wird; somit stets eine *homogene* lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung auch ein Integral der reducirten Gleichung der reductibeln Differentialgleichung (26).

Specialisiren wir den eben bewiesenen Satz für *homogene* lineare Differentialgleichungen, so ergiebt sich das folgende Theorem:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung reductibel ist, also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung hat, und zwischen den m particulären Fundamentalintegralen und deren $\varrho - 1$ ersten Ableitungen besteht keine algebraische Beziehung, dann ist jenes algebraische Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung,

oder anders ausgesprochen:

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit einer algebraischen Differentialgleichung niederer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein, welches nicht zugleich ein Integral einer Differentialgleichung noch niederer Ordnung ist, so ist unter der oben gemachten Voraussetzung jene algebraische Differentialgleichung eine lineare und zugleich eine Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung, und die letztere hat noch die reducirte Differentialgleichung eben dieser zum Integral.

Zweites Kapitel.

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen.

§ 5.

Zwei Sätze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen von Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten.

Wir wollen im Folgenden zwei Sätze herleiten, welche die Grundlage für die Ausdehnung des Abel'schen Theorems sowie aller derjenigen Untersuchungen, die bisher an Integralen algebraischer Functionen angestellt worden sind, auf Integrale algebraischer Differentialgleichungen bilden werden.

Sei ein System von Differentialgleichungen vorgelegt

$$(1) \cdots \begin{cases} f_1\left(x_1, y_{11}, y_{12}, \cdots y_{1\varrho_1}, z, \dfrac{dz}{dx_1}, \cdots \dfrac{d^{m_1} z}{dx_1^{m_1}}\right) = 0 \\ f_2\left(x_2, y_{21}, y_{22}, \cdots y_{2\varrho_2}, z, \dfrac{dz}{dx_2}, \cdots \dfrac{d^{m_2} z}{dx_2^{m_2}}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_\varkappa\left(x_\varkappa, y_{\varkappa 1}, y_{\varkappa 2}, \cdots y_{\varkappa\varrho_\varkappa}, z, \dfrac{dz}{dx_\varkappa}, \cdots \dfrac{d^{m_\varkappa} z}{dx_\varkappa^{m_\varkappa}}\right) = 0, \end{cases}$$

in denen $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa$ von einander unabhängige Variable, $y_{\sigma 1}$, $y_{\sigma 2}, \cdots y_{\sigma \varrho_\sigma}$ im Allgemeinen verschiedene algebraische irreductible Functionen der Veränderlichen x_σ vorstellen, und werde angenommen, dass diese Differentialgleichungen in Bezug auf ihren höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel seien, und eine Reihe bestimmter particulärer Integrale $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$ der resp. Differentialgleichungen (1) existire, welche nicht schon gleichartigen Differentialgleichungen niederer Ordnung Genüge leisten — wie dies für irreductible Differentialgleichungen stets der Fall ist —, seien ferner die Differentialgleichungen gegeben:

$$(2) \cdots \begin{cases} F_1\left(x_{\varkappa+1}, y_{\varkappa+11}, y_{\varkappa+12}, \cdots y_{\varkappa+1\varrho_{\varkappa+1}}, z, \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \dfrac{d^{n_1}z}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}}\right) = 0 \\ F_2\left(x_{\varkappa+2}, y_{\varkappa+21}, y_{\varkappa+22}, \cdots y_{\varkappa+2\varrho_{\varkappa+2}}, z, \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+2}}, \cdots \dfrac{d^{n_2}z}{dx_{\varkappa+2}^{n_2}}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_\lambda\left(x_{\varkappa+\lambda}, y_{\varkappa+\lambda 1}, y_{\varkappa+\lambda 2}, \cdots y_{\varkappa+\lambda\varrho_{\varkappa+\lambda}}, z, \dfrac{dz}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \dfrac{d^{n_\lambda}z}{dx_{\varkappa+\lambda}^{n_\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

deren unabhängige Variabeln $x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ mit den unabhängigen Variabeln des Systems (1) algebraisch verbunden sind, während $y_{\varkappa+\sigma 1}, \cdots y_{\varkappa+\sigma\varrho_{\varkappa+\sigma}}$ irreductible algebraische Functionen von $x_{\varkappa+\sigma}$ bedeuten sollen, und stellen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ wieder λ particuläre Integrale der keiner weiteren Bedingung unterworfenen Differentialgleichungen (2) vor; nehmen wir endlich an, dass zwischen den $\varkappa + \lambda$ Integralen $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ der Differentialgleichungen (1) und (2) und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung bestehe

$$(3) \cdot\cdot F\left\{z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1}z_1}{dx_1^{M_1}}, z_2, \frac{dz_2}{dx_2}, \cdots \frac{d^{M_2}z}{dx_2^{M_2}}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}}z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{M_{\varkappa+\lambda}}}\right\} = 0,$$

in welche auch die Variabeln und die den einzelnen Differentialgleichungen angehörigen algebraischen Irrationalitäten eintreten dürfen, so soll *die Unveränderlichkeit der algebraischen Beziehung* (3) *erwiesen werden*, wenn statt des Systems particulärer Integrale der Differentialgleichungen (1) *beliebige* andere particuläre Integrale dieser, statt derjenigen der Differentialgleichungen (2) aber *bestimmte* andere particuläre Integrale dieser substituirt werden und zwar für Werthe der unabhängigen Variabeln, welche mit denen des ersten Systems auch noch in den gegebenen algebraischen Beziehungen stehen.

