

III. Kapitel.

Einteilung der Flächen zweiter Klasse.

§ 101. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang und dem Mittelpunkt.

1. Einteilung der Flächen zweiter Klasse nach dem Rang.

Auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $Oxyz$ bezogen, sei die Gleichung der Fläche zweiter Klasse (§ 75, (1)):

$$(1) \quad F(u, v, w, s) = b_{11}u^2 + b_{22}v^2 + b_{33}w^2 + 2b_{23}vw + 2b_{31}wu \\ + 2b_{12}uv + 2b_{14}us + 2b_{24}vs + 2b_{34}ws + b_{44}s^2 = 0.$$

Die Determinante der Fläche ist (§ 75, 3):

$$(2) \quad B = |b_{ki}|,$$

und es werde zur Abkürzung gesetzt (§ 79, (5)):

$$(3) \quad \begin{cases} B' = B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}, \\ B'' = \beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33} + \beta_{44} + \beta_{55} + \beta_{66}, \\ B''' = b_{11} + b_{22} + b_{33} + b_{44}. \end{cases}$$

In Rücksicht auf die Anzahl ihrer Doppelebenen, bezüglich ihres Ranges, zerfallen die Flächen (1) nach § 81, 8 in folgende Gruppen:

- $$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I. } B \neq 0: \text{ Eigentliche Flächen zweiter Klasse;} \\ \text{II. } B = 0, B' \neq 0 \text{ (} B = 0, \text{ nicht alle } B_{ki} = 0 \text{): Eigentliche Kurven} \\ \quad \text{zweiter Klasse;} \\ \text{III. } B = 0, B' = 0, B'' \neq 0 \text{ (alle } B_{ki} = 0, \text{ nicht alle } \beta_{ki} = 0 \text{):} \\ \quad \text{Getrennte Punktepaare;} \\ \text{IV. } B = 0, B' = 0, B'' = 0 \text{ (alle } \beta_{ki} = 0 \text{): Doppelpunkte.} \end{array} \right.$$

2. Einteilung in bezug auf die unendlich ferne Ebene. Die unendlich ferne Ebene $u = 0, v = 0, w = 0, s = 1$ genügt der Gleichung (1) immer dann und nur dann, wenn $b_{44} = 0$. Sie genügt ferner den vier Bedingungen der Doppelebene § 76, (16) immer dann und nur dann, wenn $b_{14} = 0, b_{24} = 0, b_{34} = 0, b_{44} = 0$.

In bezug auf die unendlich ferne Ebene E_∞ zerfallen daher die Flächen (1) in die drei Gruppen: