Advanced Studies in Pure Mathematics 14, 1988
Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986
pp. 289–336

La Formule de Plancherel des Groupes de Lie Semi-Simples Réels

Michel Duflo et Michèle Vergne

Introduction

Soient G un groupe de type I unimodulaire et $\hat{G}$ le dual de G, i.e. l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. Fixons une mesure de Haar sur G. On sait qu'il existe une mesure $dm(T)$ sur $\hat{G}$ telle que l'on ait la formule d'inversion de Plancherel, i.e. telle que, si on note $\hat{G}_r$ le support de $dm(T)$, on ait pour toute fonction ϕ sur G suffisamment régulière:

$$(1) \qquad \phi(1)=\int_{\hat{G}_r} \operatorname{Tr} T(\phi)dm(T).$$

Si G est un groupe de Lie semi-simple (connexe de centre fini), Harish-Chandra ([Ha2]) a paramétré les représentations T_Γ de $\hat{G}_r$ par les représentations irréductibles Γ des différentes classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan et décrit explicitement la mesure $dm(\Gamma)$ sur cet ensemble de paramètres. Le propos de cet article est de donner une démonstration de la formule d'Harish-Chandra pour $dm(\Gamma)$, qui s'inscrive naturellement dans le cadre de la méthode des orbites. De même que celle de Herb et Wolf [H-W], notre démonstration est valable pour un groupe semi-simple connexe arbitraire.

Expliquons l'idée de cette démonstration. Depuis Kirillov, on a cherché à décrire les caractères des représentations irréductibles des groupes de Lie en fonction de transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe. Il devenait donc désirable de comprendre la formule de Plancherel à partir de l'analyse sur l'espace des orbites de la representation coadjointe. Décrivons la démonstration de la formule de Plancherel dans le cas des groupes nilpotents simplement connexes où ce mécanisme est particulièrement simple ([K]). Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, N le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Alors l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{n}$ sur N. Soit Ω une orbite de la représentation coadjointe de N dans l'espace vectoriel

Received March 24, 1987.

dual $\mathfrak{n}^*$ de $\mathfrak{n}$. C'est une variété symplectique avec sa mesure de Liouville canonique $d\beta_\Omega$. La théorie de Kirillov établit une correspondance biunivoque $\Omega \mapsto T_\Omega$ entre l'espace $\mathfrak{n}^*/N$ des orbites de la représentation coadjointe et le dual $\hat{N}$ de N. On a, si $\phi \circ \exp = \psi$, la formule suivante du caractère:

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{tr} T_\Omega(\phi) &= \operatorname{tr} \int_{\mathfrak{n}} T_\Omega(\exp X)\phi(\exp X)dX, \\ &= \int_\Omega \left(\int_{\mathfrak{n}} e^{i\langle f, X\rangle} \psi(X)dX \right) d\beta_\Omega(f), \\ &= \int_\Omega \hat{\psi}(f) d\beta_\Omega(f), \end{aligned}$$

formule qu'on écrit par l'identité de fonctions généralisées:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tr} T_\Omega(\exp X) = \int_\Omega e^{i\langle f, X\rangle} d\beta_\Omega(f).$$

La formule d'inversion de Plancherel pour l'espace vectoriel $\mathfrak{n}$ s'écrit:

$$\text{(4)} \qquad \psi(0) = \int_{\mathfrak{n}^*} \hat{\psi}(f) df.$$

Divisions la mesure df sur $\mathfrak{n}^*$ par les mesures canoniques $d\beta_\Omega$ des orbites Ω. On obtient une mesure $dm(\Omega)$ sur $\mathfrak{n}^*/N = \hat{N}$, et par définition de $dm(\Omega)$,

$$\text{(5)} \qquad \psi(0) = \int_{\hat{N}} \left(\int_\Omega \hat{\psi}(f) d\beta_\Omega(f) \right) dm(\Omega).$$

D'après les remarques précédentes, ceci s'écrit aussi

$$\text{(6)} \qquad \phi(1) = \int_{\hat{N}} \operatorname{tr}(T_\Omega(\phi)) dm(\Omega).$$

La mesure $dm(\Omega)$ est donc la mesure de Plancherel.

On désire comprendre par cette méthode la formule de Plancherel d'un groupe de Lie semi-simple G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous aurons évidemment besoin de formules de caractères analogues à (3) et d'une formule d'inversion analogue à (4). Deux difficultés principales se présentent à l'utilisation des coordonnées exponentielles sur G. Tout d'abord, l'application exponentielle n'est pas surjective. On emploiera alors la méthode de descente d'Harish-Chandra qui permet de réduire l'étude d'une distribution G-invariante sur G au voisinage d'un élément semi-simple s à l'étude d'une distribution invariante sur un voisinage de 0 dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ du centralisateur M de s. Nous reviendrons sur ce point. D'autre part, comme montré distinctement par l'exemple d'un groupe compact, il est clair qu'on ne peut associer à une orbite Ω de la représentation coadjointe une représentation T_Ω de G que si cette orbite est admissible, c'est-à-dire si elle vérifie certaines conditions d'intégralité. Ce serait donc trop espérer de dériver la formule de Plancherel du groupe G d'une formule aussi simple que la formule (4) d'inversion de Fourier sur l'espace $\mathfrak{g}^*$ tout entier. A la place de (4), on écrira une formule d'inversion analogue à la formule de Poisson, la formule de Poisson-Plancherel. Ecrivons cette formule tout d'abord dans le cas d'un groupe compact G.

Soit G un groupe de Lie compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, B le groupe de Cartan correspondant. L'espace des orbites de la représentation coadjointe est donc paramétré par $\mathfrak{b}^*$ modulo l'action du groupe de Weyl W. Soit Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{b}_C$ dans $\mathfrak{g}_C$, Δ^+ un système de racines positives, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$. Soit P le réseau des poids de B. C'est un réseau dans $\mathfrak{b}^*$ dont le réseau dual P^* dans $\mathfrak{b}$ est égal à $\{X\in\mathfrak{b}, \exp X=1\}$. Le dual $\hat{G}$ de G est discret et s'identifie au sous-ensemble des éléments réguliers de $\rho+P$, modulo l'action de W. Si $\mathfrak{g}_r^*$ est l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}_G^*=G\cdot(\rho+P)\cap\mathfrak{g}_r^*$. C'est l'ensemble des éléments G-admissibles de $\mathfrak{g}^*$. Pour λ régulier dans $(\rho+P)$, on note T_λ la représentation associée, Ω_λ l'orbite de λ pour l'action de G dans $\mathfrak{g}^*$. On a la formule du caratère de Kirillov:

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Tr} T_\lambda(\exp X)j_{\mathfrak{g}}(X)^{1/2}=\int_{\Omega_\lambda} e^{i\langle f,X\rangle}d\beta_{\Omega_\lambda}(f),$$

où, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ quelconque, on a posé:

$$j_{\mathfrak{g}}(X)=\det_{\mathfrak{g}}\left(\frac{e^{(\operatorname{ad} X/2)}-e^{-(\operatorname{ad} X/2)}}{\operatorname{ad} X}\right).$$

Soit $(\ ,\ )$ la forme de Killing sur $\mathfrak{g}$, dX la mesure euclidienne sur $\mathfrak{g}$, df la mesure duale sur $\mathfrak{g}^*$, définies comme dans (I.2). Pour simplifier, on identifie ici grâce à $dX(df)$ distributions et fonctions généralisées sur $\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^*)$.

Considérons la fonction polynomiale $p(\lambda)=\prod_{\alpha\in\Delta^+}(\alpha,\lambda)$ sur $\mathfrak{b}^*$ et soit ∂_p l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{b}$ associé à p. On sait que

$$\text{(8)} \qquad \dim T_\lambda=|p(\lambda)|/|p(\rho)|=\operatorname{vol}(G/B)(2\pi)^{-d}|p(\lambda)|.$$

Il est donc naturel de considérer la mesure positive notée $\delta(f)df$ sur $\mathfrak{g}_G^*$ analogue au deuxième membre de (5), définie par:

$$(9)\quad \begin{aligned}\int_{\mathfrak{g}_G^*} \phi(f)\delta(f)df &= \frac{1}{(\mathrm{vol}\, G)} \sum_{\lambda\in\rho+p/W} |\dim T_\lambda| \int_{\Omega_\lambda} \phi(f) d\beta_{\Omega_\lambda}(f) \\ &= \frac{1}{|W|(\mathrm{vol}\, B)} \sum_{\lambda\in\rho+p} (2\pi)^{-d} |p(\lambda)| \int_{\Omega_\lambda} \phi(f) d\beta_{\Omega_\lambda}(f)\end{aligned}$$

Considérons, pour $x \in \mathfrak{b}$:

$$(10)\qquad I_\phi(X) = \prod_{\alpha\in\Delta+} (\alpha, X) \int_{G/B} \phi(g\cdot X)dg$$

et:

$$(11)\qquad M_X(\phi) = c(\partial_p I_\phi)(X)$$

où c est une constante explicitement déterminée (voir II.1.2). On a alors:

$$(12)\qquad M_0(\phi) = \phi(0).$$

Considérons:

$$(13)\qquad (V, \phi) = \sum_{\substack{X\in\mathfrak{b} \\ \exp X=1}} e^{(\rho, X)} M_X(\phi).$$

C' est alors une conséquence facile de la formule de Poisson pour les réseaux P et P^* que l'on a:

$$(14)\qquad (V, \phi) = \int_{\mathfrak{g}_G^*} \phi(f)\delta(f)df.$$

Cette égalité appliquée, à une fonction $\phi(X) = \psi(\exp X) j_{\mathfrak{g}}(X)^{1/2}$ où ψ est de support petit, entraine la formule de Plancherel:

$$(\mathrm{vol}\, G)\psi(1) = \sum_{\lambda\in\rho+P/W} \dim T_\lambda \,\mathrm{Tr}\,(T_\lambda(\psi)).$$

Soit maintenant un groupe de Lie semi-simple réel G quelconque. La distribution V garde un sens. En effet, si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Cartan fondamental de $\mathfrak{g}$, on peut définir $I_\phi(X)$, $M_X(\phi)$ par (10), (11) pour X régulier dans $\mathfrak{b}$ et $M_X(\phi)$ pour tout X de $\mathfrak{b}$ par continuité. La formule limite:

$$(15)\qquad M_0(\phi) = \phi(0)$$

est encore valable [Hal].

Il sera plus agréable pour nos calculs de fixer un caractère χ du centre Z de G avec G simplement connexe et de considérer la distribution V_1 sur $\mathfrak{g}$ définie par:

$$(V_1, \phi) = \sum_{\substack{X \in \mathfrak{b} \\ \exp X \in Z}} \chi(\exp X) e^{(\rho, X)} M_X(\phi).$$

On note $\zeta_\rho(\exp X) = e^{(\rho, X)}$ le caractère correspondant à ρ de Z et $\tilde{\chi} = \zeta_\rho \chi$.

Si s est un élément elliptique de G, M son centralisateur, $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M et $\mathfrak{b}$ une algèbre fondamentale de $\mathfrak{m}$, on introduit plus généralement la distribution sur $\mathfrak{m}$:

(16) $$(V_s, \phi) = \sum_{\substack{X \in \mathfrak{b} \\ s^{-1} \exp X \in Z}} (\tilde{\chi})(s^{-1} \exp X) M_X^{\mathfrak{m}}(\phi).$$

Par ailleurs, l'espace $\hat{G}_r$ a été décrit par Harish-Chandra. (Plus généralement rappelons que $\hat{G}_r$ peut être décrit en termes d'orbites pour tout groupe de Lie G suffisamment apprivoisé [Du]). Décrivons cette paramétrisation. Soit $f \in \mathfrak{g}_r^*$, le stabilisateur $G(f)$ de f est un sous-groupe de Cartan H de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On écrit $H = TA$, où T/Z est le tore compact maximal de H/Z.

Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ la décomposition correspondante de $\mathfrak{h}$. On considère $\mathfrak{h}_\chi^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*;\ \exp(i\lambda(X)) = \tilde{\chi}(\exp X)$, pour $X \in \mathfrak{h}$, $\exp X \in Z\}$. On dit que $f \in \mathfrak{g}_r^*$ est χ-admissible si $f \in \mathfrak{h}_\chi^*$. On note $\mathfrak{g}_\chi^*$ l'ensemble des éléments χ-admissibles de $\mathfrak{g}^*$.

On voit que $\mathfrak{h}_\chi^*$ est un ensemble $\mathfrak{t}_\chi^* \times \mathfrak{a}^*$ où $\mathfrak{t}_\chi^*$ est un ensemble discret dans $\mathfrak{t}^*$. Correspondant à chaque classe de conjugaison $\mathfrak{h}$ de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\chi^*/G$ est alors décrit comme réunion des ensembles $(\mathfrak{h}_\chi^*)_r/W$. Il est alors facile de munir $\mathfrak{g}_\chi^*/G$ d'une mesure $dm_\chi(\Omega)$. Nous le faisons ici (ch. I, par. 7) d'une manière canonique et en accord avec la formule universelle décrite dans [Du].

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. On considère un caractère unitaire ξ_f de T associé à un certain choix de ρ (ch. I, par. 4) et on note:

$X(f) = \{\Gamma$ représentations unitaires irréducibles de T telles que
$\Gamma(z) = \chi(z)$ Id et $\Gamma(\exp X) = e^{i(f, X)} \xi_f(\exp X)$ Id pour $X \in \mathfrak{t}\}$.

Si (f, Γ) est un couple avec $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$ et $\Gamma \in X(f)$, une représentation $T_{f,\Gamma}$ de $\hat{G}_r$ lui a été associée par Harish-Chandra.

On note $\Theta_{f,\Gamma} = \mathrm{tr}\,(T_{f,\Gamma})$.

Si $R(\Gamma, f)$ est une fonction définie pour les couples $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$, $\Gamma \in X(f)$, invariante sous l'action de G, on pose

(17) $$\Theta_\Omega = \frac{1}{[G(f) G(f)_0 Z]} \sum_{\Gamma \in X(f)} (\dim \Gamma) R(\Gamma, f) \Theta_{f\,\Gamma}.$$

Θ_Ω est une distribution sur G qui ne dépend que de l'orbite Ω de f

dans $\mathfrak{g}_\chi^*$. Il s'agit donc de vérifier pour la fonction de Plancherel $R(\Gamma, f)$ définie par Harish-Chandra (voir III. 1), la formule

$$\int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} dm_\chi(\Omega)(\Theta_\Omega, \phi) = \sum_{z\in Z} \chi(z)\phi(z). \tag{18}$$

Pour montrer cette égalité, on utilise la méthode de descente d'Harish-Chandra dont voici le principe.

Soit s un élément elliptique de G. Soient M son centralisateur dans G, $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Si Θ est une fonction généralisée G-invariante sur G, on peut alors définir une fonction généralisée θ^s sur un voisinage petit convenable de 0 dans $\mathfrak{m}$ par:

$$\theta^s(X) = j_\mathfrak{m}(X)^{1/2} \left| \frac{\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(1 - s\exp X)}{\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(1-s)} \right|^{1/2} \Theta(s \exp X).$$

La connaissance des fonctions généralisées θ^s pour tout élément elliptique s de G détermine Θ. On montrera alors l'égalité (18) en prouvant plutôt, pour s elliptique, et pour ψ sur $\mathfrak{m}$ à support petit, l'égalité:

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} dm_\chi(\Omega)(\theta_\Omega^s, \psi) &= 0 \qquad \text{si } s \notin Z \\ &= \chi(s)\psi(0) \qquad \text{si } s \in Z. \end{aligned} \tag{19}$$

Soit $\Gamma \in X(f)$ et $\Theta_{f,\Gamma}$ le caractère de G associé. Nous utiliserons alors la formule pour $\theta_{f,\Gamma}^s$ démontrée par A. Bouaziz [B]. Soit Ω l'orbite de s, Ω^s les points fixes de Ω par s. Comme Ω^s est une réunion finie d'orbites de M dans $\mathfrak{m}^*$, Ω^s est munie d'une mesure canonique $d\beta_{\Omega^s}$. On a alors:

$$\theta_{f,\Gamma}^s(X) = \int_{\Omega^s} e^{i(\xi, X)} \phi_{f,\Gamma}(\xi) d\beta_{\Omega^s}(\xi) \tag{20}$$

où les fonctions $\phi_{f,\Gamma}(\xi)$ sont les fonctions canoniques conjecturées dans [D-H-V]; elles sont constantes sur les M-orbites. Pour $s=1$, c'est la formule de Rossmann, pour s elliptique régulier, c'est la formule d'Harish-Chandra des caractères des séries fondamentales. Les formules de Bouaziz pour $\theta_{f,\Gamma}^s$ déterminent entièrement $\Theta_{f,\Gamma}$. Ici se passe un phénomène remarquable: $\theta_{f,\Gamma}^s$ n'est en principe définie que dans un voisinage convenable de 0 dans $\mathfrak{m}$. Cependant l'égalité (20) détermine une extension de $\theta_{f,\Gamma}^s$ et donc de θ_Ω^s en une fonction généralisée sur $\mathfrak{m}$ tout entier. Nous chercherons donc quelle est la distribution sur $\mathfrak{m}$ donnée par le premier membre de (19)

$$\int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} dm_\chi(\Omega)(\theta_\Omega^s, \psi).$$

Sur $\mathfrak{m}^*$, on peut définir (II. 11) un polynôme π_s canonique (c'est un pfaffien). Soit Δ_s l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{m}$ associé. On démontrera alors le:

Théorème.

$$\int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} dm_\chi(\Omega)(\Theta_\Omega^s, \psi) = V_{s-1}(\Delta_s\psi).$$

Ceci se fait en deux étapes, au chapitre 2, (théorème 4, ch. II, par. 11) on prouve cette égalité, pour θ_Ω (17) définie par une fonction $Q(\Gamma, f)$. Au chapitre 3 (théorème 1) on montre que $Q=R$. Cette formule entraine alors la formule (19), car si $s \notin Z$, $(V_s, \psi)=0$ si ψ est à support petit, et si $s \in Z$ alors $(V_{s-1}, \psi)=\tilde{\chi}(s)\psi(0)$, d'après la formule limite d'Harish-Chandra.

