda+1} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!},$$

in cui u è un valore medio fra $x, x_0, \ldots x_n$.

ovvero, poichè

$$\varphi^{\mathrm{IV}}(u) = f^{\mathrm{IV}}(x), \text{ ove } x = \frac{a+b}{2} + u,$$

ed eseguendo l'integrale del secondo membro:

$$\mathrm{R} = -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} f^{\mathrm{IV}}(x),$$

ove x è un valore compreso fra a e b.

Così, riprendendo l'esempio già trattato, se si fa

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1, \quad b = 2,$$

si avrà

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0{,}666\ldots, \quad y_2 = 0{,}5:$$

e la formola precedente dà come valore approssimato di log 2

$$0{,}6944\ldots, \text{ con } \mathrm{R} = -\frac{1}{120\,x^5},$$

ove x è compreso fra 1 e 2. Quindi la formola dà per log 2 un valore più grande del vero, e l'errore che si commette è minore di $\frac{1}{120}$.

34. Si può avere con maggiore approssimazione l' $\int f(x)\,dx$, decomponendo l'intervallo (a, b) in $2n$ parti; detti $y_0\, y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_{2n}$ i valori di $f(x)$, ossia delle ordinate della curva corrispondenti a questi punti di divisione, potremo applicare successivamente la formula precedente alle aree comprese fra le ordinate y_0 e y_2, y_2 e $y_4, \ldots y_{2n-2}$ e y_{2n}, e sommare i risultati ottenuti. Queste aree valgono rispettivamente

$$\frac{b-a}{6n}(y_0+4y_1+y_2),\ \frac{b-a}{6n}(y_2+4y_3+y_4),\ldots,$$

$$\frac{b-a}{6n}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n});$$

quindi, sommando, si ha per approssimazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\Big[y_0+y_{2n}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})+$$

$$+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})\Big].$$

Questa formola, che permette di calcolare per approssimazione un'integrale, ossia un'area piana, porta il nome di *formula di Simpson.* Applicandola si commette un errore R che potremo stimare facilmente. Invero quest'errore è la somma degli errori commessi in ciascheduno degli n intervalli parziali, eguali in ampiezza a $\frac{b-a}{n}$, in cui si è diviso (a, b). Ora questi valgono rispettivamente

$$-\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{\mathrm{IV}}(x_1),\ -\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{\mathrm{IV}}(x_2),\ldots-\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}f^{\mathrm{IV}}(x_n),$$

in cui $x_1\,x_2\ldots x_n$ sono valori di x compresi in quegli intervalli. Quindi, sommando,

$$\mathrm{R}=-\frac{(b-a)^5}{n^5\,4!\,5!}\Big[f^{\mathrm{IV}}(x_1)+f^{\mathrm{IV}}(x_2)+\ldots+f^{\mathrm{IV}}(x_n)\Big];$$

la quantità entro parentesi si può mettere sotto la forma $n f^{\mathrm{IV}}(x)$, ove x è un valore compreso fra a e b; si deduce quindi per R la seguente espressione

$$\mathrm{R}=-\frac{(b-a)^5}{n^4\,4!\,5!}f^{\mathrm{IV}}(x).$$

Applichiamo questa formola di Simpson al solito esempio

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2,$$

facendo $n = 5$, e quindi $2n = 10$.

Dando perciò ad x i valori 1,0; 1,1; 1,2; ... 1,9; 2,0, e detti $y_0\, y_1 \ldots y_{10}$ i valori corrispondenti di $\frac{1}{x}$, l'operazione si può disporre come segue:

$y_0 = 1$	$y_2 = 0{,}83333$	$y_1 = 0{,}90909$
$y_{10} = 0{,}5$	$y_4 = 0{,}71429$	$y_3 = 0{,}76923$
$y_0 + y_{10} = 1{,}5$	$y_6 = 0{,}62500$	$y_5 = 0{,}66667$
	$y_8 = 0{,}55556$	$y_7 = 0{,}58824$
	$y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 2{,}72818$	$y_9 = 0{,}52632$
		$y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 = 3{,}45955$

Addizionando la prima somma col doppio della seconda e col quadruplo della terza si ha 20,79456; e moltiplicando questo risultato per $\frac{(b-a)}{6n} = \frac{1}{30}$ (cioè dividendolo per 30) si ha per valore di $\log 2$ dato dalla formula di Simpson, 0,693152. L'errore che si commette è dato da $R = -\frac{1}{5^4 . 5!} \frac{1}{x^5}$, ove x è compreso fra 1 e 2. Quindi il valore trovato per $\log 2$ è più grande del vero, e ne differisce meno di $\frac{1}{75000}$.

35. In generale, se si conoscono i valori $y_0\, y_1 \ldots y_n$ della funzione y corrispondenti ai valori $x_0\, x_1 \ldots x_n$ della variabile, si può formare un polinomio intero di grado n, e che diremo $\varphi(x)$, tale che pei valori suddetti della variabile assuma gli stessi valori di $f(x)$. Si avrà allora

$$f(x) = \varphi(x) + (x - x_0)(x - x_1) \ldots\ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!},$$

ove u è un valore medio fra i precedenti. Quindi integrando si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \mathrm{R},$$

ove si è posto

$$\mathrm{R} = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_n)\, f^{(n+1)}(u)\, dx.$$

L'integrale $\int_a^b \varphi(x)\,dx$ è un valore approssimato dell'integrale cercato. Il suo valore si ottiene con tutta facilità; invero mettendo la funzione $\varphi(x)$ sotto la forma data da Lagrange:

$$\varphi(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}\, y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}\, y_1 + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}\, y_n$$

si avrà

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \mathrm{A}_0\, y_0 + \mathrm{A}_1\, y_1 + \dots\dots + \mathrm{A}_n\, y_n$$

ove si è fatto

$$\mathrm{A}_0 = \int_a^b \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}\, dx, \dots\dots$$

Così l'integrale è una funzione lineare omogenea dei valori $y_0\, y_1 .., y_n$, poichè i coefficienti $\mathrm{A}_0\, \mathrm{A}_1 \dots$ dipendono bensì da a, b, x_0, $x_1, \dots x_n$, ma non dai valori di y.

L'errore che si commette in questa approssimazione è rappresentato da R; ma siccome in esso il fattore $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ cambia segno quando x assume i valori $x_0, x_1, \dots$ non si potrà applicare un procedimento analogo a quelli di prima per ridurlo ad una forma più comoda.

36. I valori $x_0\, x_1 \dots x_n$ si possono prendere ad arbitrio; come caso particolare si può supporre che il primo sia a, l'ultimo b, e che essi formino una progressione aritmetica. Ma essi si possono scegliere in un modo speciale, proposto da Gauss, assai conveniente nei casi pratici.

Per semplicità di scrittura, supporremo che i limiti dell'integrale siano -1 e $+1$; poichè, ove fossero qualunque a e b, basta fare la trasformazione $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b+a}{2}\, t$ affinchè si riducano ai precedenti. Ciò premesso, dico che si può determinare una funzione X_{n+1} di x, intera, di grado $n+1$, in cui il coefficiente del termine di grado più elevato sia l'unità, e tale che, essendo U una funzione intera qualunque di grado non maggiore di n, si abbia sempre

$$\int_{-1}^{+1} U\, X_{n+1}\, dx = 0.$$

Per determinare questa funzione si osservi che dall'integrazione per parti più volte ripetuta si ha

$$\int U \frac{d^{n+1} V}{dx^{n+1}}\, dx = U \frac{d^n V}{dx^n} - \frac{dU}{dx} \frac{d^{n-1} V}{dx^{n-1}} + \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^{n-2} V}{dx^{n-2}} - \dots$$

$$\pm \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}} \frac{d\, V}{dx} \mp \frac{d^n U}{dx^n}\, V \pm \int V \frac{d^{n+1} U}{dx^{n+1}}\, dx.$$

Suppongasi che V rappresenti la funzione di grado $2n+2$

$$V = (x^2 - 1)^{n+1}$$

che ha le radici 1 e -1 multiple $n+1$ volte. Per note proposizioni di algebra si deduce che $\frac{dV}{dx}$ sarà una funzione di grado $2n+1$, che ha le radici 1 e -1 multiple n volte, ed una radice compresa fra -1 e $+1$; $\frac{d^2V}{dx^2}$ è una funzione di grado $2n$, avente le radici 1 e -1 multiple $n-1$ volte, e due radici comprese fra -1 e $+1$;.... che $\frac{d^nV}{dx^n}$ è di grado $n+2$, avente le radici 1 e -1 semplici, e le altre radici tutte reali comprese fra -1 e $+1$; e che infine $\frac{d^{n+1}V}{dx^{n+1}}$ è una funzione di grado $n+1$, aventi le $n+1$ radici reali e comprese fra -1 e $+1$. Allora, prendendo gl'integrali nell'ultima formula fra -1 e $+1$ ed osservando che tutti i termini fuori del segno integrale si annullano per questi limiti, si dedurrà:

$$\int_{-1}^{+1} U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}\, dx = \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}}\, dx. \qquad (1)$$

Ora se U è una funzione intera di grado non maggiore di n, sarà $\frac{d^{n+1}U}{dx^{n+1}} = 0$, e quindi

$$\int_{-1}^{+1} U \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}\, dx = 0.$$

Il coefficiente del termine di grado più elevato in $\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}$ è $(n+2)\,(n+3)\ldots\,(2n+2)$; quindi, se si fa

$$X_{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(2n+2)} \; \frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}},$$

