Advanced Studies in Pure Mathematics 14, 1988
Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986
pp. 499–517

Une Intégrale Invariante sur l'algèbre de Lie Symétrique Semi-Simple

Shigeru Sano

§ 0. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et soit $\mathfrak{h}$ la sous algèbre des points fixes d'un automorphisme involutif σ. On dit que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est une algèbre de Lie symétrique semi-simple. Harish-Chandra a étudié les algèbres de Lie semi-simples en utilisant la méthode orbitale. Nous généralisons cette méthode au cas des algèbres de Lie symétriques semi-simples.

On considére une involution de Cartan θ de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ, et un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$, θ-invariant de l'algèbre de Lie symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. On étude des racines de $\mathfrak{a}$ au § 2 et § 4. Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, toute racine réelle est singulière. Mais en général, il existe des racines réelles non-singulières qui s'appellent racines vectorielles (Définition 4.1). A une racine singulière, on associe une transformation de Cayley (Définition 4.2) et sa transformation inverse.

Soit $\Sigma(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$. Pour une racine $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ désigne l'espace radiciel associé. On pose $\mathfrak{n}_c = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. On recherche des critères de stabilité de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ par les automorphismes involutifs σ et θ au § 2. On définit ensuite une application linéaire bijective γ de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_c$ (Définition 2.4). Grâce à cette application linéaire, on détermine la mesure invariante sur l'espace tangent à l'espace symétrique (Proposition 6.2).

Nous introduisons la c-dualité entre deux triplets symétrique, qui géneralise la dualité entre le triplet $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}, \sigma)$ (où $\sigma(X+\sqrt{-1}\, Y) = X - \sqrt{-1}\, Y$ pour X et Y appartenant à $\mathfrak{g}$) et le triplet $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \tau)$ (où $\tau(X, Y) = (Y, X)$). De même un triplet symétrique riemannien de type non compact est en c-dualité avec un triplet symétrique riemannien de type compact. Soit G/H une espace symétrique correspondant à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ et $\bar{G}/H$ le c-dual de G/H respectivement. Cette c-dualité devrait permettre d'expliquer la relation que existe entre la série discrète (relative) de l'espace symétrique G/H et la série continue (relative) de l'espace symètri-

Received February 16, 1988.

que $\overline{G}/H$ (Remarques § 5). L'auteur a étudié l'espace symétrique G_c/G qui est le c-dual de $G\times G/G(\simeq G)$. (cf. [22], [23]).

J'ai étudié ce sujet à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg. Je remercie vivement J. Faraut, N. Bopp et les membres de Séminare Nancy-Strasbourg de la discussion avec moi et de l'hospitalité.

Contenu

1. Algèbre de Lie semi-simple symétrique et sous espace de Cartan
2. Racines réelles, imaginaires et complexes
3. Racines restreintes
4. Transformation de Cayley
5. c-dualité
6. Intégrale invariante sur l'espace tangent

§ 1. Algèbre de Lie semi-simple symétrique et sous espace de Cartan

Soit G un groupe de Lie connexe, σ un automorphisme involutif de G et H un sous-groupe fermé de G satisfaisant $(G_\sigma)_0\subset H\subset G_\sigma$ où $G_\sigma=\{x\in G\colon \sigma(x)=x\}$ et $(G_\sigma)_0$ est la composante connexe de l'identité dans G_σ. Alors G/H est appelé une espace symétrique.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, σ un automorphisme involutif de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ en sous-espaces propres de σ, c'est-à-dire

$$\mathfrak{h}=\{X\in\mathfrak{g}\colon \sigma X=X\},\qquad \mathfrak{q}=\{X\in\mathfrak{g}\colon \sigma X=-X\}.$$

Alors le triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est appelé algèbre de Lie symétrique. A chaque espace symétrique G/H correspond un triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ où $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ sont les algèbres de Lie de G et de H respectivement, et σ l'automorphisme de $\mathfrak{g}$ déterminé par l'automorphisme σ de G. Pour simplifier, nous écrirons souvent $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ au lieu de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. On suppose $\mathfrak{g}$ semi-smple dès maintenant.

Définition 1.1. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ une algèbre de Lie symétrique. Un sous-espace $\mathfrak{a}$ est appelé un *sous-espace de Cartan* si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ et si pour chaque $X\in\mathfrak{a}$, $\mathrm{ad}(X)$ est un endomorphisme semi-simple de $\mathfrak{g}$.

Pour un élément X de $\mathfrak{q}$, on considère le polynôme caractéristique

$$\det(t-\mathrm{ad}(X))=\sum_{i=l}^{\dim\mathfrak{g}} d_i(X)t^i$$

de l'endomorphisme ad X de $\mathfrak{g}$, où l est le plus petit entier tel que d_l n'est pas identiquement nul sur $\mathfrak{q}$:

Définition 1.2. Un élément X de $\mathfrak{q}$ est dit $\mathfrak{q}$-*générique* (resp. $\mathfrak{q}$-*singulier*) si $d_l(X)$ est non nul (resp. nul). On appelle $\mathfrak{q}'$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{q}$-génériques.

Si X est $\mathfrak{q}$-générique, il existe un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ et un élément Y de $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{q}'$ tel que X et Y soient conjugués par H (cf. [19]).

Soit θ une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant avec σ (il en existe toujours une (cf. [14])), et soit $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. Posons

$$\mathfrak{h}_+=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{h}_-=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p},$$
$$\mathfrak{q}_+=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}, \qquad \mathfrak{q}_-=\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_c$ désigne le complexifié de $\mathfrak{a}$. On considère en particulier la complexifiée $\mathfrak{g}_c$ de l'algèbre $\mathfrak{g}$ et on prolonge σ et θ à $\mathfrak{g}_c$ en des involutions $\boldsymbol{C}$-linéaires. On désignera par τ: $Z=X+\sqrt{-1}\,Y\mapsto\tau(Z)=X-\sqrt{-1}\,Y$ la conjugaison complexe de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$.

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan θ-invariante et σ-invariante de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace θ-invariant de $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}^*$ désigne l'espace dual et $\mathfrak{a}_c^*$ le complexifié de $\mathfrak{a}^*$. Alors, pour $\lambda\in\mathfrak{a}_c^*$, on pose:

$$\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\lambda)=\{X\in\mathfrak{g}_c\colon \mathrm{ad}(Y)X=\lambda(Y)X \text{ pour tout } Y\in\mathfrak{a}\},$$
$$m_\alpha=\dim_c\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\lambda), \qquad \mathfrak{g}(\mathfrak{a};\lambda)=\mathfrak{g}\cap\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\lambda),$$

et on note $\Sigma(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines de la paire $(\mathfrak{g}_c,\mathfrak{a}_c)$, c'est-à-dire

$$\Sigma(\mathfrak{a})=\{\lambda\in\mathfrak{a}_c^*\backslash\{0\}\colon \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\lambda)\neq\{0\}\}.$$

La forme de Killing $B(\ ,\ )$ de l'algèbre complexe $\mathfrak{g}_c$ permet d'identifier $\mathfrak{a}_c^*$ et $\mathfrak{a}_c$.

Dans les paragraphes 2 et 3, $\mathfrak{a}$ désignera un sous-espace de Cartan θ-invariant de $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On vérifie que pour $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ il existe un unique élément $H_\alpha\in\mathfrak{a}^d=\sqrt{-1}\,(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k})\oplus(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{p})$ tel que $B(H_\alpha,X)=\alpha(X)$ pour tout $X\in\mathfrak{a}$. On pose alors

$$\mathfrak{l}_c=\boldsymbol{C}H_\alpha+\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)+\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};-\alpha).$$

Remarquons que $\mathfrak{l}_c$ est stable par σ, mais n'est en général stable ni par θ, ni par la conjugaison complexe.

§ 2. Racines réelles, imaginaires et complexes.

Définition 2.1.

(i) Une racine α de $\Sigma(\mathfrak{a})$ est dite *racine réelle* si α prend des valeurs réelles sur $\mathfrak{a}$.

