Advanced Studies in Pure Mathematics 14, 1988
Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986
pp. 499–517

Une Intégrale Invariante sur l'algèbre de Lie Symétrique Semi-Simple

Shigeru Sano

§ 0. Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et soit $\mathfrak{h}$ la sous algèbre des points fixes d'un automorphisme involutif σ. On dit que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ est une algèbre de Lie symétrique semi-simple. Harish-Chandra a étudié les algèbres de Lie semi-simples en utilisant la méthode orbitale. Nous généralisons cette méthode au cas des algèbres de Lie symétriques semi-simples.

On considére une involution de Cartan θ de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ, et un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$, θ-invariant de l'algèbre de Lie symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$. On étude des racines de $\mathfrak{a}$ au § 2 et § 4. Dans le cas des algèbres de Lie semi-simples, toute racine réelle est singulière. Mais en général, il existe des racines réelles non-singulières qui s'appellent racines vectorielles (Définition 4.1). A une racine singulière, on associe une transformation de Cayley (Définition 4.2) et sa transformation inverse.

Soit $\Sigma(\mathfrak{a})$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$. Pour une racine $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ désigne l'espace radiciel associé. On pose $\mathfrak{n}_c = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a})} \mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$. On recherche des critères de stabilité de $\mathfrak{g}_c(\mathfrak{a}; \alpha)$ par les automorphismes involutifs σ et θ au § 2. On définit ensuite une application linéaire bijective γ de $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}_c$ sur $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{n}_c$ (Définition 2.4). Grâce à cette application linéaire, on détermine la mesure invariante sur l'espace tangent à l'espace symétrique (Proposition 6.2).

Nous introduisons la c-dualité entre deux triplets symétrique, qui géneralise la dualité entre le triplet $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{g}, \sigma)$ (où $\sigma(X+\sqrt{-1}\,Y)=X-\sqrt{-1}\,Y$ pour X et Y appartenant à $\mathfrak{g}$) et le triplet $(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}, \mathfrak{g}, \tau)$ (où $\tau(X, Y)=(Y, X)$). De même un triplet symétrique riemannien de type non compact est en c-dualité avec un triplet symétrique riemannien de type compact. Soit G/H une espace symétrique correspondant à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \sigma)$ et $\bar{G}/H$ le c-dual de G/H respectivement. Cette c-dualité devrait permettre d'expliquer la relation que existe entre la série discrète (relative) de l'espace symétrique G/H et la série continue (relative) de l'espace symètri-

Received February 16, 1988.