X_{n+1} sarà appunto un polinomio intero di grado $n+1$ in x, in cui il coefficiente del termine di grado più elevato è l'unità, e tale che essendo U una funzione intera qualunque di grado non maggiore di n si abbia sempre

$$\int_{-1}^{+1} U\, X_{n+1}\, dx = 0.$$

Inoltre questa funzione X_{n+1} ha tutte le sue radici reali comprese fra -1 e $+1$. Dettele $x_0, x_1 .... x_n$, sarà

$$X_{n+1} = (x - x_0)\ (x - x_1) ...\ (x - x_n).$$

Sia ora $f(x)$ una funzione qualunque di x, avente le successive derivate fino all'ordine che ci occorrerà. Si determini il polinomio intero $\varphi(x)$ di grado n, che per $x = x_0, x_1, ... x_n$, radici dell'equazione $X_{n+1} = 0$, assume gli stessi valori $y_0\, y_1 ...\, y_2$ che assume $f(x)$. Sia $\psi\,(x)$ quella funzione intera di grado $2n + 1$ definita dalle condizioni

$$\psi\,(x_0) = f\,(x_0),\ \psi\,(x_1) = f\,(x_1), ...\ \psi\,(x_n) = f\,(x_n);$$
$$\psi'\,(x_0) = f'\,(x_0),\ \psi'\,(x_1) = f'\,(x_1), ...\ \psi'\,(x_n) = f'\,(x_n).$$

Siccome la differenza $\psi\,(x) - \varphi\,(x)$ si annulla per $x = x_0, x_1, ... x_n$, essa sarà divisibile per $(x - x_0)\,(x - x_1) ... (x - x_n) = X_{n-1}$; detto $\lambda\,(x)$ il quoziente della divisione che sarà un polinomio di grado n, si avrà

$$\psi\,(x) = \varphi\,(x) + X_{n+1}\,\lambda\,(x).$$

Inoltre, poichè i valori di $f(x)$ e $\psi\,(x)$, e delle loro derivate sono eguali per $x = x_0, x_1, ... x_n$, si può porre:

$$f(x) = \psi\,(x) + (x - x_0)^2\,(x - x_1)^2 ... (x - x_n)^2\,\frac{f^{(2n+2)}\,(u)}{(2n+2)!},$$

ovvero sostituendo

$$f\,(x) = \varphi\,(x) + X_{n+1}\,\lambda\,(x) + X^2_{n+1}\,\frac{f^{(2n+2)}\,(u)}{(2n+2)!},$$

ove u è un valore di x compreso fra i considerati.

Integrando fra -1 e $+1$ si ottiene

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \varphi\,(x)\,dx +$$
$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1}\,\lambda(x)\,dx + \frac{1}{(2n+2!)}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1} f^{\,(2n+2)}(u)\,dx.$$

Ora $\lambda(x)$ è una funzione intera di grado n in x; quindi, in virtù della proprietà delle funzioni X, sarà

$$\int_{-1}^{+1} X_{n+1}\,\lambda(x)\,dx = 0;$$

e la formola precedente diventa

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx + R,$$

ove

$$R = \frac{1}{(2n+2)!}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,f^{(2n+2)}(u)\,dx.$$

L' $\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx$ è il valore approssimato dell'integrale proposto, ottenuto col metodo di Gauss. Esso si può calcolare come si è detto, e mettere sotto la forma

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(x)\,dx = A_0\,y_0 + A_1\,y_1 + \dots + A_n\,y_n,$$

ove

$$A_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}\,dx, \dots\dots$$

R è l'errore che si commette in questa approssimazione. Siccome X^2_{n+1} è sempre positivo, si porti fuori del segno integrale $f^{(2n+2)}(u)$. Si avrà:

$$R = \frac{f^{(2n+2)}(u)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx,$$

in cui u è un valore di x compreso fra -1 e $+1$. Per eseguire l' $\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx$, che è un numero che dipende puramente da n, si decomponga il differenziale ad integrarsi in $X_{n+1}\,.\,X_{n+1}\,dx$, e lo si integri per parti $n+1$ volte; ovvero, ciò che fa lo stesso, si applichi la formula (1), in cui si faccia $U = X_{n+1}$; dopo alcune riduzioni si avrà:

$$\int_{-1}^{+1} X^2_{n+1}\,dx = \frac{1\,.\,2\,.\dots(n+1)}{(n+2)\,(n+3)\dots(2n+2)} \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx.$$

Ora

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx = 2\int_{0}^{1} (1-x^2)^{n+1}\,dx,$$

colla sostituzione $x = \cos t$ diventa

$$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{n+1}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+3} t\,dt = 2\,\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n+2}{2n+3};$$

e quindi

$$R = 2\,\frac{1\,.\,2\,.\dots(n+1)}{(n+2)\,(n+3)\dots(2n+2)}\;\frac{2\,.\,4\,.\,6\,.\dots 2n+2}{3\,.\,5\,.\,7\,.\dots 2n+3}\;\frac{f^{(2n+2)}(u)}{(2n+2)!}.$$

La funzione X_{n+1}, le sue radici $x_0\,x_1\dots x_n$, i coefficienti $A_0\,A_1\dots A_n$ del valore approssimato dell'integrale

$$A_0\,y_0 + A_1\,y_1 + \dots + A_n\,y_n,$$

e l'errore che si commette nell'integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ applicando il metodo di Gauss, per i più semplici valori di n sono i seguenti:

I.

$$X_1 = x, \ x_0 = 0, \ A_0 = 1.$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R.$$

dove

$$R = \frac{(b-a)^3}{12} \frac{f''(u)}{3!} \qquad (a < u < b).$$

II.

$$X_2 = x^2 - \frac{1}{3};$$

$$-x_0 = x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}57735.....$$

$$A_0 = A_1 = \frac{1}{2}.$$

La formula generale diventa

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] + R$$

ove

$$R = \frac{(b-a)^5}{180} \frac{f^{IV}(u)}{4!}.$$

III.

$$X_3 = x^3 - \frac{3}{5}\,x.$$

$$x_1 = 0;\ -x_0 = x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0{,}77502.....$$

$$A_1 = \frac{8}{18},\ A_0 = A_2 = \frac{5}{18}.$$

La formola generale è

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{18}\left[5f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + 8f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 5f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right] + R,$$

ove

$$R = \frac{(b-a)^7}{2800}\,\frac{f^{(6)}(u)}{6!}.$$

IV.

$$X_4 = x^4 - \frac{6}{7}\,x^2 + \frac{3}{35}$$

$$-x_0 = x_3 = 0{,}86113.....;\ -x_1 = x_2 = 0{,}33999.$$

$$A_0 = A_3 = 0{,}17392;\ A_1 = A_2 = 0{,}32607.$$

L'errore che si commette in questa formula nell' $\int_a^b f(x)\,dx$ è dato da

$$R = 0{,}000022.....\,\frac{(b-a)^9}{8!}\,f^{(8)}(u).$$

§ 7. Volumi.

37. Teorema. — Se F è una figura solida, e per ogni punto M d'un asse fisso OX si conduce il piano normale ad OX, che incontri F secondo una figura piana, se l'intersezione di questo piano normale ad OX in M col campo limite di F è una figura piana di area esterna nulla, allora detta ω l'area dell'intersezione di questo piano con F e detta x l'ascissa OM del punto M, il volume di quella parte di F i cui punti hanno ascisse comprese nell'intervallo (a, b) è misurato da

$$v = \int_a^b \omega \, dx.$$

Infatti sia Δv il volume di quella parte di F i cui punti hanno ascisse comprese in un intervallo di ampiezza Δx. Si immagini un cilindro avente le generatrici parallele ad OX, di altezza Δx e la cui base sia l'unità di area; il suo volume sarà misurato da Δx. Ora, in virtù delle ipotesi fatte, il limite del rapporto di questi due volumi $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, ove gli estremi dell'intervallo Δx tendano ad uno stesso valore x, ha per limite l'area ω:

$$\frac{dv}{dx} = \omega, \qquad dv = \omega \, dx,$$

quindi, il valore di v corrispondente a tutto l'intervallo (a, b) è dato da $v = \int_a^b \omega \, dx$.

38. Applicheremo la formola precedente ad alcuni casi particolari.

Cono. — Vogliasi determinare il volume del cono (o piramide) avente per base una figura piana di area B, e per altezza h. Sia O il vertice del cono; prendasi per asse OX la perpendicolare abbassata da O sulla base; allora il piano normale ad OX in un punto M di ascissa x taglia questo cono secondo una figura simile alla base. Quindi, detta ω l'area di questa sezione, sarà

$$\omega : \mathrm{B} = x^2 : h^2,$$

onde

$$\omega = \frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{B},$$

e il volume totale del cono

$$v = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}\,\mathrm{B}\,dx = \frac{1}{3}\,\mathrm{B}h,$$

come si dimostra in geometria elementare per le piramidi, e come già abbiamo dimostrato per i coni a base qualunque.

