Advanced Studies in Pure Mathematics 46, 2007
Singularities in Geometry and Topology 2004
pp. 259–271

Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$

Michel Vaquié

Abstract.

We extend some results on augmented valuations and key-polynomials to limit augmented valuations and limit key-polynomials. As any valuation μ of $K[x]$ is obtained as a limit of an admissible family of valuations, we deduce a description of the graded algebra associated to μ.

§ Introduction

Dans cet article nous donnons une description de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à une valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ sur un corps K. La nature de cette algèbre graduée dépend essentiellement du fait que la valuation μ est ou n'est pas *bien spécifiée*, c'est-à-dire du fait que l'extension $(K(x),\, \mu)/(K,\, \nu)$ de corps valués vérifie ou ne vérifie pas l'égalité d'Abhyankar.

Nous caractérisons cette propriété de la valuation μ en utilisant la notion de famille admissible associée à la valuation μ, telle qu'elle a été introduite et étudiée dans [Va 1] et [Va 2].

Dans la première partie, pour étudier certaines propriétés des familles admissibles, nous étendons aux valuations augmentées limites et aux polynômes-clé limites quelques résultats déjà connus pour les valuations augmentées et les polynômes-clés. Nous donnons ensuite plusieurs propriétés caractéristiques des valuations bien spécifiées.

Dans la deuxième partie, nous étudions plus précisément l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Je remercie vivement le rapporteur pour toutes ses remarques et ses suggestions.

Received January 28, 2005
Revised June 14, 2005
2000 *Mathematics Subject Classification.* 12J20, 13A18, 14B05, 14E15, 14J17.
Key words and phrases. valuations, local uniformization, resolution of singularities.

§1. Valuation bien spécifiée

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν, de corps résiduel κ_ν et de groupe des valeurs Γ_ν. Nous choisissons un plongement de Γ_ν dans un groupe totalement ordonné $\bar{\Gamma}$ suffisamment grand et toutes les valeurs finies γ que nous considèrerons seront dans $\bar{\Gamma}$.

Nous appelons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x],\, \nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν. Dans la suite toutes les valuations de $K[x]$ appartiendront à $\mathcal{E}$.

Une famille *admissible* de valuations de $K[x]$ est une famille de la forme $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, obtenue comme réunion de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}^{(j)}$, pour j parcourant J, avec $J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$étant constituée d'une partie *discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie *continue* $\mathcal{C}^{(j)}$, la dernière famille continue $\mathcal{C}^{(N)}$ pouvant être éventuellement vide.

Les valuations μ_i de la famille $\mathcal{A}$ apparaissant dans les parties discrètes $\mathcal{D}^{(j)}$, sauf la première de chaque partie, ainsi que celles apparaissant dans les parties continues $\mathcal{C}^{(j)}$ sont définies comme *valuations augmentées*, et les valuations apparaissant comme première valuations d'une partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ sont définies comme *valuations augmentées limites.* Dans le premier cas nous avons

$$\mu_i = [\mu_{i-1}; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i],$$

et ϕ_i est un *polynôme-clé* définissant la valuation μ_i à partir de la valuation μ_{i-1}, et dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_i = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i\right],$$

et ϕ_i est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation μ_i à partir de la famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$.

Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *close* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{\iota}$, dans ce cas la valuation μ est la valuation $\mu_{\bar{\iota}}$. Sinon, nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *ouverte* et dans ce cas la valuation μ n'appartient pas à la famille $\mathcal{A}$. Dans [Va 2] nous appelions famille admissible *complète* une famille close.

A toute valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer une famille admissible $\mathcal{A}$ que nous notons $\mathcal{A}(\mu)$, cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près, le fait que la famille $\mathcal{A}(\mu)$ soit close ou ouverte ne dépend que de la valuation μ donnée.

Nous renvoyons le lecteur aux articles [Va 1] et [Va 2] de l'auteur pour des définitions précises et pour les propriétés de ces valuations, de ces polynômes et de ces familles.

Définition. Si la famille $\mathcal{A}$ associée à la valuation μ est close, nous disons que μ est *bien spécifiée.* Le polynôme-clé ou polynôme-clé limite $\phi = \phi_{\bar{\iota}}$ définissant μ comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite est appelé le polynôme *définissant* μ.

