# Drittes Kapitel.

## Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen.

### § 8.

### Untersuchungen über das erweiterte Abel'sche Theorem für das Geschlecht $p = 1$; weitere Sätze über den Zusammenhang des allgemeinen Integrales mit den particulären einer Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir wollen im Folgenden einige Anwendungen der oben entwickelten Principien und Sätze behandeln, welche Verallgemeinerungen wichtiger Sätze der Integralrechnung zum Gegenstande haben.

Das Abel'sche Theorem liefert bekanntlich für die Summe einer *beliebigen* Anzahl gleichartiger Abel'scher Integrale stets, von einer algebraisch-logarithmischen Function abgesehen, die Summe einer *festen* Anzahl derselben Abel'schen Integrale, deren Zahl durch das Geschlecht $p$ der algebraischen Function unter dem Integral bestimmt ist, und deren Grenzen die Lösungen einer algebraischen Gleichung $p^{\text{ten}}$ Grades liefern, deren Coefficienten rationale Functionen der Grenzen der gegebenen Integrale und der zu ihnen gehörigen Irrationalitäten sind, während die diesen Lösungen zugehörigen Irrationalitäten durch eben diese mit Hülfe der vorher bezeichneten Grössen rational ausdrückbar sind, — dass diese Relation zwischen den Integralen eine additive mit constanten Coefficienten sein muss, folgt aus dem oben bewiesenen allgemeinen Satze, dass zwischen Abel'schen Integralen überhaupt nur additive Beziehungen dieser Art stattfinden können, ein Satz, der die Grundlage für die Transformationstheorie der Abel'schen Integrale und Functionen bildet. Es soll nunmehr die Frage aufgeworfen werden, ob es ähnliche Theoreme für beliebige Differential-

---

ductibel sein muss, geht daraus hervor, dass, wie früher gezeigt worden, für den Fall, dass nicht die beiden Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, die Voraussetzung der Reductibilität der Differentialgleichung erfordert, dass ein Integral derselben der homogenen linearen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + yf(x) = 0$ genügt; nun geht freilich $y = e^{-\int f(x)\,dx}$, da $f(x)$ eine rationale Function ist, bei einer Umkreisung eines singulären Punktes dieser Function in sich selbst mit einem constanten Factor versehen über, aber nicht alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welchen die oben angegebene Eigenschaft der Fundamentalintegrale zukommt, haben Integrale dieser Form, sind also reductibel.