Advanced Studies in Pure Mathematics 36, 2002
Algebraic Geometry 2000, Azumino
pp. 249–268

Sur la Formule de Picard-Lefschetz

Luc Illusie

Introduction. La formule de Picard-Lefschetz [SGA 7 XV] exprime la variation locale pour une singularité quadratique ordinaire. En cohomologie étale, sa démonstration, dans le cas de dimension relative impaire, requiert un argument transcendant (loc. cit. 3.3). Nous donnons ici, dans ce même cas, une démonstration purement algébrique. L'idée est de déduire le calcul de la variation de la forme explicite donnée par Rapoport-Zink [RZ] pour le logarithme de la monodromie d'une famille semi-stable, de réduction à deux branches. On se ramène à ce cas par ramification et éclatement. La méthode, inspirée d'un calcul de Steenbrink dans [S], s'applique plus généralement à certaines singularités homogènes.

Dans toute la suite, on fixe un trait strictement local $S = \text{Spec } A$. On note $s = \text{Spec } k$ le point fermé, p l'exposant caractéristique du corps k, que l'on suppose algébriquement clos, $\eta = \text{Spec } K$ le point générique, v la valuation de A, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. On choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on note $\overline{A}$ le normalisé de A dans $\overline{K}$, $\overline{S} = \text{Spec } \overline{A}$, $\overline{\eta} = \text{Spec } \overline{K}$ le point générique de $\overline{S}$, $\overline{s}$, identifié naturellement à s, le point fermé, $I = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe d'inertie, $P \subset I$ le groupe d'inertie sauvage, pro-p-Sylow de I. On fixe un nombre premier $\ell \neq p$, on note $t_\ell : I \to \mathbb{Z}_\ell(1)(\overline{k})$ le caractère modéré ℓ-adique, donné par $t_\ell(\sigma) = (\sigma(t^{1/\ell^n})/t^{1/\ell^n})_n$ pour $v(t) = 1$. On pose $\Lambda = \mathbb{Z}/\ell^\nu\mathbb{Z}$ $(\nu \geq 1)$.

1. Réduction semi-stable à deux branches

1.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme semi-stable (i.e. tel que localement pour la topologie étale, X soit lisse sur $S[x_1, \ldots, x_r]/(x_1 \cdots x_r - t)$, où $v(t) = 1$). Le schéma X est donc régulier, la fibre générique X_η est

---

Received April 9, 2001.
2000 *Mathematics Subject Classification*: 14B05, 14D05, 14F20. Keywords: Picard-Lefschetz, étale cohomology, vanishing cycles, monodromy, variation, semistable reduction, weight filtration, monodromy filtration, ordinary quadratic singularity, homogeneous singularity, perverse sheaf.