Ellissoide. — Riferito l'ellissoide ai suoi tre assi, la sua equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Il piano normale ad Ox nel punto d'ascissa x incontra l'ellissoide secondo una ellisse; detti α e β i semiassi di questa ellisse, i punti di coordinate $(x, \alpha, 0)$, $(x, 0, \beta)$ stanno sull'ellissoide; quindi si hanno le equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{c^2} = 1,$$

da cui si ricavano le incognite α e β:

$$\alpha = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \beta = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

L'area ω di questa ellisse vale

$$\omega = \pi \alpha \beta = \pi \frac{bc}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Il volume totale dell'ellissoide si ottiene prendendo l'$\int \omega \, dx$ fra i limiti $-a$ e $+a$; quindi

$$v = \pi \frac{bc}{a^2} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \, dx = \frac{4}{3} \pi \, abc.$$

Se si fa $a = b = c = r$, l'ellissoide diventa una sfera di raggio r, e il suo volume vale $\frac{4}{3} \pi \, r^3$.

In modo analogo si determina il volume degli iperboloidi ad una e a due falde di equazioni

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \text{ e } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Paraboloide di rivoluzione. — La parabola conica, di equazione $y^2 = 2px$, ruoti attorno al suo asse Ox. Essa genererà un paraboloide di rivoluzione. Il piano normale all'asse Ox, in un punto di ascissa x, incontra la superficie secondo un cerchio di raggio y, e di area $\omega = \pi y^2 = 2\pi px$. Il volume del segmento compreso fra la superficie del paraboloide e il piano normale al suo asse nel punto di ascissa x vale

$$v = \int_0^x \omega \, dx = 2\pi p \int_0^x x \, dx = \pi \, p \, x^2,$$

che si può pure scrivere

$$v = \frac{1}{2} \, . \, 2\pi \, px \, . \, x = \frac{1}{2} \, \omega \, . \, x;$$

quindi il volume del segmento di paraboloide è eguale alla metà del volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza.

Solidi di rivoluzione. — Se la curva di equazione $y = f(x)$ in assi ortogonali, ruota attorno all'asse delle x, il volume generato dall'area limitata dalla curva, da due ordinate corrispondenti alle ascisse a e b e dall'asse delle x, è misurato da $\pi \int_a^b y^2\, dx$.

39. Poichè il volume d'un solido F, limitato da due piani normali all'asse Ox, corrispondenti alle ascisse a e b è misurato da $\int_a^b \omega dx$, potremo applicare al calcolo di questo integrale, e quindi al calcolo del volume i noti metodi di approssimazione. Come caso particolare, se segando il volume con tre piani normali ad Ox, ed equidistanti fra loro, le aree delle sezioni sono ω_0, ω_1, ω_2, si avrà in generale per approssimazione

$$\int_a^b \omega\, dx = \frac{b-a}{6} (\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2),$$

e questa formola è rigorosamente vera se ω è una funzione intera di x di grado non superiore al terzo. Quindi, in questo caso, il volume cercato è eguale alla distanza $(b - a)$ dei piani estremi, moltiplicata per la sesta parte della somma delle aree delle sezioni estreme, e del quadruplo dell'area della sezione media.

Così, ad esempio, poichè l'area ω sezione d'un ellissoide con un piano normale al suo asse Ox è funzione di secondo grado x, si deduce che il volume totale dell'ellissoide, cioè il volume compreso fra i due piani tangenti all'ellissoide nei suoi punti d'incontro con Ox, è eguale alla distanza di questi piani $2a$ moltiplicata pel sesto della somma delle aree sezioni estreme e del quadruplo di quella media. E poichè le aree estreme sono nulle, e la media vale πbc, il volume dell'ellissoide vale $\frac{4}{3} \pi abc$, come già si è trovato.

Come altro esempio, si consideri il volume comune a due cilindri circolari retti, aventi lo stesso raggio r, ed i cui assi si incontrano sotto l'angolo θ. Il piano passante per gli assi dei due cilindri incontra il solido secondo un parallelogrammo di area $4r^2 \operatorname{sen}\theta$; ogni piano parallelo ad esso, alla distanza x, incontra lo stesso solido secondo un parallelogrammo, simile al primo, e la cui area ω vale $4(r^2 - x^2) \operatorname{sen}\theta$. Perciò, siccome ω è funzione di secondo grado di x, applicando la formola precedente, si ha che il volume del solido comune ai due cilindri vale i $\frac{2}{3}$ del volume del parallelepipedo avente per base il parallelogrammo $4r^2 \operatorname{sen}\theta$, e per altezza $2r$, diametro comune ai due cilindri.

§ 8. **Archi curvilinei.**

40. Teorema. — Se la posizione del punto P è funzione della variabile numerica t, avente per derivata il segmento **u**, funzione continua di t, detto u il numero che misura la lunghezza di **u**, l'arco descritto da P, mentre t varia nell'intervallo (t_0, t_1) è misurato da

$$s = \int_{t_0}^{t_1} u\, dt.$$

Infatti sia Δs la lunghezza dell'arco descritto da P, mentre t varia in un intervallo parte di (t_0, t_1), e la cui ampiezza sia Δt. Sia c la corda di quest'arco Δs. Si avrà $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{c} \cdot \frac{c}{\Delta t}$. Facendo tendere Δt a zero, il fratto $\frac{\Delta s}{c}$, che è il rapporto fra la lunghezza dell'arco alla sua corda, ha per limite l'unità, per quanto si è visto. Il rapporto $\frac{c}{\Delta t}$ ha per limite u; quindi

$$\frac{ds}{dt} = u, \quad ds = u\, dt, \quad \text{e} \quad s = \int_{t_0}^{t_1} u\, dt.$$

41. Se il punto P è riferito a coordinate, cartesiane o polari, sostituendo, in s, ad u la sua espressione mediante le derivate di queste coordinate, la formola precedente può assumere forme varie. Così:

Il punto P si muova in un piano, e siano x ed y le sue coordinate cartesiane ortogonali, che supporremo funzioni d'una variabile t.

Detti **i** e **j** i segmenti di riferimento, si avrà

$$\mathrm{OP} \equiv x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},$$

quindi, derivando,

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j},$$

e

$$gr\mathbf{u} = u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2};$$

quindi

$$ds = u\,dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Se la variabile t coincide coll'ascissa x, sarà

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Siano r ed α le coordinate polari del punto P, e sia r funzione di α. Si avrà, conservando le notazioni della pag. 80,

$$\mathrm{OP} \equiv r\mathbf{a}, \quad \mathbf{u} \equiv r\mathbf{a}' + r'\mathbf{a}, \quad u = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2},$$

e

$$ds = u\,d\alpha = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\alpha^2}$$

Siano x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, funzioni di t. Si ha

$$u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \quad \text{e} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Siano r, θ, φ le coordinate polari del punto P, che supporremo funzioni di t. Si è trovato (pag. 110) che

$$u = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2 \cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2};$$

quindi

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \cos^2\theta\, d\varphi^2}.$$

42. *Parabole.* — Sia dapprima la parabola conica riferita all'asse e alla tangente nel vertice. La sua equazione sarà

$$y^2 = 2px.$$

Differenziando, si ha $ydy = pdx$. Quindi sostituendo in

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

a dx il suo valove $\frac{ydy}{p}$, si ha

$$ds = \sqrt{\frac{y^2}{p^2} + 1}\, dy = \frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy;$$

e la lunghezza dell'arco compreso fra l'origine, per cui $y = 0$, e un punto qualunque di ordinata y è misurata da

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, dy.$$

L'integrale che qui comparisce si può scrivere

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y v \sqrt{1 + \frac{p^2}{y^2}}\, dy\,;$$

quindi, integrando per parti e prendendo come fattore da integrarsi $y\,dy$, si ha, dopo alcune riduzioni,

$$s = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}},$$

e infine

$$s = \frac{y}{2p} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \log \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}.$$

Sia, più generalmente, la parabola di equazione in assi ortogonali

$$y = ax^m.$$

Si avrà $dy = max^{m-1}\, dx$, e sostituendo in $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ si ha

$$ds = \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}\, dx.$$

Il differenziale che qui comparisce è un differenziale binomio. Esso è integrabile, sotto forma finita, tutte le volte che è intero uno dei numeri $\frac{1}{2(m-1)}$ e $\frac{1}{2(m-1)} + \frac{1}{2}$, vale a dire quando m ha la forma $m = \frac{i+1}{i}$, ove i sia un intero qualunque. Attribuendo ad i i valori 1, 2, 3, ..., si hanno per m i valori $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, ...; ed attribuendo ad i i valori -2, -3, ... si hanno per m i valori $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, ... reciproci dei precedenti; ma le due serie di parabole così ottenute si scambiano l'una nell'altra scambiando gli assi fra loro.

Se si conviene di contare l'arco a partire dall'origine, supposto $m > 0$, si ha

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}\, dx = \int_0^x x^{m-1} \sqrt{x^{-2(m-1)} + m^2 a^2}\, dx\,;$$

integrando per parti, essendo $x^{m-1}\,dx$ il fattore ad integrarsi, si ha

$$s = \frac{x}{m} \sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}} + \frac{m-1}{m} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + m^2 a^2 x^{2(m-1)}}}.$$

La parte integrata, che si può scrivere $\sqrt{\left(\frac{x}{m}\right)^2 + (ax^m)^2}$, rappresenta la lunghezza TP della tangente all'arco nel suo estremo P, cioè la porzione di tangente compresa fra il punto P, e il suo punto d'incontro T coll'asse delle x.

43. *Ellisse*. — Se si fa

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad y = b \cos t,$$

variando t, il punto P, le cui coordinate cartesiane ortogonali siano x e y descrive, come è noto, un'ellisse, i cui semiassi sono diretti secondo gli assi cartesiani, e valgono a e b.

Differenziando si ha

$$dx = a \cos t\, dt, \quad dy = -\, b \operatorname{sen} t\, dt,$$

quindi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt,$$

ed

$$s = \int \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Se l'integrale si prende fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, il punto P descrive un quadrante di ellisse. Perciò la lunghezza E dell'intiero perimetro dell'ellisse vale

$$(1) \qquad E = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

L'integrale che qui comparisce non si può calcolare sotto forma finita colle funzioni algebriche o trascendenti elementari. Lo calcoleremo per approssimazione.

Supposto $a > b$, pongasi nell'espressione di E invece di $\cos^2 t$ il suo valore $1 - \operatorname{sen}^2 t$, e facciasi $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, sicchè il numero e è l'eccentricità dell'ellisse. Si avrà:

$$E = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt;$$

l'integrale di destra dicesi, con Legendre, integrale ellittico completo di seconda specie. Noi lo svilupperemo in serie. Perciò si ha dalla formola del binomio

$$\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t} = (1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \operatorname{sen}^2 t -$$
$$- \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \operatorname{sen}^2 t - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \operatorname{sen}^6 t - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \operatorname{sen}^8 t - \ldots;$$

e la formola è valida qualunque sia t, perchè, essendo $e^2 < 1$ e $\operatorname{sen}^2 t < 1$, sarà pure $e^2 \operatorname{sen}^2 t < 1$. Inoltre la serie di destra è di convergenza equabile, perchè i termini di essa sono rispettivamente minori, in valore assoluto, di quello che diventerebbero ove si facesse $\operatorname{sen} t = 1$, i quali termini sono indipendenti da t e formano una serie convergente. Quindi, moltiplicando per dt ed integrando, si ha

$$E = 4a \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 t\, dt - \ldots \right],$$

e sostituendo agli integrali del secondo membro i loro valori (Calc. pag. 309).

$$(2)\qquad E = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\,e^4 - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\,e^6 - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 7\,e^8 - \ldots\right].$$

La quantità racchiusa entro parentesi, moltiplicata per a, ossia $\frac{E}{2\pi}$, rappresenta il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale al perimetro dell'ellisse.

44. Invece dello sviluppo precedente potremo dare delle formole di approssimazione di E, che in alcuni casi possono riuscire più comode.

Poichè la quantità $\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}$ si può scrivere

$$\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \operatorname{sen}^2 t},$$

ovvero

$$\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 t},$$

si deduce che essa è minore di a e maggiore di b:

$$b < \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} < a,$$

quindi, sostituendo nell'espressione (1) si ricava

$$(3)\qquad 2\pi b < E < 2\pi a;$$

la quale formola ci dice che la lunghezza dell'ellisse è maggiore della circonferenza di raggio il semiasse minore b, e minore della circonferenza di raggio il semiasse maggiore a, cosa del resto evidente.

Quindi si avrà un valore approssimato di E prendendo la semisomma dei valori precedenti

$$\pi(a+b),$$

ma questo valore è più piccolo del vero. Infatti si ha

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t} = a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t +$$

$$+ (a-b)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}},$$

e sostituendo in (1), ed eseguiti i calcoli indicati, si ha

$$\text{(4)}\quad \mathrm{E} = \pi(a+b) + 4(a-b)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\, dt}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}},$$

e siccome il secondo termine è positivo, si conchiude $\mathrm{E} > \pi(a+b)$. Si possono trovare dei limiti entro cui è compreso l'integrale di destra; invero si ha

$$b < a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t < a,$$

$$b < \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t} < a,$$

quindi

$$\frac{1}{2b} > \frac{1}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}} > \frac{1}{2a};$$

si moltiplichi per $\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\, dt$, e si integri fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Osservando che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{16},$$

si deduce

$$\frac{\pi}{32b} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\, dt}{a\cos^2 t + b\operatorname{sen}^2 t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}} > \frac{\pi}{32a},$$

onde sostituendo nell'espressione (4) di E:

$$(5)\quad E > \pi(a+b)+\pi\frac{(a-b)^2}{8a},\quad E < \pi(a+b)+\pi\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

Quindi il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale ad E, cioè $\frac{E}{2\pi}$, risulta compreso fra

$$\frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)^2}{16a},\qquad \text{e}\qquad \frac{a+b}{2}+\frac{(a-b)^2}{16b}.$$

Così, se p. e. si fa $a=41, b=40$, si trova applicando queste formole, che il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale all'ellisse di semiassi 41 e 40 è compreso fra

40,50152 e 40,50156,

e così resta determinato con quattro cifre decimali esatte.

In modo analogo si possono trovare infinite altre espressioni che comprendono il valore di E. Così, se nella formola (4) invece di $\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\operatorname{sen}^2 t}$ si pone $a\cos^2 t+b\operatorname{sen}^2 t$, che ne è minore, si deduce

$$E < \pi(a+b)+2(a-b)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt}{a\cos^2 t+b\operatorname{sen}^2 t},$$

ovvero, calcolando questo integrale,

$$E < \pi(a+b)+\frac{\pi}{2}\frac{(a-b)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2},$$

che si può anche scrivere

$$E < \pi(a+b)+\frac{\pi}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2.$$

45. Un'altra formula approssimata per l'arco d'ellisse si può ottenere per quest'altra via. Si ha

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = b + (a-b)\cos t$$

$$-2b(a-b)\frac{\cos t\,(1-\cos t)}{b+(a-b)\cos t + \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}};$$

quindi

$$E = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}\, dt = 2\pi b + 4(a-b)$$

$$-8b(a-b)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,(1-\cos t)}{b+(a-b)\cos t+\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t}}\,dt.$$

Ora, poichè l'ultimo integrale è positivo, si deduce

$$E < 2\pi b + 4(a-b),$$

che si può pure scrivere

$$\frac{E}{2\pi} < \frac{2a+(\pi-2)b}{2+(\pi-2)}.$$

E poichè $\frac{E}{2\pi}$ è il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse, ricordando quanto si è detto precedentemente, si deduce che il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse di semiassi a e b è maggiore di $\frac{a+b}{2}$, ed è minore di $b+\frac{4}{2\pi}(a-b) = \frac{2a+(\pi-2)b}{2+(\pi-2)}$.

Se in questa seconda formula invece di π si sostituisce $3 < \pi$, si aumenta il valore della frazione, quindi:

Il raggio del cerchio la cui circonferenza è eguale a quella dell'ellisse di semiassi a e b è maggiore di $\frac{a+b}{2}$, ed è minore di $\frac{2a+b}{3}$.

Poichè il raggio r del cerchio la cui lunghezza è eguale a quella dell'ellisse, è, come si è visto, minore di a e maggiore di b, esso si potrà mettere sotto la forma

$$r = \frac{a + zb}{1 + z},$$

ove z è una quantità positiva, poichè la frazione $\frac{a + zb}{1 + z}$ col variare di z da 0 ad ∞ va decrescendo da a a b, ed assume tutti i valori compresi fra a e b. E poichè si è trovato

$$\frac{a + b}{2} < r < \frac{a + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) b}{1 + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)},$$

si conchiude che i valori di z risultano compresi fra

$$1 > z > \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}57029.....$$

Dico che i due limiti or ora trovati, entro cui sta compreso z, sono appunto il limite superiore ed il limite inferiore dei valori di z, sicchè non esistono altri limiti, più prossimi fra di loro, che comprendano i valori di z. Infatti dalla $r = \frac{a + zb}{1 + z}$ si ricava

$$z = \frac{a - r}{r - b},$$

e sostituendo

$$r = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt, \quad b = a\sqrt{1 - e^2},$$

e sviluppando in serie secondo le potenze ascendenti di e il numeratore e il denominatore, si ha

$$z = \frac{1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1.}{2.4}\right)^2 3e^4 - \ldots\right]}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right) 3e^4 - \ldots\right] - \left[1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2.4} e^4 - \frac{1.3}{2.4.6} e^6 \ldots\right]}$$

$$z = \frac{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3e^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right) 5e^4 + \ldots}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2.4}\left(1 - \frac{3}{2.4}\right) e^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(1 - \frac{5}{5.4.6}\right) e^4 + \ldots}$$

Facendo tendere e verso zero, lim $z = 1$; quindi poichè i valori z sono tutti maggiori di 1 e si possono approssimare all'unità quanto si vuole, sarà 1 il limite superiore dei valori di z.

Facciasi invece tendere l'eccentricità e verso 1. Si avrà $\lim r = \frac{2a}{\pi}$ $\lim b = 0$, e $\lim z = \frac{\pi}{2} - 1$. Pertanto i valori di z sono tutti maggiori di $\frac{\pi}{2} - 1$, ma si possono approssimare quanto si vuole a questa quantità; dunque $\frac{\pi}{2} - 1$ è il limite inferiore dei valori di z.

46. Sia la *spirale d'Archimede* di equazione $r = a\,\alpha$. Si avrà $dr = a d\alpha$, e

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2} = a\sqrt{1 + \alpha^2}\, d\alpha;$$

quindi integrando fra i limiti 0 ed α si avrà la lunghezza d'un arco della spirale, di cui un estremo è il polo

$$s = a \int_0^\alpha \sqrt{1 + \alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} a\alpha \sqrt{1 + \alpha^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} a \log\left(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}\right).$$

Siano x e y le coordinate cartesiane ortogonali d'un punto P nel piano, e siano r ed α le coordinate polari d'un altro punto Q; suppongasi che x, y, r, α siano funzioni d'una stessa variabile t, e tali da soddisfare alle equazioni

$$dr = dx, \quad r d\alpha = dy.$$

Detti s ed s' gli archi descritti da P e Q mentre t varia in un intervallo qualunque, si avrà

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \; ds' = \sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2},$$

ed a causa delle equazioni precedenti $ds = ds'$, e $s = s'$, ossia gli archi corrispondenti delle due curve sono eguali.