Pour $s=1$, le théorème ci-dessus résoud (positivement) la conjecture énoncée dans [Ve]. Rappelons que cette conjecture avait été démontrée dans [Ve] pour un groupe semi-simple linéaire, et par P. Dourmashkin [Do] pour G de type B_n. La démonstration de [Ve] utilisait la méthode due à R. Herb [He] de réduction aux groupes de rang deux, et un calcul particulier pour ces derniers. La démonstration donnée ici est plus directe (et ne nécessite pas la considération de cas particuliers). Le principe en est le suivant, $\hat{V}_s$ est déterminée d'après Harish-Chandra par les relations de récurrence des "constantes des séries discrètes" pour les algèbres de Cartan adjacentes. On utilise alors les relations de récurrence des fonctions de Plancherel $R(\Gamma, f)$ pour les algèbres de Cartan adjacentes démontrées dans [P-V].

Rappelons que c'est R. Herb [He] qui avait entrepris une étude systématique des problèmes combinatoires liés à la détermination des constantes des séries discrètes et de leurs relations avec la mesure de Plancherel, et que Herb, dans le cas linéaire, puis Herb et Wolf [H-W] ont écrit une démonstration de la formule de Plancherel se plaçant dans cette perspective. Notre travail se situe dans le même esprit. Cependant, l'utilisation de la "méthode des orbites", de la formule de Bouazi, et des relations de récurrence de [P-V] rend, pensons nous, notre démonstration plus simple et plus naturelle. En fait, notre démonstration est nouvelle même pour $SL(2, \boldsymbol{R})$.

Nous remercions A. Bouaziz et P. Torasso pour leur lecture attentive d'une première version de ce texte. Nous sommes reconnaissants à M. Taniguchi, aux professeurs K. Okamoto et T. Oshima et à nos amis japonais pour nous avoir permis de participer à cette exceptionnelle série de conférences.

I. La mesure canonique sur l'espace des orbites admissibles

§ 1. Notations

Dans tout cet article, G est un groupe de Lie réel semi-simple connexe et simplement connexe. On note Z le centre de G et on fixe un caractère unitaire χ de Z. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et on fixe un multiple strictement positif κ de la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Soit V un espace vectoriel réel. Nous notons V_C son complexifié, et si $v \in V_C$, nous notons $\bar{v}$ son conjugué.

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe). Nous notons V^* l'espace vectoriel dual, $S(V)$ l'algèbre symétrique, $\Lambda(V)$ l'algèbre extérieure de V.

Lorsque cela ne prête pas à confusion, la valeur $v^*(v)$ d'un élément $v^* \in V^*$ sur $v \in V$ sera notée v^*v ou vv^*.

Soit V un espace vectoriel réel. $S(V_C)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes à valeurs complexes sur V^*. Si $p \in S(V_C)$, nous notons ∂_p l'opérateur différentiel sur $C^\infty(V)$ qui lui correspond. Par exemple, si $v \in V$, ∂_v est la dérivation dans la direction v.

Si T est un groupe de Lie, on note T_0 sa composante neutre.

Si E est un ensemble, on note $|E|$ son cardinal.

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel réel V. On note $\mathscr{S}(U)$ l'espace de Schwartz de U, c'est-à-dire l'espace des fonctions $\phi \in C^\infty(U)$ telles que $|\Delta\phi|_\infty < \infty$ pour tout opérateur différentiel Δ à coefficients polynominaux sur V, muni de la topologie définie par les semi-normes $\phi \to |\Delta\phi|_\infty$.

§ 2. Normalisation des mesures

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ sur lequel κ est non dégénérée. Soit $e_1, \cdots, e_n$ une base de V_C, et soit $e_1^*, \cdots, e_n^*$ la base duale. La densité:

$$|\det \kappa(e_i, e_j)|^{1/2} |e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*| \tag{1}$$

est indépendante du choix de la base et détermine une mesure de Lebesgue sur V, que nous appellerons "la" mesure de Lebesgue sur V.

Nous munissons V^* de la mesure de Lebesgue duale; si $\phi \in \mathscr{S}(V)$, on a:

$$(2) \qquad \int_{V^*}\int_V \phi(v)e^{-if(v)}dvdf=\phi(0).$$

Soit M un sous-groupe fermé de G, et soit $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. Supposons κ non dégénérée sur $\mathfrak{m}$. On munit M de la mesure de Haar tangente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{m}$ (remarquons que M est unimodulaire). En particulier G est muni d'une mesure de Haar en général notée dg.

Supposons que M et M' sont deux sous-groupes fermés de G, que M contient M', et que κ est non dégénérée sur les algèbres de Lie $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$. On note $\mathfrak{r}$ l'orthogonal de $\mathfrak{m}'$ dans $\mathfrak{m}$, de sorte que $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}'\oplus\mathfrak{r}$. La forme κ est non dégénérée sur $\mathfrak{r}$, et on munit M/M' de la mesure M-invariante tangente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{r}$.

§ 3. Sous-algèbres de Cartan

Si $\mathfrak{m}$ est une algèbre de Lie réductive, on note Car$(\mathfrak{m})$ l'ensemble de ses sous-algèbres de Cartan.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. On note $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{h}_C$ dans $\mathfrak{g}_C$. Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on note $\mathfrak{g}_{C,\alpha}$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}_C$ correspondant, $h'_\alpha \in \mathfrak{h}_C$ l'élémént tel que $\kappa(h'_\alpha, h)=\alpha(h)$ ($h \in \mathfrak{h}$), h_α la coracine correspondant à α.

On pose $\mathfrak{h}_R=\sum Rh_\alpha$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}_R\cap\mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}=i\mathfrak{h}_R\cap\mathfrak{h}$, de sorte que:

$$(3) \qquad \mathfrak{h}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}.$$

Nous notons $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le sous-ensemble des racines réelles: une racine α est réelle si $\alpha(\mathfrak{t})=0$, ou de manière équivalente, si $h_\alpha \in \mathfrak{a}$.

Nous notons $\Delta_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le sous-ensemble des racines imaginaires, c'est-à-dire de racines α telles que $h_\alpha \in i\mathfrak{t}$. Soit $\alpha \in \Delta_I(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{C,\alpha}$, $X_\alpha\neq 0$. Si $\kappa(X_\alpha, \bar{X}_\alpha)<0$ on dit que α est compacte. Si $\kappa(X_\alpha, \bar{X}_\alpha)>0$ on dit que α est non-compacte. On note $\Delta_{I,n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ et $\Delta_{I,c}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ les sous-ensembles des racines imaginaires non-compactes et compactes respectivement.

Le groupe de Cartan correspondant à $\mathfrak{h}$ est noté H. C'est le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans G. On note $P(\mathfrak{h})$ le réseau des poids: c'est l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}_C^*$ tels que $\lambda(h_\alpha) \in Z$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. A tout $\lambda \in P(\mathfrak{h})$ est associé un caractère ζ_λ de H: on considère une représentation de dimension finie irréductible de $\mathfrak{g}$ admettant λ comme poids. Cette représentation s'intègre en une représentation de G (car G est simplement connexe) et ζ_λ est l'action de H sur un vecteur non nul de poids λ.

On note $T=\{h \in H, |\zeta_\lambda(h)|=1$ pour tout $\lambda \in P(\mathfrak{h})\}$. On note A le sous-groupe analytique d'algèbre $\mathfrak{a}$. Le groupe T contient Z, T/Z est le sous-groupe compact maximal de H/Z, et on a

$$H=TA, \qquad T\cap A=\{1\}. \tag{4}$$

Si $V\subset \mathfrak{g}_C$ est un sous-espace $\mathfrak{h}$-stable, on note $\Delta(V, \mathfrak{h})$ l'ensemble des racines (non nulles) de $\mathfrak{h}_C$ dans V. Si $V\subset \mathfrak{g}$ est réel et $\mathfrak{h}$-stable, on note encore $\Delta(V, \mathfrak{h})=\Delta(V_C, \mathfrak{h})$. Nous dirons qu'un sous-espace $\mathfrak{l}\subset \mathfrak{g}_C$ est lagrangien s'il est $\mathfrak{h}$-stable, s'il contient $\mathfrak{h}$, et si pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, on a soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$, soit $-\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$. Par exemple, si $\mathfrak{l}$ est une sous-algèbre, c'est une sous-algèbre de Borel, et $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ est un système de racines positives pour $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On note $\mathscr{L}(\mathfrak{h})$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens. Si $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$, on pose:

$$\rho_{\mathfrak{l}}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h})}\alpha. \tag{5}$$

Lemme 1. (i) *Soit* $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$. *On a* $\rho_{\mathfrak{l}} \in P(\mathfrak{h})$.

(ii) *Soit* $z \in Z$. *Le nombre* $\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}}}(z)$ *ne dépend pas de* $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$, *ni de* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$.

Démonstration. Si $\mathfrak{l}' \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$ est une algèbre de Borel, il est bien connu que $\rho_{\mathfrak{l}'}$ est un poids. Or $\rho_{\mathfrak{l}}-\rho_{\mathfrak{l}'}$ est la somme d'un certain nombre de racines, et donc $\rho_{\mathfrak{l}}$ est un poids. De plus $\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}}}(z)\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}'}}(z)^{-1}$ est un produit de nombres $\zeta_\alpha(z)$ pour certains $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et donc égal à 1. Donc $\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}}}(z)$ ne dépend pas de $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$. Pour démontrer l'indépendance par rapport à $\mathfrak{h}$, on considère un groupe simplement connexe complexe G_C d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_C$, et H_C le sous-groupe analytique d'algèbre $\mathfrak{h}_C$. Si $\lambda \in P(\mathfrak{h})$, λ est la différentielle d'un caractère holomorphe ζ'_λ de H_C, et si l'on note p l'homomorphisme naturel $G\to G_C$, on a $\zeta_\lambda=\zeta'_\lambda\circ p$. La dernière assertion du lemme vient de ce que deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_C$ sont conjuguées par un automorphisme intérieur de G_C, lequel laisse fixes les points de $p(Z)$. C.Q.F.D.

On pose

$$\tilde{\chi}(z)=\chi(z)\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}}}(z) \qquad \text{si } z\in Z \tag{6}$$

$$\tilde{\chi}(g)=0 \qquad \text{si } g\in G,\ g\notin Z. \tag{7}$$

La restriction de $\tilde{\chi}$ à Z est donc un caractère unitaire de Z.

On note $\mathfrak{t}_Z$ l'ensemble des $X\in\mathfrak{t}$ tels que $\exp(X)\in Z$. Comme $T_0/T_0\cap Z$ est compact, $\mathfrak{t}_Z$ est un réseau dans $\mathfrak{t}$. On note $\mathfrak{t}^*_\chi$ l'ensemble des $\mu\in\mathfrak{t}^*$ tels que

(8) $$\exp(i\mu(X)) = \tilde{\chi}(\exp X) \qquad \text{pour } X \in \mathfrak{t}_Z.$$

Donc $\mathfrak{t}_\chi^*$ est un translaté du réseau dual de $\mathfrak{t}_Z$. On pose $\mathfrak{h}_\chi^* = \mathfrak{t}_\chi^* \oplus \mathfrak{a}^*$.

§ 4. Paramétrisation de représentations de G

Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On dit que f est régulier (ou $\mathfrak{g}$-régulier s'il faut préciser $\mathfrak{g}$) si le centralisateur $\mathfrak{g}(f)$ de f dans $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Cartan.

Soit f un élément régulier de $\mathfrak{g}^*$, et posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f)$. Nous employons les notations du paragraphe 3. Nous notons $\mathfrak{r}$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ (pour la forme κ). On a donc:

(9) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{r}.$$

Nous identifions $\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{r}^*$, de sorte que $f \in \mathfrak{h}^*$. On note $\mathscr{L}(\mathfrak{h}, f)$ l'ensemble des lagrangiens qui ont les propriétés suivantes:

(10) $$\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \Longrightarrow f(h_\alpha) > 0$$

(11) $$\alpha \in \Delta_{I,n}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \Longrightarrow if(h_\alpha) > 0$$

(12) $$\alpha \in \Delta_{I,c}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \cap \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \Longrightarrow if(h_\alpha) < 0$$

(13) Si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ est complexe (c'est-à-dire ni réelle ni imaginaire), alors $\bar{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$.

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}, f)$. La restriction à T de $\zeta_{\rho_\mathfrak{l}}$ ne dépend pas de $\mathfrak{l}$.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ dans $\mathscr{L}(\mathfrak{h}, f)$. Les formes $\rho_\mathfrak{l}$ et $\rho_{\mathfrak{l}'}$ ne diffèrent que par une somme de formes linaires du type $\alpha + \bar{\alpha}$, où α est une racine complexe. Donc $\zeta_{\rho_\mathfrak{l}}$ et $\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}'}}$ ne différent que par un produit de caractère de la forme $\zeta_\alpha \zeta_{\bar{\alpha}} = |\zeta_\alpha|^2$. Ces caractères valent 1 sur T.

C.Q.F.D.

On note ξ_f le caractère de T défini par le lemme 2 ci-dessus.

On dit que f est χ-admissible si $f \in \mathfrak{h}_\chi^*$. On note $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles Γ de T telles que

(14) $$\Gamma(z) = \chi(z) Id \qquad (z \in Z)$$

(15) $$\Gamma(\exp X) = e^{if(X)} \xi_f(\exp X) Id \qquad (X \in \mathfrak{t}).$$

L'ensemble $X(f)$ est non vide car f appartient à $\mathfrak{h}_\chi^*$. C'est un ensemble fini de représentations de dimension finie. Compte tenu du lemme 1, nous pouvons réécrire les relation (14) et (15) sous la forme:

(16) $$\xi_f^{-1}\Gamma(z)=\tilde{\chi}(z)Id \qquad (z \in Z)$$

(17) $$\xi_f^{-1}\Gamma(\exp X)=e^{if(X)}Id \qquad (X \in \mathfrak{t}).$$

On note $\mathfrak{g}_\chi^*$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{g}$-réguliers et χ-admissibles de $\mathfrak{g}^*$.

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$ et $\Gamma \in X(f)$. Le couple (Γ, f) est un "caractère régulier" du sens de [S-V]. Notons $T_{f,\Gamma}$ la représentation unitaire irréductible de G qui lui est associée (cf. [S-V]). Plutôt que d'en rappeler la construction, nous renvoyons au paragraphe II.10 ci-dessous, dans lequel nous décrivons le caractère de $T_{f,\Gamma}$, ce qui spécifie $T_{f,\Gamma}$ sans ambiguité.

Nous notons les propriétés suivantes de $T_{f,\Gamma}$:

(18) $$T_{f,\Gamma}(z)=\chi(z)Id \qquad (z \in Z)$$

(ceci résulte de (14))

(19) $T_{f',\Gamma'}$ est équivalente à $T_{f,\Gamma}$ si et seulement si les données (f, Γ) et (f', Γ') sont conjuguées par G.

Soit $\mathfrak{m}$ une sous-algébre de Lie réductive de $\mathfrak{g}$, de même rang que $\mathfrak{g}$. Nous notons $\mathfrak{m}_\chi^*$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{m}$-réguliers de $\mathfrak{m}^*$ qui sont χ-admissibles. Donc, si $f \in \mathfrak{m}_\chi^*$, le centralisateur de f dans $\mathfrak{m}$ est une algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{m}$, (et donc de $\mathfrak{g}$) et l'on a $f \in \mathfrak{h}_\chi^*$.

§ 5. Formules intégrales dans $\mathfrak{m}^*$

Soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ deux sous-algèbres réductives de $\mathfrak{g}$, de même rang que $\mathfrak{g}$. On suppose $\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{r}$ l'orthogonal de $\mathfrak{m}'$ dans $\mathfrak{m}$ pour κ, de sorte que l'on a:

(20) $$\mathfrak{m}=\mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{r}.$$

Soit $e_1, \cdots, e_{2d}$ une base de $\mathfrak{r}_C$.

On pose, pour $f \in \mathfrak{m}'^*$:

(21) $$\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'}(f)=(2\pi)^{-d}|\det f([e_i, e_j])|^{1/2}|\det \kappa(e_i, e_j)|^{-1/2}.$$

Soit M le sous-groupe analytique de G d'algèbre $\mathfrak{m}$. La fonction $\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'}$ ne dépend pas du choix de la base $e_1, \cdots, e_{2d}$, elle n'est pas identiquement nulle (car non nulle sur les éléments $\mathfrak{m}$-réguliers de $\mathfrak{m}'^*$) et elle est invariante par le normalisateur de $\mathfrak{m}'$ dans M.

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, et soit H le sous-groupe de Cartan correspondant de G. Nous écrivons $\mathfrak{h}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}$ comme en (3).

On choisit un système de racines positives Δ^+ pour $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, ayant la propriété suivante: si $\alpha \in \Delta^+$ est complexe, alors $\bar{\alpha} \in \Delta$. On pose $\Phi^+=\Delta^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, et:

$$p = \prod_{\alpha \in \Delta +} h'_\alpha, \; p_{I,n} = \prod_{\alpha \in \Delta^+_{I,n}} h'_\alpha, \; p_R = \prod_{\alpha \in \Phi +} h'_\alpha. \tag{22}$$

On pose

$$\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^*, \; p(\lambda) \neq 0\} \tag{23}$$

$$\mathfrak{t}^*_n = \{\mu \in \mathfrak{t}^*, \; p_{I,n}(\mu) \neq 0\}. \tag{24}$$

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$, on note $\varepsilon_R(\lambda)$ le signe de $p_R(\lambda)$.

En utilisant dans (21) une base formée d'éléments vecteurs propres de $\mathfrak{h}$, on obtient facilement:

$$\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda) = (2\pi)^{-d} |p(\lambda)| \qquad (\lambda \in \mathfrak{h}^*). \tag{25}$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$. Harish-Chandra [Ha1] introduit "l'intégrale invariante" (*):

$$F_\phi(\lambda) = \varepsilon_R(\lambda) p(\lambda) (2\pi)^{-d} \int_{M/M \cap H} \Phi(m\lambda) dm. \tag{26}$$

L'intégrale (26) est absolument convergente, et la fonction F_Φ se prolonge par continuité à $\mathfrak{t}^* \times \mathfrak{a}^*$. De plus, on a:

$$F_\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{t}^*_n \times \mathfrak{a}^*), \tag{27}$$

et l'application $\phi \mapsto F_\phi$ de $\mathscr{S}(\mathfrak{m})$ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{t}^*_n \times \mathfrak{a}^*)$ est continue. (Pour tout ceci, voir par exemple [Va], p. 39 et 50).

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$. Soit ω_λ l'orbite de M dans $\mathfrak{m}^*$. C'est une variété symplectique, et donc ω_λ a une mesure canonique que nous noterons $d_{\beta_{\omega_\lambda}}$. Nous posons:

$$K_\phi(\lambda) = \int_{\omega_\lambda} \phi(f) d\beta_{\omega_\lambda}(f). \tag{28}$$

On a la formule suivante (que l'on peut adopter comme définition de $d\beta_{\omega_\lambda}$) (cf. [R]):

$$K_\phi(\lambda) = \pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda) \int_{M/M \cap H} \phi(m\lambda) dm. \tag{29}$$

On a donc, compte tenu de (25):

$$K_\phi(\lambda) = \frac{p(\lambda)}{|p(\lambda)|} \varepsilon_R(\lambda) F_\phi(\lambda). \tag{30}$$

(*) Toutes les mesures invariantes sont normalisées comme nous l'avons expliqué au paragraphe II.2.

On note $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}$ l'ouvert de $\mathfrak{m}^*$ formé des éléments $\mathfrak{m}$-réguliers conjugués (par M) de points de $\mathfrak{h}^*$. Donc $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}=M\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$. On note $W(M, \mathfrak{h})$ le groupe de Weyl de $\mathfrak{h}$ dans M, c'est-dire le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans M, modulo $M\cap H$. Soient $\phi\in\mathscr{S}(\mathfrak{m})$ et Θ une fonction M-invariante dans $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}$. On note θ la restriction de Θ à $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$. Si Θ est suffisamment raisonnable (restriction d'une fonction continue à croissance lente sur $\mathfrak{g}^*$, par exemple), on a:

$$\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}}\Theta(f)\Phi(f)df=|W(M,\mathfrak{h})|^{-1}\int_{\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}}\theta(\lambda)\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda)K_\phi(\lambda)d\lambda. \tag{31}$$

Nous donnons une autre interprétation de cette formule. Soit Θ une fonction généralisée M-invariante dans $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}$ (c'est-à-dire une forme linéaire continue sur l'espace des densités ϕdf, avec $\phi\in C_c^\infty(\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}})$). A cause des propriétés d'invariance, le front d'onde de Θ est transverse à $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$, de sorte que la restriction θ à $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$ est définie (voir [G-S]). Si $\phi\in C_c^\infty(\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}})$, on a $K_\phi\in C_c^\infty(h^*_{\mathfrak{m}})$, et la formule (31) est encore valable.

Nous réécrivons (31). On note $C(\Phi^+)$ la chambre positive dans $\mathfrak{a}^*$ définie par Φ^+. C'est donc l'ensemble:

$$C(\Phi^+)=\{\nu\in\mathfrak{a}^*,\ \nu(h_\alpha)>0 \text{ pour } \alpha\in\Phi^+\}. \tag{32}$$

On pose:

$$c(\mathfrak{h})=(2\pi)^{-d}|W(\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h}))||W(M,\mathfrak{h})|^{-1}. \tag{33}$$

Dans les mêmes conditions que (31), on a:

$$\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}}\Theta(f)\phi(f)df=c(\mathfrak{h})\int_{\mathfrak{t}^*}\int_{C(\Phi+)}\theta(\mu,\nu)\bar{p}(\mu,\nu)F_\phi(\mu,\nu)d\mu d\nu. \tag{34}$$

§ 6. Mesure canonique sur $\mathfrak{m}^*_\chi$

Les notations sont celles des paragraphes 4 et 5. On pose:

$$v(\mathfrak{h})=\mathrm{vol}(\mathfrak{t}^*/\mathfrak{t}^*_\chi)=\mathrm{vol}(\mathfrak{t}/\mathfrak{t}_Z)^{-1}. \tag{35}$$

Nous définissons une fonction généralisée $\delta_{\mathfrak{h},\chi}$ sur $\mathfrak{h}^*$ par la formule:

$$\int_{\mathfrak{h}^*}\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)\phi(\lambda)d\lambda=v(\mathfrak{h})\sum_{\mu\in\mathfrak{t}^*_\chi}\int_{\mathfrak{a}^*}\phi(\mu,\nu)d\nu.$$

Nous avons utilisé les notations du paragraphe 3, et écrit $\lambda=(\mu,\nu)$ avec $\mu\in\mathfrak{t}^*$, $\nu\in\mathfrak{a}^*$. La fonction généralisée $\delta_{\mathfrak{h},\chi}$ est une mesure (plus exactement $\delta_{\mathfrak{h},\chi}d\lambda$ est une mesure) de support $\mathfrak{h}^*_\chi$. On a, d'après la formule de Poisson:

(36) $$\delta_{\mathfrak{h},\chi}=\sum_{X\in tz}\tilde{\chi}(\exp X)e^{-iX}.$$

La signification de (36) est la suivante: pour toute fonction ϕ sur $\mathfrak{h}^*$, suffisamment régulière, (par exemple $\phi\in\mathscr{S}(\mathfrak{h}^*)$), on a:

(37) $$\int_{\mathfrak{h}^*}\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)\phi(\lambda)d\lambda=\sum_{X\in tz}\tilde{\chi}(\exp X)\int_{\mathfrak{h}^*}\phi(\lambda)e^{-iX\lambda}d\lambda.$$

Nous définissons une fonction généralisée $\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}$ dans $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}$ par la formule:

(38) $$\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}}\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}(f)\phi(f)df=|W(M,\mathfrak{h})|^{-1}$$
$$\times\int_{\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}}\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda)K_\phi(\lambda)d\lambda\quad(\phi\in C^\infty_c(\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}})).$$

En fait $\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}df$ est une mesure dans $\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}$, et (38) reste vraie par exemple pour toute fonction ϕ intégrable pour $\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}df$, d'après le théorème de Fubini. C'est le cas pour toute fonction continue sur $\mathfrak{m}^*$ décroissant rapidement à l'infini, d'après le lemme suivant.

Lemma 3. *$\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}df$ est une mesure tempérée sur $\mathfrak{m}^*$.*

Démonstration. Il suffit (cf. [Va] p. 39) de trouver une semi-norme continue N sur $\mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$ telle que

$$\left|\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}}\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}(f)\phi(f)df\right|<N(\phi)$$

pour tout $\phi\in C^\infty_c(\mathfrak{m})$. Cela résulte de ce que l'application $\phi\to F_\phi$ de $\mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$ dans $\mathscr{S}(\mathfrak{h}^*_n)$ est continue (cf. [Va] p. 39 et 50). C.Q.F.D.

Nous posons

(39) $$\delta_{\mathfrak{m},\chi}=\sum_{(\mathfrak{h})}\delta^{\mathfrak{h}}_{\mathfrak{m},\chi}$$

où la somme est prise sur l'ensemble des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$.

Il résulte de ce qui précède que $\delta_{\mathfrak{m},\chi}df$ est une mesure tempérée sur $\mathfrak{m}^*$, M-invariante, et pour laquelle le complémentaire de $\mathfrak{m}^*_\chi$ est négligeable. Nous dirons que $\delta_{\mathfrak{m},\chi}df$ est la mesure canonique sur $\mathfrak{m}^*_\chi$. Notons que la fonction généralisee $\delta_{\mathfrak{m},\chi}$ est encore plus canonique car elle ne dépend pas (contrairement à df) du choix de κ. Elle est essentiellement caractérisée par le fait que sa restriction à chaque $\mathfrak{h}^*_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{h}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$) est égale à $\delta_{\mathfrak{h},\chi}$.

§ 7. Mesure canonique sur $\mathfrak{g}_\chi^*/G$

Chaque orbite Ω de G dans $\mathfrak{g}^*$ est munie de sa mesure G-invariante β_Ω (cf. (28) et (29)). Nous notons dm_χ la mesure sur $\mathfrak{g}_\chi^*/G$ obtenue en divisant $\delta_{\mathfrak{g},\chi}df$ par les mesures β_Ω. On a donc, pour toute fonction ϕ sur $\mathfrak{g}^*$ intégrable pour $\delta_{\mathfrak{g},\chi}df$:

$$\text{(40)} \qquad \int_{\mathfrak{g}^*} \delta_{\mathfrak{g},\chi}(f)\phi(f)df = \int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} \left(\int_\Omega \phi(f)\, d\beta_\Omega(f) \right) dm_\chi(\Omega).$$

Remarque: Les ensembles $\mathfrak{g}_\chi^*$, la mesure $\delta_{\mathfrak{g},\chi}$ et la mesure dm_χ peuvent se définir pour tous les groupes "presque algébriques" (voir [Du]).

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathfrak{g}^*$, nous notons Ω_λ la G-orbite de λ. Soit ψ une fonction intégrable sur $\mathfrak{g}_\chi^*/G$. On a:

$$\text{(41)} \qquad \int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} \psi(\Omega) dm_\chi(\Omega) = \sum_{(\mathfrak{h})} |W(G, \mathfrak{h})|^{-1} \int_{\mathfrak{h}^*} \delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\lambda)\psi(\Omega_\lambda)d\lambda,$$

où la somme est prise sur l'ensemble des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Cette formule résulte de (38), (39), (40), (31). Rappelons que $\delta_{\mathfrak{h},\chi}d\lambda$ est définie par (37).

Soit $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre réductive de même rang que $\mathfrak{g}$. Si Ω est une G-orbite régulière dans $\mathfrak{g}^*$, $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$ est une réunion finie (éventuellement vide) d'orbites de M dans $\mathfrak{m}^*$ (M est défini comme au paragraphe 5). Donc $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$ porte une mesure canonique $\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}$: c'est la mesure dont la restriction à chaque orbite $\omega \subset \Omega \cap \mathfrak{m}^*$ de M est la mesure β_ω.

Lemma 4. *Soit ϕ une fonction sur $\mathfrak{m}^*$. On suppose que $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}\phi$ est intégrable pour $\delta_{\mathfrak{m},\chi}df$. On a*:

$$\text{(42)} \qquad \int_{\mathfrak{m}^*} \delta_{\mathfrak{m},\chi}(f)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f)\phi(f)df = \int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} \left(\int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} \phi(f)\, d\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f) \right) dm_\chi(\Omega).$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Notons $\mathfrak{h}_1, \cdots, \mathfrak{h}_s \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ des représentants, modulo la conjugaison par M, des algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$ G-conjuguées de $\mathfrak{h}$. Il suffit de démontrer (42) lorsque ϕ est nulle en dehors de $\bigcup_i \mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}_i}$.

Notons Ω_λ la G-orbite d'un élément λ de $\mathfrak{h}^*$, et ω_λ la M-orbite d'un élément λ d'un $\mathfrak{h}_i^*$. On note Ω_λ^i l'ensemble des points de Ω_λ conjugués par M d'un élément de $\mathfrak{h}_i^*$. Donc $\Omega_\lambda \cap \mathfrak{m}^*$ est réunion disjointe des Ω_λ^i. Posons:

$$I_i = \int_{\mathfrak{h}^*} \left(\int_{\Omega_\lambda^i} \phi(f)\, d\beta_{\Omega_\lambda^i}(f) \right) \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\lambda)\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)d\lambda.$$

On a:

$$I_i=\int_{\mathfrak{h}_i^*}\left(\int_{\Omega_\lambda^i}\phi(f)d\beta_{\Omega_\lambda^i}(f)\right)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i}(\lambda)\delta_{\mathfrak{h}_i,\chi}(\lambda)d\lambda$$
$$=\frac{|W(G,\mathfrak{h})|}{|W(M,\mathfrak{h}_i)|}\int_{\mathfrak{h}_i^*}\left(\int_{\omega_\lambda}\phi(f)d\beta_\omega(f)\right)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i}(\lambda)\delta_{\mathfrak{h}_i,\chi}(\lambda)d\lambda.$$

Compte tenu de la relation:

$$\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}_i}(\lambda)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(\lambda)=\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_i}(\lambda)$$

et de (38), on trouve:

$$I_i=|W(G,\mathfrak{h})|\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}_i}}\phi(f)\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f)\delta_{\mathfrak{m},\chi}(f)df.$$

D'après (41), le côté droit de (42) vaut:

$$\sum_i\frac{1}{|W(G,\mathfrak{h})|}I_i,$$

ce qui est bien égal au côté gauche. C.Q.F.D.

§ 8. Fonctions de Plancherel

Soit $Q(\Gamma,f)$ une fonction définie pour les couples $f\in\mathfrak{g}_\chi^*$, $\Gamma\in X(f)$, à valeurs complexes, invariante sous l'action de G.

Soit $\phi\in C_c^\infty(G)$. On pose

$$T_{f,\Gamma}(\phi dg)=\int_G T_{f,\Gamma}(g)\phi(g)dg.$$

C'est un opérateur à trace. Soit $f\in\mathfrak{g}_\chi^*$. On considère:

$$\text{(43)}\qquad \frac{1}{|G(f)/G(f)_0Z|}\sum_{\Gamma\in X(f)}(\dim\Gamma)Q(\Gamma,f)\operatorname{tr}T_{f,\Gamma}(\phi dg).$$

On note cette quantité $\Theta_f(\phi dg)$: Θ_f est donc une fonction généralisée sur G, et l'on a $\Theta_f=\Theta_{f'}$ si f et f' sont dans la même G-orbite. Si $\Omega=G\cdot f$, on posera $\Theta_\Omega=\Theta_f$.

Nous dirons que Q est une fonction de Plancherel pour G si l'on a:

$$\text{(44)}\qquad \int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G}\Theta_\Omega(\phi dg)dm_\chi(\Omega)=\sum_{z\in Z}\chi(z)\phi(z).$$

La formule (44) sous-entend que $\Theta_\Omega(\phi dg)$ est fonction intégrable de Ω pour tout $\phi\in C_c^\infty(G)$.

Dans la suite de cet article, nous construisons une fonction Q dont il est assez facile de vérifier que c'est une fonction de Plancherel (Ch. II). Nous montrons ensuite que Q est égale à la fonction de Plancherel d'Harish-Chandra (Ch. III).

Remarque. De (44), on déduit facilement la formule de Plancherel des groupes G/Z', où Z' est un sous-groupe de Z: c'est un problème d'analyse harmonique sur le groupe abélien discret Z.

II. Première forme du théorème de Plancherel

§ 1. Intégrale invariante dans $\mathfrak{m}$.
§ 2. Les distributions V_s.
§ 3. Enoncé des théorèmes 1, 2 et 3.
§ 4. Transformée de Fourier $M_\chi^{\mathfrak{m}}$.
§ 5. Transformée de Fourier de V_s: la fonction q_s.
§ 6. Sur la formule de Poisson.
§ 7. Démonstration du théorème 1'.
§ 8. Démonstration du théorème 2.
§ 9. Méthode de descente: Réduction du théorème 3 au lemme 13.
§ 10. Formule de Bouaziz et calcul de θ_Ω.
§ 11. Formule de Poisson-Plancherel.

§ 1. Intégrale invariante dans $\mathfrak{m}$

Soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}$ de même rang que $\mathfrak{g}$, M le sous-groupe analytique correspondant, $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{m}$. On choisit un système de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$ comme en I.5. Nous employons les notations du paragraphe I.5. Nous notons 2e le nombre de valeurs propres <0 de la matrice représentant la restriction de κ à un supplémentaire $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{m}$. Soit $X \in \mathfrak{b}$ un élément $\mathfrak{m}$-réguilier. On pose, pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$:

$$(1) \qquad I_\phi^{\mathfrak{m}}(X) = \prod_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})} \alpha(X) \int_{M/B} \phi(mX)dm.$$

Si l'on identifie $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}^*$, et compte tenu de l'absence de racines réelles (car $\mathfrak{b}$ est fondamentale) $I_\phi^{\mathfrak{m}}$ est, à un facteur constant près dépendant de κ, égal à $F_\phi^{\mathfrak{m}}$. Si l'on note $\mathfrak{b}_n$ l'ensemble des points X de $\mathfrak{b}$ tel que $\alpha(X) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{I,n}(\mathfrak{m}, \mathfrak{b})$, I_ϕ se prolonge par continuité en un élément de $\mathscr{S}(\mathfrak{b}_n)$.

Soit X un élément $\mathfrak{m}$-régulier de $\mathfrak{b}$. On pose, pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$:

$$(2) \qquad M_X^{\mathfrak{m}}(\phi) = (-1)^e |W(M, \mathfrak{b})|^{-1} (2\pi)^{-d} (\partial_p I_\phi^{\mathfrak{m}})(X).$$

D'après Harish-Chandra, la fonction $X \to M_X^{\mathfrak{m}}(\phi)$ se prolonge par continuité à $\mathfrak{b}$ tout entier, ce qui définit $M_X^{\mathfrak{m}}(\phi)$ pour tout $X \in \mathfrak{b}$. Toujours d'après Harish-Chandra, $M_X^{\mathfrak{m}}$ est une distribution tempérée de support MX. De plus:

$$M_0^{\mathfrak{m}}(\phi) = \phi(0). \tag{3}$$

(Pour tout ceci voir [Ha1] ou [Va]).

§ 2. Les distributions V_s

Soit G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G. Un élément $s \in G$ est elliptique si Ad s est un endomorphisme de $\mathfrak{g}$ dont les valeurs propres sont de module 1, et qui est semi-simple.

Soit $s \in G_{ell}$. Soit M la composante neutre du centralisateur $G(s)$ de s dans G (*), et soit $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Comme s est elliptique, il est contenu dans un sous-groupe de Cartan fondamental B de G.

Si B est un sous-groupe de Cartan fondamental, on note $\mathfrak{b}$ son algèbre de Lie, et $E = B \cap G_{ell}$. On sait que B est connexe, que E est le groupe T correspondant à B et que E est connexe. On note $\mathfrak{e}$ l'algèbre de Lie de E. Donc $\mathfrak{e} = i\mathfrak{b}_{\boldsymbol{R}} \cap \mathfrak{b}$. On note $\mathfrak{e}_Z = \{X \in \mathfrak{e}, \exp X \in Z\}$.

On choisit B contenant s. Donc B est contenu dans M. On pose

$$V_s = \sum_{X \in \mathfrak{b}} \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X) M_X^{\mathfrak{m}}. \tag{4}$$

Soit $S \in \mathfrak{e}$ un élément tel que $\exp S = s$. Alors $\tilde{\chi}(s^{-1} \exp X)$ est non nul seulement si $X \in \mathfrak{e}_Z + S$. Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$. La fonction $X \to M_X^{\mathfrak{m}}(\phi)$ est continue sur $\mathfrak{b}$, à décroissance rapide. La série (4) est donc absolument convergente dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathfrak{m})$ des distributions tempérées sur $\mathfrak{m}$, et V_s est une distribution tempérée sur $\mathfrak{m}$, M-invariante. Il est facile de voir, comme le suggère la notation, que V_s ne dépend pas du choix de B.

