IV. Abschnitt.

Die ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung.

I. Kapitel.

Allgemeine Theorie der ebenen Schnitte.

§ 106. Beziehung des ebenen Schnittes zu einer Geraden.

1. Allgemeine Darstellung der Schnittkurve. Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene wird in gemeinen Koordinaten x, y, z *durch die beiden Gleichungen:*

(1) $g(x, y, z) = 0,$ (2) $ux + vy + wz + s = 0$

und in homogenen gemeinen Koordinaten x, y, z, t durch die beiden Gleichungen:

(3) $f(x, y, z, t) = 0,$ (4) $ux + vy + wz + st = 0$

dargestellt. Hier haben g und f die Bedeutung § 66, (1) und (3) und sind u, v, w, s die homogenen Koordinaten der schneidenden Ebene.

2. Schnittpunkte der Schnittkurve mit einer Geraden. Liegt eine gerade Linie in der schneidenden Ebene, so sind ihre Schnittpunkte mit der Fläche zugleich auch ihre Schnittpunkte mit der Schnittkurve der Fläche und der Ebene.

Ist nun die Gerade in der Form (§ 67, (2)):

(5) $x = x_0 + \alpha\sigma, \quad y = y_0 + \beta\sigma, \quad z = z_0 + \gamma\sigma$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (2), wenn:

(6) $ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0,$ (7) $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$

Ihre Schnittpunkte mit der Kurve (1), (2) sind dann, wie § 67, (4), durch die quadratische Gleichung:

(8) $h(\alpha, \beta, \gamma)\sigma^2 + 2(g_1{}^0\alpha + g_2{}^0\beta + g_3^0\gamma)\sigma + g^0 = 0$

bestimmt.

Ist die Gerade dagegen in der Parameterstellung (§ 67, (6)):

(9) $x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2, \quad t = t_1 + \lambda t_2$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (4), wenn:

(10) $ux_1 + vy_1 + wz_1 + st_1 = 0,$ (11) $ux_2 + vy_2 + wz_2 + st_2 = 0,$