Dalle equazioni precedenti, dati x ed y, si possono ricavare r ed α, e viceversa

Facciasi p. e. $y = \frac{x^2}{2p}$, onde $dy = \frac{x\,dx}{p}$. Le equazioni precedenti diventano

$$dr = dx, \quad r\,d\alpha = \frac{x\,dx}{p};$$

la prima equazione è soddisfatta ponendo $r = x$; allora la seconda diventa $d\alpha = \frac{dr}{p}$ la quale è soddisfatta facendo $r = p\alpha$. Quindi le curve $x^2 = 2py$ (parabola conica) e $r = p\alpha$ (spirale d'Archimede) sono tali che se un punto P, di ascissa x, descrive un arco della prima, ed un punto Q di raggio vettore $r = x$ descrive un arco della seconda, i due archi sono eguali in lunghezza.

§ 9. Formule generali per le aree.

47. Teorema. — Se le posizioni dei due punti A e B nel piano sono funzioni d'una stessa variabile numerica

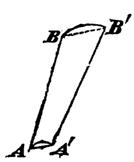
t, aventi per derivate i segmenti $\frac{dA}{dt}$ e $\frac{dB}{dt}$ funzioni continue di t, e se variando t fra t_0 e t_1 la retta finita AB non passa mai due volte per uno stesso punto, allora l'area descritta dalla retta AB è misurata da

$$u = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} AB.\left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right) dt,$$

ove $AB.\left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right)$ indica il numero che misura l'area del parallelogrammo compreso fra segmenti equipollenti ad AB e $\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}$.

Infatti, dati a t i valori t e $t + \Delta t$, siano AB e A′B′ le posizioni corrispondenti della retta mobile, e sia Δu l'area descritta da AB mentre t varia in questo intervallo. Si avrà

$$\Delta u = ABB'A' + \epsilon + \epsilon',$$



ove ABB′A′ rappresenta l'area del quadrilatero di vertici ABB′A′; ϵ è l'area compresa fra l'arco curvilineo AA′ e la sua corda, ed ϵ' l'area compresa fra l'arco BB′ e la sua corda, queste due aree essendo prese positivamente o negativamente secondochè si debbono aggiungere o sottrarre al quadrilatero per avere Δu.

Ora si ha che

$$ABB'A' = \frac{1}{2} AB'.BA' = \frac{1}{2}(AB + BB').(BA + AA')$$
$$= \frac{1}{2} AB.(AA' + BB') + \frac{1}{2} AA'.BB';$$

e dividendo per Δt si ha

$$\frac{ABB'A'}{\Delta t} = \frac{1}{2} AB.\left(\frac{AA'}{\Delta t} + \frac{BB'}{\Delta t}\right) + \frac{1}{2}\frac{AA'}{\Delta t}.\frac{BB'}{\Delta t}\Delta t.$$

Facciasi tendere Δt a zero. Poichè

$$\lim \frac{AA'}{\Delta t} \equiv \frac{dA}{dt}, \lim \frac{BB'}{\Delta t} \equiv \frac{dB}{dt},$$

si avrà

$$\lim \frac{AB\,B'A'}{\Delta t} = \frac{1}{2} AB . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right).$$

L'area ϵ è minore dell'area del rettangolo di base AA' e di altezza la massima distanza dei punti dell'arco AA' dalla sua corda. Se X è il punto dell'arco AA' per cui la distanza dalla corda è massima, l'area di questo rettangolo vale $AA'.AX$; quindi, in valor assoluto $\epsilon < AA'.AX$, e $\frac{\epsilon}{\Delta t} < \frac{AA'}{\Delta t} . AX$. Facciasi tendere Δt a zero; $\frac{AA'}{\Delta t}$ tende ad un limite finito; ma AX tende a zero, perchè il punto X dell'arco AA' tende ad A; quindi $\lim \frac{\epsilon}{\Delta t} = 0$. Analogamente si dimostra che $\lim \frac{\epsilon'}{\Delta t} = 0$.

Dividendo pertanto l'espressione trovata di Δu per Δt, e passando ai limiti si ha

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} AB . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right),$$

ossia

$$du = \frac{1}{2} AB . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right) dt$$

ed il valore di u, ove t varii nell'intervallo (t_0, t_1) è dato da

$$u = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} AB . \left(\frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt}\right) dt,$$

c.v.d.

48. Se nella formula precedente si tralasciano i limiti, e invece di $\frac{dA}{dt}\,dt$ e $\frac{dB}{dt}\,dt$ si scrive dA e dB, essa diventa

$$u = \frac{1}{2}\int AB\,.\,(dA + dB). \qquad (1)$$

Sia C il punto medio del segmento AB. Essendo O un punto fisso qualunque, si avrà $2OC \equiv OA + OB$, e differenziando $2dC \equiv dA + dB$. Quindi, sostituendo, la formula precedente diventa

$$u = \int AB\,.\,dC. \qquad (2)$$

Si ha $dAB \equiv dB - dA$, da cui $dB \equiv dA + dAB$. Sostituendo nella (1) si ha una terza espressione dell'area

$$u = \int \left(AB\,.\,dA + \frac{1}{2}\,AB\,.\,dAB\right). \qquad (3)$$

Le formule precedenti contengono tutte quelle finora trovate. Invero, la retta mobile che descrive l'area u sia l'ordinata MP d'un punto d'una curva. Si avrà $OM \equiv x\mathbf{i}$, $MP \equiv y\mathbf{j}$; $OP \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; quindi $dOM \equiv dM \equiv \mathbf{i}dx$; $dMP \equiv \mathbf{j}dy$; e sostituendo nella formola (3), che nel nostro caso diventa $u = \int \left(MP\,.\,dM + \frac{1}{2}\,MP\,.\,dMP\right)$ si ricava

$$u = \mathbf{j}\,.\,\mathbf{i}\int y\,dx.$$

Se i segmenti di riferimento sono eguali all' unità di misura ed ortogonali, cioè la curva è riferita a coordinate cartesiane ortogonali, sarà $\mathbf{j}\,.\,\mathbf{i} = 1$, e

$$u = \int y\,dx.$$

Se i segmenti $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, ancora eguali all'unità di misura, fanno fra loro l'angolo ω, che è il caso delle coordinate cartesiane oblique, sarà $\mathbf{j}\,.\,\mathbf{i} = \operatorname{sen}\omega$, e

$$u = \operatorname{sen}\omega \int y\,dx.$$

Supposto che x ed y siano ancora le coordinate cartesiane del punto P, la cui posizione dipende da t, detta O l'origine delle coordinate, l'area descritta dalla retta O P sarà data da

$$u = \frac{1}{2}\int \mathrm{O\,P}\,.\,d\mathrm{P},$$

che si ottiene dalla (1) ponendo invece di A, B, dA, dB rispettivamente O, P, 0, dP. Ora si ha $\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $d\mathrm{P} \equiv dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ $\mathrm{OP}\,.\,d\mathrm{P} = (xdy - ydx)\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}$. Quindi sostituendo si ha

$$u = \frac{1}{2}\,\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}\int (xdy - ydx);$$

e l'area $\mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}$ vale l'unità, ovvero $\operatorname{sen}\omega$, secondochè gli assi sono ortogonali od obliqui.

Siano r ed α le coordinate polari del punto P, e sia r funzione di α. Detto O il polo, e conservando le notazioni della pagina 80, si avrà

$$\mathrm{OP} \equiv r\mathbf{a}, \qquad d\mathrm{P} \equiv (r\mathbf{a}' + r'\mathbf{a})\,d\alpha;$$

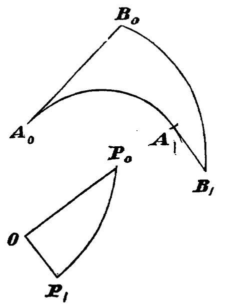
quindi $\mathrm{OP}\,.\,d\mathrm{P} = r^2\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}'$, e l'area descritta da OP vale

$$u = \frac{1}{2}\int \mathrm{OP}\,.\,d\mathrm{P} = \frac{1}{2}\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}'\int r^2 d\alpha;$$

ovvero, poichè $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}' = 1$,

$$u = \frac{1}{2}\int r^2\,d\alpha.$$

Se la retta AB si muove in guisa da riuscire sempre tangente in A alla curva descritta dal punto A, sarà $AB . dA = 0$, e l'area u si riduce in virtù della (3), a



$$u = \frac{1}{2}\int AB . dAB;$$

d'altra parte se da un punto fisso O si conduce un segmento variabile $OP \equiv AB$, l'area v descritta da OP sarà data da

$$v = \frac{1}{2}\int OP . dP;$$

ma siccome $OP \equiv AB$, e $dP \equiv dOP \equiv dAB$, si deduce $u = v$, ossia l'area descritta dal segmento AB è eguale all'area descritta dal segmento equipollente OP.