Remarque 1.1. Les valuations bien spécifiées sont les valuations μ de $K(x)$ dont le corps résiduel κ_μ est une extension transcendante de κ_ν ou dont le groupe des valeurs Γ_μ est tel que le groupe quotient Γ_μ/Γ_ν contient des éléments sans torsion. Nous en déduisons que les valuations bien spécifiées μ sont les valuations telles que l'extension $(K(x),\, \mu)/(K,\, \nu)$ de corps valués vérifie l'égalité d'Abhyankar:

$$\text{dim.alg.}_K K(x) = \text{dim.alg.}_{\kappa_\nu} \kappa_\mu + \text{rang.rat.}\Gamma_\mu/\Gamma_\nu = 1.$$

Soit μ une valuation bien spécifiée et soit ϕ le polynôme qui la définit, nous pouvons alors écrire soit $\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma]$ si μ est une valuation augmentée pour la valuation μ_0, soit $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu(\phi) = \gamma\right]$ si μ est une valuation augmentée limite pour la famille continue $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$. Dans le dernier cas, pour tout polynôme f tel que la famille de valeurs $\left(\mu_\alpha(f)\right)_{\alpha\in A}$ devient stationnaire, nous notons $\mu_0(f) = \mu_A(f)$ la valeur limite de cette famille. Alors pour tout polynôme f de $K[x]$, si nous notons $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ le développement de f selon les puissances de ϕ, nous avons par définition:

$$\mu(f) = \operatorname{Inf}\left(\mu_0(f_j) + j\gamma,\ 0 \leq j \leq m\right),$$

et de plus nous avons pour tout j, $\mu(f_j) = \mu_0(f_j)$.

Nous avons alors la proposition suivante qui généralise les résultats de MacLane ([McL 1] Lemma 9.2 et [McL 2] Lemma 4.3).

Proposition 1.1. *Si μ est une valuation bien spécifiée, le polynôme ϕ définissant μ est un polynôme-clé pour la valuation μ.*

Preuve. Soit $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ le développement de f selon les puissances de ϕ, alors nous avons:

$$\mu(f_0) \geq \mu(f) \quad \text{et} \quad \mu(f_0) > \mu(f) \iff \phi \underset{\mu}{|} f.$$

Nous en déduisons immédiatement que tout polynôme f μ-divisible par ϕ est de degré supérieur ou égal au degré de ϕ, c'est-à-dire que ϕ est μ-minimal.

Soient f et g deux polynômes qui ne sont pas μ-divisibles par ϕ, alors nous avons d'après ce qui précède $\mu(f_0) = \mu(f)$ et $\mu(g_0) = \mu(g)$, où nous notons f_0 et g_0 les restes de la division euclidienne respectivement de f et g par ϕ. Nous avons alors $f_0 g_0 = h'\phi + h_0$, avec h' et h_0 de degré strictement inférieur au degré de ϕ et h_0 est le reste de la division de $h = fg$ par ϕ. Nous avons donc l'inégalité $\mu(h_0) \geq \mu(f_0 g_0)$ et si nous montrons que nous avons $\mu(f_0 g_0) = \mu(h_0)$, alors nous pourrons en déduire l'égalité $\mu(h) = \mu(h_0)$, donc que $h = fg$ n'est pas μ-divisible par ϕ, cela nous donnera la μ-irréductibilité de ϕ.

Dans le cas où μ est une valuation augmentée, comme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_0, le produit $f_0 g_0$ n'est pas μ_0-divisible par ϕ par conséquent nous avons bien $\mu(f_0 g_0) = \mu_0(f_0 g_0) = \mu_0(h_0) = \mu(h_0)$.

Dans le cas où μ est une valuation augmentée limite, il existe α dans A tel que pour tout β dans A vérifiant $\beta \geq \alpha$ nous avons les égalités $\mu_\beta = \mu_0 = \mu$ pour f_0, g_0 et h_0. Si nous avions l'inégalité stricte $\mu(h_0) > \mu(f_0 g_0)$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$ nous aurions $\mu_\beta(f_0 g_0) = \mu_\beta(h'\phi)$, ce qui est impossible car la famille $\big(\mu_\beta(\phi)\big)$ est strictement croissante.

La proposition 1.1 énonce une propriété commune aux valuations augmentées et aux valuations augmentées limites. Nous allons étendre ce résultat et montrer que les valuations augmentées limites et les polynômes-clés limites ont d'autres propriétés équivalentes à celles des valuations augmentées et des polynômes-clés, telles qu'elles ont été données par MacLane ([McL 1] et [McL 2]).

Soit $\mathcal{S}$ une famille admissible simple de valuations de $K[x]$, constituée de la partie discrète finie $\mathcal{D} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$, et de la partie continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$. Les valuations μ_α sont des valuations augmentées de la forme $\mu_\alpha = [\mu_0; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où les polynômes-clés ϕ_α sont tous de même degré, $\deg \phi_\alpha = d_A$, et où la famille de valeurs $\big(\gamma_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ est strictement croissante, de plus ces valuations ont même groupe des ordres $\Gamma_{\mathbf{A}}$.