Der Kürze wegen mag im Folgenden die Reihe der algebraischen

Irrationalitäten $y_{\sigma 1}, y_{\sigma 2}, \cdots y_{\sigma \varrho_\sigma}$ immer durch einen Repräsentanten y_σ ersetzt werden, es mögen ferner fürs erste die Variabeln $x_2, x_3, \cdots x_\varkappa$ nebst den zugehörigen Integralen $z_2, z_3, \cdots z_\varkappa$ als Parameter betrachtet, und vermöge der algebraischen Beziehungsgleichungen

$$(4) \cdots \begin{cases} \varphi_1(x_{\varkappa+1}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \\ \varphi_2(x_{\varkappa+2}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_\lambda(x_{\varkappa+\lambda}, x_1, x_2, \cdots x_\varkappa) = 0 \end{cases}$$

die Differentialgleichungen (2) in solche umgeformt werden, welche die unabhängige Variable x_1 besitzen, und die man erhält, indem man

$$\frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}} = \frac{dz}{dx_1} \frac{1}{\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}}, \quad \frac{d^2 z}{dx^2_{\varkappa+\varrho}} = \frac{d^2 z}{dx_1^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^2} - \frac{dz}{dx_1} \frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^3} \frac{d^2 x_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2},$$

$$\cdot\ \cdot$$

bildet, diese Werthe in die ϱ^{te} Gleichung des Systemes (2) einsetzt und zwischen der so erhaltenen Gleichung, der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (4) und den zwischen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ bestehenden Gleichungen $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ eliminirt; auf diese Weise werden sich statt der Gleichungen (2), wenn man noch eine Zerlegung der Eliminationsresultate durch Hinzunahme der zu x_1 gehörigen algebraischen Irrationalitäten y_1 zulässt, die folgenden Differentialgleichungen ergeben

$$(5) \cdots \begin{cases} \mathfrak{F}_1\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_1} z}{dx_1^{n_1}}\right) = 0 \\ \mathfrak{F}_2\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_2} z}{dx_1^{n_2}}\right) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{F}_\lambda\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_\lambda} z}{dx_1^{n_\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Man sieht unmittelbar, dass jedes Integral $z_{\varkappa+\varrho}$ der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (2) auch ein Integral der ϱ^{ten} Gleichung des Systems (5) sein wird, indem nach der Entstehungsweise von $\mathfrak{F}$ aus F und der bekannten Formulirung des Eliminationsprocesses die Beziehung statthat:

$$(6) \cdots \mathfrak{F}_\varrho\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{n_\varrho} z}{dx_1^{n_\varrho}}\right) =$$

$$= \prod F_\varrho\left(x_{\varkappa+\varrho}, y_{\varkappa+\varrho}\, z, \frac{dz}{dx_1} \cdot \frac{1}{\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}}, \frac{d^2 z}{dx_1^2} \frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^2} - \frac{dz}{dx_1} \frac{1}{\left(\frac{dx_{\varkappa+\varrho}}{dx_1}\right)^3} \frac{d^2 x_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^2}, \ldots\right),$$

worin auf der rechten Seite für $x_{\varkappa+\varrho}$, $y_{\varkappa+\varrho}$ alle durch die gegebenen algebraischen Gleichungen definirten Wurzelwerthe einzusetzen und mit den so entstehenden F_ϱ-Werthen das Product zu bilden ist; jedes z, welches also einen Factor der rechten Seite zu Null macht, wird auch $\mathfrak{F}_\varrho$ verschwinden lassen, und umgekehrt wird jedes z, welches $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ macht, auch einen Factor der rechten Seite identisch Null werden lassen — wir finden also, dass jedes Integral der Gleichung $F_\varrho = 0$ auch ein Integral der Gleichung $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ sein wird, dass aber umgekehrt — und dies wird für die späteren Schlüsse wichtig — auch jedes Integral von $\mathfrak{F}_\varrho = 0$ der Gleichung $F_\varrho = 0$ genügt, wenn man sich nur im Allgemeinen unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden. Formt man in der eben angegebenen Weise auch die Gleichung (3) um, so dass man erhält

$$(7) \cdots \mathfrak{F}\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1} z_1}{dx_1^{M_1}}, z_{\varkappa+1},\right.$$

$$\left.\frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+1}} z_{\varkappa+1}}{dx_1^{M_{\varkappa+1}}}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_1^{M_{\varkappa+\lambda}}}\right) = 0,$$

und stellt diese Gleichung mit den Gleichungen (5) zusammen, so wird man, wenn man (7) $n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda$ mal, die Gleichungen (5) resp. $M_{\varkappa+1} + n_2 + \cdots + n_\lambda$ mal, $\cdots M_{\varkappa+\lambda} + n_1 + n_2 + \cdots n_{\lambda-1}$ mal nach x_1 differentiirt

$$M_{\varkappa+1} + \cdots + M_{\varkappa+\lambda} + \lambda(n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda) + \lambda + 1$$

Gleichungen erhalten, aus denen die Grössen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ nebst ihren Ableitungen, deren Anzahl

$$M_{\varkappa+1} + \cdots + M_{\varkappa+\lambda} + \lambda(n_1 + n_2 + \cdots + n_\lambda) + \lambda$$

ist, eliminirt werden können. Vor allem muss bemerkt werden, dass diese Elimination in allen Fällen durchführbar ist, da die Gleichung (5) und (7) von einander unabhängig sind; denn was zuerst die Gleichungen (5) selbst angeht, so kommt in jeder derselben nur eine der Grössen $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ vor, und da die Differentiation nach x_1 die Beziehung liefert