Se la retta AB ha una lunghezza costante l, e si mantiene sempre normale alla curva XY descritta dal suo punto medio C, si avrà

$$AB . dC \equiv l \times \text{gr}. dC,$$

e

$$u = \int AB . dC = l \times \int \text{gr}. dC.$$

Ma $\int \text{gr}. dC$ è la lunghezza dell'arco XY descritto dal punto C. Quindi l'area descritta dal segmento AB è eguale all'area del rettangolo avente per base la lunghezza dell'arco descritto dal punto C e per altezza la lunghezza costante del segmento AB.

49. La posizione d'un punto P nel piano o su d'una superficie può essere data mediante due variabili numeriche, che indicheremo con u e v. Così, nel piano, u e v possono essere le coordinate cartesiane, ovvero le coordinate polari del punto P. In generale i due numeri u e v soglionsi chiamare le *coordinate* del punto P nel piano o su quella superficie. Supponiamo sempre che ad ogni coppia di valori u e v, se occorre convenientemente limitate, corrisponda una posizione di P, e che a coppie distinte corrispondano posizioni distinte di P. Attribuendo ad u un valore qualunque, e variando v fra due valori $\theta_0(u)$ e $\theta_1(u)$, che possono dipendere da u, il punto P descrive un arco di curva in quel piano o in quella superficie. Variando poi u fra due valori a e b, questa curva si sposta e descrive un'area. Quest'area si può esprimere con due integrazioni successive, come dimostra la proposizione che segue:

TEOREMA. — Se la posizione del punto P è funzione delle due variabili numeriche u e v, avente per derivate rispetto a u e a v i segmenti **p** e **q**, funzioni continue di u e v, il luogo dei punti P che corrispondono alle coppie dei valori di u e v che soddisfano alle diseguaglianze

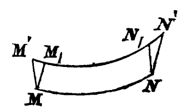
$$a < u < b, \qquad \theta_0(u) < v < \theta_1(u)$$

essendo $\theta_0(u)$ e $\theta_1(u)$ funzioni continue di u, ha un'area misurata da

$$S = \int_a^b du \int_{\theta_0(u)}^{\theta_1(u)} \omega \, dv,$$

ove ω è il numero che misura l'area del parallelogrammo $\mathbf{p}\,.\,\mathbf{q}$, cioè $\omega = gr\,(\mathbf{p}\,.\,\mathbf{q}) = gr\,\mathbf{p} \times gr\,\mathbf{q} \times \text{sen}\,\widehat{\mathbf{p},\mathbf{q}}$.

Suppongasi dapprima che il punto P giaccia in un piano fisso. Sia MN una qualunque delle linee descritte da P mentre, attribuendo ad u un valore fisso, v varia da $\theta_0(u)$ a $\theta_1(u)$. Sia M′N′ una nuova posizione di questa linea, corrispondente ad un nuovo valore $u + \Delta u$ di u. Dicasi ΔS la porzione dell'area S compresa fra le linee MN ed M′N′, cioè l'area descritta da MN mentre



u varia nell'intervallo $(u, u + \Delta u)$. Siano P e P' due punti delle linee MN ed M' N' corrispondenti ad uno stesso valore di v. Variando v fra θ_0 e θ_1, la retta PP' descrive un'area MNN_1M_1, la quale differisce dalla ΔS solo per due triangoli mistilinei MM_1M', e NN_1N' che possono appartenere all'una e non all'altra delle due figure:

$$\Delta S = MNN_1M_1 \pm MM_1M' \pm NN_1N'$$

Ora la prima parte in virtù delle formule dimostrate è espressa da

$$MNN_1M_1 = \frac{1}{2}\int PP'.\left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) dv$$

e dividendo per Δu,

$$\frac{MNN_1M_1}{\Delta u} = \frac{1}{2}\int \frac{PP'}{\Delta u} . \left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) dv,$$

gli integrali essendo estesi da θ_0 a θ_1. Ora, col tendere di Δu a zero, $\lim \frac{PP'}{\Delta u} \equiv \frac{dP}{du} \equiv \mathbf{p}$; il segmento $\frac{dP}{dv} \equiv \mathbf{q}$; ed il segmento $\frac{dP}{}$ che è ciò che diventa $\mathbf{q}$, ove ad u si sostituisce $u + \Delta u$, ha per limite $\mathbf{q}$ col tendere di Δu a zero. Quindi, supposto fisso v, si avrà $\lim \frac{1}{2} \frac{PP'}{\Delta u} . \left(\frac{dP}{dv} + \frac{dP'}{dv}\right) = \mathbf{p} . \mathbf{q} = \omega$; inoltre, a causa della continuità di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, il membro di sinistra converge equabilmente verso ω qualunque sia v, ossia, fissata una quantità piccola ad arbitrio, si può supporre Δu così piccolo che la differenza fra il membro di sinistra ed il suo limite ω sia minore di questa quantità, per ogni valore di v. Allora il limite dell'integrale sarà l'integrale del limite, ossia

$$\lim \frac{MNN_1M_1}{\Delta u} = \int \omega \, dv.$$

La figura MM_1M' è minore del rettangolo di base MM_1 e di altezza la massima distanza δ dei punti di MM' da MM_1; quindi $\frac{MM_1M'}{\Delta u} < \frac{MM_1}{\Delta u}\delta$; e, col tendere di Δu a zero, $\frac{MM_1}{\Delta u}$ tende ad un limite, δ tende a zero, perciò

$$\lim \frac{MM_1M'}{\Delta u} = 0.$$

Analogamente

$$\lim \frac{NN_1N'}{\Delta u} = 0.$$

Si divida l'espressione di ΔS per Δu, e si faccia tendere Δu a zero. Poichè sono noti i limiti dei termini in cui è decomposto $\frac{\Delta S}{\Delta u}$, si avrà:

$$\lim \frac{\Delta S}{\Delta u} = \frac{dS}{du} = \int \omega\, dv,$$

e quindi il valore intero di S, ove u varii nell'intervallo (a, b) sarà dato da

$$S = \int \left(\int \omega\, dv \right) du,$$

quest'ultimo integrale essendo preso fra i limiti (a, b) mentre il primo lo è fra θ_0 e θ_1. Questa è la formula a dimostrarsi.

Suppongasi ora che il punto P, la cui posizione dipende da u e v, si muova su d'una superficie qualunque. Si decomponga questa superficie in parti, e, dopo averle trasportate comunque nello spazio, le si proiettino ortogonalmente su d'un piano fisso π. Detta P' la proiezione del punto P già trasportato, e dette $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{q}'$ le derivate parziali di P' rispetto ad u e v, le quali sono le proiezioni dei segmenti $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, già trasportati, e fatto $\omega' = gr\,(\mathbf{p}' . \mathbf{q}')$, il quale

ω' sarà la proiezione dell'area $\mathbf{p} . \mathbf{q}$ di grandezza ω, l'area S' della proiezione della figura data sarà misurata da $S' = \int du \int \omega' \, dv$; e poichè ω' è minore di ω, si deduce $S' < \int du \int \omega \, dv$; ossia, se si decompone la superficie descritta da P in parti, e, dopo averle trasportate nello spazio, le si proiettano su d'un piano fisso, la somma S' delle proiezioni di queste parti è sempre minore dell'integrale duplicato $\int du \int \omega \, dv$. Si decomponga ora in parti la figura data, in modo che l'angolo che il piano tangente alla superficie (cioè il piano dell'area $\mathbf{p} . \mathbf{q}$) fa in due punti di una di queste parti sia minore d'un angolo piccolo ad arbitrio ϵ, cosa possibile a causa della continuità di $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$. Si trasportino queste parti in guisa che il piano tangente in uno dei loro punti sia parallelo al piano Π su cui si proietta. Si avrà $\omega' = \omega \cos(\omega, \omega')$ indicando con $\widehat{\omega, \omega'}$ l'angolo che il piano dell'area ω', cioè il piano Π, fa col piano dell'area ω, cioè $\mathbf{p} . \mathbf{q}$, dopo il trasporto. Allora, siccome per ipotesi $\widehat{\omega, \omega'} < \epsilon$, sarà $\omega' > \omega \cos \epsilon$; quindi

$$S' = \int du \int \omega' \, dv > \cos\epsilon \int du \int \omega \, dv,$$

quantità che si può supporre tanto prossima quanto si vuole a

$$\int du \int \omega \, dv,$$

perchè si può supporre $\cos \epsilon$ differente dall'unità meno d'una quantità comunque piccola.

Dunque, se si decompone la figura descritta da P in parti, e queste, dopo averle trasportate comunque nello spazio, vengono proiettate ortogonalmente su d'uno stesso piano Π, la somma S' di queste proiezioni è sempre minore di $\int du \int \omega \, dv$, e vi si può avvicinare quanto si vuole; ossia quest'integrale è il limite superiore di S'.

Ma, per definizione, il limite superiore delle aree S' è l'area S della figura data; quindi

$$S = \int du \int \omega \, dv,$$

c . v . d.