Nous supposons que l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ des polynômes f vérifiant $\mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)$ pour tout $\alpha < \beta$ dans A est non vide. Rappelons que si un polynôme f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(A)$, c'est-à-dire s'il existe un couple $\alpha < \beta$ dans A tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, alors pour tout $\alpha' \geq \alpha$ nous avons l'égalité $\mu_{\alpha'}(f) = \mu_\alpha(f)$, et nous notons $\mu_A(f)$ cette valeur. Nous appelons m_A le degré minimal d'un polynôme de $\tilde{\Phi}(A)$ et nous définissons l'ensemble $\Phi(A)$ par:

$$\Phi(A) = \left\{ \phi \in K[x] \;\middle|\; \begin{array}{r} \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi) \ \forall \alpha < \beta \in A, \\ \phi \text{ unitaire}, \ \deg \phi = m_A \end{array} \right\}.$$

Alors tout polynôme ϕ de $\Phi(A)$ est un polynôme-clé limite pour la famille $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ (cf. [Va 1] Proposition 1.21), et pour tout γ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, nous pouvons définir la valuation, ou la pseudo-valuation dans le cas $\gamma = +\infty$, augmentée limite μ

associée à ϕ et à γ, que nous notons:

$$\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu(\phi) = \gamma\right].$$

Dans la suite nous supposons que nous avons choisi un polynôme-clé limite ϕ pour la famille $\mathcal{C}$ et que nous avons défini une valuation augmentée limite μ associée à ϕ et à une valeur γ.

Lemme 1.2. *Pour tout polynôme f n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(A)$, par exemple pour f vérifiant $\deg f < \deg \phi$, il existe un polynôme g, avec $\deg g < \deg \phi$, tel que fg soit μ-équivalent à 1.*

Preuve. Si le polynôme f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(A)$, f est premier à ϕ et nous pouvons trouver des polynômes h et g, avec $\deg g < \deg \phi$, tels que $fg + h\phi = 1$, et nous supposons $f \notin K$, d'où $h \neq 0$. Pour α suffisamment grand nous avons alors

$$\mu(h\phi) > \mu_\alpha(h\phi) \geq \mathrm{Inf}\big(\mu_\alpha(fg),\, \mu_\alpha(1)\big) = \mathrm{Inf}\big(\mu(fg),\, \mu(1)\big)$$

d'où fg μ-équivalent à 1.

Proposition 1.3. *Soit ϕ' un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\deg \phi' \geq \deg \phi$ et non μ-équivalent à ϕ, et soit $\phi' = f_m\phi^m + \cdots + f_0$ son développement selon les puissances de ϕ. Alors ϕ' est un polynôme-clé pour la valuation μ si et seulement si*
- ϕ' est μ-irréductible,
- $f_m = 1$, c'est-à-dire $\phi' = \phi^m + \cdots + f_0$, et $\mu(\phi') = m\gamma = \mu_A(f_0)$.

Preuve. La démonstration est identique à celle dans le cas où μ est une valuation augmentée associée à un polynôme-clé ϕ (cf. [McL 1] Theorem 9.4, [Va 1] Théorème 1.11).

Remarque 1.2. Soit μ une valuation bien spécifiée définie par le polynôme ϕ, et nous reprenons la notation μ_0 définie plus haut, alors pour tout f dans $K[x]$ nous avons les implications (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) avec:
(i) $\mu(f) = \mu_0(f)$,
(ii) il existe f_0 avec $\deg f_0 < \deg \phi$ μ-équivalent à f,
(iii) f est μ-unitaire, c'est-à-dire il existe f' dans $K[x]$ tel que ff' soit μ-équivalent à 1, et nous pouvons choisir f' avec $\deg f' < \deg \phi$.

Nous avons sur l'ensemble $\mathcal{E}$ des valuations ou pseudo-valuations de $K[x]$ prolongeant ν la relation d'ordre partiel $\leq$ définie de la manière suivante:

$$\mu \leq \mu' \quad \text{si et seulement si} \quad \mu(f) \leq \mu'(f) \quad \text{pour tout } f \text{ dans } K[x].$$

La Proposition 1.1 montre que toute valuation bien spécifiée admet un polynôme-clé, nous avons en fait le résultat plus précis suivant qui répond en particulier à la question de savoir à quelle condition une valuation μ de $K[x]$ possède un polynôme-clé.