Nous noterons $\hat{V}_s$ la fonction généralisée sur $\mathfrak{m}^*$, transformée de Fourier de V_s. Par définition, on a pour $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$:

$$\int_{\mathfrak{m}^*} \hat{V}_s(f)\phi(f)df = \int_{\mathfrak{m}} \left(\int_{\mathfrak{m}^*} \phi(f) e^{-if(X)} df \right) dV_s(X).$$

§ 3. Enoncé des théorèmes 1, 2 et 3

Théorème 1. *Soit $s \in G_{ell}$. Définissons $\mathfrak{m}$, V_s, $\hat{V}_s$ comme au paragraphe 2.*

(*) En fait $G(s)$ est connexe, car G est simplement connexe et s elliptique. Nous ne nous servirons pas de ce résultat.

La distribution $\hat{V}_s df$ est une mesure sur $\mathfrak{m}^*$, absolument continue par rapport à $\delta_{\mathfrak{m},\chi}df$. De plus il existe une unique fonction continue $q(s)$ sur $\mathfrak{m}_\chi^*$ telle que

$$\hat{V}_s = q(s)\delta_{\mathfrak{m},\chi}.$$

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$ et $s \in G_{ell}$ tel que $s \cdot f = f$. Notons $H = G(f)$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f)$, et écrivons $H = TA$ comme en I.3. Alors $s \in T$. Avec les notations ci-dessus, on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$ et $f \in \mathfrak{m}_\chi^*$. Le nombre $q(s)(f)$ est donc défini. On pose:

$$q(s)(f) = q(s,f). \tag{5}$$

Théorème 2 *Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. Avec les notations ci-dessus, on a:*
(i) $q(tst^{-1}, f) = q(s,f)$ $\quad (s, t \in T)$
(ii) $q(sz, f) = \tilde{\chi}(z^{-1})q(s,f)$ $\quad (s \in T, z \in Z)$
(iii) $q(s \exp Y, f) = e^{-if(Y)}q(s,f)$ $\quad (s \in T,\ Y \in \mathfrak{t})$.

Soient $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$, $\Gamma \in X(f)$. Les formules (ii) et (iii) ci-dessus, et les formules (16) (17) du ch. I permettent de poser:

$$\tilde{Q}(\Gamma, f) = \sum_{s \in T/T_0 Z} q(s,f)\xi_f^{-1}\Gamma(s). \tag{6}$$

A cause de (i), c'est un opérateur scalaire, et l'on définit $Q(\Gamma, f)$ par la formule

$$Q(\Gamma, f)Id = \tilde{Q}(\Gamma, f). \tag{7}$$

Théorème 3 *La fonction Q est une fonction de Plancherel au sens du paragraphe* I.8.

La démonstration des théorèmes 1, 2. et 3 fait l'objet de la suite de ce chapitre.

§ 4. Transformée de Fourier de $M_\chi^{\mathfrak{m}}$

Soit $s \in G_{ell}$. Nous employons les notations du paragraphe 2. Nous voulons décrire la transformée de Fourier $\hat{M}_\chi^{\mathfrak{m}}$ qui est une fonction sur $\mathfrak{m}^*$. Ceci nécessite les relations de récurrence d'Harish-Chandra.

Rappelons la notion d'algèbres de Cartan adjacentes. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Soit $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On choisit des éléments X_α, $X_{-\alpha}$ dans $\mathfrak{m}$, de poids α et $-\alpha$, tels que

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h_\alpha. \tag{8}$$

On pose $\mathfrak{h}' = \boldsymbol{R}(X_\alpha - X_{-\alpha}) \oplus \ker \alpha$. C'est une algèbre de Cartan, que l'on écrit $\mathfrak{h}'=\mathfrak{t}'\oplus\mathfrak{a}'$. On a: $\mathfrak{t}'=\boldsymbol{R}(X_\alpha-X_{-\alpha})\oplus\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}'=\mathfrak{a}\cap\ker\alpha$. On note c_α l'application linéaire $\mathfrak{h}_C\to\mathfrak{h}'_C$, telle que $c_\alpha(X)=X$ si $X\in\ker\alpha$, $c_\alpha(h_\alpha)=i(X_\alpha-X_{-\alpha})$. C'est une transformation de Cayley, dans le sens suivant: il existe m dans le groupe adjoint M_C de M tel que la restriction de m à $\mathfrak{h}_C$ soit égale à c_α.

Soit $\beta\in\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$ une racine telle que $\beta(h_\alpha)=0$. Posons $\beta'=c_\alpha(\beta)$. C'est l'unique élément de $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h}')$ tel que $h_{\beta'}=h_\beta$, et l'application $\beta\to\beta'$ est une bijection de l'orthogonal de h_α dans $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$ sur $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h}')$.

Soit $\Phi^+\subset\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$ un système de racines positives. Nous noterons Φ'^+ l'ensemble des β' où β parcourt l'ensemble des $\beta\in\Phi^+$ orthogonaux à h_α. C'est un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h}')$.

Nous notons $B^{\mathfrak{m}}$ l'espace vectoriel des fonctions b de trois variables $\mathfrak{h}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$, $Y\in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, qui vérifient:

Soit $m\in M$. On a

$$b(m\mathfrak{h}, m\Phi^+, mY)=b(\mathfrak{h},\Phi^+,Y). \tag{9}$$

Soit $\alpha\in\Phi^+$, simple. On a:

$$b(\mathfrak{h},\Phi^+,Y)+b(\mathfrak{h},\Phi^+,s_\alpha Y)=b(\mathfrak{h}',\Phi'^+,c_\alpha Y)+b(\mathfrak{h}',\Phi'^+,c_\alpha s_\alpha Y) \tag{10}$$

où s_α est la réflexion par rapport à la racine α.

On pose $Y=Y_0-i\pi y$, avec $Y_0\in\mathfrak{t}$, $y\in\mathfrak{a}$. On a

$$b(\mathfrak{h},\Phi^+,Y)=0 \qquad \text{si } y\notin\sum_{\alpha\in\Phi^+}\boldsymbol{R}^+h_\alpha, \tag{11}$$

où $\boldsymbol{R}^+=[0,\infty]$.

Si $\mathfrak{h}$ est fondamental, $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})$ est vide et Φ^+ est omis de la notation. La relation (11) s'interprète:

$$b(\mathfrak{h},Y)=0 \qquad \text{si } y\neq 0. \tag{12}$$

Lemme 1. *Soit $b\in B^{\mathfrak{m}}$. La restriction de b à $\mathfrak{e}$ est une fonction $W(M,\mathfrak{b})$-invariante qui détermine b.*

Démonstration. L'invariance de $b(\mathfrak{b},Y)$ ($Y\in\mathfrak{e}$) par $W(M,\mathfrak{b})$ résulte de (9). Supposons $b(\mathfrak{b},Y)=0$ pour tout $Y\in\mathfrak{e}$. Il faut montrer que $b(\mathfrak{h},\Phi^+,Y)$ est nul pour tout $Y\in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$. On raisonne par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})|$. Si $\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})=\varnothing$, $\mathfrak{h}$ est fondamental, et l'assertion résulte de (9) et (12). Supposons $|\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})|>0$ et l'assertion établie pour les $\mathfrak{h}'\in\mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ tels que $|\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h}')|<|\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})|$. La relation (10) montre que l'on a

$$b(\mathfrak{h},\Phi^+,w(Y))=\varepsilon(w)b(\mathfrak{h},\Phi^+,Y) \tag{13}$$

pour tout w dans le groupe de Weyl $W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$ de $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Ecrivons $Y = Y_0 - i\pi y$. Si $y \notin \sum_{\alpha \in \Phi} \boldsymbol{R} h_\alpha$, on a $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y) = 0$. Supposons donc $y \in \sum_{\alpha \in \Phi} \boldsymbol{R} h_\alpha$. Soit $\check{C}$ la chambre de Weyl ouverte dans $\sum_{\alpha \in \Phi} \boldsymbol{R} h_\alpha$, définie par Φ^+. La relation (11) montre que $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y)$ est nul si $y \in -\check{C}$. La relation (13) montre que $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y)$ est nulle. C.Q.F.D.

Lemme 2. *Soit* $b \in B^{\mathfrak{m}}$. *Supposons* $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y) \neq 0$. *Il existe* $w \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$ *tel que* $w(y) = -y$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Si $\mathfrak{h}$ est fondamental, l'assertion résulte de (12). Supposons $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})| > 0$ et l'assertion établie pour tout $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ tel que $|\Phi(\mathfrak{m}', \mathfrak{h})| < |\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Comme $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y)$ est non nul, on a $y = \sum n_i h_{\alpha_i}$, où $n_i \in \boldsymbol{R}^+$, α_i simple dans Φ^+. On pose $ht(y) = \sum n_i$. On peut supposer (quitte à remplacer y par un conjugué) que $ht(wy) \geqq ht(y)$ pour tout élément $w \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$ tel que l'on ait $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y_0 - i\pi wy) \neq 0$. Si $\alpha(y) \leqq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$ on a $y = 0$ et le résultat est établi. Sinon, il existe α simple dans Φ^+ tel que $\alpha(y) > 0$. On a $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha Y) = 0$ car $ht(s_\alpha y) < ht(y)$. La relation (10) montre que l'un au moins des nombres $b(\mathfrak{h}', \Phi'^+, c_\alpha Y)$ ou $b(\mathfrak{h}', \Phi'^+, c_\alpha s_\alpha Y)$ est non nul. Ecrivons $y = th_\alpha + y'$, avec $y' \in \mathfrak{a} \cap \ker \alpha$. L'hypothèse de récurrence montre que l'on a $w'y' = -y'$ pour un élément $w' \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}'))$. Identifions $W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}'))$ à un sous-groupe de $W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$. On a $ws_\alpha y = -y$. C.Q.F.D.

Lemme 3. *Si* $b(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y) \neq 0$, *il existe un élément* m *du groupe adjoint complexe* M_C *tel que* $m\mathfrak{h} = \mathfrak{b}$ *et* $b(\mathfrak{b}, mY) \neq 0$.

Démonstration. Elle est analogue à celle du lemme 1. C.Q.F.D.

Soit $X \in \mathfrak{e}$. La transformée de Fourier $\hat{M}_X^{\mathfrak{m}}$ de $M_X^{\mathfrak{m}}$ est une fonction bornée, M-invariante, analytique dans l'ensemble des éléments $\mathfrak{m}$-réguliers de $\mathfrak{m}^*$. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, et soit Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Soit $C(\Phi^+)$ l'ensemble des $\nu \in \mathfrak{a}^*$ tels que $\nu(h_\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$.

D'après Harish-Chandra, il existe une fonction $Y \to b_X(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y)$ sur $i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, nulle en dehors des conjugués (sous M_C) de X, telle que:

(14) $\hat{M}_X^{\mathfrak{m}}(\lambda) = \sum_{Y \in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}} b_X(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y) e^{-iY\lambda}$ pour tout $\lambda = \mu + \nu$ avec $\mu \in \mathfrak{t}^*$, $\nu \in C(\Phi^+)$. ($b_X(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y)$ est nul sauf pour un nombre fini d'éléments $Y \in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$).

La fonction b_X est dans $B^{\mathfrak{m}}$ et on a:

(15) $$b_X(\mathfrak{b}, Y) = 0 \qquad \text{si } Y \notin W(M, \mathfrak{b})X.$$

(16) $$b_X(\mathfrak{b}, Y) = \frac{1}{|W(M, \mathfrak{b})X|} \qquad \text{si } Y \in W(M, \mathfrak{b})X.$$

(Pour toutes ces propriétés de $\hat{M}_X^{\mathfrak{m}}$, voir [Ve]. Notons que (15) et (16), lorsque X est $\mathfrak{m}$-régulier, sont équivalents à la formule de Rossmann [R]).

§ 5. Transformée de Fourier de V_s: la fonction q_s

Soit $s \in G_{ell}$. La transformée de Fourier $\hat{V}_s$ de V_s est égale à la somme:

(17) $$\hat{V}_s = \sum_{X \in \mathfrak{e}} \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X) \hat{M}_X^{\mathfrak{m}}.$$

Il est donc naturel d'introduire l'élément b_s de $B^{\mathfrak{m}}$ défini par:

(18) $$b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y) = \sum_{X \in \mathfrak{e}} \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X) b_X(\mathfrak{h}, \Phi^+, Y).$$

Remarquons que cette somme est finie pour $\mathfrak{h}$, Φ^+, Y fixés.

Il résulte de (15) et (16) que l'on a:

(19) $$b_s(\mathfrak{b}, X) = \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X) \qquad \text{si } X \in \mathfrak{e}.$$

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, et écrivons $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ comme d'habitude. Nous introduisons ou répétons quelques notations. On pose:

(20) $$\mathfrak{h}_Z = \{X \in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}, \exp(\mathrm{ad}\, X) = 1\}, \ \mathfrak{t}_Z = \mathfrak{h}_Z \cap \mathfrak{t}.$$

On a donc:

(21) $$\mathfrak{h}_Z = \{X \in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}, \alpha(X) \in 2i\pi\boldsymbol{Z} \text{ pour tout } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\}.$$

On pose:

(22) $$\mathfrak{h}_s = \{X \in i\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}, \exp(\mathrm{ad}\, X) = \mathrm{Ad}\, s \text{ (dans End } (\mathfrak{g}_{\boldsymbol{C}})\}$$

($\mathfrak{h}_s$ est donc un translaté du réseau $\mathfrak{h}_Z$). On a:

(23) $$\alpha(X) \in 2i\pi\boldsymbol{Z} \text{ pour tout } X \in \mathfrak{h}_s, \ \alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}).$$

On pose:

(24) $$\check{P}_{\mathfrak{m}} = \{x \in \mathfrak{a}, \alpha(x) \in \boldsymbol{Z} \text{ pour tout } \alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})\}.$$

(25) $$R_{\mathfrak{a}} = \sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \boldsymbol{Z} h_\alpha.$$

(26) $$\mathfrak{a}_s = \{x \in R_{\mathfrak{a}}, (-i\pi x + \mathfrak{t}) \cap \mathfrak{h}_s \neq \emptyset\}.$$

Lemme 4. *Soit Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Soit $X \in i\mathfrak{h}_R$, tel que $b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X) \neq 0$. Alors*:

(i) $X \in \mathfrak{h}_s$

(ii) *Ecrivons* $X = X_0 - i\pi x$, $X_0 \in \mathfrak{t}$, $x \in \mathfrak{a}$. *On a*: $x \in \sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} Zh_\alpha \cap 2\check{P}_{\mathfrak{m}}$, *et donc* $x \in \mathfrak{a}_s$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}'$ deux sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$ et m dans le groupe adjoint complexe M_C tels que $m\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$. On a $m\mathfrak{h}_s = \mathfrak{h}'_s$. Donc (i) résulte du lemme 3 et de (19). Il résulte de (23) que x est dans le réseau $2\check{P}_{\mathfrak{m}}$. Il résulte du lemme 2 qu'il existe $w \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$ tel que $w(x) = -x$. Ecrivons $x = (x/2) - w(x/2)$. Comme $x/2 \in \check{P}_{\mathfrak{m}}$, on a $x \in \sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} Zh_\alpha$. C.Q.F.D.

Lemme 5. *Soit $Y \in \mathfrak{t}_Z$. On a*:

$$b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X+Y) = \tilde{\chi}(\exp Y) b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X). \tag{27}$$

Démonstration. On démontre (27) par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Si $\mathfrak{h}$ est fondamental, (27) résulte de (19) et (9). Supposons $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})| > 0$ et (27) établi si $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ vérifie $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}')| < |\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Pour $X \in i\mathfrak{h}_R$, posons $c(X) = b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X+Y) - \tilde{\chi}(\exp Y) b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X)$. L'hypothèse de récurrence montre que l'on a $c(w(X)) = \varepsilon(w) c(X)$ pour tout $w \in W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$. On conclut comme dans la démonstration du lemme 1. C.Q.F.D.

Lemme 6. *Il existe $d > 0$ tel que l'on ait $|b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X)| \leqq d$ pour tout $X \in i\mathfrak{h}_R$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Si $\mathfrak{h}$ est fondamental, ceci résulte de (19) et (9). On suppose le résultat établi pour $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ vérifiant $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}')| < |\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Notons d' une constante majorant tous les $|b_s(\mathfrak{h}', \Phi'^+, X')|$ lorsque $|\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}')| < |\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})|$. Ecrivons $X = X_0 - i\pi x$. Soit $l(x)$ le nombre minimum tel qu'il existe des réflexions simples (par rapport à Φ^+) $s_1, \cdots, s_{l(x)}$ telles que $s_1 \cdots s_{l(x)}(x)$ soit dans l'adhérence de la chambre $-\check{C}$. Si $l(x) = 0$, la relation (10) montre que l'on a $|b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X)| \leqq d'$. Un raisonnement par récurrence sur $l(x)$ montre que l'on a $|b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X)| \leqq d'^{(1+2l(x))}$. C.Q.F.D.

Considérons deux éléments $X = X_0 - i\pi x$ et $X' = X'_0 - i\pi x'$ dans $\mathfrak{h}_s$ tels que $x = x'$. On a $X'_0 - X_0 \in \mathfrak{h}_Z \cap \mathfrak{t} = \mathfrak{t}_Z$. Soit $\mu \in \mathfrak{t}^*_\chi$. Il résulte du lemme 5 que l'on a:

$$b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X) e^{-iX_0\mu} = b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X') e^{-iX'_0\mu}. \tag{28}$$

La définition suivante est donc licite. Soient $x \in R_a$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, $\mu \in \mathfrak{t}^*_\chi$. On pose:

$$c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) = 0 \qquad \text{si } x \notin \mathfrak{a}_s, \tag{29}$$

$$c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) = b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X) e^{-iX_0\mu} \qquad \text{si } x \in \mathfrak{a}_s. \tag{30}$$

On considère:

$$C(\Phi^+) = \{\nu \in \mathfrak{a}^*, \ \nu(h_\alpha) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Phi^+\}. \tag{31}$$

Lemme 7. *Soit $\nu \in C(\Phi^+)$. On a, avec les notations du lemme* 6:

$$\sum_{x \in R_\mathfrak{a}} |c_s(h, \Phi^+, \mu, x) e^{-\pi x \nu}| \leqq d \prod_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ \alpha \text{ simple}}} (1 - e^{-\pi h_\alpha \nu})^{-1}.$$

Démonstration. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ les racines simples de Φ^+. Si $x \in R_\mathfrak{a}$ est tel que $c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x)$ soit non nul, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{l} n_i h_{\alpha_i}$, avec $n_i \in N$. (Ceci résulte du lemme 4 et de (11)). D'après le lemme 6, la série ci-dessus est donc majorée par:

$$d \sum_{n \in N^l} e^{-\pi \Sigma n_i h_{\alpha_i} \nu} = d \prod_i \sum_{n \in N} e^{-\pi n h_{\alpha_i} \nu}. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soit $\lambda \in \mathfrak{h}_\chi^*$. Ecrivons $\lambda = \mu + \nu$, avec $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$, $\nu \in \mathfrak{a}^*$. Supposons que ν soit régulier pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, c'est-à-dire supposons $\nu(h_\alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Soit Φ^+ le système de racines positives tel que $\nu \in C(\Phi^+)$. Le lemme ci-dessus permet de définir:

$$q_s(\mathfrak{h}, \lambda) = \sum_{x \in \mathfrak{a}_s} c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) e^{-\pi x \nu}. \tag{32}$$

C'est une fonction analytique de $\nu \in C(\Phi^+)$, pour μ fixé dans $\mathfrak{t}_\chi^*$.