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial z_{\varkappa+\varrho}} \frac{dz_{\varkappa+\varrho}}{dx_1} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial\left(\dfrac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)} \frac{d^{n_\varrho+1} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho+1}} = 0,$$

und

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_\varrho}{\partial\left(\dfrac{d^{n_\varrho} z_{\varkappa+\varrho}}{dx_1^{n_\varrho}}\right)}$$

von Null verschieden ist, so wird jede solche durch Differentiation aus einer der Gleichungen (5) entstandene Gleichung eine neue Eliminationsgrösse einführen, und es werden somit die auf diese Weise hergeleiteten Gleichungen von einander unabhängig sein; was endlich die Gleichung (7) betrifft, so kann sie von keiner der eben betrachteten Gleichungen abhängig sein, weil sie die in diesen nicht vorkommende Grösse z_1 und deren Differentialquotienten enthält, und dasselbe gilt von ihren Ableitungsgleichungen, weil diese wieder stets neue Ableitungsgrössen einführen*). Das gewonnene Eliminationsresultat habe die Form

$$(8) \cdots\cdot \Phi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1+n_2+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx_1^{M_1+n_1+n_2\cdots+n_\lambda}}\right)=0,$$

in welche wieder $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter eintreten; da aber die erste der Gleichungen (1)

$$(9) \cdots\cdot f_1\left(x_1, y_1, z, \frac{dz}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1} z}{dx_1^{m_1}}\right)=0$$

in Bezug auf ihren höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel, ausserdem z_1 ein Integral derselben sein sollte, das nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung angehört, so wird nach dem oben bewiesenen Satze jedes Integral der Gleichung (9) auch ein Integral von (8), oder es wird (9) ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (8) von einer bestimmten Ordnung sein müssen. Nehmen wir nun an, dass im Laufe des Eliminationsprocesses nicht mehrere Grössen zugleich herausfallen, oder dass nicht schon aus weniger Gleichungen als den oben angegebenen sich die bezeichneten Grössen eliminiren lassen, so werden sich die letzteren als rationale, im Allgemeinen als algebraische Functionen der Coefficienten der Gleichungen, also der Grössen z_1 und deren Ableitungen ergeben, und es ist ersichtlich, dass, weil das Eliminationsresultat von jedem anderen particulären Integrale z_1' der Differentialgleichung (9) befriedigt wird, die aus jenen algebraischen Functionen durch Substitution von z_1' statt z_1 sich ergebenden Functionalwerthe ebenfalls den Gleichungen (5) und (7) Genüge leisten werden, vorerst freilich nur, ohne Rücksicht auf ihre Eigenschaft als Differentialquotienten, lediglich als Eliminationsgrössen eines algebraischen Gleichungsystems aufgefasst. Ist aber z. B.

$$z_{\varkappa+1}=\chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda}}\right)$$

*) Die Gleichungen (5) und (7) nebst ihren Ableitungen können sich nicht widersprechen, da sie thatsächlich bestehen.

und

$$\frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_1} = \chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots \frac{d^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda} z_1}{dx^{M_1+n_1+\cdots+n_\lambda}}\right),$$

so dass

$$\chi_1\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots\right) = \frac{d}{dx_1}\chi\left(x_1, y_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \ldots\right)$$

ist, so muss wiederum nach dem oben bewiesenen Satze diese Gleichung auch durch z_1' befriedigt werden, und es werden somit auch die durch Substitution von z_1' statt z_1 hervorgehenden Werthe der Eliminationsgrössen in den resp. Differentialbeziehungen zu einander stehen, d. h. wenn man z_1' statt z_1 und für die $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ die aus den für die Eliminationsgrössen gefundenen Functionalausdrücken durch jene Substitution hervorgehenden Ausdrücke setzt, so werden die Gleichungen (5) und (7) befriedigt werden, oder endlich noch anders ausgedrückt, es werden ein willkürliches particuläres Integral der Gleichung (9) und dazugehörige particuläre Integrale der Gleichungen (5) der Gleichung (7) genügen, d. h. mit ihren dazugehörigen Ableitungen die algebraische Beziehung unverändert lassen, wobei stets $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter zu betrachten sind. So wird, um zuerst ein ganz einfaches Beispiel zu nehmen, das particuläre Integral $z_1 = e^x$ der Differentialgleichung $\frac{dz}{dx} = z$ und dessen Ableitung mit dem particulären Integrale $z_2 = e^{2x} + e^x$ der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 2z = 0$ in der algebraischen Beziehung stehen

$$z_2 = z_1^2 + \frac{dz_1}{dx},$$

und man sieht unmittelbar, dass, wenn man z_1 durch ce^x, aber z_2 durch das nunmehr bestimmte particuläre Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung $c^2e^{2x} + ce^x$ ersetzt, die algebraische Beziehung unverändert bleibt.

Aber wir haben einige wesentliche Bemerkungen hinzuzufügen. Es war eben bewiesen worden, dass ein willkürliches particuläres Integral von (9) und dazu gehörige particuläre Integrale der Differentialgleichungen (5) die zwischen den Integralen und deren Ableitungen bestehende algebraische Beziehung (7) unverändert lassen; da nun aber früher gezeigt worden, dass jedem Integrale einer der Gleichungen von (5) stets ein Integral der resp. Gleichung von (2) entspricht, wenn man sich nur unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ im Allgemeinen andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden, so können wir auch den eben gefundenen Satz so aussprechen, dass die algebraische Beziehung (3) erhalten bleibt, wenn man für z_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral der ersten Gleichung (1) und für $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ bestimmte andere particuläre Integrale der Gleichungen (2) setzt, wenn man nur für $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ Lösungen derselben algebraischen Gleichungen (4), aber im Allgemeinen andere dieser Lösungen genommen denkt, wobei $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ als Parameter zu betrachten sind. Wählen wir zur Erläuterung des eben besprochenen Ueberganges von $x_{\varkappa+\varrho}$ in eine andere Lösung der diese Grösse definirenden algebraischen Gleichung die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dz}{dx_1}\right)^2 = \frac{1}{1-x_1^2} \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dx_2}\right)^2 = \frac{1}{1-x_2^2},$$