Proposition 1.4. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*
1) *La valuation μ est bien spécifiée.*
2) *La valuation μ n'est pas maximale pour la relation d'ordre $\leq$.*
3) *La valuation μ admet un polynôme-clé.*
4) *La valuation μ peut être obtenue comme valuation augmentée*

$$\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma],$$

ou comme valuation augmentée limite

$$\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma\right].$$

Nous allons d'abord rappeler le lemme suivant (cf. [Va 2] Lemme 2.8).

Lemme 1.5. *Soient μ_0, μ et μ' trois valuations de $K[x]$ vérifiant $\mu_0 < \mu \leq \mu'$. Nous appelons $\tilde{\Phi}$, respectivement $\tilde{\Phi}'$, l'ensemble des polynômes f de $K[x]$ vérifiant $\mu_0(f) < \mu(f)$, respectivement $\mu_0(f) < \mu'(f)$. Alors les ensembles $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\Phi}'$ sont égaux.*

Preuve de la proposition. Par définition nous avons 1) implique 4), et nous avons montré à la Proposition 1.1 que 4) implique 3).

Les propriétés 2) et 3) sont équivalentes, en effet si la valuation μ admet un polynôme-clé ϕ alors pour toute valeur γ' strictement plus grande que $\mu(\phi)$ nous pouvons définir la valuation augmenté $\mu' = [\mu; \mu'(\phi) = \gamma']$ qui vérifie $\mu \leq \mu'$ et $\mu \neq \mu'$. Réciproquement si μ' est une valuation avec $\mu \leq \mu'$ et $\mu \neq \mu'$, nous pouvons en déduire l'existence d'un polynôme-clé ϕ pour μ, il suffit de choisir un polynôme unitaire de degré minimal vérifiant $\mu'(\phi) > \mu(\phi)$.

Montrons que 2) implique 1). Soit μ une valuation qui n'est pas bien spécifiée et nous supposons qu'il existe une valuation μ' vérifiant $\mu \leq \mu'$. La famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée à μ est alors une famille de la forme $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i \in I}$ où l'ensemble I n'a pas de plus grand élément, et pour tout i dans I nous avons $\mu_i \leq \mu \leq \mu'$. Pour tout polynôme f de $K[x]$ il existe i_0 dans I tel que pour tout $i \geq i_0$ nous ayons $\mu_{i_0}(f) = \mu_i(f) = \mu(f)$, par conséquent si nous appelons comme précédemment $\tilde{\Phi}(\mu_i)$, respectivment $\tilde{\Phi}'(\mu_i)$, l'ensemble des polynômes f vérifiant $\mu_i(f) < \mu(f)$, respectivement $\mu_i(f) < \mu'(f)$, l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \tilde{\Phi}(\mu_i)$ est vide. Nous déduisons alors du lemme que l'ensemble $\bigcap_{i \in I} \tilde{\Phi}'(\mu_i)$ est vide lui aussi, par conséquent la valuation μ' est forcément égale à la valuation μ.

Définition. Soient μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ et ϕ le polynôme qui la définit. Un polynôme-clé ϕ' pour la valuation μ est dit *admissible* s'il vérifie $\deg\phi' \geq \deg\phi$ et s'il n'est pas μ-équivalent à ϕ.

Soit $\mathcal{A}$ une famille admissible de valuations de $K[x]$, nous considérons deux valuations μ et μ' appartenant à la même sous-famille admissible simple $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ telle que μ' est obtenue comme valuation augmentée $\mu' = [\mu; \mu'(\phi') = \gamma']$. Cela correspond au cas $\mu = \mu_i$ et $\mu' = \mu_{i+1}$ deux valuations successives appartenant à la partie discrète $\mathcal{D}$, au cas $\mu = \mu_n$ dernière valuation de la partie discrète $\mathcal{D}$ et $\mu' = \mu_\alpha$ une valuation quelconque de la partie continue $\mathcal{C}$, ou au cas de deux valuations $\mu = \mu_\alpha$ et $\mu' = \mu_\beta$ de la partie continue $\mathcal{C}$ avec $\alpha < \beta$. En particulier le polynôme-clé ϕ' est un polynôme-clé admissible pour la valuation μ.

Définition. Nous appelons un couple de valuations $(\mu,\ \mu')$ vérifiant la propriété précédente *un couple de valuations successives* de la famille admissible $\mathcal{A}$.

Soit μ une valuation bien spécifiée définie par le polynôme ϕ et la valeur γ, nous reprenons la notation μ_0 précédente et nous appelons Γ_0 soit le groupe des valeurs Γ_{μ_0} de la valuation μ_0 si μ est une valuation augmentée, soit le groupe des valeurs $\Gamma_{\mathbf{A}}$ commun aux valuations de la famille continue $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ si μ est une valuation augmentée limite.