50. Come esempio, comincieremo ad applicare le formule precedenti ad aree piane.

Siano x ed y le coordinate cartesiane del punto P. Detti **i**, **j** i segmenti di riferimento, sarà $OP \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Derivando si ha

$$\frac{dP}{dx} \equiv \mathbf{i}, \qquad \frac{dP}{dy} \equiv \mathbf{j}.$$

L'area $\omega = \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j}$ è in questo caso costante; quindi l'area descritta dal punto P mentre le sue coordinate variano entro i limiti

$$a < x < b, \qquad \theta_0(x) < y < \theta_1(x)$$

sarà data da

$$S = \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} \int_a^b dx \int_{\theta_0(x)}^{\theta_1(x)} dy.$$

Eseguendo il secondo integrale

$$\int_{\theta_0(x)}^{\theta_1(x)} dy = \theta_1(x) - \theta_0(x),$$

si avrà

$$S = \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} \int_a^b \Big(\theta_1(x) - \theta_0(x)\Big)\, dx,$$

formula che è conseguenza diretta di quelle già dimostrate.

Se r ed α sono le coordinate polari di P, detto **a** il segmento eguale all'unità di misura e che fa l'angolo α coll'asse polare, sarà $\mathrm{OP} \equiv r\mathbf{a}$; $\frac{d\mathrm{P}}{dr} = \mathbf{a}$, $\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} \equiv r\,\mathbf{a}'$; $\omega = r\,\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}'$, e siccome $\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}' = 1$, sarà $\omega = r$; quindi l'area descritta da P è data da

$$\int\!\!\int r\,dr\,d\alpha,$$

gl'integrali essendo presi entro limiti convenienti.

§ 10. Calcolo di alcune aree non piane.

51. Cilindri. — La posizione del punto A sia funzione d'una variabile u. Variando u, il punto A descriverà una curva qualunque, piana o non. Per ogni posizione di A si conduca una retta parallela ad una retta fissa l. Il luogo di queste rette sarà una superficie cilindrica.

Sia **a** un segmento fisso parallelo alle generatrici del cilindro. Detto P un punto della generatrice che passa per A, il segmento AP avrà la direzione di **a**; quindi esisterà un numero v tale che

$$\mathrm{AP} \equiv v\mathbf{a}.$$

Variando v, il punto P descrive la generatrice che passa per A. In tal modo la posizione d'un punto qualunque P sul cilindro è determinata dai due numeri u e v; il primo determina la generatrice su cui il punto si trova, e il secondo la posizione del medesimo sulla generatrice.

Supposto u fisso e variabile v, derivando l'equipollenza precedente si avrà

$$\frac{d\mathrm{P}}{dv} \equiv \mathbf{a}\,;$$

supposto invece v fisso e variabile u si avrà

$$\frac{dP}{du} - \frac{dA}{du} \equiv 0,$$

ossia

$$\frac{dP}{du} \equiv \frac{dA}{du}.$$

Quindi

$$\omega = \mathrm{gr}\left(\frac{dP}{du} \cdot \frac{dP}{dv}\right) = \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du}\ \mathbf{a}\right),$$

e l'area d'una porzione del cilindro sarà data da

$$S = \int\int \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) du\, dv,$$

l'integrale essendo esteso a limiti convenienti. Delle due integrazioni indicate, quella rispetto a v si eseguisce subito, perchè la funzione da integrarsi è indipendente da v. Se v_0 e v_1 sono i limiti entro cui varia v, i quali possono dipendere da u, si avrà

$$S = \int \mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) (v_1 - v_0)\, du.$$

Merita menzione speciale il caso in cui la linea descritta dal punto A è una sezione fatta nella superficie cilindrica con un piano normale alle generatrici. Supposto ancora che l'area a determinarsi sia quella generata da una porzione AP di generatrice, di cui un estremo è il punto A, l'area del parallelogrammo $\frac{dA}{du} . \mathbf{a}$ sarà data da

$$\mathrm{gr}\left(\frac{dA}{du} . \mathbf{a}\right) = \mathrm{gr}\,\frac{dA}{du} \times \mathrm{gr}\,\mathbf{a},$$

perchè l'angolo dei segmenti $\frac{dA}{du}$ e $\mathbf{a}$ è retto. I limiti v_0 e v_1 sono rispettivamente 0 e il valore di v corrispondente all'estremo P di AP, il quale valore indicheremo semplicemente con v. Quindi in questo caso

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{gr}\, \frac{d\mathrm{A}}{du} \times \mathrm{gr}\, \mathbf{a} \times v\,du.$$

Ma poichè $\mathrm{AP} \equiv v\mathbf{a}$, sarà $\mathrm{gr\,AP} = v\,\mathrm{gr}\,\mathbf{a}$; quindi posto $h = \mathrm{gr\,AP}$, ossia detto h la lunghezza del segmento mobile AP, si avrà

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{gr}\, \frac{d\mathrm{A}}{du} \,.\, h\,du;$$

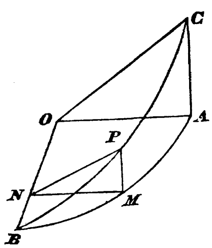
ovvero ancora, detto s l'arco di curva descritto da A, sarà

$$\mathrm{gr}\, \frac{d\mathrm{A}}{du}\, du = ds,$$

e quindi

$$\mathrm{S} = \int h\,ds.$$

Esempio. — Un cilindro di rivoluzione, la cui base è il cerchio OAB, è tagliato con un piano OBC passante pel centro O della base. Trovare l'area della superficie cilindrica compresa fra questo piano e la base (cioè il doppio del triangolo mistilineo ABC).



Sia a il raggio OA, e α l'angolo diedro dei due piani AOB e COB, che è misurato dall'angolo piano AOC. Detta s la lunghezza dell'arco AM che va dal punto A al punto variabile M della base, sarà l'angolo $\mathrm{AOM} = \frac{s}{a}$; la distanza di M da OB, che diremo MN, sarà espressa da $a \cos \frac{s}{a}$; e dal triangolo MNP si ricava che

$MP = a \cos \frac{s}{a} \operatorname{tang} \alpha$. Questa è la lunghezza del segmento mobile MP, che prima si era chiamata h. Variando s fra 0 e $\frac{\pi}{2} a$, il punto M va da A in B, ed MP descrive il triangolo mistilineo ABC. Si avrà quindi

$$ABC = \int_0^{\frac{\pi}{2}a} a \cos \frac{s}{a} \operatorname{tang} \alpha \, ds = a \operatorname{tang} \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}a} a \cos \frac{s}{a} \, ds = a^2 \operatorname{tang} \alpha.$$

Ma l'area del triangolo $OAC = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tang} \alpha$; quindi l'area della figura ABC è il doppio dell'area del triangolo OAC, sua proiezione sul piano OAC.

52. Coni. — Sia O un punto fisso, ed M un punto variabile, la cui posizione è funzione d'una variabile numerica u. Variando M la retta OM descrive una superficie conica, avente per vertice O, che contiene la curva descritta da M.

Sia P un punto qualunque della generatrice OM. Si potrà determinare un numero v in guisa che

$$OP \equiv v OM.$$

Così la posizione di P sulla superficie risulta determinata mediante due numeri u e v; il primo determina la generatrice su cui si trova P, il secondo la posizione di P sulla generatrice. Derivando l'equipollenza precedente rispetto ad u e v si ha

$$\frac{dP}{du} \equiv v \frac{dM}{du}, \quad \frac{dP}{dv} \equiv OM;$$

quindi

$$\omega = \operatorname{gr} \left(\frac{dP}{du} \cdot \frac{dP}{dv} \right) = \operatorname{gr} \left(v \frac{dM}{du} \cdot OM \right),$$

e la superficie S descritta da P, mentre u e v variano entro certi limiti è data da

$$S = \int\int \mathrm{gr}\left(v\,\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) du\,dv.$$

L'integrazione rispetto a v si può eseguire immediatamente.

Supponendo di voler considerare l'area descritta dal segmento OM, v dovrà variare da 0 ad 1; quindi

$$\int_0^1 \mathrm{gr}\left(v\,\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) dv = \mathrm{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right)\int_0^1 v dv =$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right);$$

perciò, sostituendo

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{gr}\left(\frac{dM}{du}\,.\,OM\right) du.$$

Come esempio, se si suppone che OM sia di lunghezza costante r, e quindi che M si muova su d'una sfera di centro O e di raggio r, la direzione di $\frac{dM}{du}$, che è tangente alla sfera, sarà normale al raggio OM; quindi

$$\mathrm{gr}\left(\frac{dM}{du}.OM\right) = r\,\mathrm{gr}\,\frac{dM}{du};$$

sostituendo, si avrà

$$S = \frac{1}{2}\,r\int \mathrm{gr}\,\frac{dM}{du}\,du.$$

Ma il secondo integrale rappresenta la lunghezza dell'arco di curva sferica descritta da M; quindi l'area della superficie conica limitata da una sfera di centro il vertice del cono è eguale all'area del triangolo avente per base la lunghezza della linea intersezione della sfera col cono, e per altezza il raggio della sfera.

53. SFERA. — La posizione d'un punto P su d'una sfera di raggio r si può determinare mediante le sue coordinate geografiche, cioè mediante l'angolo θ che il raggio OP fa col piano d'un cerchio massimo fisso (equatore), il quale angolo dicesi latitudine, e mediante l'angolo diedro φ che il piano che proietta OP sul piano dell'equatore fa con un piano fisso (primo meridiano), al qual angolo si dà il nome di longitudine. Il luogo dei punti corrispondenti ad uno stesso valore di θ è un *parallelo*, il luogo di quelli corrispondenti ad uno stesso valore di φ è un *meridiano*.