worin x_1 und x_2 von einander unabhängige Variable sein sollen, seien ferner bei fest bestimmten Zeichen von $\sqrt{1-x_1^2}$ und $\sqrt{1-x_2^2}$ zwei Integrale der resp. Differentialgleichungen

$$z_1 = \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{und} \quad z_2 = \int_0^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

und stellen wir endlich mit jenen beiden Differentialgleichungen die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx_3}\right)^2 = \frac{1}{1-x_3^2}$$

zusammen, worin x_3 algebraisch von x_1 und x_2 in der Weise abhängen soll, dass

$$x_3 = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$$

ist mit den für die Wurzelgrössen fest angenommenen Werthen, so wird, wenn ausserdem

$$\sqrt{1-x_3^2} = \sqrt{1-x_1^2}\,\sqrt{1-x_2^2} - x_1 x_2$$

gesetzt, und als Integral jener dritten Differentialgleichung

$$z_3 = \int_0^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gewählt wird, zwischen diesen drei Integralen die algebraische Beziehung bestehen

$$(\mathrm{m}) \cdots\cdots z_3 = z_1 + z_2,$$

und wir wollen nun auf diese Beziehung unsern eben bewiesenen Satz anwenden. Setzt man für z_1 das andere nicht durch eine Constante verschiedene particuläre Integral, das einer Aenderung des Wurzelzeichens entspricht,

$$z_1' = -\int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

so sieht man, dass, wenn x_2 und z_2 unverändert bleiben, die rechte Seite der algebraischen Beziehung (m), welche erhalten bleiben soll, in $z_1' + z_2$ übergeht; da aber $z_1' = - z_1$ ist, so wird die linke Seite durch eine Grösse z_3' zu ersetzen sein, für welche, wenn wiederum

$$z_3' = \int_0^{x_3'} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

gesetzt wird, bekanntlich

$$x_3' = x_1\sqrt{1-x_2^2} - x_2\sqrt{1-x_1^2}, \quad \sqrt{1-x_3'^2} = -\sqrt{1-x_1^2}\cdot\sqrt{1-x_2^2} - x_1 x_2$$

sein muss, und wir haben somit dieselbe algebraische Beziehung

$$z_3' = z_1' + z_2,$$

in der z_1' ein anderes particuläres Integral der Differentialgleichung $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$ für dieselbe Variable x_1, und z_3' ein particuläres Integral eben dieser Differentialgleichung für das Argument x_3' bedeutet, welches sich als Lösung derselben algebraischen Gleichung ergiebt, welche x_3 mit x_1 und x_2 verband. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir in der Beziehung $z_3 = z_1 + z_2$ die Variable x_1 die Punkte $+1$ oder -1 umkreisen lassen.

Wir werden später die Frage zu erörtern haben, unter welchen Umständen die Werthe $x_{\varkappa+\varrho}$ in dieselben Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen, und also unverändert bleiben, gehen aber jetzt erst in der allgemeinen Auseinandersetzung weiter.

Lässt man in der oben erhaltenen algebraischen Beziehung (3), in welcher $z_1, z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ durch $z_1', z_{\varkappa+1}', \cdots z_{\varkappa+\lambda}'$ ersetzt sind, während $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ im Allgemeinen in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergegangen sind, nunmehr das unverändert gebliebene Integral z_2 in ein beliebiges anderes particuläres Integral der zweiten Differentialgleichung (1) übergehen, während $z_1', z_3, \cdots z_\varkappa$ unverändert bleiben, so wird man wieder aus den vorher angegebenen Gründen die Integrale $z_{\varkappa+1}', \cdots z_{\varkappa+\lambda}'$ durch andere particuläre Integrale des Systems (2) zu ersetzen haben, wobei wieder die unabhängigen Variabeln dieser Integrale in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen können. Schliessen wir so weiter, so finden wir, dass die algebraische Beziehung (3) erhalten bleibt, wenn man für $z_1, z_2, \cdots z_\varkappa$ *beliebige* andere particuläre Integrale der Differentialgleichungen (1), für $z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ *bestimmte* andere particuläre Integrale der Differentialgleichungen (2) setzt, wobei die Variabeln $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ im Allgemeinen in andere Lösungen der sie definirenden algebraischen Gleichungen übergehen werden — immer vorausgesetzt, dass der oben vorgenommene Eliminationsprocess für die Eliminationsgrössen bestimmte algebraische Functionen der Coefficienten jener Gleichungen liefert, d. h. bei der Elimination nicht mehrere der zu eliminirenden Grössen zugleich herausfallen. Dass dies in der That der Fall sein kann, geht aus folgendem Beispiel hervor: Die Differentialgleichung $(\alpha)\ \frac{dz}{dx} = z$ hat das particuläre Integral $z_1 = e^x$, die Differentialgleichung

$$(\beta) \cdots\cdot \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}(2x-1) - 2z(x-1) = 0$$

das particuläre Integral

$$z_2 = e^{-x^2}\int e^{x^2+x}\,dx,$$

so dass zwischen diesen beiden Integralen die Beziehung besteht

$$(\gamma) \cdots\cdot \frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = z_1;$$

differentiirt man nun (β) einmal, und (γ) zweimal, so erhält man

$$(\delta) \cdots\cdot \frac{d^3 z_2}{dx^3} + \frac{d^2 z_2}{dx^2}(2x-1) - 2\frac{dz_2}{dx}(x-2) - 2z_2 = 0,$$

$$(\varepsilon) \cdots\cdot \frac{d^2 z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{dz_1}{dx},$$