Soit $f \in \mathfrak{m}_\chi^*$. Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{m}(f)$. Nous posons

$$q_s(f) = q_s(\mathfrak{h}, f). \tag{33}$$

C'est une fonction continue sur $\mathfrak{m}_\chi^*$. Comme, dans le théorème 1, l'unicité est évidente, le théorème 1 est conséquence du théorème 1′ (plus précis) ci-dessous:

Théorème 1′. *Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$. On a:*

$$\int_{\mathfrak{m}_\chi^*} |q_s(f) \phi(f)| \delta_{\mathfrak{m},\chi}(f) df < \infty. \tag{34}$$

$$\int_{\mathfrak{m}^*} \hat{V}_s(f) \phi(f) df = \int_{\mathfrak{m}_\chi^*} \phi(f) q_s(f) \delta_{\mathfrak{m},\chi}(f) df. \tag{35}$$

Nous démontrerons le théorème 1′ au paragraphe 7. Auparavant nous établissons un résultat qui nous permettra d'appliquer la formule de Poisson à une classe convenable de fonctions sur $\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)$.

§ 6. Sur la formule de Poisson

Soient n, $p \in \boldsymbol{N}$, et soit $q \in \boldsymbol{N}$ tel que $0 \leqq q \leqq n$. On pose $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_p)$. On fixe un ouvert U de $\boldsymbol{R}^p$. On pose $D = \{x \in \boldsymbol{R}^n, x_1 > 0, \cdots, x_q > 0\}$, $\omega(x) = x_1 x_2 \cdots x_q$. On note $\mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^n)$ l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux. On note $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions ϕ, C^∞ sur $D \times U$, telles que $|\Delta\Phi|_\infty < \infty$ pour tout $\Delta \in \mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^n)$. On pose, pour $(z, y) \in \boldsymbol{R}^n \times U$:

$$\mathscr{F}_\phi(z, y) = \int_D e^{izx} \Phi(x, y) dx. \tag{36}$$

Lemme 8. *Il existe $\Delta_1, \cdots, \Delta_k \in \mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^n)$ tels que l'on ait*

$$\prod_{j=1}^n (1 + z_j^2) |\mathscr{F}_{\omega\phi}(z, y)| \leqq \sum_{l=1}^k |\Delta_l \phi|_\infty \tag{37}$$

pour tout $z \in \boldsymbol{R}^n$, $y \in U$, $\phi \in \mathscr{E}$.

Démonstration. Par transformée de Fourier partielle, on peut supposer $q = n$. Soit I une partie de $\{1, 2, \cdots, n\}$. On veut démontrer l'existence pour chaque I d'opérateurs différentiels $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_k \in \mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^n)$ tels que

$$\prod_{j \in I} z_j^2 |\mathscr{F}_{\omega\phi}(z, y)| \leqq \sum_{l=1}^k |\Delta_l \phi|_\infty. \tag{38}$$

On raisonne par récurrence sur n. Supposons d'abord $n = 1$. La formule:

$$\phi(x, y) = -\int_x^1 \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, y) dt + \phi(1, y) \tag{39}$$

permet de définir $\phi(0, y)$ par continuité. Posons $\psi(x, y) = x\Phi(x, y)$. Le même argument prouve que $(\partial\psi/\partial x)(x, y)$ se prolonge par continuité en 0, que l'on a $\psi(0, y) = 0$ et que $(\partial\psi/\partial x)(0, y) = \phi(0, y)$. Pour toute fonction α on a:

$$z^2 e^{izx} \alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{izx} \alpha - e^{izx} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} - 2iz \frac{\partial}{\partial x} e^{izx} \alpha.$$

D'après les remarques précédentes, on obtient donc

$$z^2\int_0^\infty e^{izx}\psi dx = -\phi(0, y) - \int_0^\infty e^{izx}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\phi(x, y))dx. \tag{40}$$

Compte tenu de (39), on voit que l'on peut prendre par exemple $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = (\partial/\partial x)$, $\Delta_3 = (1+x^2)(\partial^2/\partial x^2)x$. Supposons $n > 1$ et (38) établie pour tous les entiers n strictement inférieurs. Si I est vide, il est clair que (38) est vraie. Si I n'est pas vide, on peut supposer que I contient n. On pose $x' = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$, $z' = (z_1, z_2, \cdots, z_{n-1})$, $\omega' = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}$, $D' = \{x' \in \boldsymbol{R}^{n-1}, x_i > 0$, pour $1 \leqq i \leqq n-1\}$, $I' = I - \{n\}$, $U' = \{(z_n, y)$, avec $y \in U\}$, $\mathscr{E}' = \{\psi \in C^\infty(D' \times U'), |\Delta'\psi|_\infty < \infty$ pour tout $\Delta' \in \mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^{n-1})\}$.

Soit $\phi \in \mathscr{E}$, posons

$$\psi(x', z_n, y) = \int_0^\infty e^{iz_n x_n} x_n \phi(x', x_n, y) dx_n.$$

On a $\psi \in \mathscr{E}'$, et

$$\mathscr{F}_{\omega\phi}(z, y) = \int_{D'} e^{iz'x'}\omega'\psi(x', y)dx'.$$

L'hypothèse de récurrence (appliquée à la variable x_n) montre qu'il existe des opérateurs Δ''_s polynômes en x_n et $\partial/\partial x_n$ tels que, pour tout $\Delta' \in \mathrm{Diff}(\boldsymbol{R}^{n-1})$, on ait

$$|z_n^2 \Delta'\psi(x', z_n, y)| \leqq \sum_s |\Delta''_s \Delta' \Phi|_\infty. \tag{41}$$

La fonction $z_n^2\psi(x', z_n, y)$ est donc dans $\mathscr{E}'$. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe $\Delta'_1, \cdots, \Delta'_k$ tels que

$$|(\prod_{j \in I'} z_j^2) z_n^2 \mathscr{F}_{\omega\phi}(z, y)| \leqq \sum_l z_n^2 |\Delta'_l \psi(x', z_n, y)| \leqq \sum_{l,s} |\Delta'_l \Delta''_s \phi|_\infty.$$

C.Q.F.D.

Soit $\phi \in \mathscr{E}$. Posons $\psi(x, y) = \omega(x)\phi(x, y)$ si $x \in D$, et $\psi(x, y) = 0$ si $x \in \boldsymbol{R}^n \backslash D$. Soit Γ un réseau de $\boldsymbol{R}^n$, et soit Γ^* le réseau dual formé des z tels que $zx \in 2\pi\boldsymbol{Z}$ pour tout $x \in \Gamma$.

Lemme 9.
(i) $\mathrm{Sup}_{z,y} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} |\mathscr{F}_\psi(z+\gamma^*, y)| < \infty$.
(ii) *ψ est continue et on a* $\mathrm{Sup}_y \sum_{\gamma \in \Gamma} |\psi(\gamma, y)| < \infty$.
(42) (iii) $\sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \mathscr{F}_\psi(z+\gamma^*, y) = \mathrm{Vol}\,(V/\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{i\gamma z}\psi(\gamma, y)$.

Démonstration. Il résulte du lemme 8 que pour tout opérateur différentiel Δ à coefficients constants sur $\boldsymbol{R}^n$, on a

$$\mathrm{Sup}_y \int_{\boldsymbol{R}^n} |\Delta \mathscr{F}_\psi(z, y)| dz < \infty.$$

Il est classique que la formule de Poisson s'applique à ce genre de fonctions. C.Q.F.D.

Soient V et W deux espaces vectoriels réels, Φ un système de racines dans V^*, $\Phi^+ \subset \Phi$ un système de racines positives, π la fonction polynôme sur V produit des éléments de Φ^+, $V' = \{v \in V, \pi(v) \neq 0\}$, U un ouvert de W. Soit Γ un réseau de V, et soit Γ^* le réseau dual. On choisit une mesure dv sur V. Soit $\beta \in C^\infty(V' \times U)$ une fonction telle que, pour tout opérateur différentiel à coefficients polynomiaux Δ sur V on ait $|\Delta\beta|_\infty < \infty$. On pose $\eta = \pi\beta$, et pour tout $v^* \in V^*$:

$$\hat{\eta}(v^*, w) = \int e^{-iv^*v} \eta(v, w) dv.$$

Lemme 10.
(i) $\mathrm{Sup}_{v^*,w} \sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} |\hat{\eta}(v^* + \gamma^*, w)| < \infty$.
(ii) *η se prolonge par continuité en une fonction continue sur $V \times U$ et l'on a*:

$$\operatorname*{Sup}_{w} \sum_{\gamma \in \Gamma} |\eta(\gamma, w)| < \infty.$$

(43) (iii) $\sum_{\gamma^* \in \Gamma^*} \hat{\eta}(v^* + \gamma^*, w) = \mathrm{Vol}(V/\Gamma) \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-iv^*\gamma} \eta(\gamma, w)$.

Démonstration. Soit V'' une composante connexe de V'. On peut choisir un système coordonnées $x_1, \cdots, x_n$ dans V tel que V'' soit égal à l'ensemble $x_1 > 0, \cdots, x_p > 0$. Dans ces conditions $x_1 \cdots x_p$ divise π et l'on peut appliquer le lemme 9 à la fonction ϕ, nulle en dehors de V'', et égale dans V'' à $\pi\beta / x_1 \cdots x_p$. Le lemme 10 en résulte. C.Q.F.D.

§ 7. Démonstration du théorème 1′

Les notations sont celles du paragraphe 5.

A. Démonstration de (34)

D'après les formules I(38) et I(39), il faut montrer que pour tout $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, la fonction $q_s(\mathfrak{h}, \lambda)\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda)K_\phi(\lambda)$ est intégrable pour la mesure $\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)d\lambda$.

Soit Δ^+ un système de racines positives pour $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, comme en I.5, dont nous employons les notations. Posons, pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$

$$p'(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Phi^+} \overline{\lambda(h_\alpha)}. \tag{44}$$

Soit $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$. Soient $\mu \in \mathfrak{t}_n^*$, $\lambda \in C(\Phi^+)$. Posons:

$$\psi(\mu, \nu) = p'(\mu, \nu) F_\phi(\mu, \nu). \tag{45}$$

D'après I(27), $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{t}_n^* \times C(\Phi^+))$, et de plus, $\psi(\mu, \nu)$ se prolonge par continuité à $\mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)$ en une fonction continue, nulle si $p'(\mu, \nu)=0$ (cela résulte de [Va], th. 23 page 50). Posons $a=(2\pi)^{-d}|W(\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))|v(\mathfrak{h})$. On a:

$$\int_{\mathfrak{h}^*} |q_s(\mathfrak{h}, \lambda)\pi_{\mathfrak{m}/\mathfrak{h}}(\lambda)K_\Phi(\lambda)|\delta_{\mathfrak{h},\chi}(\lambda)d\lambda$$
$$=a \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*} \int_{C(\Phi+)} |q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu)|p_{\boldsymbol{R}}(\nu)|\psi(\mu, \nu)|d\nu.$$

Comme, d'après le lemme 7, la fonction $|q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu)|p_{\boldsymbol{R}}(\nu)$ est bornée sur $\mathfrak{t}_\chi^* \times C(\Phi^+)$, cette intégrale est convergente, ce qui démontre (34). De plus, nous avons prouvé:

$$\int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}} \phi(f)q_s(f)\delta_{\mathfrak{m},\chi}(f)df \tag{46}$$
$$=c(\mathfrak{h}) \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*} \int_{C(\Phi+)} q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu)p_{\boldsymbol{R}}(\nu)\psi(\mu, \nu)d\nu.$$

B. Stabilisation des intégrales orbitales

Soit $\mathcal{O}$ une orbite du groupe adjoint complexe $M_{\boldsymbol{C}}$ dans $\mathfrak{m}_{\boldsymbol{C}}$. Nous posons:

$$M_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}} = \sum_{X \in \mathcal{O} \cap \mathfrak{e}} \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X)M_X^{\mathfrak{m}}. \tag{47}$$

Remarquons que l'ensemble des $\mathcal{O}$ pour lesquelles $M_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}$ est non nulle forme une partition en ensembles finis de l'ensemble discret des $X \in \mathfrak{e}$ tels que $\exp X \in sZ$.

La transformée de Fourier $\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}$ de $M_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}$ est une fonction analytique M-invariante dans l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{m}^*$. Soient $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, et Φ^+ un système de racines positives dans $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Si $(\mu, \nu) \in \mathfrak{t}^* \times C(\Phi^+)$, on a, en écrivant:

$$X = X_0 - i\pi x \qquad (X_0 \in \mathfrak{t},\ x \in \mathfrak{a}), \tag{48}$$

$$\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}(\mu, \nu) = \sum_{X \in \mathfrak{h}_s \cap \mathcal{O}} b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X_0 - i\pi x)e^{-iX_0\mu}e^{-\pi x\nu}. \tag{49}$$

(Ceci résulte du lemme 3, et des formules (18) et (19)).

En C ci-dessous, nous démontrerons le lemme suivant:

Lemme 11. *Soit* $\phi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$. *Soit* $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. *On a*:

$$\sum_{\mathcal{O}} \left| \int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}} \phi(f)\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}(f)df \right| < \infty, \tag{50}$$

$$\sum_{\mathcal{O}} \int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}} \phi(f)\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}(f)df = \int_{\mathscr{V}_{\mathfrak{m},\mathfrak{h}}} q_s(f)\phi(f)\delta_{\mathfrak{m},\chi}(f)df. \tag{51}$$

Montrons que le lemme ci-dessus entraine (35), ce qui termine la démonstration des théorèmes 1′ et 1. On a:

$$\int_{\mathfrak{m}^*} \hat{V}_s(f)\phi(f)df = \sum_{X} \chi(s^{-1}\exp X) \int_{\mathfrak{m}^*} \phi(f)\hat{M}_X^{\mathfrak{m}}(f)df,$$

la série étant absolument convergente d'après la convergence de (4) dans $\mathscr{S}'(\mathfrak{m})$. En regroupant orbite par orbite, on obtient

$$\sum_{\mathcal{O}} \int_{\mathfrak{m}^*} \phi(f)\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}(f)df$$
$$= \sum_{\mathcal{O}} \left(\sum_{(\mathfrak{h})} \int_{\mathscr{V}_{m,h}} \phi(f)\hat{M}_{\mathcal{O}}^{\mathfrak{m}}(f)df \right),$$

où la somme est prise sur l'ensemble des classes de conjugaison d'algèbres de Cartan de $\mathfrak{m}$. La formule (50) permet d'intervertir les deux signes $\sum$. La formule (51) implique alors la formule (35).

C. Démonstration du lemme 11

Nous employons les notations du lemme 11. On choisit $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ comme ci-dessus, et on définit ψ comme en (45). Pour simplifier les notations nous posons:

$$b(X_0, x) = b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X_0 - i\pi x) \tag{52}$$

et:

$$\int_{\mathfrak{t}^*} b(X_0, x)e^{-iX_0\mu}e^{-\pi x\nu}p_R(\nu)\psi(\mu, \nu)d\mu = \theta(X_0, x, \nu). \tag{53}$$

Compte tenu des formules I. (34) et (46), il suffit de démontrer les deux assertions suivantes:

$$\sum_{\mathcal{O}} \left| \int_{C(\Phi+)} \sum_{X \in \mathfrak{h}_s \cap \mathcal{O}} \theta(X_0, x, \nu)d\nu \right| < \infty, \tag{54}$$

$$\sum_{\mathcal{O}} \int_{C(\Phi+)} \sum_{X \in \mathfrak{h}_s \cap \mathcal{O}} \theta(X_0, x, \nu)d\nu \tag{55}$$
$$= v(\mathfrak{h}) \sum_{\mu \in t_\chi^*} \int_{C(\Phi+)} q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu)p_R(\nu)\psi(\mu, \nu)d\nu.$$

Il suffit donc de montrer les deux assertions suivantes

$$\sum_{X \in \mathfrak{h}_s} \int_{C(\Phi+)} |\theta(X_0, x, \nu)| d\nu < \infty, \tag{56}$$

$$\sum_{X \in \mathfrak{h}_s} \theta(X_0, x, \nu) = v(\mathfrak{h}) \sum_{\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*} q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu) p_R(\nu) \psi(\mu, \nu). \tag{57}$$

Nous notons $\mathfrak{a}_s'$ l'ensemble des $x \in \sum_{\alpha \in \Phi+} N h_\alpha$ tels qu'il existe un élément $c(x) \in \mathfrak{t}$ tel que $c(x) - i\pi x \in \mathfrak{h}_s$. Tout élément $X \in \mathfrak{h}_s$ tel que $b(X_0, x)$ soit non nul s'écrit de manière unique sous la forme $Y + c(x) - i\pi x$, avec $x \in \mathfrak{a}_s'$ et $Y \in \mathfrak{t}_Z$ (Lemme 4 et (11)).

Notons $\hat{\psi}(Y, \nu)$ la transformation de Fourier partielle:

$$\hat{\psi}(Y, \nu) = \int_{\mathfrak{t}^*} e^{-iY\mu} \psi(\mu, \nu) d\mu \quad (Y \in \mathfrak{t}, \nu \in C(\Phi^+)). \tag{58}$$

D'après (53) et (27), on a:

$$\theta(c(x) + Y, x, \nu) = p_R(\nu) e^{-\pi x \nu} b(c(x), x) \tilde{\chi}(\exp Y) \hat{\psi}(Y + c(x), \nu). \tag{59}$$

Posons $q(\nu) = (1 + \kappa(\nu, \nu))^{\dim \mathfrak{a}}$, et

$$\beta(\mu, \nu) = q(\nu) p'(\mu, \nu) p_{I,n}(\nu)^{-1} F_\phi(\mu, \nu).$$

Posons

$$\eta(\mu, \nu) = p_{I,n}(\mu) \beta(\mu, \nu) = q(\nu) \psi(\mu, \nu).$$

Le lemme 10 s'applique. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que l'on ait:

$$\sum_{Y \in \mathfrak{t}_Z} \left| \hat{\psi}(Y + c(x), \nu) \right| \leq \frac{c}{q(\nu)}$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}_s'$, $\nu \in C^+(\Phi)$. Compte tenu de (59) et du lemme 6, on obtient:

$$\sum_{Y \in \mathfrak{t}_Z} \left| \theta(c(x) + Y, x, \nu) \right| \leq \frac{p_R(\nu)}{q(\nu)} e^{-\pi x \nu} cd, \tag{60}$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}_s'$. Comme dans la démonstration du lemme 7, on viot que l'on a:

$$\sup_{\nu \in C(\Phi+)} p_R(\nu) \sum_{x \in \mathfrak{a}_s'} e^{-\pi x \nu} < \infty. \tag{61}$$

Comme $q(\nu)^{-1}$ est intégrable dans $\mathfrak{a}^*$, nous avons démontré (56).