Già si è visto (pag. 109) che la derivata del punto P rispetto a θ è un segmento tangente al meridiano passante per P ed eguale in grandezza ad r; e che la derivata di P rispetto a φ è un segmento tangente al parallelo passante per P ed eguale in grandezza ad $r \cos \theta$. Quindi l'area ω del rettangolo compreso fra queste due derivate sarà

$$\omega = r^2 \cos \theta,$$

e l'area d'una porzione qualunque di sfera sarà espressa da

$$S = r^2 \int\int \cos \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Delle due integrazioni indicate, la prima, sia rispetto a θ che rispetto a φ, si può eseguire immediatamente.

Se, per esempio, si fa variare θ da $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, e φ da 0 a 2π, il punto P descrive l'intera sfera, e si avrà

$$S = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2.$$

Si consideri ancora la porzione di superficie sferica descritta dal punto P, ove φ varii da 0 a $\frac{\pi}{2}$, e θ da 0 a φ. L'area di questa figura sarà data da

$$S = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\varphi} \cos\theta \, d\theta = r^2,$$

ossia vale il quadrato del raggio.

54. *Superficie di rivoluzione.* — Sia l una linea data comunque nello spazio. La posizione d'un punto di questa linea sia data in funzione d'una variabile u. Se questa linea ruota attorno ad un asse fisso OX, genererà una superficie di rivoluzione. Dicasi α l'angolo di cui è ruotata la linea per passare da una sua posizione iniziale ad una posiziene qualunque. Allora la posizione d'un punto P su questa superficie è data dai due numeri u e α; il secondo determina la posizione della generatrice che passa per P, e il primo la posizione del punto su questa generatrice. Se α è fisso e varia u, il punto descrive una generatrice; se u è fisso e varia α, il punto descrive un *parallelo*, cioè un cerchio contenuto in un piano normale all'asse di rotazione, ed il cui centro sta su quest'asse. Sia $\frac{dP}{du}$ la derivata del punto P rispetto ad u, che sarà un segmento tangente alla generatrice passante per P. La derivata di p rispetto ad α sarà un segmento eguale in grandezza alla distanza di P da OX, e tangente al parallelo passante per P. Quindi si potrà calcolare l'area ω compresa fra queste due derivate e, integrando, determinare l'area cercata.

Se la linea che ruota è contenuta in un piano passante per l'asse di rivoluzione OX, ossia se è un meridiano della superficie, cosa che si può sempre supporre senza ledere alla generalità della superficie, allora, detta y la distanza del punto P da OX, sarà

$$\omega = y \operatorname{gr} \frac{dP}{du},$$

e

$$S = \int\int y \operatorname{gr} \frac{dP}{du}\, du\, d\alpha;$$

l'integrazione rispetto ad α si può eseguire immediatamente. Se si suppone che α varii fra 0 e 2π, ossia si vuol determinare l'area descritta dall'arco AB di curva in una intera rivoluzione, poichè $\int_0^{2\pi} d\alpha = 2\pi$; si avrà

$$S = 2\pi \int y \operatorname{gr} \frac{dP}{du}\, du.$$

Si osservi ancora che, detto s un arco di meridiano AB, si ha

$$\operatorname{gr} \frac{dP}{du}\, du = ds;$$

quindi la formola precedente si può pure scrivere

$$S = 2\pi \int y\, ds.$$

Applicheremo questa formula ad alcuni casi particolari.

Sia $y^2 = 2px$ l'equazione d'una parabola conica riferita all'asse e alla tangente nel vertice. Prendendo la y come variabile indipendente, si è trovato pel differenziale dell'arco di parabola

$$ds = \frac{1}{p} \sqrt{y^2 + p^2}\, dy;$$

quindi l'area descritta da un arco di parabola di cui un estremo è il vertice e l'altro estremo è un punto di ordinata y, ove questo arco ruoti attorno all'asse della parabola, è dato da

$$S = 2\pi \int_0^y y\, ds = \frac{2\pi}{p} \int_0^y \sqrt{y^2 + p^2}\, y\, dy,$$

ossia, eseguito il calcolo,

$$S = \frac{2}{3}\pi\left[(y^2+p^2)\sqrt{1+\frac{y^2}{p^2}}-p^2\right];$$

e se alla variabile y si sostituisce la x si avrà

$$S = \frac{2}{3}\pi\left[(2x+p)\sqrt{p(2x+p)}-p^2\right].$$

Si è visto che se si fa $x = a \operatorname{sen} t$, $y = b \cos t$, variando t, il punto le cui coordinate cartesiane ortogonali sono x ed y descrive un'ellisse, i cui semiassi, diretti secondo gli assi coordinati, sono a e b; e si è trovato pel differenziale dell'arco di ellisse

$$ds = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

Quindi, sostituendo nell'espressione di S, si avrà

$$S = 2\pi \int \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\; b \cos t \, dt.$$

Se si prende l'integrale entro i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, e si raddoppia il risultato, si avrà per area totale dell'ellissoide di rivoluzione

$$S = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}\, \cos t \, dt.$$

Per eseguire quest'integrale converrà distinguere i tre casi di

$$a = b, \quad a > b \text{ e } a < b.$$

Se $a = b$,

$$\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t} = a,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1,$$

e quindi si ha per la superficie della sfera di raggio a

$$S = 4\pi a^2.$$

Se $a > b$ (ellissoide allungato), si ha, sostituendo $1 - \operatorname{sen}^2 t$ invece di $\cos^2 t$, e fatto $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$,

$$S = 4\pi a b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt$$

Ora, fatto $e \operatorname{sen} t = z$, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t} \cos t \, dt = \frac{1}{e} \int_0^e \sqrt{1 - z^2} \, dz =$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{1 - e^2} + \frac{1}{2e} \operatorname{arc\,sen} e;$$

ossia

$$S = 2\pi ab \left[\sqrt{1 - e^2} + \frac{\operatorname{arc\,sen} e}{e} \right].$$

Se $a < b$ (ellissoide schiacciato), si avrà in modo analogo

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{a}.$$

Esercizii.

1. Calcolare l'area descritta dall'ordinata della *sinusoide*

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}.$$

2. Costrurre un arco di ellisse eguale ad un dato arco di sinusoide.

3. Nella *catenaria*

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'area descritta dall'ordinata è proporzionata all'arco.

4. Calcolare l'area della *concoide di Nicomede* (pag. 85).

5. Calcolare l'area della *lumaca di Pascal* (pag. 85).

6. Costrurre un arco di ellisse eguale ad un dato arco della curva precedente.

7. Se nella curva precedente si suppone che il segmento costante che si porta sia eguale al diametro del cerchio ($h = 2a$), la curva che ne risulta dicesi *cardioide*. Essa è rettificabile, e la sua lunghezza totale vale 8 volte il diametro del cerchio.

8. La *cardioide*, rotando attorno al suo asse, genera un solido il cui volume vale 16 volte il volume della sfera descritta dal cerchio.

9. L'area della superficie che limita questo volume vale $\frac{32}{5}$ dell'area della sfera descritta dal cerchio.

10. Se, nel piano, da un punto fisso O si conduce una retta che incontra due linee l_1 ed l_2 nei punti P_1 e P_2 (V. pagg. 86, 87); e si costruiscono su questa retta il punto Q tale che $OQ = \sqrt{OP_1 \times OP_2}$, ed il punto R tale che

$$OR = m_1 OP_1 + m_2 OP_2,$$

dette A_1, A_2, B, S le aree descritte dai raggi vettori OP_1, OP_2, OQ, OR, sarà

$$S = m_1^2 A_1 + m_2^2 A_2 + 2 m_1 m_2 B.$$

11. L'area interna della figura limitata dalla *cissoide* indefinita (pag. 86) e dal suo assintoto l_1, vale a dire il limite superiore delle aree poligonali comprese nell'interno di questa figura indefinita, vale tre volte l'area del cerchio l_2.

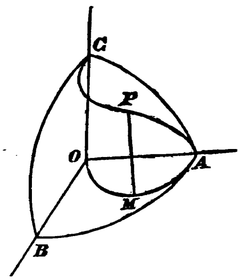
12. La figura precedente rotando attorno all'assintoto l_1 genera un solido, il cui volume interno vale $\frac{1}{4}\pi^2 a^3$, a essendo il diametro del cerchio.

13. L'area limitata da un arco di parabola e dalla sua corda vale i $\frac{2}{3}$ dell'area del triangolo formato da questa corda e dalle tangenti nelle estremità dell'arco.

14. Il volume limitato dalla superficie d'un paraboloide ellittico e da un piano

segante qualunque è la metà del volume del cilindro avente per base l'ellisse sezione di questo piano col paraboloide e per altezza la distanza fra questo piano segante ed il suo parallelo tangente alla superficie.

15. Si ha una sfera OABC di raggio a, ed un cilindro di rivoluzione di cui una generatrice OC passa pel centro della sfera ed avente per diametro il raggio OA della sfera. La lunghezza della curva APC intersezione delle due superficie è eguale al perimetro dell'ellisse di semiassi $a\sqrt{2}$ e a.



16. L'area della porzione di superficie cilindrica interna alla sfera vale il quadrato del diametro della sfera.

17. Se si immagina un secondo cilindro simmetrico del primo rispetto al piano COB, tangente al primo secondo la generatrice OC, l'area della superficie sferica, esterna ai due cilindri, vale 2 volte il quadrato del diametro della sfera (V. pag. 254).

18. Il volume della porzione di sfera esterna ai due cilindri vale i $\frac{2}{9}$ del cubo del diametro della sfera.