Advanced Studies in Pure Mathematics 30, 2001
Class Field Theory – Its Centenary and Prospect
pp. 259–285

Groupe des Obstructions pour les Déformations de Représentations Galoisiennes

Roland Gillard

Un des thèmes les plus importants en théorie des nombres est l'étude du groupe de Galois absolu, $G_{\mathbb{Q}}$, de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Une des façons possibles d'aborder ce problème est de se concentrer sur les représentations à coefficients dans une $\mathbb{Z}_p$-algèbre noethérienne R : $G_{\mathbb{Q}} \to GL_N(R)$. Ces représentations se factorisent en général par un quotient G_S de $G_{\mathbb{Q}}$ par des groupes d'inertie en dehors d'un ensemble fini S : on a alors de hypothèses de finitude de présentation. Pour $N = 1$, on retrouve ainsi la théorie du corps de classes puisque c'est en fait le quotient abélien maximal qui intervient. La théorie des déformations de représentations peut donc être vue comme une tentative pour généraliser la théorie du corps de classes en sortant du cadre abélien.

Depuis l'article fondateur de Mazur [18], on sait que les problèmes de déformation des représentations galoisiennes sont (pro)-représentables sous des conditions raisonnables; les anneaux sont de la forme $R = \mathcal{O}[[T_1, \dots, T_d]]/I$, avec $\mathcal{O}$ un anneau de Witt. On sait aussi, que pour que l'ideal I, idéal des relations soit nul (le problème alors appelé sans obstruction), il suffit qu'un certain groupe de cohomologie H^2 soit nul.

Le but de ce travail est de préciser ce résultat en construisant et en étudiant un groupe d'obstructions, sous groupe du H^2 ci-dessus, et en montrant que le rang de ce groupe est exactement le nombre minimal de générateurs de I. On montre ensuite que ce groupe, ou une variante concernant la caractéristique p, est fabriqué à l'aide de cup-produits de 1-classes et aussi de produits supérieurs analogues aux produits de Massey.

La première partie reprend la méthode de Vistoli [31] étudiant les relations et obstructions dans un cadre géométrique.

Une question qui se pose donc est de savoir si on peut trouver des exemples où le sous groupe serait nul sans que le groupe de cohomologie

Received September 14, 1998.
Revised December 28, 1998.