Le lemma 10 nous permet de calculer la série $\sum_{Y \in \mathfrak{t}_Z} \tilde{\chi}(\exp Y) \hat{\psi}(Y + c(x), \nu)$ par la formule de Poisson. On trouve

$$v(\mathfrak{h}) \sum_{\mu \in t_\chi^*} \psi(\mu, \nu) e^{-ic(x)\mu}.$$

On a donc:

$$\sum_{X \in \mathfrak{h}_s} \theta(X_0, x, \nu) = \sum_{x \in \mathfrak{a}_s'} \sum_{Y \in t_Z} \theta(c(x)+Y, x, \nu)$$
$$= v(\mathfrak{h}) \sum_{x \in \mathfrak{a}_s'} \sum_{\mu \in t_\chi^*} e^{-\pi x \nu} b(c(x), x) e^{-ic(x)\mu} p_R(\nu) \psi(\mu, \nu).$$

La série double du second membre converge absolument à cause du lemme 7, et parce que $\psi(\mu, \nu)$ est à décroissance rapide. Sommant d'abord par rapport à $x \in \mathfrak{a}_s'$, et, compte tenu de la définition de $q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu)$, on obtient (57). C.Q.F.D.

§ 8. Démonstration du théorème 2

A. Démonstration de (i)

Soient $s \in G_{ell}$, et $\mathfrak{m}$ comme au paragraphe 2. Soit $g \in G$. On a $V_{gsg^{-1}} = {}^g V_s$, où ${}^g V_s$ est la distribution sur Adg $\mathfrak{m}$ obtenue en transportant V_s. Donc, si $f \in \mathfrak{m}_\chi^*$, on a:

$$q(gsg^{-1})\,(g \cdot f) = q(s)(f).$$

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$, et écrivons $G(f) = H = TA$ comme en I.3. Soient $s, t \in T$. On a:

$$q(tst^{-1})(tf) = q(s)(f)$$

et $tf = f$. On obtient donc

$$q(tst^{-1}, f) = q(s, f). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

B. Démonstration de (ii)

Soient $s \in G_{ell}$ et $\mathfrak{m}$ comme au paragraphe 2. L'algèbre $\mathfrak{m}$ est aussi le centralisateur de sz pour tout $z \in Z$. Il résulte de (4) que l'on a:

$$V_{sz} = \tilde{\chi}(z)^{-1} V_s.$$

et (ii) en résulte immédiatement. C.Q.F.D.

C. Démonstration de (iii)

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. On note $H = G(f)$, et on emploie les notations habituelles $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, $H = TA$.

Soient $s \in T$, $M = G(s)_0$, $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Nous notons M'' le centralisateur de $\mathfrak{t}$ dans M, $\mathfrak{m}''$ son algèbre de Lie.

Soit $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Comme α est nulle sur $\mathfrak{t}$, on voit que $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}'', \mathfrak{h})$. Posons $\Phi = \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Soit $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi, f(h_\alpha) > 0\}$. Ecrivons $f(\mu, \nu)$ avec $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$, $\nu \in C(\Phi^+)$. Rappelons la définition (32):

$$q_s(\mathfrak{h}, \mu, \nu) = \sum_{x \in R_\alpha} c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) e^{-\pi x \nu}. \tag{62}$$

Soit $Y \in \mathfrak{t}$ et posons $s' = s \exp(Y)$, $M' = G(s')_0$, et soit $\mathfrak{m}'$ l'algèbre de Lie de M'. L'algèbre $\mathfrak{m}'$ contient $\mathfrak{m}''$, et pour les mêmes raisons que ci-dessus, on a $\Phi = \Phi(\mathfrak{m}', \mathfrak{h})$, et

$$q_{s'}(\mathfrak{h}, \mu, \nu) = \sum_{x \in R_\alpha} c_{s'}(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) e^{-\pi x \nu}. \tag{63}$$

Nous sommes ramenés à démontrer:

$$c_{s'}(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x) = e^{-i\mu Y} c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x). \tag{64}$$

Soit $X \in \mathfrak{h}_s$. Alors $X + Y \in \mathfrak{h}_{s'}$, et, compte tenu de (30) nous sommes ramenés à démontrer que pour tout $X \in i\mathfrak{h}_R$, on a:

$$b_{s'}(\mathfrak{h}, \Phi^+, X+Y) = b_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, X). \tag{65}$$

Remarquons que toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{m}''$ est contenue àl a fois dans $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$, et que, comme plus haut, on a $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}') = \Phi(\mathfrak{m}', \mathfrak{h}') = \Phi(\mathfrak{m}'', \mathfrak{h}')$. Nous allons prouver que l'on a:

$$b_{s'}(\mathfrak{h}', \Phi'^+, X+Y) = b_s(\mathfrak{h}', \Phi'^+, X), \tag{66}$$

pour tout $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m}'')$, Φ'^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{m}'', \mathfrak{h}')$, $X \in i\mathfrak{h}'_R$. Notez que $Y \in i\mathfrak{h}'_R$ de sorte que (66) a bien un sens. Les deux côtés de (66) sont dans l'espace $B^{\mathfrak{m}''}$. Il suffit donc, d'après le lemme 1, de vérifier (66) pour une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{m}''$. Une telle sous-algèbre est encore fondamentale dans $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$. Appliquons la formule (19). On a:

$$b_s(\mathfrak{b}, X) = \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X)$$
$$b_{s'}(\mathfrak{b}, X+Y) = \tilde{\chi}(s^{-1} \exp(-Y) \exp(X+Y)) = \tilde{\chi}(s^{-1} \exp X).$$

C.Q.F.D.

§ 9. Méthode de descente: réduction du théorème 3 au lemme 13

Soit $s \in G_{ell}$. Notons comme d'habitude $M = G(s)_0$, $\mathfrak{m}$ l'algèbre de Lie de M. Soit $\varepsilon > 0$. On note $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ l'ouvert de $\mathfrak{m}$ formé des $Y \in \mathfrak{m}$ tels que l'on ait $|\mathrm{Im}\, \lambda| < \varepsilon$ pour toute valeur propre λ de ad Y (dans $\mathfrak{g}$). On pose:

(67) $$\mathscr{W}_{s,\varepsilon} = \bigcup_{g \in G} gs \exp(\mathscr{V}_{s,\varepsilon}) g^{-1}.$$

Le lemme suivant est bien connu (cf. [B]).

Lemme 12. (i) *Si ε est assez petit, $\mathscr{W}_{s,\varepsilon}$ est un ouvert de G.*

(ii) *Quelle que soit la fonction ε: $G_{ell} \to]o, \infty[$, les $\mathscr{W}_{s,\varepsilon(s)}$ $(s \in G_{ell})$ forment un recouvrement de G.*

On note $\mathfrak{q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{g}$ pour la forme κ. On a donc

(68) $$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{q}.$$

Considérons l'application:

$$(X, Y) \longrightarrow \exp(X) s \exp Y \exp(-X) s^{-1} \exp(-Y)$$

de $\mathfrak{q} \times \mathfrak{m}$ dans G. Identifions $\mathfrak{g}$ à l'espace tangent à G en 1, et $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{q} \times \mathfrak{m}$. Le jacobien de cette application en un point $(O, Y) \in \mathfrak{q} \times \mathfrak{m}$ sera noté $D_s(Y)$. On a:

(69) $$D_s(Y) = \left| \det \left(\left(\frac{e^{\operatorname{ad} Y} - 1}{\operatorname{ad} Y} \right) \Big|_{\mathfrak{m}} \right) \det \left(\left(1 - \operatorname{Ad} s e^{\operatorname{ad} Y} \right) \Big|_{\mathfrak{q}} \right) \right|.$$

Nous posons

(70) $$J_s(Y) = D_s(Y)^{1/2} D_s(0)^{-1/2}.$$

Si ε est assez petit, J_s est analytique et strictement positive dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$.

Si ε est assez petit, l'application $Y \to s \exp Y$ de $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ dans G est un difféomorphisme de $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ sur une sous-variété fermée de l'ouvert $\mathscr{W}_{s,\varepsilon}$, et cette sous-variété est transverse aux orbites de G dans $\mathscr{W}_{s,\varepsilon}$. Soit Θ une fonction généralisée dans $\mathscr{W}_{s,\varepsilon}$, invariante par automorphismes intérieurs. On peut donc considérer l'image réciproque de Θ dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ par l'application $Y \to s \exp Y$. Nous la noterons $\Theta(s \exp Y)$. Suivant Harish-Chandra, on considère la fonction généralisée θ^s dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ définie par la formule:

(71) $$\theta^s(Y) = J_s(Y) \Theta(s \exp Y).$$

La fonction généralisée θ^s détermine Θ. De plus une suite Θ_n de fonctions généralisées G-invariantes dans $\mathscr{W}_{s,\varepsilon}$ converge faiblement vers 0 si et seulement si la suite correspondante θ_n^s converge faiblement vers 0 (cf. e.g. [D.H.V], appendice).

Nous pouvons expliquer le principe de la démonstration du théorème 3. Soit Q la fonction définie par la formule (7), et soit, pour tout $\Omega \in \mathfrak{g}_\chi^*/G$, Θ_Ω la fonction généralisée sur G définie par la formule I(43). Notons

Θ_χ la fonction généralisée (de support Z) qui à ϕdg ($\phi \in C_c^\infty(G)$) associe $\sum_{z \in Z} \phi(z)\chi(z)$. Nous interprétons I(44) comme une identité de fonctions généralisées dans G:

$$\int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} \Theta_\Omega dm_\chi(\Omega) = \Theta_\chi. \tag{72}$$

Pour démontrer (72), il suffit de le faire dans chacun des ouverts $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ où ε est un nombre >0 aussi petit que l'on veut (lemme 12). La distribution θ_χ^s correspondante dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ est facile à calculer. Si ε est assez petit:

$$\theta_\chi^s = 0 \qquad \text{si } s \notin Z \tag{73}$$

$$\int \theta_\chi^s(Y)\psi(Y)dY = \chi(s)\psi(0) \tag{74}$$

si $s \in Z$, et $\psi \in C_c^\infty(\mathscr{V}_{s,\varepsilon})$.

Notons θ_Ω^s la fonction généralisée dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ correspondant à Θ_Ω par la formule (71). Le théorème 3 est donc conséquence du lemme suivant, qui sera démontré plus loin.

Lemme 13. *Si ε est assez petit, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathscr{V}_{s,\varepsilon})$ on a:*

$$\int_{\mathfrak{g}_\chi^*/G} \theta_\Omega^s(\psi dY)dm_\chi(\Omega) = \begin{cases} 0 & si\ s \notin Z \\ \chi(s)\psi(0) & si\ s \in Z. \end{cases} \tag{75}$$

Cette formule sous-entend que l'intégrale est absolument convergente.

§ 10. Formule de Bouaziz et calcul de θ_Ω^s

Commençons par quelques notations. Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ un élément régulier, et écrivons $G(f) = H = TA$ comme en I.3. Soit $s \in T$. Soient M, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q}$ comme en II.9. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(f)$. Soit $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}, f)$ (voir I.4).

$$\gamma(s,f) = \xi_f(s) / \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})} (1 - \zeta_\alpha(s)). \tag{76}$$

Comme dans la démonstration du lemme 2, on voit que $\gamma(s,f)$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{l}$.

Soit $f_0 \in \mathfrak{g}_\chi^*$ et soit $\Gamma_0 \in X(f)$. On note Θ_{f_0,Γ_0} le caractère de la représentation T_{f_0,Γ_0}, c'est-à-dire la fonction généralisée sur G définie par la formule:

$$\Theta_{f_0,\Gamma_0}(\phi dg) = \operatorname{tr} T_{f_0,\Gamma_0}(\phi dg). \tag{77}$$

Soit $s \in G_{ell}$. On définit M et $\mathfrak{m}$ comme d'habitude. Soit $\Omega = Gf_0$. On munit $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$ de la mesure décrite en I.7. Soit $f \in \Omega \cap \mathfrak{m}^*$. Soit $g \in G$ tel que $g \cdot f_0 = f$. On pose, suivant [D-H-V]:

(78) $$\phi_{f_0,\Gamma_0}(f) = \gamma(s,f) \operatorname{tr}(\xi_f^{-1}({}^g\Gamma_0)(s)).$$

Ceci ne dépend pas du choix de g, et la fonction ϕ_{f_0,Γ_0} est constante sur les orbites de M dans $\Omega \cap \mathfrak{m}^*$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\theta^s_{f_0,\Gamma_0}$ la fonction généralisée dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$ qui correspond à Θ_{f_0,Γ_0} par la formule (71). La formule (79) ci-dessous est démontrée dans [D-H-V] si $H = T$, et par Bouaziz [B] dans le cas général.

Si ε est assez petit, on a l'identité suivante de fonctions généralisées dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$:

(79) $$\theta^s_{f_0,\Gamma_0}(X) = \int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} e^{if(X)} \phi_{f_0,\Gamma_0}(f) d\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f).$$

Lemme 14. *Si ε est assez petit, on a l'identité suivante de fonctions généralisées dans $\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$*

(80) $$\theta^s_\Omega(X) = \int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} e^{if(X)} \gamma(s,f) q(s^{-1},f) d\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f).$$

Démonstration. Rappelons la définition de $\tilde{Q}(\Gamma,f)$ et $Q(\Gamma,f)$ (formules 6 et 7), et de Θ_Ω (formule I.43). On doit démontrer, compte tenu de (79):

(81) $$q(s^{-1},f) = \frac{1}{|G(f)/G(f)_0 Z|} \sum_{\Gamma \in X(f)} (\dim \Gamma) \operatorname{tr}(\tilde{Q}(\Gamma,f)\xi_f^{-1}\Gamma(s)).$$

La formule d'inversion de Fourier (projective) sur le groupe fini T/T_0Z montre que cette formule est équivalente à (6). C.Q.F.D.

§ 11. Formule de Poisson-Plancherel

Soit $s \in G_{ell}$. On définit M, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{q}$, comme en II.2 et I.5, et on note 2d la dimension de $\mathfrak{q}$.

A. Définition d'un polynôme sur $\mathfrak{m}^*$

Lemme 15. *Il existe un polynôme (uniquement déterminé) π_s sur $\mathfrak{m}^*$ tel que l'on ait*

(82) $$\pi_s(f) = i^d \gamma(s,f) \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f)$$

pout tout $f \in \mathfrak{m}^*$, $\mathfrak{g}$-régulier.

Démonstration. Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Soit $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$. Posons, pour $f \in \mathfrak{h}_C^*$:

$$(83) \qquad \omega_{\mathfrak{h}}(f)=\zeta_{\rho_{\mathfrak{l}}}(s) \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})} f(h'_\alpha)/(\zeta_\alpha(s)-1).$$

La fonction $\omega_{\mathfrak{h}}$ est un polynôme sur $\mathfrak{h}_C^*$. Il est facile de voir que $\omega_{\mathfrak{h}}$ est invariant par le groupe de Weyl $W(\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$, et donc restriction à $\mathfrak{h}_C^*$ d'un polynôme (toujours noté $\omega_{\mathfrak{h}}$) sur $\mathfrak{m}_C^*$, invariant par le groupe adjoint complexe M_C, d'après le théorème de Chevalley. D'autre part, il est facile de voir que $\omega_{\mathfrak{h}}$ ne dépend pas du choix de $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$. Soit $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$ et soit γ une transformation de Cayley: $\mathfrak{h}_C \to \mathfrak{h}'_C$. On a: $\omega_{\mathfrak{h}'}(\gamma f)=\omega_{\mathfrak{h}}(f)$ pour tout $f \in \mathfrak{h}_C^*$. Il résulte de l'invariance que l'on a $\omega_{\mathfrak{h}'}(\gamma f)=\omega_{\mathfrak{h}'}(f)$, et donc $\omega_{\mathfrak{h}}=\omega_{\mathfrak{h}'}$. Nous posons $\omega=\omega_{\mathfrak{h}}$.

La forme κ est non dégénérée sur $\mathfrak{q}$. Nous notons $2e$ (resp. $2k$) le nombre de valeur propres >0 (resp. <0) de la matrice symétrique non dégénérée associée. Nous verrons plus bas que e et k sont entiers. On a $e+k=d$. Le lemme 15 résultera de la formule suivante. Soit $f \in \mathfrak{m}^*$ un élément $\mathfrak{g}$-régulier. On définit $\pi_s(f)$ par (82). On a:

$$(84) \qquad \pi_s(f)=(-1)^e(2\pi)^{-d}\omega(f).$$

Démontrons (84). Soit $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(f)$, et choisissons $\mathfrak{l} \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}, f)$. Il résulte de la définition de $\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}$(I.(21)) que l'on a

$$(85) \qquad \pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f)=(2\pi)^{-d} \prod_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})} |f(h'_\alpha)|.$$

Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})$. Si α est réelle, on a $f(h'_\alpha)=|f(h'_\alpha)|$. Si α est complexe, on a $\bar{\alpha} \in \Delta(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})$ et $|f(h'_\alpha)||f(h'_{\bar{\alpha}})|=f(h'_\alpha)f(h'_{\bar{\alpha}})$. Si α est imaginaire non compacte, on a $|f(h'_\alpha)|=\mathrm{i}f(h'_\alpha)$. Si α est imaginaire non compacte, on a $|f(h'_\alpha)|=-\mathrm{i}f(h'_\alpha)$ (voir les formules I(10), (11), (12)). On a donc:

$$(86) \qquad \pi_s(f)=i^{d+n-c}\omega(f)$$

où n (resp. c) est le nombre de racines imaginaires non compactes (resp. compactes) dans $\Delta^+(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})$. Notons co le nombre de racines complexes, et r le nombre de racines réelles dans $\Delta^+(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{q}_C, \mathfrak{h})$. On a facilement:

$$(87) \qquad 2e=2n+co+r, \qquad 2k=2c+co+r.$$

Comme e ne dépend pas de $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, et comme co est pair, on voit, en choisissant $\mathfrak{h}$ fondamental, que e et k sont entiers. On a $d+n-c=(n+c+co+r)+n-c=2n+co+r=2e$ et donc $i^{d+n-c}=(-1)^e$.

C.Q.F.D.

B. Formule de Poisson-Plancherel

Les formules (79) et (80) permettent de prolonger $\theta^s_{f_0,\Gamma_0}(X)$ et $\theta^s_\Omega(X)$ comme des fonctions généralisées sur l'espace $\mathfrak{m}$ tout entier. On pose $\Delta_s = \partial_{\pi_s}$, où π_s est le polynôme défini dans le lemme 15.

Théorème 4. *Soit $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{m})$. On a la formule:*

(88) $$\int_{\mathfrak{g}^*_\chi/G} |\theta^s_\Omega(\psi dY)|\, dm_\chi(\Omega) < \infty$$

et

(89) $$\int_{\mathfrak{g}^*_\chi/G} \theta^s_\Omega(\psi dY) dm_\chi(\Omega) = V_{s-1}(\Delta_s \psi).$$

Démonstration. Posons $\phi(f) = \int_{\mathfrak{m}} e^{if(X)} \psi(X) dX$. Donc ϕ est dans $\mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$, et l'on a, d'après (80):

(90) $$\theta^s_\Omega(\psi dY) = \int_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*} \gamma(s,f) q(s^{-1}, f) \phi(f) d\beta_{\Omega \cap \mathfrak{m}^*}(f).$$

Posons $I = \int_{\mathfrak{g}^*_\chi/G} |\theta^s_\Omega(\psi dY)| dm_\chi(\Omega)$. De (90) et I (42), on déduit:

(91) $$I \leqq \int_{\mathfrak{m}^*_\chi} |\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f) \gamma(s,f) q(s^{-1}, f) \phi(f)|\, \delta_{\mathfrak{m},\chi}(f) df.$$

Posons $\phi'(f) = \int_{\mathfrak{m}} e^{if(X)} (\Delta_s \psi)(X) dX$. Il résulte du lemme 15 que l'on a:

$$\pi_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}(f) \gamma(s,f) \phi(f) = \phi'(f)$$

et donc

(92) $$I \leqq \int_{\mathfrak{m}^*_\chi} |q(s^{-1}, f) \phi'(f)|\, \delta_{\mathfrak{m},\chi}(f) df.$$

Comme ϕ' est dans $\mathscr{S}(\mathfrak{m}^*)$, (88) résulte du théorème 1'. Les mêmes calculs montrent que l'on a:

$$\int_{\mathfrak{g}^*_\chi/G} \theta^s_\Omega(\psi dY) dm_\chi(\Omega) = \int_{\mathfrak{m}^*} \hat{V}_{s-1}(f) \phi'(f) df = V_{s-1}(\Delta_s \psi).$$

C.Q.F.D.

Démontrons le lemme 13. Calculons la distribution donnée par le membre de gauche de (75). Si $s \notin Z$, le support de V_{s-1} ne rencontre pas

$\mathscr{V}_{s,\varepsilon}$, si ε est assez petit. Si $s \in Z$, on a $V_{s-1}(\psi)=\tilde{\chi}(s)\psi(0)$, et $\tilde{\chi}(s)\Delta_s=\chi(s)$.
C.Q.F.D.

Dans le chapitre suivant, on relie la fonction $q(s,f)$ à la fonction de Plancherel donnée par Harish-Chandra.

III. Seconde forme du théorème de Plancherel

§ 1. La fonction de Plancherel d'Harish-Chandra: énoncé du théorème 1.
§ 2. Rappel de résultats de [P-V].
§ 4. Démonstration du théorème 1.

§ 1. La fonction de Plancherel d'Harish-Chandra: énoncé du théorème 1

Soit $f \in \mathfrak{g}_\chi^*$. On pose $H=G(f)$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(f)$, et on écrit $H=TA$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{a}$ comme en I.3. Avec les notations de II.4, on pose, pour $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$:

$$\gamma_\alpha=\exp(\pi(X_\alpha-X_{-\alpha})). \tag{1}$$

C'est un élément de T. L'élément γ_α peut dépendre du choix de X_α, mais la paire $\{\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\}$ n'en dépend pas. L'image de γ_α dans le groupe adjoint complexe G_C est égale à $\exp(i\pi h_\alpha)$. Ceci implique que γ_α^2 appartient au centre de G.

Soit $t \in T$. On a soit $tX_\alpha=X_\alpha$, soit $tX_\alpha=-X_\alpha$, et donc:

$$t\gamma_\alpha t^{-1}=\gamma_\alpha \quad \text{ou } \gamma_\alpha^{-1}. \tag{2}$$

Soit $\Gamma \in X(f)$. A cause de (2), l'opérateur $\Gamma(\gamma_\alpha)+\Gamma(\gamma_\alpha^{-1})$ est scalaire, et ne dépend que de α (et pas du choix de X_α). On pose:

$$\frac{1}{2}(\Gamma(\gamma_\alpha)+\Gamma(\gamma_\alpha^{-1}))=x_\Gamma(\alpha)Id. \tag{3}$$

De même, si $u_\Gamma(\alpha)$ est une valeur propre de $\Gamma(\gamma_\alpha)$, les valeurs propres de $\Gamma(\gamma_\alpha)$ sont soit $\{u_\Gamma(\alpha)\}$, soit $\{u_\Gamma(\alpha), u_\Gamma(\alpha)^{-1}\}$, et l'on a

$$x_\Gamma(\alpha)=\frac{1}{2}(u_\Gamma(\alpha)+u_\Gamma(\alpha)^{-1}). \tag{4}$$

On pose $n_\alpha=\frac{1}{2}\sum\beta(h_\alpha)$, où la somme est prise sur l'ensemble des $\beta \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tels que $\beta+\bar{\beta} \in \boldsymbol{R}^+\alpha$. C'est un entier, car si $\beta=\alpha$, on a $\beta(h_\alpha)=2$, et si $\beta\neq\alpha$, on a $\beta(h_\alpha)=\bar{\beta}(h_\alpha)$, et $\beta\neq\bar{\beta}$. On pose $\varepsilon_\alpha=(-1)^{n_\alpha}$.

Suivant Harish-Chandra, on choisit un système de racines positives Φ^+ pour $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et on pose:

$$(5)\qquad R(\Gamma,f)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}\frac{|\mathrm{sh}\,(\pi f(h_\alpha))|}{\mathrm{ch}\,(\pi f(h_\alpha))-\varepsilon_\alpha x_\Gamma(\alpha)}.$$

Théorème 1. *On a* $Q(\Gamma,f)=R(\Gamma,f)$.

Compte tenu du théorème I.3, cela démontre que $R(\Gamma,f)$ est une fonction de Plancherel pour G, au sens du paragraphe I.8. Lorsque le noyau de χ dans Z est d'indice fini, ceci a été démontré par Harish-Chandra [Ha2], et en général par Herb-Wolf [H-W].

Plus précisément, notons $R'(\Gamma,f)$ la fonction de Plancherel que l'on peut déduire de [Ha2] (lorsque ker χ est d'indice fini), et $R''(\Gamma,f)$ celle de [H-W]. On voit facilement, compte tenu de (5) et des définitions données dans les références citées, que l'on a:

$$(6)\qquad R(\Gamma,f)=c'(\mathfrak{h})R'(\Gamma,f)\qquad\text{et}\qquad R(\Gamma,f)=c''(\mathfrak{h})R''(\Gamma,f)$$

où $c'(\mathfrak{h})$ et $c''(\mathfrak{h})$ sont des constantes explicites (ne dépendant que de $\mathfrak{h}$). Nous avons vérifié directement que l'on a bien $c'(\mathfrak{h})=1$ (voir [Du] théorème (55)). Remarquons d'ailleurs que le présent article répond positivement à la remarque (56) de [Du]. Le calcul de $c'(\mathfrak{h})$ revient essentiellement au calcul du volume de l'espace K/T, où K/Z est un sous-groupe compact maximal de G/Z contenant T/Z.

§ 2. Rappels de résultats de [P-V]

Soit $\mathfrak{h}\in\mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. Soit Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. On définit $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{a}$, $C(\Phi^+)$ comme en I.3 et I.5. Soient $\nu\in C(\Phi^+)$, $\sigma\in\hat{T}$. Soit θ un caractère unitaire du groupe $R_{\mathfrak{a}}=\sum Zh_\alpha$. On pose:

$$(7)\qquad P(\sigma,\nu,\theta)=\prod_{\alpha\in\Phi^+}\frac{\mathrm{sh}\,\pi\nu(h_\alpha)}{\mathrm{ch}\,\pi\nu(h_\alpha)+x_\sigma(\alpha)\theta(h_\alpha)},$$

où $x_\sigma(\alpha)$ est défini comme en (3). Soit, comme plus haut, $u_\sigma(\alpha)$ une valeur propre de $\sigma(\gamma_\alpha)$. On a:

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{sh}\,\pi\nu(h_\alpha)}{\mathrm{ch}\,\pi\nu(h_\alpha)+x_\sigma(\alpha)\theta(h_\alpha)}=\sum_{k\in Z}(-1)^k\theta(h_\alpha)^k u_\sigma(\alpha)^k e^{-|k|\pi\nu(h_\alpha)}.$$

Soit $k=(k(\alpha))\in Z^{\Phi^+}$. Nous posons $u_\sigma^k=\prod_\alpha u_\sigma(\alpha)^{k(\alpha)}$, $(-1)^k=\prod_\alpha(-1)^{k(\alpha)}$. Soit $x\in R_{\mathfrak{a}}$. On pose:

(9) $d(\mathfrak{h},\Phi^+,\sigma,x)=\sum_k(-1)^k u_\sigma^k$, où la somme est prise sur l'ensemble des $k\in Z^{\Phi^+}$ tels que $\sum_{\alpha\in\Phi^+}|k(\alpha)|h_\alpha=x$. En particulier on a:

$$(10)\qquad d(\mathfrak{h},\Phi^+,\sigma,x)=0\qquad\text{si } x\notin\sum_{\alpha\in\Phi^+}Nh_\alpha,\quad d(\mathfrak{h},\Phi^+,\sigma,O)=1.$$

Si $\nu \in C(\Phi^+)$, on a, d'après (8) et (9):

$$P(\sigma, \nu, \theta) = \sum_{x \in R_\mathfrak{a}} d(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)\theta(x)e^{-\pi x \nu}. \tag{11}$$

On note η le caractère du groupe $R_\mathfrak{a}$ tel que:

(12) $\eta(h_\alpha) = -1$ si $\alpha \in \Phi^+$ est simple.

(ce caractère dépend de Φ^+).

Soit $\alpha \in \Phi^+$ une racine simple. On note $\mathfrak{h}'$ une sous-algèbre de Cartan adjacente comme en II.4. On emploie les notations H', T', A', $R_{\mathfrak{a}'}$, etc.. On note η' le caractère de $R_{\mathfrak{a}'}$ défini par $(\Phi')^+$.

Une représentation $\sigma' \in \hat{T}'$ est dite compatible avec σ si les restrictions de σ et σ' à $T \cap T'$ ont une composante irréductible commune. Soit $\sigma' \in \hat{T}'$ une telle représentation.

Le groupe $W(G, \mathfrak{h})$ opère naturellement dans $\hat{T}$. Nous notons $w\sigma$ le transformé de σ par un élément $w \in W(G, \mathfrak{h})$.

Soit $x \in R_\mathfrak{a}$. On pose

$$x = kh_\alpha + x_1, \qquad \text{avec } k \in \boldsymbol{Q},\ x_1 \in \mathfrak{a}'. \tag{13}$$

Dans [P-V] les relations suivantes ont été établies:

(14) Si $x_1 \notin R_{\mathfrak{a}'}$, on a $d(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) + d(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha\sigma, s_\alpha x) = 0$

(15) Si $x_1 \in R_{\mathfrak{a}'}$, alors k est entier et on a:

$$\begin{aligned}&\eta(x)(d(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) + d(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha\sigma, s_\alpha x))\\ &\qquad = \eta'(x_1)(u_\sigma(\alpha)^k + u_\sigma(\alpha)^{-k})d(\mathfrak{h}', \Phi'^+, \sigma', x_1).\end{aligned}$$

Les relations (10), (14) et (15) déterminent les $d(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)$.

Nous posons, pour tout $x \in R_\mathfrak{a}$:

$$e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = \eta(x)d(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x). \tag{16}$$

Soit $s \in T$. Rappelons que nous avons défini le sous-ensemble $\mathfrak{a}_s$ de $R_\mathfrak{a}$ (II.(26)): c'est l'ensemble des $x \in R_\mathfrak{a}$ tels que, dans le groupe adjoint G_C on ait $\exp(-\pi i \operatorname{ad} x) = \operatorname{Ad} s \bmod T_0/T_0 \cap Z$. On sait que $R_\mathfrak{a}$ est réunion disjointe des $\mathfrak{a}_s$ lorsque s parcourt T/T_0Z.

Nous étudions $e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)$ pour x dans $\mathfrak{a}_s$. Nous employons les notations M et $\mathfrak{m}$ de II.2.

Lemme 1. *Supposons $\sigma(s)$ non scalaire. On a $e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}_s$.*

Démonstration. Soit $k \in Z^{\Phi^+}$ tel que l'on ait $\sum_{\alpha \in \Phi^+} k(\alpha)h_\alpha = x$. Modulo T_0Z, on a $s = \prod \gamma_\alpha^{k(\alpha)}$. Il existe donc $\alpha \in \Phi^+$ tel que $\sigma(\gamma_\alpha)^{k(\alpha)}$ soit non scalaire. Comme γ_α^2 est central, $k(\alpha)$ est impair. D'autre part, $\sigma(\gamma_\alpha)$ n'est pas scalaire. Comme T est engendré par les $\gamma_\beta (\beta \in \Phi^+)$ et T_0Z (cf. [Ha2]), il existe $\beta \in \Phi^+$ tel que $\gamma_\beta \gamma_\alpha \gamma_\beta^{-1} = \gamma_\alpha^{-1}$. Donc $\gamma_\beta \gamma_\alpha^2 \gamma_\beta^{-1} = \gamma_\alpha^{-2}$. Comme γ_α^2 est central, on a $\gamma_\alpha^4 = 1$. On a donc $u_\sigma(\alpha) = i$ ou $-i$.

Soit $k' \in Z^{\Phi^+}$ tel que $k'(\alpha) = -k(\alpha)$ et $k'(\beta) = k(\beta)$ si $\beta \neq \alpha$. On a $(-1)^k u_\sigma^k + (-1)^{k'} u_\sigma^{k'} = 0$, car on peut mettre $u_\sigma(\alpha)^k + u_\sigma(\alpha)^{-k}$ en facteur. D'après la définition (9), $d(h, \Phi^+, \sigma, x) = 0$. C.Q.F.D.

Lemme 2. *On suppose $\sigma(s)$ scalaire. Soit $\alpha \in \Phi^+$, simple.*

(i) *Supposons $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Alors s est dans T' et $\sigma'(s)$ est scalaire pour toute représentation $\sigma' \in \hat{T}'$ compatible avec σ.*

Soit $x \in \mathfrak{a}_s$ et écrivons $x = kh_\alpha + x_1$ comme en (13). *On a $k \in Z$. Si $x_1 \notin R_{\alpha'}$, on a:*

$$(17) \qquad e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) + e(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha\sigma, s_\alpha x) = 0.$$

Si $x_1 \in E_{\alpha'}$, on a $x_1 \in \mathfrak{a}'_s$ et:

$$(18) \qquad e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) + e(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha\sigma, s_\sigma x) = (u_\sigma(\alpha)^k + u_\sigma(\alpha)^{-k}) e(\mathfrak{h}', \Phi'^+, \sigma', x_1).$$

(ii) *Supposons $\alpha \notin \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a:*

$$(19) \qquad e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = e(\mathfrak{h}, s_\alpha\Phi^+, \sigma, x).$$

Démonstration. (i) Supposons $\alpha \in \phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{m}$ et $\zeta_\alpha(s) = 1$. On a donc $s \in T \cap T'$. L'opérateur $\sigma(s)$ commute par hypothèse à tous les $\sigma(\gamma_\beta)$ pour $\beta \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Cela signifie que $s\gamma_\beta s^{-1} \equiv \gamma_\beta \bmod Z \cap \ker \sigma$ pour tout $\beta \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Supposons $\beta(h_\alpha) = 0$, et soit $\beta' = c_\alpha(\beta) \in \Phi'(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}')$. On a $\gamma_\beta \equiv \gamma_{\beta'} \bmod Z$, et donc on a encore $s\gamma_{\beta'} s^{-1} \equiv \gamma_{\beta'} \bmod Z \cap \ker \sigma$. Si σ' est compatible, on a $Z \cap \ker \sigma = Z \cap \ker \sigma'$, et comme T' est engendré par les $\gamma_{\beta'}$ et T'_0Z, $\sigma'(s)$ est scalaire.

Comme $x \in \mathfrak{a}_s$, et comme ζ_α est égal à 1 en s et sur T_0, on a $e^{-i\pi\alpha(x)} = 1$. Comme $\alpha(x_1) = 0$, on obtient $e^{-i\pi k\alpha(h_\alpha)} = 1$, c'est-à-dire $k \in Z$. On voit donc que $\alpha(x)$ est pair. On a donc $\eta(s_\alpha x) = \eta(x - \alpha(x)h_\alpha) = \eta(x)$, et les relations (17) et (18) résultent de (14) et (15).

Dans le groupe adjoint G_C, on a $\exp(-\pi i \operatorname{ad} x_1) = \exp(i\pi h_\alpha)^k \operatorname{Ad} s \bmod T_0/T_0 \cap Z = \operatorname{Ad} s \bmod T'_0/T'_0 \cap Z$. Donc, si x_1 appartient à $R_{\alpha'}$, on a $x_1 \in \mathfrak{a}'_s$.

(ii) Supposons $\alpha \notin \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Le même calcul que ci-dessus montre que l'on a $k \in \frac{1}{2} + Z$, et $\eta(s_\alpha x) = -\eta(x)$. On obtient donc $x_1 \notin R_{\alpha'}$. Il résulte de (14) que l'on a:

$$e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = e(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha \sigma, s_\alpha x).$$

Il résulte de la définition (9) que l'on a:

$$e(\mathfrak{h}, \Phi^+, s_\alpha \sigma, s_\alpha x) = e(\mathfrak{h}, s_\alpha \Phi^+, \sigma, x).$$ C.Q.F.D.