(ii) Une racine α de $\Sigma(\mathfrak{a})$ est dite *racine imaginaire* si α prend des valeurs imaginaires pures sur $\mathfrak{a}$.

(iii) Une racine α de $\Sigma(\mathfrak{a})$ est dite *racine complexe* si α n'est ni réelle, ni imaginaire.

On pose $\mathfrak{n}_c = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. Nous voulons déterminer une base de $\mathfrak{n}_c$ qui permette de définir un isomorphisme de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_c$. Si α appartient à $\Sigma(\mathfrak{a})$, on définit une forme linéaire α^θ (resp. α^σ) sur $\mathfrak{a}_c$ par $\alpha^\theta(X) = \alpha(\theta(X))$ (resp. $\alpha^\sigma(X) = \alpha(\sigma(X))$) pour $X \in \mathfrak{a}_c$ et α^τ par $\alpha^\tau(X) = \overline{\alpha(\tau(X))}$. Il est clair que α^θ, α^σ et α^τ appartiennent à $\Sigma(\mathfrak{a})$. Remarquons que $\alpha^\tau = -\alpha^\theta$.

Lemme 2.1. *Soit α une racine réelle de $\Sigma(\mathfrak{a})$. Il existe une base $\{X_1, X_2, \cdots, X_{m_\alpha}\}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ telle que:*

(i) $X_j \in \mathfrak{g}$ *pour* $j = 1, 2, \cdots, m_\alpha$;

(ii) $\{\sigma(X_j)\}_{j=1,2,\cdots,m_\alpha}$ *est une base de* $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; -\alpha)$.

Démonstration. Comme α est réelle, on a $\alpha^\tau = \alpha$. On en déduit que $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ est stable par τ. Une base (sur $\boldsymbol{R}$) de $\mathfrak{g}(\mathfrak{a}; \alpha)$ sera une base (sur $\boldsymbol{C}$) de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. On déduit (ii) du fait que $\alpha^\sigma = -\alpha$ car $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$. Q.E.D.

Définition 2.2. On note $\bar{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}_c$ qui sont fixés par la conjugaison $\sigma\tau$. On a $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{h} \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{q}$.

Lemme 2.2. *Soit α une racine imaginaire de $\Sigma(\mathfrak{a})$. Il existe une base $\{X_1, X_2, \cdots, X_{m_\alpha}\}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ telle que:*

(i) $X_j \in \bar{\mathfrak{g}}$ *pour* $j = 1, 2, \cdots, m_\alpha$;

(ii) $\{\sigma(X_j)\}_{j=1,2,\cdots,m_\alpha}$ *est une base de* $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; -\alpha)$.

Démonstration. Comme α est imaginaire on a $\alpha^\tau = -\alpha$. On en déduit que $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ est stable par $\sigma\tau$, car $\alpha^\sigma = -\alpha$. La décomposition en sous-espaces propres de $\mathfrak{g}_c$ pour $\sigma\tau$ s'écrit:

$$\mathfrak{g}_c = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \sqrt{-1}\,\bar{\mathfrak{g}}.$$

On choisit une base (sur $\boldsymbol{R}$) de $\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}; \alpha)$. Ce sera une base (sur $\boldsymbol{C}$) de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ et elle vérifiera (ii). Q.E.D.

Définition 2.3. On note $\mathfrak{g}^d$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}_c$ qui sont fixés par la conjugaison $\sigma\theta\tau$. On a $\mathfrak{g}^d = (\mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{q}_-) \oplus \sqrt{-1}\,(\mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{q}_+)$.

Lemme 2.3. *Soit α une racine complexe de $\Sigma(\mathfrak{a})$. Il existe une base $\{X_1, X_2, \cdots, X_{m_\alpha}\}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ telle que:*

(i) $X_j \in \mathfrak{g}^d$ *pour* $j=1, 2, \cdots, m_\alpha$;

(ii) $\{\sigma(X_j)\}_{j=1,2,\cdots,m_\alpha}$ *est une base de* $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; -\alpha)$;

(iii) $\{\tau(X_j)\}_{j=1,2,\cdots,m_\alpha}$ *est une base de* $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha^\tau)$;

(iv) $\{\sigma\tau(X_j)\}_{j=1,2,\cdots,m_\alpha}$ *est une base de* $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; -\alpha^\tau)$.

Démonstration. Si α est une racine complexe on a $\alpha^\tau \neq \alpha$ et $\alpha^\tau \neq -\alpha$. Pour toute racine $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$, on a $\alpha^\sigma = -\alpha$ et aussi $\alpha^\theta = -\alpha^\tau$ car α admet des valeurs réelles sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p}$ et imaginaires sur $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}$. On en déduit que $\alpha^{\sigma\theta\tau} = \alpha$ et que $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ est stable par $\sigma\theta\tau$. La décomposition en espaces propres de $\mathfrak{g}_c$ pour $\sigma\theta\tau$ s'écrit:

$$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}^d \oplus \sqrt{-1}\, \mathfrak{g}^d.$$

On choisit donc une base sur $\boldsymbol{R}$ de $\mathfrak{g}^d(\mathfrak{a}; \alpha)$. Ce sera une base sur $\boldsymbol{C}$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ et elle vérifiera bien les propriétés (ii), (iii) et (iv). Q.E.D.

On choisit un ordre sur $\Sigma(\mathfrak{a})$ tel que si α est une racine positive complexe alors α^τ est aussi une racine positive. On appelle $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives. Et on pose $\mathfrak{n}_c^+ = \sum_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. On déduit aisément des lemmes ci-dessus la proposition suivante.

Proposition 2.4. *Il existe un ensemble $S = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ d'éléments de $\mathfrak{n}_c^+$ vérifiant les conditions ci-dessous.*

(i) *Pour tout $X \in S$, il existe une racine α de $\Sigma(\mathfrak{a})$ telle que $X \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. De plus:*

(a) *si α est réelle, X appartient à $\mathfrak{g}$;*

(b) *si α est imaginaire, X appartient à $\bar{\mathfrak{g}}$;*

(c) *si α est complexe, X appartient à $\mathfrak{g}^d$ et $\tau(X)$ appartient à S.*

(ii) $\{X_k + \sigma(X_k)\}_{k=1,2,\cdots,n}$ *est une base de* $\mathfrak{h}_c \cap \mathfrak{n}_c$.

(iii) $\{X_k - \sigma(X_k)\}_{k=1,2,\cdots,n}$ *est une base de* $\mathfrak{q}_c \cap \mathfrak{n}_c$.

Pour toute racine $\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})$ le nombre d'éléments $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ pour lesquels X_k appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ est égal à m_α.

Remarque. L'auteur avait d'abord démontré la proposition ci-dessus en étudiant la structure de $\Sigma(\mathfrak{a})$, mais celle-ci se démontre simplement en utilisant les propriétés de stabilité des espaces $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ par les automorphismes σ, θ et τ. L'auteur remercie N. Bopp pour les discussions qu'il a eu avec elle à ce sujet et les suggestions qu'elle lui a faites.

En utilisant la famille S de la proposition, on définit une application γ, $\boldsymbol{R}$-linéaire, de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_c$ par:

Définition 2.4. Soit X un élément de S et α la racine telle que $X \in \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$.

Si α est réelle, on pose $\gamma(X+\sigma(X))=X-\sigma(X)$.

Si α est imaginaire, on pose $\gamma(X+\sigma(X))=\sqrt{-1}\,[X-\sigma(X)]$.

Si α est complexe, on pose

$$\gamma(X+\sigma(X)+\tau(X+\sigma(X)))=X-\sigma(X)+\tau(X-\sigma(X))$$

et

$$\gamma(\sqrt{-1}\,[X+\sigma(X)-\tau(X+\sigma(X))])=\sqrt{-1}\,[X-\sigma(X)-\tau(X-\sigma(X))].$$

Il est clair que γ est un isomorphisme de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_c$.