Proposition 1.6. *Pour tout δ dans Γ_0 il existe p appartenant à $K[x]$ avec $\deg p < \deg\phi$ tel que $\mu(p) = \mu_0(p) = \delta$.*

Preuve. Appelons (p_0) la propriété

$$\forall\delta \in \Gamma_0 \exists p \in K[x] \text{ avec } \deg p < \deg\phi \text{ tel que } \mu(p) = \delta.$$

La propriété (p_0) est évidemment vérifiée par toute valuation μ définie par $\mu(f) = \mathrm{Inf}(\nu(a_j) + j\gamma; 0 \leq j \leq d)$ pour $f = a_d x^d + \cdots + a_0$, c'est-à-dire pour la première valuation de toute famille admissible. Comme toute valuation est obtenue à partir d'une famille admissible, il suffit alors de montrer les deux résultats suivants.

- Si une valuation bien spécifiée μ vérifie (p_0) alors toute valuation augmentée $\mu' = [\mu; \mu'(\phi') = \gamma']$ avec ϕ' polynôme-clé admissible pour μ, vérifie encore la propriété (p_0), c'est-à-dire:

$$\forall\delta' \in \Gamma_\mu = \Gamma_0 + \gamma\mathbb{Z}\ \exists p' \in K[x] \text{ avec } \deg p' < \deg\phi' \text{ tel que } \mu(p') = \delta'.$$

En effet si la valuation μ possède un polynôme-clé admissible ϕ', alors d'après le théorème de MacLane ([McL 1] Theorem 9.4) et la Proposition 1.3 la valeur γ vérifie $m\gamma \in \Gamma_0$ avec $m = \deg\phi'/\deg\phi$. Par conséquent pour tout δ' dans Γ_μ il existe $\delta \in \Gamma_0$ et t avec $0 \leq t < m$ tel que

$\delta' = \delta + t\gamma$, et le résultat est une conséquence de la propriété (p_0) pour la valuation μ.

- Si $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations qui vérifient (p_0) alors toute valuation augmentée limite $\mu' = \left[(\mu_\alpha); \mu'(\phi') = \gamma'\right]$ avec ϕ' polynôme-clé limite pour μ, vérifie encore la propriété (p_0), c'est-à-dire:

$$\forall \delta' \in \Gamma_{\mathbf{A}}\ \exists p' \in K[x] \text{ avec } \deg p' < \deg \phi' \text{ tel que } \mu(p') = \delta'.$$

Il suffit de considérer $\alpha < \beta$ dans A, alors la valuation μ_β est une valuation augmentée $\mu_\beta = [\mu_\alpha; \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$ qui vérifie la propriété (p_0). Le résultat est alors une conséquence de l'égalité $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\mathbf{A}}$ et de $\deg \phi_\beta < \deg \phi'$.

Corollaire. *Soit $\mathcal{A}$ une famille admissible de valuations de $K[x]$, alors pour tout couple (μ, μ') de valuations successives de $\mathcal{A}$, avec $\mu' = [\mu; \mu'(\phi') = \gamma']$, il existe q et q' dans $K[x]$ vérifiant qq' μ-équivalent à 1 et $\mu(q) = -\mu(q') = \mu(\phi')$.*

De plus si μ' n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$, γ' appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si nous appelons τ le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma' \in \Gamma_\mu$, alors il existe p et $p' = p'(\tau\gamma')$ dans $K[x]$ vérifiant pp' μ'-équivalent à 1 et $\mu'(p) = \mu(p) = -\mu'(p') = -\mu(p') = \tau\gamma'$.

Preuve. Si ϕ' est un polynôme-clé admissible pour la valuation μ la valeur $\mu(\phi')$ appartient au groupe Γ_0, par conséquent le résultat est une conséquence de la proposition précédente et de la Remarque 1.2.

De même, si μ' n'est pas la dernière valuation de la famille, elle admet un polynôme-clé admissible ϕ'' et nous pouvons appliquer le théorème de MacLane ([McL 1] Theorem 9.4) ou la Proposition 1.3, et comme la valeur $\tau\gamma'$ est dans Γ_μ nous avons encore l'existence des polynômes p et p'.