$$(\zeta) \cdots\cdot \frac{d^3 z_2}{dx^3} + 2x\frac{d^2 z_2}{dx^2} + 4\frac{dz_2}{dx} = \frac{d^2 z_1}{dx^2};$$

eliminirt man ferner $\frac{d^3 z_2}{dx^3}$ aus (δ) und (ζ), so folgt

$$(\eta) \cdots\cdot \frac{d^2 z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{d^2 z_1}{dx^2},$$

und stellt man nunmehr (η) mit (ε) zusammen, so ergiebt sich

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = \frac{dz_1}{dx},$$

oder verbindet man dieselbe mit (β), so folgt

$$\frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = \frac{d^2 z_1}{dx^2},$$

welche wiederum mit (γ) verbunden

$$\frac{d^2 z_1}{dx^2} = z_1$$

liefert, ohne z_2 und dessen Ableitung als algebraische Function von z_1 und den Ableitungen dieser Grösse auszudrücken; in der That kann z_2 nicht algebraisch durch $z_1 = e^x$ ausgedrückt werden; setzt man in (γ) für z_2 cz_2, so ist auch z_1 durch cz_1 zu ersetzen, wenn dagegen statt z_2 das andere Fundamentalintegral von (β), nämlich e^{-x^2}, substituirt wird, so muss z_1 gleich 0 gesetzt werden.

Um somit die allgemeine Gültigkeit des oben ausgesprochenen Satzes zu erweisen, müssen wir den Eliminationsprocess selbst genauer verfolgen, und es wird genügen den Gang des Beweises für Systeme von Differentialgleichungen durchzuführen, welche nur aus je einer Gleichung bestehen; sei eine Differentialgleichung

$$(10) \cdots\cdot f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0$$

gegeben, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten irreductibel sein soll, und mögen eins ihrer particulären Integrale z_1, das nicht schon das Integral einer Differentialgleichung niederer Ordnung ist, und dessen Ableitungen mit einem particulären Integrale z_2 der Differentialgleichung

$$(11) \cdots\cdot \frac{d^n z}{dx^n} = \mathfrak{F}\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)$$

und den Ableitungen desselben in der algebraischen Beziehung stehen:

$$(12) \cdots\cdot \frac{d^{n+\varrho} z_2}{dx^{n+\varrho}} = \varphi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n+\varrho-1} z_2}{dx^{n+\varrho-1}}\right),$$

worin ϱ eine positive oder negative ganze Zahl, 0 eingeschlossen, bedeuten soll. Ist $\varrho = 0$ oder positiv ganz, so ersetze man in der letzten Gleichung vermöge (11) und deren Differentialquotienten alle Ableitungen von einer höheren Ordnung als der $n-1^{\text{ten}}$ durch die niedrigeren, so dass die Gleichung (12) die Form annimmt

$$(13) \cdots\cdot \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}} = \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2 \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-2} z_2}{dx^{n-2}}\right),$$

und somit ist auch dieser Fall reducirt auf denjenigen, in welchem die Grösse ϱ der Gleichung (12) eine negative Zahl $= -1$ ist, so dass wir allgemein die Gleichung (12) ersetzen können durch

$$(14) \cdots\cdot \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}} = \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right),$$

worin α eine positive ganze Zahl bedeutet.

Differentiirt man die Gleichung (14) α-mal nach einander, so folgt

$$\frac{d^{n-\alpha+1} z_2}{dx^{n-\alpha+1}} = \Phi_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}}\right), \cdots$$

$$\cdots \frac{d^n z_2}{dx^n} = \Phi_\alpha\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right),$$

und somit nach (11) die Beziehung:

$$(15) \cdots\cdot \Phi_\alpha\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \cdots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right) = \\ = \mathfrak{F}\left(x, z_2, \frac{dz_2}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}\right).$$

Setzt man in diese Gleichung die aus den Beziehungen (14) und den durch Differentiation abgeleiteten hervorgehenden Werthe von

$$\frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}}, \quad \frac{d^{n-\alpha+1} z_2}{dx^{n-\alpha+1}}, \ldots \frac{d^{n-1} z_2}{dx^{n-1}}$$

ein, so mag dieselbe übergehen in

$$(16) \ldots\ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}} = \Psi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

worin $\beta < \alpha - 1$ ist, und bildet man wieder durch successive Differentiation

$$\frac{d^{n-\beta+1} z_2}{dx^{n-\beta+1}} = \Psi_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}}\right), \ldots$$

$$\ldots \frac{d^{n-\alpha} z_2}{dx^{n-\alpha}} = \Psi_{\beta-\alpha}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right) = 0,$$

so folgt aus der letzten dieser Gleichungen und der Gleichung (14):

$$(17) \ldots\ldots \Psi_{\beta-\alpha}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right) =$$

$$= \Phi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}}\right);$$

setzt man wiederum in diese Gleichung die aus (16) und den abgeleiteten Gleichungen entnommenen Werthe von

$$\frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}}, \quad \frac{d^{n-\beta+1} z_2}{dx^{n-\beta+1}}, \ldots \frac{d^{n-\alpha-1} z_2}{dx^{n-\alpha-1}},$$

so erhält man

$$(18) \ldots\ldots \frac{d^{n-\gamma} z_2}{dx^{n-\gamma}} = X\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\gamma-1} z_2}{dx^{n-\gamma-1}}\right),$$

worin $\gamma < \beta - 1$; bildet man endlich hieraus wieder

$$\frac{d^{n-\gamma+1} z_2}{dx^{n-\gamma+1}} = X_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\gamma} z_2}{dx^{n-\gamma}}\right), \ldots$$

$$\ldots \frac{d^{n-\beta} z_2}{dx^{n-\beta}} = X_{\gamma-\beta}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