§ 3. Racines restreintes

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan θ-invariante de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{a}$. On note $\Sigma(\mathfrak{j})$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$. Si α appartient à $\Sigma(\mathfrak{a})$ on a

$$\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)=\sum_{\substack{\lambda \in \Sigma(\mathfrak{j}) \\ \lambda|_{\mathfrak{a}}=\alpha}} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda).$$

Nous allons montrer comment on peut construire la famille S à partir d'éléments des espaces radiciels $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda)$, qui sont tous de dimension 1.

Lemme 3.1. *Soit α une racine réelle de $\Sigma(\mathfrak{a})$ et λ une racine de $\Sigma(\mathfrak{j})$ telle que $\lambda|_{\mathfrak{a}}=\alpha$. La restriction de λ^τ à $\mathfrak{a}$ est aussi égale à α.*

(i) *Si $\lambda=\lambda^\tau$, alors* $\dim \mathfrak{g}(\mathfrak{j}; \lambda)=1$.

(ii) *Si $\lambda \neq \lambda^\tau$, alors* $\dim \mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda^\tau))=2$.

Si X appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda)$ alors $\{X+\tau(X), \sqrt{-1}(X-\tau(X))\}$ est une base de $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda^\tau))$.

Démonstration. Si $\lambda=\lambda^\tau$ la racine λ est réelle et $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda)$ est stable par τ. Sinon l'espace $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda^\tau)$ est, lui, stable par τ, d'où le résultat. Q.E.D.

Lemme 3.2. *Soit α une racine imaginaire de $\Sigma(\mathfrak{a})$ et λ une racine de $\Sigma(\mathfrak{j})$ telle que $\lambda|_{\mathfrak{a}}=\alpha$. La restriction de $\lambda^{\sigma\tau}$ à $\mathfrak{a}$ est aussi égale à α.*

(i) *Si $\lambda=\lambda^{\sigma\tau}$ alors* $\dim \bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{j}; \lambda)=1$.

(ii) *Si $\lambda \neq \lambda^{\sigma\tau}$ alors* $\dim \bar{\mathfrak{g}} \cap (\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda^{\sigma\tau}))=2$.

Si X appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda)$ alors $\{X+\sigma\tau(X), \sqrt{-1}\,(X-\sigma\tau(X))\}$ est une base de $\bar{\mathfrak{g}} \cap \{\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda) \oplus \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; \lambda^{\sigma\tau})\}$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du lemme 3.1 car $\bar{\mathfrak{g}}$ est l'ensemble des points fixes de la conjugaison $\sigma\tau$. Q.E.D.

Lemme 3.3. *Soit α une racine complexe de $\Sigma(\mathfrak{a})$ et λ une racine de $\Sigma(\mathfrak{j})$ telle que $\lambda|_{\mathfrak{a}}=\alpha$. La restriction de $\lambda^{\sigma\theta\tau}=-\lambda^{\sigma}$ à $\mathfrak{a}$ est aussi égale à α.*

(i) *Si $\lambda=-\lambda^{\sigma}$, alors* $\dim \mathfrak{g}^{d}(\mathfrak{j}; -\lambda^{\sigma})=1$.

(ii) *Si $\lambda\neq-\lambda^{\sigma}$, alors* $\dim \mathfrak{g}^{d}\cap(\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\lambda)\oplus\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};-\lambda^{\sigma}))=2$.

Si X appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\lambda)$, $\{X+\sigma\theta\tau X, \sqrt{-1}(X-\sigma\theta\tau X)\}$ est une base de $\mathfrak{g}^{d}\cap\{\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\lambda)\oplus\mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};-\lambda^{\sigma})\}$.

Démonstration. Elle est analogue à celle des lemmes précédents car $\mathfrak{g}^{d}$ est l'ensemble des points fixes de la conjugaison $\sigma\theta\tau$. On remarque de plus que pour toute racine $\lambda\in\Sigma(\mathfrak{j})$, on a $\lambda^{\tau}=-\lambda^{\theta}$. Q.E.D.

Exemple. Considérons l'espace symétrique $(\mathfrak{su}(4,2), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2)\oplus\mathfrak{u}(2,2)))$. Nous allons construire explicitement, dans ce cas, une famille S qui vérifie les conditions de la proposition 2.4 en utilisant les lemmes 3.1, 3.2 et 3.3. On pose

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{su}(4,2)=\{X\in\mathfrak{sl}(6,C): J{}^t\bar{X}J=-X\} \text{ où } J=\begin{pmatrix}1_4 & 0\\ 0 & -1_2\end{pmatrix}.$$

Soit σ l'involution de $\mathfrak{g}$ définie par

$$\sigma: X=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}2 & 4\end{array}\\ \begin{pmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ ]2\\ ]4\end{array}\longmapsto\begin{pmatrix}X_1 & -X_2\\ -X_3 & X_4\end{pmatrix}.$$

Soit θ l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ définie par $\theta(X)=-{}^t\bar{X}$ pour $X\in\mathfrak{g}$. Les involutions σ et θ commutent et $\mathfrak{g}$ est la somme des sous-espaces propres:

$$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{k}=\left\{X=\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}2 & 2 & 2\end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c|c}X_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & X_2 & 0\\ \hline 0 & 0 & X_3\end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l}\\ ]2\\ ]2\\ ]2\end{array} : X_k\in\mathfrak{u}(2)\ (k=1,2,3),\ \mathrm{Tr}\,X=0\right\},$$

$$\mathfrak{h}\cap\mathfrak{p}=\left\{X=\left(\begin{array}{c|c|c}0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & Y\\ \hline 0 & {}^t\bar{Y} & 0\end{array}\right) : Y\in\mathfrak{gl}(2,C)\right\},$$

$$\mathfrak{q}\cap\mathfrak{k}=\left\{X=\left(\begin{array}{c|c|c}0 & Y & 0\\ \hline -{}^t\bar{Y} & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right) : Y\in\mathfrak{gl}(2,C)\right\},$$

$$\mathfrak{q}\cap\mathfrak{p}=\left\{X=\left(\begin{array}{c|c|c}0 & 0 & Y\\ \hline 0 & 0 & 0\\ \hline {}^t\bar{Y} & 0 & 0\end{array}\right) : Y\in\mathfrak{gl}(2,C)\right\}.$$

Comme $\mathfrak{su}(4, 2)$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C})$ on pose $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C})$. La conjugaison τ de $\mathfrak{g}_c$ relativement à $\mathfrak{g}$ s'écrit:

$$\tau(X) = -J^t\bar{X}J \qquad \text{pour } X \in \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C}).$$

Le prolongement $\boldsymbol{C}$-linéaire de σ à $\mathfrak{g}_c$ s'écrit:

$$\sigma(X) = LXL \qquad \text{pour } X \in \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C}) \qquad \text{où } L = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_4 \end{pmatrix}.$$

Le prolongement $\boldsymbol{C}$-linéaire de θ à $\mathfrak{g}_c$ s'écrit:

$$\theta(X) = JXJ \qquad \text{pour } X \in \mathfrak{sl}(6, \boldsymbol{C}).$$

Considérons le sous-espace de Cartan θ-invariant de $\mathfrak{q}$ défini par:

$$\mathfrak{a} = \left\{ X = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & 0 & t & 0 \\ & & 0 & -\psi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & \psi & & & & \\ \hline t & 0 & \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right) : t, \psi \in \boldsymbol{R} \right\}.$$

On définit deux formes linéaires e_1 et e_2 sur $\mathfrak{a}$ par $e_1(X) = t$ et $e_2(X) = i\psi$ $(i = \sqrt{-1})$ pour $X \in \mathfrak{a}$. L'ensemble des racines de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$ est alors

$$\Sigma(\mathfrak{a}) = \{\pm e_1, \pm e_2, \pm 2e_1, \pm 2e_2, \pm e_1 \pm e_2\}.$$

On fixe un ordre sur $\Sigma(\mathfrak{a})$ en posant

$$\Sigma^+(\mathfrak{a}) = \{2e_1, e_1 + e_2, e_1, e_1 - e_2, 2e_2, e_2\}.$$

Soit $\mathfrak{j}$ la sous-algèbre de Cartan θ-invariante de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{a}$ dont la complexifiée $\mathfrak{j}_c$ est définite par

$$\mathfrak{j}_c = \left\{ Y = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & -\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & z_2 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} : t, \psi, z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2 \in \boldsymbol{C}, \ \mathrm{Tr}\, Y = 0 \right\}.$$

Les valeurs propres d'une matrice Y de $\mathfrak{j}_c$ sont données par $\mu_1 = t + z_1$,

$\mu_2=-t+z_1$, $\mu_3=i\psi+z_2$, $\mu_4=-i\psi+z_2$. $\mu_5=\zeta_1$ et $\mu_6=\zeta_2$. Les racines de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{j}_c)$ sont données par les formes linéaires e_{pq} $(1\leq p, q\leq 6$ et $p\neq q)$ où

$$e_{pq}(Y)=\mu_p-\mu_q \qquad \text{pour } Y\in\mathfrak{j}_c.$$

Relations entre $\Sigma(\mathfrak{a})$ et $\Sigma(\mathfrak{j})$.