§2. Algèbre graduée

Pour toute valuation μ de $K[x]$ et pour tout γ dans $\bar{\Gamma}$, nous définissons les groupes $\mathcal{P}_\gamma = \{f \in K[x] \mid \mu(f) \geq \gamma\}$ et $\mathcal{P}_\gamma^+ = \{f \in K[x] \mid \mu(f) > \gamma\}$. Par définition l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ associée à la valuation μ est égale à:

$$\mathrm{gr}_\mu(K[x]) = \bigoplus_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \mathcal{P}_\gamma / \mathcal{P}_\gamma^+.$$

Nous notons H_μ l'application de $K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ qui à tout polynôme f avec $\mu(f) = \gamma$ associe l'image de f dans $\mathcal{P}_\gamma / \mathcal{P}_\gamma^+$, et nous notons Δ_μ la composante $\left(\mathrm{gr}_\mu K[x]\right)_0$ de degré 0.

Rappelons que si μ' est une valuation augmentée $\mu' = [\mu; \mu'(\phi) = \gamma]$ ou une valuation augmentée limite $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}; \mu'(\phi) = \gamma\right]$, nous pouvons déterminer l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ associée à la valuation μ' à partir de celle associée à la valuation μ, ou à celles associées aux valuations μ_α ([Va 1] Théorème 1.7 et Théorème 1.26).

Plus précisément si μ' est une valuation augmentée pour μ définie par le polynôme-clé ϕ, $\mu' = [\mu; \mu'(\phi) = \gamma]$, l'application naturelle g de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées

$$G\colon \left(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\right)[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'} K[x],$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu'}(\phi)$, où $\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))$ est muni de la structure d'algèbre graduée induite par celle de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ et où T est muni du poids γ.

D'après le corollaire à la Proposition 1.6 il existe un polynôme μ-unitaire q' tel que $\mu(q'\phi) = 0$ et le noyau de la composante de degré 0 $g_0\colon \Delta_\mu \to \Delta_{\mu'}$ est l'idéal engendré par $\varphi = H_\mu(q'\phi)$. Nous avons alors:

si γ n'appartient pas à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu'} \simeq \left(\Delta_\mu/(\varphi)\right),$$

si γ appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, en utilisant la deuxième partie du corollaire à la Proposition 1.6,

$$\Delta_{\mu'} \simeq \left(\Delta_\mu/(\varphi)\right)[S],$$

avec $S = H_{\mu'}\left(p'(\tau\gamma)\phi^\tau\right)$ (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Nous avons un résultat similaire pour une valuation augmentée limite $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}; \mu'(\phi) = \gamma\right]$. Soit $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha \in A}$ une famille continue de valuations, et nous pouvons toujours supposer que A admet un plus petit élément θ, ce qui permet d'écrire toute valuation μ_α de $\mathcal{C}$ comme valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_\theta; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où tous les polynômes-clés ϕ_α sont de même degré d.

Nous remarquons que pour tout α dans A, l'image $H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$ du polynôme-clé ϕ_β dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ ne dépend pas de $\beta > \alpha$. De plus grâce au corollaire à la Proposition 1.6, nous pouvons trouver $p'(\gamma_\alpha)$ dans $K[x]$ dont l'image dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ est inversible et de poids $-\gamma_\alpha = -\mu_\alpha(\phi_\beta)$. Nous notons $\varphi_{\alpha+}$ l'image de $p'(\gamma_\alpha)\phi_\beta$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$, c'est un élément de degré 0 qui engendre le même idéal que $H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$.

Si nous posons:

$$\mathbf{gr_A} = \mathrm{gr}_{\mu_\theta} K[x]/(\varphi_{\theta+}),$$

alors pour tout $\alpha > \theta$, l'algèbre $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $\mathbf{gr_A}[T_\alpha]$ avec $T_\alpha = H_{\mu_\alpha}(\phi_\alpha)$.

Alors pour tout $\alpha > \theta$ l'algèbre quotient $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha^+})$ est aussi isomorphe à $\mathbf{gr_A}$ et pour tout $\beta > \alpha$, le morphisme d'algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_\beta} K[x]$ se factorise par:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x] \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha^+}) \arrow[r, hook, "V_\beta"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & \mathrm{gr}_{\mu_\beta} K[x] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] \\
\mathbf{gr_A}[T_\alpha] \arrow[r, two heads, "u_\alpha"] & \mathbf{gr_A} \arrow[r, hook, "v_\beta"] & \mathbf{gr_A}[T_\beta]
\end{tikzcd}$$

où v_β est le morphisme naturel mais où u_α n'est pas un morphisme de $\mathbf{gr_A}$-algèbres, en particulier son noyau n'est pas (T_α). Mais nous pouvons remarquer que le morphisme composé $U_\beta \circ V_\beta$ de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha^+}) \simeq \mathbf{gr_A}$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_\beta} K[x]/(\varphi_{\beta^+}) \simeq \mathbf{gr_A}$ est un isomorphisme.

