Advanced Studies in Pure Mathematics 29, 2000
Singularities - Sapporo 1998
pp. 79–95

Constructibilité de l'idéal de Bernstein

Joël Briançon, Philippe Maisonobe et Michel Merle

Soit X une variété analytique, $f = (f_1, \dots, f_p)$ des fonctions analytiques sur X, $F = f_1 \dots f_p$ leur produit.
Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier; C. Sabbah montre dans [Sab 1] [Sab 2] que toute section m de M satisfait localement des équations non triviales

$$(*) \qquad b(s_1, \dots, s_p) m f_1^{s_1} \dots f_p^{s_p} \in \mathcal{D}_X[s_1, \dots, s_p] m f_1^{s_1+1} \dots f_p^{s_p+1}$$

où $b(s_1, \dots, s_p)$ est un produit de formes affines. De plus, les coefficients de la partie linéaire de ces formes sont des entiers positifs ou nuls. En particulier, l'idéal $B(x, f_1, \dots, f_p, m)$ des polynômes $b(s_1, \dots, s_p)$ vérifiant au voisinage d'un point x une équation fonctionnelle $(*)$ est non réduit à zéro. Désignons par $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ la variété caractéristique de M. Nous montrons que le germe de l'idéal $B(x, f_1, \dots, f_p, m)$ est constant le long des composantes d'une partition qui se détermine géométriquement à partir des restrictions de la seule fonction F aux Y_l. En particulier, nous en déduisons le résultat :

Théorème. *Soit M un $\mathcal{D}_X$-Module holonome régulier engendré par une section m et* $\operatorname{car} M = \bigcup_{l \in L} T^*_{Y_l} X$ *sa variété caractéristique. Soit $(V_\beta)_{\beta \in \Gamma}$ une stratification analytique de $\bigcup_{l \in L} Y_l$ compatible aux Y_l et à $F^{-1}(0)$, satisfaisant la condition de frontière et la condition a_F de Thom.*

Le germe de l'idéal de Bernstein de $f_1, \dots, f_p, m$ est constant le long des strates de la stratification $(V_\beta)_{\beta \in \Gamma}$.

Ce résultat généralise celui obtenu par J. Briançon et H. Maynadier ([B.M] théorème 3.3 page 14) dans le cas où $p = 1$ et m une fonction constante sur X.

Détaillons section par section les résultats que nous obtenons.

Received March 24, 1999
Revised July 22, 1999