(i) e_1 et $2e_1$ sont des racines réelles de $\Sigma^+(\mathfrak{a})$.
e_1 est la restriction à $\mathfrak{a}$ de e_{15}, $e_{52}=e_{15}^{\tau}$, e_{16} et $e_{62}=e_{16}^{\tau}$.
$2e_1$ est la restriction à $\mathfrak{a}$ de $e_{12}=e_{12}^{\tau}$.

(ii) e_2 et $2e_2$ sont des racines imaginaires de $\Sigma^+(\mathfrak{a})$.
e_2 est la restriction à $\mathfrak{a}$ de e_{35}, $e_{54}=e_{35}^{\sigma\tau}$, e_{36} et $e_{64}=e_{36}^{\sigma\tau}$.
$2e_2$ est la restriction à $\mathfrak{a}$ de $e_{34}=e_{34}^{\sigma\tau}$.

(iii) e_1-e_2 et e_1+e_2 sont des racines complexes de $\Sigma^+(\mathfrak{a})$.
e_1-e_2 est la restriction à $\mathfrak{a}$ de e_{13} et $e_{42}=e_{13}^{\sigma\theta\tau}$.
e_1+e_2 est la restriction à $\mathfrak{a}$ de e_{14} et $e_{32}=e_{14}^{\sigma\theta\tau}$.
De plus on a $e_{13}^{\tau}=e_{14}$ et $e_{42}^{\tau}=e_{32}$.

On appelle $Y_{ij}=(\alpha_{kl})$ la matrices de $\mathfrak{gl}(6, C)$ définie par $\alpha_{kl}=\delta_{ki}\delta_{jl}$ où δ est le symbole de Kronecker.

Dans les diffèrent cas ci-dessous on choisit pour base de

$$\begin{array}{ll}
(\alpha=e_1) & \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{15}):\ X=Y_{13}+Y_{53} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{52}):\ \tau(X)=-Y_{31}+Y_{35} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{16}):\ Y=Y_{16}+Y_{56} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{62}):\ \tau(Y)=Y_{61}-Y_{65} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \mathfrak{g}(\mathfrak{a}; e_1):\ X_1=X+\tau(X),\ X_2=i(X-\tau(X)), \\
& \qquad X_3=Y+\tau(Y) \text{ et } X_4=i(Y-\tau(Y))
\end{array}$$

$$(\alpha=2e_1) \quad \mathfrak{g}(\mathfrak{a}; 2e_1):\ X_5=i(Y_{11}-Y_{15}+Y_{51}-Y_{55})$$

$$\begin{array}{ll}
(\alpha=e_2) & \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{35}):\ U=Y_{23}-iY_{43} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{54}):\ \sigma\tau(U)=Y_{32}-iY_{34} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{36}):\ V=Y_{26}-iY_{46} \\
& \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j}; e_{64}):\ \sigma\tau(V)=Y_{62}+iY_{64} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}; e_2):\ X_6=U+\sigma\tau(U),\ X_7=i(U-\sigma\tau(U)), \\
& \qquad X_8=V+\sigma\tau(V) \text{ et } X_9=i(V-\sigma\tau(V))
\end{array}$$

$$(\alpha=2e_2) \quad \bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}; 2e_2):\ X_{10}=iY_{22}+Y_{24}+Y_{42}-iY_{44}$$

$$
\begin{aligned}
&(\alpha=e_1-e_2) \quad \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\, e_{13})\colon\ W=Y_{12}+iY_{14}+Y_{52}+iY_{54}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\, e_{42})\colon\ \sigma\theta\tau(W)=-Y_{21}-iY_{41}+Y_{25}+iY_{45}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \mathfrak{g}^d(\mathfrak{a};\, e_1-e_2)\colon\ X_{11}=W+\sigma\theta\tau(W)\ et\ X_{12}=i(W-\sigma\theta\tau(W))\\
&(\alpha=e_1+e_2)\colon\ \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\, e_{14})\colon\ \tau(W)=-Y_{21}+iY_{41}+Y_{25}-iY_{45}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \mathfrak{g}_c(\mathfrak{j};\, e_{32})\colon\ \sigma\theta(W)=Y_{12}-iY_{14}+Y_{52}-iY_{54}\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\ \ \mathfrak{g}^d(\mathfrak{a};\, e_1+e_2)\colon\ X_{13}=\tau(X_{11})\ \text{et}\ X_{14}=\tau(X_{12}).
\end{aligned}
$$

La famille $S=\{X_1, X_2, \cdots, X_{14}\}$ vérifie bien les conditions de la proposition 2.4. L'application γ de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ dans $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c$ qui a été définie au § 2 est donnée ici par:

$$
\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
it_5 & \zeta_{13} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\bar{\zeta}_{13} & it_{10} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & z_{67} & z_{12} & 0\\
0 & 0 & -\bar{z}_{67} & -it_{10} & \bar{\zeta}_{24} & \bar{z}_{89}\\
\hline
0 & 0 & \bar{z}_{12} & \zeta_{24} & -it_5 & z_{34}\\
0 & 0 & 0 & z_{89} & -\bar{z}_{34} & 0
\end{array}\right)
$$

$$
\longmapsto
\left(\begin{array}{cc|cc|cc}
0 & 0 & z_{12} & \zeta_{24} & -it_5 & z_{34}\\
0 & 0 & \bar{z}_{67} & it_{10} & \bar{\zeta}_{13} & \bar{z}_{89}\\
\hline
-\bar{z}_{12} & -z_{67} & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\bar{\zeta}_{24} & it_{10} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
it_5 & \zeta_{13} & 0 & 0 & 0 & 0\\
\bar{z}_{34} & z_{89} & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

$(t \in \boldsymbol{R},\ \zeta,\ z \in \boldsymbol{C})$.

§ 4. Transformation de Cayley

Rappelons que si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan θ-invariant et si α est une racine de $\Sigma(\mathfrak{a})$ on a posé

$$
\mathfrak{l}_c=\boldsymbol{C}H_\alpha\oplus\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\,\alpha)\oplus\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\,-\alpha)
$$

où H_α est l'unique élément de $\mathfrak{a}^d=\sqrt{-1}\,(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{a})\oplus(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{a})$ tel que

$$
B(H_\alpha, X)=\alpha(X) \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{a}.
$$

Posons alors

$$\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_c\cap\mathfrak{q},\quad \mathfrak{l}_+=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k} \text{ et } \mathfrak{l}_-=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{p}.$$

On remarque que si α est réelle (resp. imaginaire), H_α appartient à $\mathfrak{p}$ (resp. $H_\alpha\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{k}$) et que $\mathfrak{l}_c$ est stable par τ et θ.

Définition 4.1. Si α est une racine réelle de $\Sigma(\mathfrak{a})$ on dit que

(i) α est *singulière* si $\mathfrak{l}_+\neq\{0\}$;

(ii) α est *vectorielle* si $\mathfrak{l}_+=\{0\}$ c'est-à-dire $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_-$.

Si α est une racine imaginaire de $\Sigma(\mathfrak{a})$ on dit que

(iii) α est *singulière* si $\mathfrak{l}_-\neq\{0\}$;

(iv) α est *compacte* si $\mathfrak{l}_-=\{0\}$ c'est-à-dire $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_+$.

Remarque. Dans le cas des espaces ($\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, diagonal) il n'y a pas de racine vectorielle. De même dans le cas des espaces ($\mathfrak{g}_c$, $\mathfrak{g}$) il n'y a pas de racine compacte (cf. Lemme 5.1).

Lemme 4.1.

(i) *Si $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ est une racine réelle singulière, il existe un élément $X_\alpha=Y_\alpha+Z_\alpha (Y_\alpha\in\mathfrak{h}_-, Z_\alpha\in\mathfrak{q}_+)$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$. Si on prend X_α tel que $B(Y_\alpha, Y_\alpha)=\frac{1}{2}$, on a $H_\alpha=[X_\alpha,\sigma X_\alpha]$. On note $\mathfrak{l}'_c$ le sous espace de $\mathfrak{l}_c\cap\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{l}'_c=\boldsymbol{R}H_\alpha\oplus\boldsymbol{R}X_\alpha\oplus\boldsymbol{R}(\sigma X_\alpha)$ et pose $\mathfrak{l}'_{\mathfrak{h}}=\mathfrak{l}'\cap\mathfrak{h}$. Alors $(\mathfrak{l}',\mathfrak{l}'_{\mathfrak{h}})$ est une algèbre de Lie symétrique isomorphe à $(\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(1,1))$.*

(ii) *Si $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ est une racine imaginaire singulière, il existe un élément $X_\alpha=Y_\alpha+Z_\alpha$ $(Y_\alpha\in\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_-, Z_\alpha\in\mathfrak{q}_-)$ de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$. Si on prend X_α tel que $B(Y_\alpha, Y_\alpha)=-\frac{1}{2}$, on a $H_\alpha=[\sigma X_\alpha, X_\alpha]$. On note $\mathfrak{l}'_c$ le sous espace de $\mathfrak{l}_c$ définit par $\mathfrak{l}'_c=\boldsymbol{C}H_\alpha\oplus\boldsymbol{C}X_\alpha\oplus\boldsymbol{C}(\sigma X_\alpha)$ et pose $\mathfrak{l}'=\mathfrak{l}_c\cap\mathfrak{g}$, $\mathfrak{l}'_{\mathfrak{h}}=\mathfrak{l}'\cap\mathfrak{h}$. Alors $(\mathfrak{l}',\mathfrak{l}'_{\mathfrak{h}})$ est une algèbre de Lie symétrique isomorphe à $(\mathfrak{sl}(2,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(1,1))$.*

Démonstration.

(i) Soit Z un élément non nul de $\mathfrak{l}_+$. Comme Z est dans $\mathfrak{k}$ et H_α dans $\mathfrak{p}$ on peut écrire:

$$Z=X_\alpha+X_1 \qquad \text{avec } X_\alpha\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha) \text{ et } X_1\in\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};-\alpha).$$

On a:

$$\tau(X_\alpha)=X_\alpha \text{ car } \tau(Z)=Z \text{ et } \alpha^\tau=\alpha,$$

$$\theta(X_\alpha)=X_1 \text{ car } \theta(Z)=Z \text{ et } \alpha^\theta=-\alpha \quad \text{(en particulier } X_1\neq 0),$$

$$\sigma(X_\alpha)=-X_1 \text{ car } \sigma(Z)=-Z \text{ et } \alpha^\sigma=-\alpha.$$

On en déduit que X_α appartient à $\mathfrak{h}_-\oplus\mathfrak{q}_+$. Si on écrite $X_\alpha=Y_\alpha+Z_\alpha$ $(Y_\alpha\in\mathfrak{h}_-, Z_\alpha\in\mathfrak{q}_+)$, on a $[H, Y_\alpha]=\alpha(H)Z_\alpha$, $[H, Z_\alpha]=\alpha(H)Y_\alpha$ pour $H\in\mathfrak{a}$.

Au moins l'un des vecteurs Y_α, Z_α n'est pas nulle: il s'en suit que les deux ne sont pas nulles. On voit que $[Z_\alpha, Y_\alpha] \in \mathfrak{a}$ car $[H, [Z_\alpha, Y_\alpha]]=0$ pour $H \in \mathfrak{a}$. Si on prend X_α tel que $B(Y_\alpha, Y_\alpha)=\frac{1}{2}$, on a $B(H, [Z_\alpha, Y_\alpha])=\alpha(H)B(Y_\alpha, Y_\alpha)=\frac{1}{2}\alpha(H)$ pour $H \in \mathfrak{a}$. Ceci entraine que $[Z_\alpha, Y_\alpha]=H_\alpha/2$ et $[X_\alpha, \sigma X_\alpha]=H_\alpha$. On peut choisir X, un multiple de X_α (ou σX_α) tel que si $H=[X, \sigma X]$ on ait $[H, X]=2X$ et $[H, \sigma X]=-2\sigma X$. Alors l'algèbre de Lie symétrique $(\mathfrak{l}', \mathfrak{l}'_\mathfrak{h})$ où $\mathfrak{l}'_\mathfrak{h}=\boldsymbol{R}(X_\alpha+\sigma X_\alpha)$ isomorphe à $(\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}), \mathfrak{so}(1, 1))$.

(ii) On procède de manière analogue à (i) en remarquant que $(\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_-)\oplus\mathfrak{q}_-$ est l'intersection des sous-espaces propres relatifs à la valeur propre (-1) de θ et de $\sigma\tau$. On vérifie alors que $[X_\alpha, \sigma(X_\alpha)]$ appartient à $\boldsymbol{R}H_\alpha$. En normalisant X_α, on obtient un élément X de $\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_-\oplus\mathfrak{q}_-$ tel que

$$l'=\boldsymbol{R}\sqrt{-1}\,H_\alpha\oplus\boldsymbol{R}(X-\sigma(X))\oplus\boldsymbol{R}\sqrt{-1}(X+\sigma(X)).$$

L'application qui à $\sqrt{-1}H$ associe $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, à $X-\sigma(X)$ associe $\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ et à $\sqrt{-1}(X+\sigma(X))$ associe $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ est un isomorphisme de l'algèbre symétrique $(l', l'_\mathfrak{h})$ sur $(\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}), \mathfrak{so}(1, 1))$. Q.E.D.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan θ-invariant de $\mathfrak{q}$ et $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$ une racine réelle singulière. On généralise la transformation de Cayley que Harish-Chandra a donnée [8].

Définition 4.2. Soit X_α un élément de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ dans $\mathfrak{h}_-\oplus\mathfrak{q}_+$ normalisé par la condition $\alpha([X_\alpha, \sigma(X_\alpha)])=2$. Définissons l'automorphisme ν de $\mathfrak{g}_c$ par:

$$\nu=\exp\left\{-\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\,\mathrm{ad}\,(X_\alpha+\sigma X_\alpha)\right\}.$$

Alors $\mathfrak{b}=\nu(\mathfrak{a}_c)\cap\mathfrak{q}$ est un sous-espace de Cartan θ-invariant qui n'est conjugué à $\mathfrak{a}$ par aucun élément de H. Et on a: $\dim(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{k})=\dim(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{k})+1$ Pour chaque racine $\gamma \in \Sigma(\mathfrak{a})$, posons $(\nu\cdot\gamma)(X)=\gamma(\nu^{-1}(X))$ $(X \in \mathfrak{b}_c)$ Alors $\nu\cdot\gamma$ est une racine de $\mathfrak{b}$ et $\beta=\nu\cdot\alpha$ est une racine imaginaire singulière.