Nous appelons $\Delta_\mathbf{A}$ la partie homogène de degré 0 de $\mathbf{gr_A}$, alors comme φ_{θ^+} est de degré nul, nous avons:

$$\Delta_\mathbf{A} \simeq \Delta_\theta/(\varphi_{\theta^+}),$$

où nous notons comme précédemment Δ_θ la partie homogène de degré 0 de $\mathrm{gr}_{\mu_\theta} K[x]$.

En prenant les parties homogènes de degré 0 des algèbres du diagramme précédent nous trouvons le nouveau diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{\mu_\alpha} \arrow[r, two heads, "(U_\alpha)_0"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & \Delta_{\mu_\alpha}/(\varphi_{\alpha^+}) \arrow[r, hook, "(V_\beta)_0"] \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] & \Delta_{\mu_\beta} \arrow[d, leftrightarrow, "\simeq"] \\
\Delta_\mathbf{A}[S_\alpha] \arrow[r, two heads, "(u_\alpha)_0"] & \Delta_\mathbf{A} \arrow[r, hook, "(v_\beta)_0"] & \Delta_\mathbf{A}[S_\beta]
\end{tikzcd}$$

où $S_\alpha = H_{\mu_\alpha}\big(p'(\gamma_\alpha)\phi_\alpha\big)$, et nous avons encore le morphisme composé $(U_\beta)_0 \circ (V_\beta)_0$ qui induit un isomorphisme de $\Delta_\mathbf{A}$ dans lui-même.

Si l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est vide, c'est-à-dire si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$ pour tout $\beta \geq \alpha$, nous définissons une valuation limite μ_A de $K[x]$ par $\mu_A(f) = \mathrm{Sup}_{\alpha \in A}\big(\mu_\alpha(f)\big)$. Dans ce cas la famille $\mathcal{C}$ n'admet pas de valuation augmentée limite et la valuation μ_A n'est pas une valuation bien spécifiée.

Proposition 2.1. *Si $\tilde{\Phi}(A)$ est vide et si μ_A est la valuation limite de la famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$, alors pour tout α dans A le morphisme naturel de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_A} K[x]$ induit un isomorphisme* *d'algèbres graduées:*

$$Q\colon \mathbf{gr_A} \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mu_A} K[x].$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme entre les parties homogènes de degré 0:

$$Q_0\colon \Delta_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_A}.$$

Preuve. Cf. [Va 1] Corollaire à la Proposition 1.25.

Si l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ n'est pas vide, pour ϕ appartenant à $\Phi(A)$ et pour γ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, nous définissons une valuation augmentée limite $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu'(\phi) = \gamma\right]$.

Proposition 2.2. *Soit $\mu' = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu'(\phi) = \gamma\right]$ une valuation augmentée limite pour la famille continue $\mathcal{C} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, alors pour tout α dans A le morphisme naturel de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées:*

$$Q\colon \mathbf{gr_A}[T] \xrightarrow{\sim} \mathrm{gr}_{\mu'} K[x],$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu'}(\phi)$.

De plus nous avons:

- si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ce morphisme induit un isomorphisme en degré 0:

$$Q_0\colon \Delta_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu'}.$$

- si γ appartient à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, ce morphisme induit un isomorphisme en degré 0:

$$Q_0\colon \Delta_{\mathbf{A}}[S] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu'}.$$

qui envoie S sur $H_{\mu'}(p'\phi^\tau)$, où nous appelons τ le plus petit entier positif t tel que $t\gamma$ appartienne à $\Gamma_{\mathbf{A}}$ et où p' est un polynôme μ_α-unitaire pour α suffisamment grand tel que $\mu_\alpha(p') = -\tau\gamma$.

Preuve. L'existence de l'isomorphisme Q d'algèbres graduées entre $\mathbf{gr_A}[T]$ et $\mathrm{gr}_{\mu_A} K[x]$ est démontrée dans [Va 1] Théorème 1.26.

Grâce au corollaire à la Proposition 1.6, la démonstration des résultats qui s'en déduisent pour les parties homogènes de degré 0 est identique au cas d'une valuation augmentée (cf. [Va 1] Corollaire au Théorème 1.7).

Proposition 2.3. *Soit μ une valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$, alors l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est de la forme suivante:*

i) *si la valuation μ n'est pas bien spécifiée*

$$\mathrm{gr}_\mu K[x] = \overline{G_0},$$

où $\overline{G_0}$ est une algèbre graduée simple, c'est-à-dire telle que tout élément homogène non nul admette un inverse;

ii) *si la valuation μ est bien spécifiée*

$$\mathrm{gr}_\mu K[x] = \overline{G_0}[T],$$

où $\overline{G_0}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ définissant la valuation μ.