On a, d'après (10) et (16):

(20) $$e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, O) = 1.$$

La formule (20) et les lemmes 1 et 2 déterminent $e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)$, grâce au lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $f = f(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)$ une fonction à valeurs complexes définie pour $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$, Φ^+ un système de racines positives pour $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, $\sigma \in \hat{T}$, $x \in \mathfrak{a}_s$. On suppose que f vérifie les relations suivantes:*

(21) $f(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, O) = 0$ *si* $0 \in \mathfrak{a}_s$,

(22) $f(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = 0$ *si* $x \notin \sum_{\alpha \in \Phi^+} N h_\alpha$.

(23) $f(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = 0$ *si $\sigma(s)$ n'est pas scalaire.*

On suppose $\sigma(s)$ scalaire. Soit $\alpha \in \Phi^+$ une racine simple. Alors f vérifie les relations de récurrence (17), (18), *ou* (19).

Alors $f = 0$.

Démonstration. En raisonnant par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})|$, on voit que le lemme 3 résulte du lemme 4 ci-dessous. C.Q.F.D.

Lemme 4. *Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{m})$. Soit $\phi = \phi(\Phi^+, \sigma, x)$ une fonction à valeurs complexes définie pour tout système de racines positives $\Phi^+ \subset \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, tout $\sigma \in \hat{T}$, et tout $x \in \mathfrak{a}_s$. On suppose que ϕ vérifie les relations suivantes:*

(24) *Soit $\alpha \in \Phi^+$, simple, $\alpha \notin \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a:*

$$\phi(\Phi^+, \sigma, x) = \phi(s_\alpha \Phi^+, \sigma, x)$$

(25) *Soit $\alpha \in \Phi^+$, simple, $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a:*

$$\phi(\Phi^+, \sigma, x) = -\phi(\Phi^+, s_\alpha \sigma, s_\alpha x).$$

(26) *Si $x \notin \sum_{\alpha \in \Phi^+} N h_\alpha$, on a $\phi(\Phi^+, \sigma, x) = 0$.*

(27) *Si $0 \in \mathfrak{a}_s$, on a $\phi(\Phi^+, \sigma, 0) = 0$.*

Alors $\phi = 0$.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})|$. Si $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \emptyset$, x est nul et le lemme résulte de (27). Supposons $|\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})| > 0$. Comme $\mathfrak{m}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{b}$ fondamentale, $\mathfrak{h}$ n'est pas fondamentale, considérée comme sous-algèbre de $\mathfrak{m}$. Il en résulte que $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ est non vide.

Raisonnant par récurrence sur $|\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})|$, on en déduit que les espaces vectoriels $\sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{g},\mathfrak{h})} \boldsymbol{R} h_\alpha$ et $\sum_{\alpha \in \Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} \boldsymbol{R} h_\alpha$ sont égaux. Soit $E(\Phi^+)$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{a}_s$ tels que l'on ait $\alpha(x) \leqq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Il en résulte que l'on a:

$$E(\Phi^+) \cap \sum_{\alpha \in \Phi^+} \boldsymbol{R}^+ h_\alpha = \{0\}. \tag{28}$$

Posons $\Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Soit $\alpha \in \Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ une racine, simple pour $\Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, mais non simple dans Φ^+. Nous allons montrer qu'il existe $\beta_1, \cdots, \beta_r$ dans $\Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \backslash \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ tels que, posant $s_j = s_{\beta_j}$:

$$\beta_j \text{ est simple pour } s_{j+1} \cdots s_r \Phi^+$$

$$\alpha \text{ est simple pour } s_1 \cdots s_r \Phi^+.$$

Remarquons que l'on a alors $s_j \cdots s_r \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = s_{j+1} \cdots s_r \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = \cdots = \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, car s_j permute les éléments différents de β_j dans $s_{j+1} \cdots s_r \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$.

Nous raisonnons par récurrence sur le nombre $\rho_{\Phi^+}(h_\alpha)$, où ρ_{Φ^+} est la demi-somme des éléments de Φ^+. Il existe une racine $\alpha_i \in \Phi^+$, simple pour Φ^+, telle que l'on ait $\alpha(h_{\alpha_i}) > 0$. Par hypothèse, $\alpha \neq \alpha_i$. La racine α_i n'est pas dans $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Sinon elle serait simple dans $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, et l'on aurait $\alpha(h_{\alpha_i}) \leqq 0$. On a donc $s_{\alpha_i}\Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = \Phi^+(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, $\alpha \in s_{\alpha_i}\Phi^+$, et $\rho_{s_{\alpha_i}\Phi^+}(h_\alpha) < \rho_{\Phi^+}(h_\alpha)$. Si α est simple pour $s_{\alpha_i}\Phi^+$, l'assertion est démontreé. Sinon on applique l'hypothèse de récurrence.

Appliquons (24). On trouve:

$$\phi(\Phi^+, \sigma, x) = \phi(s_r \Phi^+, \sigma, x) = \cdots = \phi(s_1 \cdots s_r \Phi^+, \sigma, x).$$

Appliquons (25). On trouve:

$$\phi(s_1 \cdots s_r \Phi^+, \sigma, x) = -\phi(s_1 \cdots s_r \Phi^+, s_\alpha \sigma, s_\alpha x).$$

Donc, si $\alpha \in \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ est simple pour $\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$, on obtient:

$$\phi(\Phi^+, \sigma, x) = -\phi(\Phi^+, s_\alpha \sigma, s_\alpha x). \tag{29}$$

Pour tout $w \in W(\phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}))$, on trouve donc:

$$\phi(\Phi^+, w\sigma, wx) = \varepsilon(w) \phi(\Phi^+, \sigma, x). \tag{30}$$

Il résulte de (27), (28) et (26) que $\phi(\Phi^+, \sigma, x)$ est nul pour $x \in E(\Phi^+)$. La relation (30) prouve que ϕ est nulle. C.Q.F.D.

Nous supposons que la restriction de σ à Z est le caractère $\tilde{\chi}$. Soit μ l'élément de $\mathfrak{t}^*$ tel que $\sigma(\exp Y) = e^{i\mu Y} Id$. On a donc, avec les notations de I.3, $\mu \in \mathfrak{t}^*_\chi$. Rappelons la définition de c_s en II (30). En un certain sens, le théorème ci-dessous calcule $e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)$ pour $x \in \mathfrak{a}_s$.

Théorème 2. *Soit $x \in \mathfrak{a}_s$. Avec les notations ci-dessus, on a:*

$$e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) = \frac{\operatorname{tr} \sigma(s)}{\dim \sigma} c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}), \mu, x). \tag{31}$$

Démonstration. Soit f la différence entre le côté gauche et le côté droit de (31). Nous vérifions que f vérifie les hypothèses du lemme 3.

Vérifions (21). On suppose que 0 est dans $\mathfrak{a}_s$. On peut donc écrire $s = z \exp S$, avec $z \in Z$ et $S \in \mathfrak{t}$. On a donc:

$$\frac{\operatorname{tr} \sigma(s)}{\dim \sigma} = \tilde{\chi}(z) e^{i\mu S}. \tag{32}$$

Posons $\Phi^+_\mathfrak{m} = \Phi^+ \cap \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. Compte tenu de (20), il faut démontrer la relation

$$c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, \mu, 0) = \tilde{\chi}(z^{-1}) e^{-i\mu S}. \tag{33}$$

Il résulte de II (64) et (8) que l'on a:

$$c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, \mu, 0) = \tilde{\chi}(z^{-1}) e^{-i\mu S} c_1(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, \mu, 0).$$

D'après II (30), on a:

$$c_1(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, \mu, 0) = b_1(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, 0).$$

D'après II (19), on a $b_1(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, 0) = 1$ si $\mathfrak{h}$ est fondamentale. Il résulte de II (9) et II (10) que l'on a:

$$b_1(\mathfrak{h}, \Phi^+_\mathfrak{m}, 0) = 1, \tag{34}$$

ce qui démontre (33).

Supposons $\sigma(s)$ non scalaire. Il existe $\beta \in \Phi(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que $\sigma(s)$ ne commute pas à $\sigma(\gamma_\beta)$. En particulier, $\sigma(\gamma_\beta)$ n'est pas scalaire et l'on a $\sigma(\gamma_\beta^2) = -1$ (voir la démonstration du lemme 1). D'autre part, on a $s\gamma_\beta s^{-1} = \gamma_\beta^{-1}$ (à cause de (2)), c'est-à-dire $\sigma(s\gamma_\beta s^{-1}) = -\sigma(\gamma_\beta)$. Il en résulte que l'on a $\operatorname{tr} \sigma(s) = 0$. Compte tenu du lemme 1, ceci démontre (23).

Supposons $\sigma(s)$ scalaire. Soit $\alpha \in \Phi^+$ une racine simple. Nous considérons les différents cas du lemme 2.

(i) Supposons $\alpha \in \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a $(s_\alpha\sigma)(s)=\sigma(s)$. Soit $\sigma' \in \hat{T}'$ une représentation compatible avec σ. D'après le lemme 2, $\sigma'(s)$ est scalaire. On a donc:

$$\frac{\operatorname{tr}\sigma(s)}{\dim\sigma}=\frac{\operatorname{tr}\sigma'(s)}{\dim\sigma'}. \tag{35}$$

Ecrivons $x=kh_\alpha+x_1$ comme en (13). Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que $X-i\pi x \in \mathfrak{h}_s$. On a, avec les notations de II.4:

$$c_\alpha(x)=ik(X_\alpha-X_{-\alpha})+x_1. \tag{36}$$

Posons $\Phi_{\mathfrak{m}}^+=\Phi^+\cap\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$ et

$$c=c_s(\mathfrak{h}, \Phi_{\mathfrak{m}}^+, \mu, x)+c_s(\mathfrak{h}, \Phi_{\mathfrak{m}}^+, \mu, s_\alpha x). \tag{37}$$

D'après II (30), on a:

$$c=e^{-iX\mu}(b_s(\mathfrak{h}, \Phi_{\mathfrak{m}}^+, X-i\pi x)+b_s(\mathfrak{h}, \Phi_{\mathfrak{m}}^+, X-i\pi s_\alpha x)). \tag{38}$$

Posons $Y=X+\pi k(X_\alpha-X_{-\alpha})$, $Y'=X-\pi k(X_\alpha-X_{-\alpha})$. On a, d'après II (10):

$$c=e^{-iX\mu}(b_s(\mathfrak{h}', \Phi_{\mathfrak{m}}'^+, Y-i\pi x_1)+b_s(\mathfrak{h}', \Phi_{\mathfrak{m}}'^+, Y'-i\pi x_1)). \tag{39}$$

Supposons que l'on ait $x_1 \notin \mathfrak{a}_s'$. Il résulte du lemme II.4 que l'on a $c=0$, ce qui montre que f vérifie la relation (17).

Supposons que l'on ait $x_1 \in \mathfrak{a}_s'$. Rappelons que l'on a $\gamma_\alpha= \exp(\pi(X_\alpha-X_{-\alpha}))$, et donc $\sigma'(\gamma_\alpha)=e^{i\mu'\pi(X_\alpha-X_{-\alpha})}Id$, où $\mu' \in \mathfrak{t}^*$ vérifie $\sigma'(\exp Y)=e^{i\mu' Y}$ pour tout $Y \in \mathfrak{t}'$. Donc $u_\sigma(\alpha)=e^{i\mu'\pi(X_\alpha-X_{-\alpha})}$.

Par ailleurs, $\mu(X)=\mu'(X)$ car $X \in \mathfrak{t}'\cap\mathfrak{t}=\mathfrak{t}$. Il résulte de II (30) que l'on a:

$$c=(u_\sigma(\alpha)^k+u_\sigma(\alpha)^{-k})c_s(\mathfrak{h}', \Phi_{\mathfrak{m}}'^+, \mu', x_1). \tag{40}$$

Compte tenu de (35) ceci prouve la relation (18).

(ii) Supposons $\alpha \notin \Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. On a $s_\alpha\Phi^+\cap\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})=\Phi^+\cap\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h})$. La relation (19) est claire.

D'après II (30), II (11) et le lemme II.4, $c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x)$ est nul si x n'est pas dans $\sum_{\alpha\in\Phi^+\cap\Phi(\mathfrak{m},\mathfrak{h})} Nh_\alpha$. A fortiori, $c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+, \mu, x)$ est nul si x n'est pas dans $\sum_{\alpha\in\Phi^+} Nh_\alpha$. Compte tenu de (10), ceci démontre (22).

C.Q.F.D.

§ 3. Démonstration du théorème 1

Soit $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}(\mathfrak{g})$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un élément régulier. On écrit $\lambda = \mu + \nu$, avec $\mu \in \mathfrak{t}^*$ et $\nu \in \mathfrak{a}^*$. Nous supposons que l'on a $\mu \in \mathfrak{t}_\chi^*$. Soit $\Phi^+ = \{\alpha \in \Phi, \nu(h_\alpha) > 0\}$.

Soit $\Gamma \in X(\lambda)$. Nous rappelons que le caractère ξ_λ de T a été défini en I.4. Nous posons:

$$\sigma = \xi_\lambda^{-1} \Gamma. \tag{41}$$

Pour la commodité du lecteur, nous redémontrons un lemme de [H-W]:

Lemme 5. *Soit* $\alpha \in \Phi^+$. *On a*: $-\varepsilon_\alpha = \xi_\lambda^{-1}(\gamma_\alpha)\eta(h_\alpha)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{l}$ comme dans lemme I.2. On a $\xi_\lambda(\gamma_\alpha) = (-1)^{\rho_{\mathfrak{l}}(h_\alpha)}$. Posons $\rho_{\boldsymbol{R}} = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$. On a de même $\eta(h_\alpha) = (-1)^{\rho_{\boldsymbol{R}}(h_\alpha)}$. Il faut donc démontrer que l'on a:

$$\rho_{\boldsymbol{R}}(h_\alpha) - \rho_{\mathfrak{l}}(h_\alpha) \equiv -n_\alpha \bmod 2. \tag{42}$$

Soit E l'ensemble des éléments de $\Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})$ qui ne sont pas réels, et tels que $\beta(h_\alpha) \neq 0$. On a:

$$\rho_{\boldsymbol{R}}(h_\alpha) - \rho_{\mathfrak{l}}(h_\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{\beta \in E} \beta(h_\alpha). \tag{43}$$

Soit $\beta \in E$. On a $\bar{\beta} \in E$. D'autre part, on a soit $s_\alpha\beta \in E$ et $s_\alpha\bar{\beta} \in E$, soit $-s_\alpha\beta \in E$ et $-s_\alpha\bar{\beta} \in E$. Si $\beta + \bar{\beta}$ n'est pas proportionnel à α, ces quatre éléments de E sont distincts et leur contribution à (43) est nulle mod 2. Si $\beta + \bar{\beta}$ est proportionnel à α, on a $\frac{1}{2}(\beta(h_\alpha) + \bar{\beta}(h_\alpha)) \equiv \frac{1}{2} |\beta(h_\alpha) + \bar{\beta}(h_\alpha)| \bmod 2$.

Les racines telles que $\beta + \bar{\beta} \in \boldsymbol{R}^+\alpha$ sont soit complexes, soit égales à α. La contribution de α à n_α est égale à -1. La formule (42) en résulte.

C.Q.F.D.

Il résulte du lemme 5 que l'on a:

$$R(\Gamma, \lambda) = P(\sigma, \nu, \eta), \tag{44}$$

et donc, d'après (11) et (16):

$$R(\Gamma, \lambda) = \sum_{x \in R_\mathfrak{a}} e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x) e^{-\pi\nu x}. \tag{45}$$

Nous écrivons cette somme sous la forme:

$$(46) \qquad R(\Gamma, \lambda)=\sum_{s\in T/T_0Z}\sum_{x\in \mathfrak{a}_s} e(\mathfrak{h}, \Phi^+, \sigma, x)e^{-\pi\nu x}.$$

Nous appliquons le théorème 2:

$$(47) \qquad R(\Gamma, \lambda)=\sum_{s\in T/T_0Z}\frac{\operatorname{tr}\sigma(s)}{\dim\sigma}\sum_{x\in\mathfrak{a}_s} c_s(\mathfrak{h}, \Phi^+\cap\Phi(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}), \mu, x)\,e^{-\pi\nu x}$$

D'après II (7) et II (32), on obtient:

$$(48) \qquad R(\Gamma, \lambda)=Q(\Gamma, \lambda). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Références

[B] A. Bouaziz, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal., **70** (1987), 1–79.

[Do] P. Dourmashkin, A Poisson-Plancherel formula for groups of type Bn, Thèse M.I.T. (1984), Préprint (1985), à paraître dans Trans. A.M.S.

[Du] M. Duflo, On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie Thèse M.I.T. (1984), paraître dans Trans. A. M. S.

[D-H-V] M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne, Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner. Mémoires de la Soc. Mathématique de France, n° **15** (1984), p. 65–128.

[G-S] V. Guillemin et S. Sternberg, Geometric asymptotics, Math. Surveys, n° **14**, Amer. Math. Soc. (1977).

[Ha1] Harish-Chandra, Some results on an invariant integral on a semisimple Lie algebra, Ann. of Math., **80** (1964), 551–593.

[Ha2] ——, Harmonic analysis on real reductive groups III, The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math., **104** (1976), 117–201.

[He] R. Herb, Fourier inversion and the Plancherel theorem for semisimple real Lie groups, Amer. J. Math., **104** (1982), 9–58.

[H-W] R. Herb et J. Wolf, The Plancherel theorem for general semisimple groups, Compositio Math., **57** (1986), 271–355.

[K] A. A. Kirillov, Plancherel measure of nilpotent Lie groups, Funct. Anal. appl., **1** (1967), 330–332.

[P-V] D. Peterson et M. Vergne, Recurrence relations for Plancherel functions, Springer L. N., **1243** (1987), 240–261.

[R] W. Rossmann, Kirillov's character formula for reductive groups, Invent. Math., **48** (1978), 207–220.

[S-V] B. Speh et D. Vogan, Reducibility of generalized principal series representations, Acta Math., **145** (1980), 227–299.

[Va] V. S. Varadarajan, Harmonic analysis on real reductive groups, Springer L. N., **579** (1977).

[Ve] M. Vergne, A Poisson-Plancherel formula for semisimple Lie groups, Ann. of Math., **115** (1982), 639–666.

UER de Mathématiques
Université Paris 7—C. N. R. S.
Tour 45. 55–5me Etage-2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France