so folgt

$$(19) \ldots\ldots X_{\gamma-\beta}\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right) =$$

$$= \Psi\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \ldots z_2, \frac{dz_2}{dx}, \ldots \frac{d^{n-\beta-1} z_2}{dx^{n-\beta-1}}\right),$$

woraus durch Einsetzen der Werthe (18) und der durch Differentiation abgeleiteten alle Werthe z_2 und deren Ableitungen herausfallen mögen, so dass sich als Eliminationsresultat eine Beziehung ergiebt:

$$(20) \cdots\cdot f_1\left(x, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2z_1}{dx^2}, \cdots\cdot\right) = 0,$$

dann wird der eben vollzogene Eliminationsprocess der allgemeinsten Annahme entsprechen. So folgt in dem oben behandelten Beispiel durch Differentiation von (γ)

$$\frac{d^2z_2}{dx^2} + 2x\frac{dz_2}{dx} + 2z_2 = \frac{dz_1}{dx}$$

und durch Identificiren des zweiten Differentialquotienten aus dieser Gleichung und der Gleichung (β):

$$\frac{dz_2}{dx} + 2xz_2 = \frac{dz_1}{dx},$$

woraus sich schon durch Gleichsetzen der Werthe von $\frac{dz_2}{dx}$ aus der zuletzt erhaltenen und der Gleichung (γ)

$$\frac{dz_1}{dx} = z_1$$

ergiebt.

Wir haben der Kürze halber diesmal immer nur mit einem Zweige der einzelnen hier auftretenden algebraischen Functionen operirt — es bedarf kaum der Erwähnung, dass, um die zugehörigen rationalen Formen zu substituiren, man immer nur das Product der einzelnen irrationalen algebraischen Ausdrücke zu bilden hat — es wird also auch die Gleichung (20) eine irrationale algebraische sein; da dieselbe aber rational gemacht in Folge der für die Gleichung (10) und deren Integral z_1 gemachten Voraussetzung durch alle Integrale dieser letzteren befriedigt würde, z_1 aber dem Zweige (20) dieser rational gemachten Gleichung genügt, so werden auch andere particuläre Integrale von (10) z. B. z_1' Integrale von (20) sein; sei nun z_2' ein particuläres Integral der im Allgemeinen nicht algebraischen Differentialgleichung (18), nachdem in derselben z_1 durch z_1' ersetzt ist, so werden auch die daraus abgeleiteten Gleichungen gelten, und da die Gleichung (19) nichts anderes ist als die Gleichung (20), wenn die Werthe der einzelnen Ableitungen substituirt worden sind, die Gleichung (20) aber für z_1' bestehen bleibt, so wird auch (19) für diese Integrale z_1' und z_2' bestehen, d. h. es wird (16) für eben diese Integrale befriedigt werden. Daraus folgt aber wiederum die Gültigkeit der aus dieser durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen, und da (17) erfüllt ist — denn (17) ist nichts anderes als (18) vor Einsetzen der eben bezeichneten Ableitungswerthe — so folgt daraus wieder, dass auch (14) befriedigt ist, wenn z_1 und z_2 durch z_1' und z_2' ersetzt werden. Da endlich (14) und die Ableitungen dieser Gleichung die in den neuen Integralen richtige Gleichung (16) also auch (15) liefern, so folgt, dass auch (11) befriedigt sein muss, wenn z oder z_2 durch z_2' ersetzt wird, d. h. z_2' ist ein Integral der Differentialgleichung (11), und es findet zwischen dem particulären Integrale z_1' der Differentialgleichung (10) und dem particulären Integrale z_2' der Differentialgleichung (11) und den Ableitungen dieser Grössen wieder die algebraische Beziehung (14) statt, was wir eben feststellen wollten.

Fassen wir die jetzt gewonnenen Resultate zusammen, so folgt das nachstehende Theorem, das die Grundlage der folgenden Untersuchungen bilden wird:

I. *Besteht zwischen particulären Integralen von in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichungen und zwar solchen Integralen, welche gleichartigen Differentialgleichungen niederer Ordnung nicht genügen, und particulären Integralen algebraischer Differentialgleichungen, deren unabhängige Variabeln zu denen des ersten Systems in algebraischer Beziehung stehen, und deren Ableitungen eine algebraische Relation, so bleibt diese bestehen, wenn man für die ersteren Integrale beliebige andere particuläre Integrale jenes Systems setzt, wenn man nur für die Integrale des zweiten Systems passende particuläre Integrale dieses Systems substituirt.*

Dieser Satz gilt natürlich in jedem Falle, wenn das erste System von Gleichungen aus irreductibeln Differentialgleichungen besteht.

Machen wir, bevor wir auf eine weitere Untersuchung, die eine Praecisirung des eben ausgesprochenen Satzes betrifft, eingehen, eine einfache Anwendung desselben auf die Feststellung der allgemeinsten algebraischen Beziehung, welche zwischen den particulären Fundamentalintegralen einer irreductibeln homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung und deren Ableitungen besteht.