Pour une racine réelle singulière α, on pose $\mathfrak{a}_\alpha=\{X \in \mathfrak{a}: \alpha(X)=0\}$ $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\alpha)$ (le centralisateur de $\mathfrak{a}_\alpha$ dans $\mathfrak{g}$) et $\mathfrak{l}=[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}]$. Considérons la décomposition $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{z}_\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{l}_\mathfrak{q}$) où $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}=\mathfrak{z}\cap\mathfrak{h}$, $\mathfrak{z}_\mathfrak{q}=\mathfrak{z}\cap\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{l}_\mathfrak{h}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{h}$, $\mathfrak{l}_\mathfrak{q}=\mathfrak{l}\cap\mathfrak{q}$). Alors $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}_\mathfrak{q}, \sigma)$ est une algèbre de Lie semi-simple symétrique de rang déployé égal à 1 (cf. [20]). En adaptant une démonstration de la manière analogue à la proposition 5 de [24] dans le cas du rang déployé égal à 1, on peut montrer:

Lemme 4.2. *Soit* $\mathfrak{c}$ *un sous-espace de Cartan de* $\mathfrak{q}$ *qui est contenu dans* $\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}$. *Alors* $\mathfrak{c}$ *est conjugé à* $\mathfrak{a}$ *ou* $\mathfrak{b}$ *par un élément du sous-groupe analytique* L_H *de* H *correspondant à la sous-algèbre* $\mathfrak{l}_{\mathfrak{h}}$.

Remarque. On peut définir l'automorphisme inverse. Soit $\mathfrak{z}$ un sous-espace de Cartan θ-invariant de $\mathfrak{q}$, $\beta \in \Sigma(\mathfrak{b})$ une racine imaginaire singuliére et X_β un élément de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{b}, \beta)$ choisi dans $\mathfrak{h}_- \oplus \sqrt{-1}\, \mathfrak{q}_-$ (cf. Lemme 4.1) tel que $\beta([\sigma X_\beta, X_\beta])=2$. On pose:

$$\tilde{\nu}=\exp\left\{\frac{\sqrt{-1}\,\pi}{4}\operatorname{ad}(X_\beta+\sigma X_\beta)\right\}$$

On a alors:

1) $\mathfrak{a}=\tilde{\nu}(\mathfrak{b}_c)\cap \mathfrak{q}$ est un sous-espace de Cartan θ-invariant de $\mathfrak{q}$
2) $\alpha=\tilde{\nu}\cdot\beta$ est une racine réelle singulière appartenant à $\Sigma(\mathfrak{a})$
3) $\tilde{\nu}(X_\beta)$ appartient à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ et vérifie $\alpha([\tilde{\nu}(X_\beta), \sigma\tilde{\nu}(X_\beta)])=2$

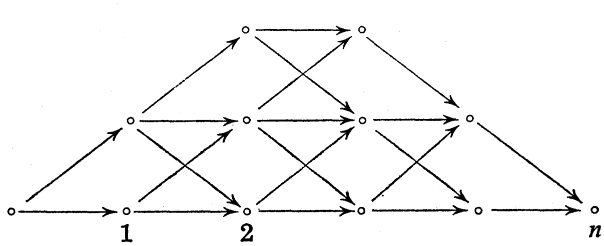
Si on pose $X_\alpha=\tilde{\nu}(X_\beta)$ et si on définit ν comme dans la définition 1.4, on a

$$\tilde{\nu}\cdot\nu=\nu\cdot\tilde{\nu}=id$$

car $X_\beta+\sigma X_\beta=X_\alpha+\sigma X_\alpha \in \mathfrak{h}_-$.

Définition 4.3. Dans la situation de la définition 4.2, on rappelle que $\mathfrak{b}$ est défini à l'aide de $\mathfrak{a}$, d'une racine réelle singulière α et de l'automorphisme ν. Dans ce cas on dit que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont *adjacents* et on note cette relation entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$: $\mathfrak{a}\to\mathfrak{b}$. Soit $\mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ l'ensemble des classes de conjugaison par H des sous-espaces de Cartan de $\mathfrak{q}$. La classe de conjugaison de $\mathfrak{a}$ est notée $[\mathfrak{a}]$ et nous allons aussi adopter la notation $[\mathfrak{a}]\to[\mathfrak{b}]$. On obtient ainsi un diagramme dans $\mathrm{Car}(\mathfrak{q})$ qu'on note $\Pi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On définit un ordre $<$ dans $\mathrm{Car}(\mathfrak{q})$, de sorte que $[\mathfrak{c}]<[\mathfrak{c}']$ si et seulement si il existe une chaîne $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \cdots, \mathfrak{c}_n$ de sous-espaces de Cartan telle que $[\mathfrak{c}_1]=[\mathfrak{c}]$, $[\mathfrak{c}_n]=[\mathfrak{c}']$ et $[\mathfrak{c}_1]\to[\mathfrak{c}_2]\to\cdots\to[\mathfrak{c}_n]$.

Exemple. Les diagrames $\Pi(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})\oplus\boldsymbol{R}))$ et $\Pi(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$ sont les mêmes. On a représenté ce diagramme dans le cas où $n=5$:



§ 5. *c*-dualité

Nous voulons étudier les distributions sphériques invariantes (DSI) et l'analyse harmonique sur l'espace symétrique semi-simple G/H dans le travail suivant. Pour cela, nous allons montrer qu'il y a une relation entre les séries discrètes (relatives) de DSI d'un espace symétrique et les séries continues (relatives) de DSI de l'espace c-dual. Nous allons définir la c-dualité d'algèbre de Lie semisimple symétrique qui induit la c-duailté d'espaces symétriques.

Définition 5.1. Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ une algèbre de Lie symétrique. Posons $\bar{\mathfrak{g}}=\mathfrak{h}\oplus\bar{\mathfrak{q}}$ où $\bar{\mathfrak{q}}=\sqrt{-1}\,\mathfrak{q}$. Le triplet $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est appelé le *c-dual* de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. (voir exemple (i) pour la justification du vocabulaire). Soit G_c/H_c un espace symétrique correspondant à $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$. On dit que deux espaces semi-simples G/H et $\bar{G}/H$ sont en *c-dualité* si ils correspondent respectivement à la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$ et si G/H et $\bar{G}/H$ sont des formes réelles de G_c/H_c.

Remarque. M. Berger a défini le dual et l'associé d'une algèbre de Lie semi-simple symétrique. La relation est la suivante: L'associé $(\mathfrak{g}^a, \mathfrak{h}^a, \sigma\theta)$ $(=(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^a)$ du triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est défini par

$$\mathfrak{g}^a=\mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{h}^a=\mathfrak{h}_+\oplus\mathfrak{q}_-$$

(Voir § 1 pour la définition de $\mathfrak{h}_+$, $\mathfrak{h}_-$, $\mathfrak{q}_+$, $\mathfrak{q}_-$). Le dual $(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d, \theta)$ $(=(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^d)$ du triplet $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est défini par

$$\mathfrak{g}^d=\mathfrak{h}_+\oplus(\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}_-)\oplus(\sqrt{-1}\,\mathfrak{q}_+)\oplus\mathfrak{q}_-, \qquad \mathfrak{h}^d=\mathfrak{h}_+\oplus(\sqrt{-1}\,\mathfrak{q}_+).$$

Alors on a $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})=(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^{dad}=(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})^{ada}$. Par suite on a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^d) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{dual}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{associé}"'] \arrow[drr, leftrightarrow] & (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{associé}"] \arrow[d, leftrightarrow, "c\text{-dual}"] & (\mathfrak{g}, \mathfrak{h}^a) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{dual}"] \arrow[dll, leftrightarrow] \\
(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{h}^a) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{dual}"'] & (\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}) \arrow[r, leftrightarrow, "\text{associé}"'] & (\mathfrak{g}^{ad}, \mathfrak{h}^d)
\end{tikzcd}$$

Exemple.

(i) Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \theta)$ un triplet riemannien de type non compact. Son c-dual est donné par le triplet riemannien compact $(\mathfrak{u}, \mathfrak{k}, \theta)$ où $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{p}$. Par exemple $(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{so}(n))$ et $(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{so}(n))$ sont c-duaux.

Remarque. C'est pour cela que nous avons introduit le terme de "c"-dualité. (c à cause de "compact").