De plus un élément homogène ψ de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est irréductible si et seulement si il existe f polynôme-clé pour la valuation μ dans $K[x]$ et ε élément homogène inversible de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ tels que $\varepsilon\psi$ soit égal à l'image $H_\mu(f)$ de f dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Preuve. Considérons d'abord le cas d'une valuation augmentée $\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma]$, alors l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est isomorphe à $\overline{G_0}[T]$ avec $\overline{G_0} = \mathrm{gr}_{\mu_0} K[x]/\big(H_{\mu_0}(\phi)\big)$. Nous pouvons identifier $\overline{G_0}$ à la sous-algèbre graduée engendrée par les éléments homogènes ψ de la forme $H_\mu(f)$ avec f tels qu'il existe g dans $K[x]$ μ-équivalent à f vérifiant $\mu_0(g) = \mu(g)$. Il existe alors g' dans $K[x]$ vérifiant $\mu_0(g') = \mu(g')$ tel que gg' soit μ-équivalent à 1 ([Va 1] Lemme 1.4), par conséquent $\psi' = H_\mu(g')$ est un inverse de ψ dans $\overline{G_0}$.

Supposons maintenant que nous avons une famille continue de valuations $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, et nous notons comme précédemment $\mathbf{gr_A}$ l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\theta} K[x]/(\varphi_{\theta^+})$. Nous déduisons de ce qui précède que $\mathbf{gr_A}$ est aussi une algèbre graduée simple, et la première partie de la proposition est une conséquence des Propositions 2.1 et 2.2.

Si f est un polynôme-clé pour une valuation μ alors par définition il est μ-irréductible, c'est-à-dire que son image $H_\mu(f)$ est un élément irréductible de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.

Réciproquement soit ψ un élément homogène irréductible de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$. Nous déduisons de la première partie de la proposition que la valuation μ est bien spécifiée, c'est-à-dire μ est soit une valuation augmentée $\mu = [\mu_0; \mu(\phi) = \gamma]$, soit une valuation augmentée limite $\mu = \left[\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}; \mu(\phi) = \gamma\right]$. Nous choisissons f dans $K[x]$ tel que $H_\mu(f) = \psi$, et nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ, $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$. Quitte à remplacer f par un polynôme μ-équivalent nous pouvons supposer que nous avons $\mu(f) = \mu_0(f_m) + m\gamma$, et quitte à multiplier f par un polynôme h avec $\deg h < \deg \phi$ nous pouvons supposer que f est μ-équivalent à un polynôme de la forme $\phi^m + \ldots + f_0$ avec $\mu(f) = m\gamma$. Comme ψ est μ-irréductible nous avons aussi $\mu(f_0) = m\gamma$, par conséquent nous déduisons de [McL 1] Theorem 9.4 ou de [Va 1] Théorème 1.11 dans le cas d'une valuation augmentée, et de la Proposition 1.3 dans le cas d'une valuation augmentée limite, que f est un polynôme-clé pour μ.

Nous disons qu'un polynôme e de $K[x]$ est μ-unitaire s'il existe un polynôme e' dans $K[x]$ tel que ee' soit μ-équivalent à 1, c'est-à-dire si son image $H_\mu(e)$ dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est inversible. Nous déduisons alors de la proposition précédente la généralisation suivante du résultat de MacLane ([McL 2] Theorem 4.2).

Corollaire. *Soit μ une valuation de $K[x]$, alors pour tout polynôme f il existe un polynôme μ-unitaire e et des polynômes-clés pour la valuation μ $\phi_1, \ldots, \phi_t$, $t \geq 0$, tels que nous ayons:*

$$f \underset{\mu}{\sim} e\phi_1 \cdots \phi_t.$$

De plus cette décomposition est unique à μ-équivalence près.

Références

[McL 1] S. MacLane, A construction for absolute values in polynomial rings, Trans. Amer. Math. Soc., **40** (1936), 363–395.

[McL 2] S. MacLane, A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field, Duke Math. J., **2** (1936), 492–510.

[Va 1] M. Vaquié, Extension d'une valuation, `www.math.jussieu.fr/~vaquie/prepubli/extension.ps`.

[Va 2] M. Vaquié, Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, dans Singularité franco-japonaise, Séminaires et Congrès **10**, Société Mathématique de France, 2005, 391–428.

[Va 3] M. Vaquié, Valuations, dans Resolution of Singularities, Progr. in Math., **181**, Birkhäuser, 2000, 539–590.

Laboratoire Émile Picard
UMR 5580 du CNRS
Université Paul Sabatier, UFR MIG
31062 Toulouse Cedex 9
France
vaquie@math.ups-tlse.fr