Nehmen wir zuerst an, dass die Ableitung nur *eines* Fundamentalintegrales in dieselbe eingeht, die Relation also von der Form ist

$$(21) \cdots\cdot \; z_2 = f(x, z_1, z_1'),$$

so wird nach dem eben bewiesenen Satze, der in diesem Falle in jedem Systeme nur eine und zwar dieselbe Differentialgleichung enthält, z_1 durch $\mu_1 z_1$ ersetzt werden dürfen, wenn man nur $m_1 z_1 + m_2 z_2$ statt z_2 substituirt, worin m_1 und m_2 von der willkürlichen Constanten μ_1 abhängige Constanten bedeuten, also

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 = f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')$$

oder

$$(22) \cdots\cdot \; m_1 z_1 + m_2 f(x, z_1, z_1') = f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1').$$

Da aber die Differentialgleichung zweiter Ordnung irreductibel sein sollte, also z_1 nicht die Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung sein darf, so muss die Gleichung (22) eine in z_1 und z_1' identische sein für jedes μ_1; differentiirt man daher dieselbe nach z_1

und z_1', so folgt

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1}$$

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} = m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1'},$$

und da die Differentiation nach μ_1

$$z_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} + z_1' \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} = z_1 \frac{d m_1}{d \mu_1} + f(x, z_1, z_1') \frac{d m_2}{d \mu_1}$$

giebt, so folgt mit Benutzung der eben erhaltenen Gleichungen

$$(23) \cdots\cdots z_1 \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1} + z_1' \frac{\partial f(x, z_1, z_1')}{\partial z_1'} = a f(x, z_1, z_1') + b z_1,$$

worin a und b Constanten bedeuten. Da diese Gleichung wiederum eine in z_1 und z_1' identische sein muss, so können wir sie als eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den beiden unabhängigen Variabeln z_1 und z_1' und der abhängigen $f(x, z_1, z_1')$ betrachten und erhalten zum Zwecke der Integration das System gleichzeitiger totaler Differentialgleichungen

$$\frac{d z_1}{z_1} = \frac{d z_1'}{z_1'} = \frac{d f}{a f + b z_1},$$

deren vollständige Integrale

$$z_1' = \alpha z_1, \quad f = \beta z_1^a - \frac{b}{a-1} z_1$$

sind, und man findet daher als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung (23)

$$(24) \cdots\cdots f(x, z_1, z_1') = z_1^a \varphi\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) - \frac{b}{a-1} z_1,$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, in welche die unabhängige Variable x beliebig eintreten darf; setzt man diesen Ausdruck in (22) ein, so folgt leicht, dass

$$m_2 = \mu_1^a, \quad m_1 = \frac{b \mu_1}{a-1} \left(\mu_1^{a-1} - 1\right)$$

ist, und man erkennt aus der Bedeutung von a und b nach Gleichung (23) unmittelbar, dass sie numerische d. h. nicht von μ_1 abhängige Constanten vorstellen, da die Function $f(x, z_1, z_1')$ die Grösse μ_1 nicht enthält; es ist somit die allgemeinste Beziehung (21) in der Form enthalten:

$$(25) \cdots\cdots z_2 = z_1^a \varphi\left(\frac{z_1'}{z_1}\right) - \frac{b}{a-1} z_1.$$

Sollen endlich in der algebraischen Beziehung die Ableitungen der beiden Fundamentalintegrale vorkommen, also

$$(26) \cdots\cdots z_2' = f(x, z_1, z_2, z_1')$$

sein, so darf angenommen werden, dass nicht schon zwischen den beiden Integralen und einer der Ableitungen eine algebraische Relation stattfinde, weil wir sonst auf das vorige Problem zurückgeführt werden; ersetzt man in (26) z_1 durch $\mu_1 z_1$, also z_2 durch $m_1 z_1 + m_2 z_2$, worin μ_1 eine willkürliche, m_1 und m_2 von dieser abhängige Constanten bedeuten, so folgt

$$(27) \cdots\cdot m_1 z_1' + m_2 f(x, z_1, z_2, z_1') = f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1'),$$

und da diese Gleichung der Annahme gemäss eine in z_1, z_2, z_1' identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach diesen Grössen

$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1} \mu_1 + \frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial (m_1 z_1 + m_2 z_2)} m_1$$
$$= m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_1}$$
$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial (m_1 z_1 + m_2 z_2)} m_2 = m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_2}$$
$$\frac{\partial f(x, \mu_1 z_1, m_1 z_1 + m_2 z_2, \mu_1 z_1')}{\partial \mu_1 z_1'} \mu_1 = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, z_1, z_2, z_1')}{\partial z_1'},$$

und differentiirt man (27) nach μ_1, so ergiebt sich mit Hülfe der eben erhaltenen Relationen, wenn $f(x, z_1, z_2, z_1') = f$ gesetzt wird:

$$\frac{m_2}{\mu_1} z_1 \frac{\partial f}{d z_1} - \frac{m_1}{\mu_1} z_1 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\left(z_1 \frac{\partial m_1}{\partial \mu_1} + z_2 \frac{\partial m_2}{\partial \mu_1}\right)$$
$$+ \frac{m_1}{\mu_1} z_1' + \frac{m_2}{\mu_1} z_1' \frac{\partial f}{\partial z_1'} = z_1' \frac{\partial m_1}{\partial \mu_1} + f \frac{\partial m_2}{\partial \mu_1}$$

oder

$$(28) \cdots\cdot z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + (a z_1 + b z_2) \frac{\partial f}{\partial z_2} + z_1' \frac{\partial f}{\partial z_1'} = A z_1' + B f,$$

worin a, b, A, B Constanten bedeuten. Das zugehörige System totaler Differentialgleichungen

$$\frac{d z_1}{z_1} = \frac{d z_2}{a z_1 + b z_2} = \frac{d z_1'}{z_1'} = \frac{df}{A z_1' + Bf}$$

liefert die Integrale

$$z_1' = \alpha z_1, \quad z_2 = \beta z_1^b - \frac{a z_1}{b-1}, \quad f = \gamma z_1'^B - \frac{A z_1'}{B-1},$$

und somit das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (28) wegen $f = z_2'$