(ii) Le c-dual de la paire $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$, diagonal) est ègal à $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g})$.

(iii) La pair $(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})), \mathfrak{so}(p, q))$ $(n=p+q)$ est de type $\mathfrak{k}_\varepsilon$ (cf. [20]). Il n'en est pas de même pour son c-dual qui est $(\mathfrak{su}(p, q), \mathfrak{so}(p, q))$. Mais la paire $(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(p, \boldsymbol{R})\oplus\mathfrak{gl}(q, \boldsymbol{R}))$ est c-autoduale.

Soient $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ et $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}, \sigma)$ deux triplets en c-dualité. Si θ est une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ commutant avec σ, alors $\bar{\theta}=\tau\theta$ est une involution de Cartan de $\bar{\mathfrak{g}}$ commutant avec σ (où dèsigne le prolongement $\boldsymbol{C}$-linéaire à $\mathfrak{g}_c$ de θ et τ la conjugaison complexe de $\mathfrak{g}_c$ relative à $\mathfrak{g}$). Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan θ-invariant de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, alors $\bar{\mathfrak{a}}=\sqrt{-1}\,\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan $\bar{\theta}$-invariant de $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$. Si δ est l'isomorphisme $\boldsymbol{R}$-linéaire de $\mathfrak{a}$ sur $\bar{\mathfrak{a}}$ défini par $\delta(X)=\sqrt{-1}\,X$, on a alors:

Lemme 5.1.

(i) *Si $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ est une racine réelle (resp, imaginaire) singulière, alors $\delta\cdot\alpha$ est une racine imaginaire (resp. réelle) singulière de* $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{a}})$.

(ii) *Si $\alpha\in\Sigma$ $(\mathfrak{a})$ est une racine vectorielle (resp. compacte) alors $\delta\cdot\alpha$ est une racine compacte (resp. vectorielle) de* $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{a}})$.

Démonstration. Si α est une racine réelle (resp. imaginaire) de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ il est clair que $\delta\cdot\alpha$ est une racine imaginaire (resp. réelle) de $(\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{a}})$. La définition de l'involution de Cartan implique que:

$$\bar{\mathfrak{h}}_-=\bar{\mathfrak{h}}\cap\bar{\mathfrak{k}}=\mathfrak{h}_-,\qquad \bar{\mathfrak{h}}_+=\bar{\mathfrak{h}}\cap\bar{\mathfrak{p}}=\mathfrak{h}_+,$$

$$\bar{\mathfrak{q}}_+=\bar{\mathfrak{q}}\cap\bar{\mathfrak{k}}=\sqrt{-1}\,\mathfrak{q}_-,\qquad \bar{\mathfrak{q}}_-=\mathfrak{q}\cap\bar{\mathfrak{p}}=\sqrt{-1}\,\mathfrak{q}_+.$$

Or le lemme 4.1 extraine qu'une racine réelle α de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ est vectorielle si et seulement si $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)\cap(\mathfrak{h}_-\oplus\mathfrak{q}_+)=\{0\}$. Ceci est équivalent à $\mathfrak{g}_c(\bar{\mathfrak{a}}; \delta\cdot\alpha)$ $\cap(\sqrt{-1}\,\bar{\mathfrak{h}}_-\oplus\bar{\mathfrak{q}}_-)=\{0\}$. On en conclut que α est vectorielle si et seulement si $\delta\cdot\alpha$ est compacte et le reste du lemme s'en déduit. Q.E.D.

Remarque. Soit G/H un espace symétrique semi-simple correspondant à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. Pour simplifier, supposons que G ait une complexifiée G_c. Soit G^d, $\bar{G}$, K et H^d des sous-groupes analytiques de G correspondant respectivement à $\mathfrak{g}^d$, $\bar{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}^d$.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan compact θ-invariant de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Soit $W(\mathfrak{a})$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$. Et on pose $W_{K\cap H}(\mathfrak{a})=N_{K\cap H}(\mathfrak{a})/Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ où $N_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ (resp. $Z_{K\cap H}(\mathfrak{a})$) est le normalisateur (centralisateur) dans de $\mathfrak{a}$. $W_{K\cap H}(\mathfrak{a})$ est isomorphe à le groupe de Weyl de $(\mathfrak{k}_c, \mathfrak{a}_c)$. Une racine $\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$ est compact si, et seulement si $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)\subset\mathfrak{k}_c$. Soit Φ^{cm} l'ensemble des racines compactes de $\Sigma(\mathfrak{a})$ de $\Phi^I=\{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})$: $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)\subset\mathfrak{k}_c, \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)\subset\mathfrak{p}_c\}$. Φ^{cm} et Φ^I sont des systèmes de racines. Si on pose W^{cm} (resp. W^I) le groupe de Weyl de Φ^{cm} (resp. Φ^I), on a

$$[W^I : W^{cm}] = [W(\mathfrak{a}) : W_{K\cap H}(\mathfrak{a})].$$

Pour un sous-groupe parabolique minimal P^d de G^d, il est égal à le nombre des H^d-orbites fermées de G^d/P^d, c'est-à-dire, le nombre des séries de la série discrète de G/H.

$\bar{\mathfrak{a}} = i\mathfrak{a}$ est un sous-espace de Cartan dépolyé de $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h})$. On définit des groupes $W(\bar{\mathfrak{a}})$ et $W_{K\cap H}(\bar{\mathfrak{a}})$ similariement. $W_{K\cap H}(\bar{\mathfrak{a}})$ est isomorphe à le groupe de Weyl de $(\mathfrak{h}_c^a, \bar{\mathfrak{a}}_c)$. Une racine réelle $\alpha \in \Sigma(\bar{\mathfrak{a}})$ est vectorielle si, et suelement si $\mathfrak{g}_c(\bar{\mathfrak{a}}; \alpha) \subset \mathfrak{h}_c^a$. Soit Φ^{ve} l'ensemble des racines vectorielles et

$$\Phi^R = \{\alpha \in \Sigma(\bar{\mathfrak{a}}) : \mathfrak{g}_c(\bar{\mathfrak{a}}; \alpha) \subset \mathfrak{h}_c^a \text{ ou } \mathfrak{g}_c(\bar{\mathfrak{a}}; \alpha) \subset \mathfrak{q}_c^a\} \qquad (\mathfrak{g}^a = \mathfrak{h}_- \oplus \mathfrak{q}_+).$$

Φ^{ve} et Φ^R sont des systèmes de racienes. On note respectivement W^{ve} et W^R leur groupes de Weyl. On a

$$[W^R : W^{ve}] = [W(\bar{\mathfrak{a}}) : W_{K\cap H}(\bar{\mathfrak{a}})].$$

Pour un groupe parabolique minimal $\bar{P}$ de $\bar{G}$, il est égal à le nombre des H-orbits ouvertes de $\bar{G}/\bar{P}$. Nous conjecturons que cette nombre est égal à la multiplicité de la série continue de G/H. L'auteur considére qu'il existe la relation entre la série discrète de G/H et la série continue de G/H, car $[W^I : W^{cm}] = [W^R : W^{ve}]$.

§ 6. Intégrale invariante sur l'espace tangent

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note $\mathfrak{q}^{\mathfrak{a}}$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{q}$ conjugués par H à un élément de $\mathfrak{a}$. D'autre part on choisit un ordre sur l'ensemble $\Sigma(\mathfrak{a})$ des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. On note $\Sigma^+(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines positives et m_α la multiplicité d'une racine, c'est-à-dire $m_\alpha = \dim_c \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. On a alors pour $X \in \mathfrak{a}$

$$d_l(X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} |\alpha(X)|^{m_\alpha} \qquad (d_l \text{ est défini au § 1}).$$

On en déduit que

$$X \in \mathfrak{a}' \Longleftrightarrow \alpha(X) \neq 0 \qquad \text{pour tout } \alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a}).$$

On pose alors pour $X \in \mathfrak{a}$

$$\pi(X) = \pi^{\mathfrak{a}}(X) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+(\mathfrak{a})} \alpha(X)^{m_\alpha}.$$

Appelons $J^{\mathfrak{a}} = Z_H(\mathfrak{a})$ le centralisateur dans H de $\mathfrak{a}$ et $W^{\mathfrak{a}} = N_H(\mathfrak{a})/J^{\mathfrak{a}}$ le groupe de Weyl correspondant à $\mathfrak{a}$. On a alors (cf. [19]).

