Advanced Studies in Pure Mathematics 14, 1988
Representations of Lie Groups, Kyoto, Hiroshima, 1986
pp. 289–336

La Formule de Plancherel des Groupes de Lie Semi-Simples Réels

Michel Duflo et Michèle Vergne

Introduction

Soient G un groupe de type I unimodulaire et $\hat{G}$ le dual de G, i.e. l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de G. Fixons une mesure de Haar sur G. On sait qu'il existe une mesure $dm(T)$ sur $\hat{G}$ telle que l'on ait la formule d'inversion de Plancherel, i.e. telle que, si on note $\hat{G}_r$ le support de $dm(T)$, on ait pour toute fonction ϕ sur G suffisamment régulière:

$$\phi(1)=\int_{\hat{G}_r} \operatorname{Tr} T(\phi)dm(T). \tag{1}$$

Si G est un groupe de Lie semi-simple (connexe de centre fini), Harish-Chandra ([Ha2]) a paramétré les représentations T_Γ de $\hat{G}_r$ par les représentations irréductibles Γ des différentes classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan et décrit explicitement la mesure $dm(\Gamma)$ sur cet ensemble de paramètres. Le propos de cet article est de donner une démonstration de la formule d'Harish-Chandra pour $dm(\Gamma)$, qui s'inscrive naturellement dans le cadre de la méthode des orbites. De même que celle de Herb et Wolf [H-W], notre démonstration est valable pour un groupe semi-simple connexe arbitraire.

Expliquons l'idée de cette démonstration. Depuis Kirillov, on a cherché à décrire les caractères des représentations irréductibles des groupes de Lie en fonction de transformées de Fourier d'orbites de la représentation coadjointe. Il devenait donc désirable de comprendre la formule de Plancherel à partir de l'analyse sur l'espace des orbites de la representation coadjointe. Décrivons la démonstration de la formule de Plancherel dans le cas des groupes nilpotents simplement connexes où ce mécanisme est particulièrement simple ([K]). Soit $\mathfrak{n}$ une algèbre de Lie nilpotente, N le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. Alors l'application exponentielle est un difféomorphisme de $\mathfrak{n}$ sur N. Soit Ω une orbite de la représentation coadjointe de N dans l'espace vectoriel

Received March 24, 1987.