Lemme 6.1. *L'application η de $H/J^{\mathfrak{a}}\times\mathfrak{a}'$ dans $(\mathfrak{q}^{\mathfrak{a}})'$ qui à (h^*, X) associe* $\mathrm{Ad}(h)X$ *où h^* désigne la classe de h dans $H/J^{\mathfrak{a}}$ est un revêtement à $|W^{\mathfrak{a}}|$ feuilets de* $(\mathfrak{q}^{\mathfrak{a}})'$.

Pour le montrer on pose $\mathfrak{m}=\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{l}=\mathfrak{h}\cap\sum_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$ On vérifie alors que la différentielle de η en (h_0^*, X_0) est l'application de $\mathfrak{l}\times\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{q}$ qui envoie (T, X) sur $\mathrm{Ad}(h_0)\{[T, X_0]+X\}$ et on en déduit le résultat.

Posons $\mathfrak{n}_c=\bigoplus_{\alpha\in\Sigma(\mathfrak{a})}\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$. On a défini au § 2 un isomorphisme γ de $\mathfrak{l}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{n}_c$ dans $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c$. D'autre part on a

$$\mathfrak{h}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{l} \qquad \text{et } \mathfrak{q}=\mathfrak{a}\oplus(\mathfrak{q}\cap\mathfrak{n}_c).$$

On choisit une m-forme différentielle ω sur $\mathfrak{q}$, une n-forme différentielle ν sur $\mathfrak{l}$ et une k-forme différentielle μ sur $\mathfrak{a}$ telles que si $T_1, \cdots, T_n$ est une base de $\mathfrak{l}$ et $Y_1, \cdots, Y_k$ une base de $\mathfrak{a}$ on ait:

$$\omega(\gamma(T_1), \cdots, \gamma(T_n), Y_1, \cdots, Y_k)=\nu(T_1, \cdots, T_n)\mu(Y_1, \cdots, Y_k).$$

Si on appelle dX, dh^* et $d_{\mathfrak{a}}X$ les mesures correspondantes sur $\mathfrak{q}$, $H/J^{\mathfrak{a}}$ et $\mathfrak{a}$, on a:

Proposition 6.2. *Pour toute fonction f de $C_c(\mathfrak{q}^{\mathfrak{a}})$ (continue et à support compact)*

$$\int_{\mathfrak{q}^{\mathfrak{a}}}f(X)dX=\frac{1}{|W^{\mathfrak{a}}|}\int_{\mathfrak{a}'}|\pi(X)|\int_{H/J^{\mathfrak{a}}}f(\mathrm{Ad}(h)X)dh^*d_{\mathfrak{q}}X.$$

Démonstration. Il s'agit de calculer le déterminant de la différentielle de η. Pour cela prenons une famille $S=\{X_1, \cdots, X_n\}$ d'éléments de $\mathfrak{n}_c^+$ vérifiant les conditions de la proposition 2.4. Les éléments $X_k+\sigma(X_k)$ forment une base de $\mathfrak{h}_c\cap\mathfrak{n}_c$. D'apprès le lemme 6.1,

$$d\eta_{(h_0^*,H_0)}(T, 0)=-\mathrm{Ad}(h_0)[H_0, T].$$

Soit X un élément de S et α la racine telle que X appartienne à $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a};\alpha)$. On a alors pour $H_0\in\mathfrak{a}$

$$[H_0, X+\sigma(X)]=\alpha(H_0)(X-\sigma(X)).$$

Posons $T=X+\sigma X$. Si α est une racine réelle, $\alpha(H_0)$ est réel et on a

$$[H_0, T]=\alpha(H_0)\gamma(T).$$

Si α est une racine imaginaire, $\alpha(H_0)$ est imaginaire pur et on a

$$[H_0, T] = -\sqrt{-1}\,\alpha(H_0)\gamma(T).$$

Si α est une racine complexe, posons $\alpha(H_0) = \alpha^R(H_0) + \sqrt{-1}\,\alpha^I(H_0)$ avec $\alpha^R(H_0)$ et $\alpha^I(H_0)$ réels. On a alors

$$[H_0, T + \tau(T)] = \alpha^R(H_0)\gamma(T + \tau(T)) + \alpha^I(H_0)\gamma(\sqrt{-1}\,(T - \tau(T))),$$
$$[H_0, F(T - \tau(T))] = -\alpha^I(H_0)\gamma(T + \tau(T)) + \alpha^R(H_0)\gamma(\sqrt{-1}\,(T - \tau(T))).$$

La valeur absolue du jacobien de η est donc égale à $|\pi(H_0)|$. Q.E.D.

Bibliographie

[1] S. Araki, On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ., **13** (1962), 1–34.

[2] M. Berger, Les espaces symetriques non compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup., **74** (1957), 85–177.

[3] N. Bourbaki, Groupes et algebres de Lie, Chapters IV–VI, Hermann, Paris, 1968.

[4] Harish-Chandra, Differential operators on a semisimple Lie algebra, Amer. J. Math.. **79** (1957), 87–120.

[5] ——, Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, I. Amer. J. Math., **79** (1957), 193–257.

[6] ——, Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, II. Amer. J. Math., **79** (1957), 653–686.

[7] ——, Invariant distributions on Lie algebras, Amer. J. Math., **86** (1964), 271–309.

[8] ——, Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra, Ann. Math., **80** (1964), 551–593.

[9] T. Hirai, Invariant eigendistributions of Laplace operators on real simple Lie groups, II, General theory for semisimple Lie groups, Japan. J. Math., New Ser. **2** (1976), 27–89.

[10] R. Hotta-M. Kashiwara, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Invent. math., **75** (1984), 327–358.

[11] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, New York, 1962.

[12] B. Kostant, The principal three dimensional subgroups and the Betti numbers of a complex simple Lie groupe, Amer. J. Math., **81** (1959), 973–1032.

[13] B. Kostant-S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces, Amer. J. Math., **93** (1971), 753–809.

[14] O. Loos, Symmetric spaces, Vols. I–II, Benjamin, New York, 1969.

[15] T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, J. Math. Soc. Japan, **31** (1979), 331–357.

[16] ——, Orbits on affine symmetric spaces under the action of parabolic subgroups, Hiroshima Math. J., **12** (1982), 307–320.

[17] H. Matsumoto, Quelques remarques sur les groupes de Lie algebriques reels, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 419–446.

[18] T. Oshima, A realization of Riemannian symmetric spaces, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 117–132.

[19] T. Oshima-T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropic subgroup, J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 399–414.

[20] T. Oshima-J. Sekiguchi, The Restricted Root System of a Semi-simple Symmetric Pair, Advanced Studies in Pure Math., **4** (1984), 433–497.

[21] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces, Canad. J. Math., **31** (1979), 157–180.

[22] S. Sano, Invariant spherical distributions and the Fourier invarsion formula on $GL(n, \boldsymbol{C})/GL(n, \boldsymbol{R})$, J. Math. Soc. Japan, **36** (1984), 191–219.
[23] S. Sano-J. Sekiguchi, The Plancherel formula for $SL(2, \boldsymbol{C})/SL(2, \boldsymbol{R})$, Sci. Papers College Gen. Ed. Tokyo, **30** (1980), 93–105.
[24] M. Sugiura, Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959), 374–434.
[25] V. S. Varadarajan, Harmonic Analysis on real reductive groups, Lecture Notes in Math., **576**, Springer Verlag, 1977.
[26] G. Warner, Harmonic Analysis on semi-simple Lie groups, Vol. 1, 2, Springer Verlag, 1972.

Department of Mathematics
Institute of Vocational training
Aihara 1960, Sagamihara, Kanagawa, 229
Japan