$$(29) \cdots\cdot z_2' = z_1'^B \varphi\left\{\frac{z_1'}{z_1}, \left(z_2 + \frac{a z_1}{b-1}\right) z_1^{-b}\right\} - \frac{A z_1'}{B-1},$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, in welche auch die unabhängige Variable x algebraisch eintreten darf, während, wie man wieder leicht durch Einsetzen in (27) sieht, a, A, b, B Constanten sind, von denen die beiden letzten rationale Zahlen sein müssen. Hiermit *ist die Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen für eine irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ge-*

funden. Bekanntlich besteht für jede solche Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Qz = 0,$$

wenn P das logarithmische Differential einer algebraischen Function $f(x)$ ist, die Beziehung

$$(30) \cdots\cdot z_1 z_2' - z_2 z_1' = \frac{c}{f(x)},$$

und in der That erhält man, wenn in (29)

$$A = a = 0, \quad B = b = -1$$

gesetzt wird,

$$z_2' = \frac{1}{z_1'}\,\varphi\left\{\frac{z_1'}{z_1},\, z_1 z_2\right\},$$

so dass, wenn die willkürliche Function

$$\varphi(t, u) = t^2 u + \frac{ct}{f(x)}$$

angenommen wird, sich

$$z_2' = \frac{1}{z_1'}\left[\frac{z_1'^2}{z_1^2}\, z_1 z_2 + \frac{c z_1'}{f(x)\, z_1}\right] = \frac{z_1'}{z_1}\, z_2 + \frac{c}{f(x)\, z_1}$$

oder

$$z_1 z_2' - z_2 z_1' = \frac{c}{f(x)}$$

ergiebt*).

Nachdem eine Anwendung des oben bewiesenen Satzes behandelt worden, gehen wir wieder zu demselben zurück, um noch einen wesentlichen Punkt zu erledigen, der oben bereits angedeutet war; es ist dort bei der Transformation des Gleichungssystems (2) in das System (5) hervorgehoben worden, dass jedes Integral von (2)

*) Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht etwa stets reductibel werden muss, wenn P das logarithmische Differential einer algebraischen Function bedeutet, wie z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + z = 0$$

zeigt, deren Fundamentalintegrale bekanntlich

$$z_1 = \int_0^\pi e^{ix\cos w}\, dw \quad \text{und} \quad z_2 = \int_0^\pi e^{ix\cos w} \log(x\sin^2 w)\, dw$$

sind und sich nicht als Integrale einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung darstellen lassen. Uebrigens mag bemerkt werden, dass der oben gefundene Ausdruck (29) für die allgemeinste Relation zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren ersten Ableitungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung nur die Voraussetzung erforderte, dass die beiden Fundamentalintegrale nicht schon Differentialgleichungen erster Ordnung genügen oder selbst algebraisch sind.

auch ein Integral von (5) ist, dass aber auch das Umgekehrte der Fall ist, wenn man sich nur im Allgemeinen unter $x_{\varkappa+\varrho}$ und $y_{\varkappa+\varrho}$ andere Lösungen derselben gegebenen algebraischen Beziehungen denkt, die zwischen diesen Grössen und x_1 stattfinden, und demgemäss waren auch in dem oben ausgesprochenen Theorem bei der Substitution der neuen particulären Integrale die unabhängigen Variabeln der Integrale des zweiten Systems von Differentialgleichungen im Allgemeinen andere Lösungen der gegebenen algebraischen Beziehungen. Fragen wir jetzt, wann die $x_{\varkappa+\varrho}$ dieselben Lösungen bleiben; denken wir uns oben bei der Transformation der Differentialgleichungen (2) und der angenommenen algebraischen Beziehung (3) in Differentialgleichungen mit der unabhängigen Variabeln x_1 nach Einsetzen der Werthe für

$$\frac{dz}{dx_{\varkappa+\varrho}},\ \frac{d^2z}{dx^2_{\varkappa+\varrho}},\ \cdots,\ \text{durch}\ \frac{dz}{dx_1},\ \frac{d^2z}{dx_1{}^2},\ \cdots$$

ausgedrückt, die Grössen $x_{\varkappa+\varrho}$ nicht herausgeschafft und nun den oben besprochenen Eliminationsprocess ausgeführt, so wird die resultirende Differentialgleichung in z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}$, $\frac{d^2z_1}{dx_1{}^2}$, $\cdots$ ausser x_1 noch $x_{\varkappa+1}$, $x_{\varkappa+2}$, $\cdots$ $x_{\varkappa+\lambda}$ in rationaler Form in ihren Coefficienten enthalten und mag mit

$$(31)\ \cdots\ \varphi\left(x_1,\ x_{\varkappa+1},\ x_{\varkappa+2},\ \cdots\ x_{\varkappa+\lambda},\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx_1},\ \frac{d^2z_1}{dx_1{}^2},\ \cdots\right)=0$$

bezeichnet werden. Diese Gleichung enthält also die durch algebraische Irrationalitäten ausgedrückten Functionen $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ der Variabeln x_1, und wir wissen aus Früherem, dass, wenn wir die Gleichung (31) in x_1 rational machen würden, alle Lösungen der in z_1 gegebenen Differentialgleichung

$$(32)\ \cdots\ f_1\left(x_1,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx_1},\ \cdots\ \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}\right)=0,$$

welche den früher angegebenen Beschränkungen unterliegt, auch Lösungen der rational gemachten Gleichung (31) sein werden. Berechnet man aus (32)

$$\frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}=\psi_1\left(x_1,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx_1},\ \cdots\ \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right),\ \cdots$$

$$\cdots\ \frac{d^{m_1}z_1}{dx_1^{m_1}}=\psi_\lambda\left(x_1,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx_1},\ \cdots\ \frac{d^{m_1-1}z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right)$$

unter der Voraussetzung, dass (32) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten irreductibel und vom λ^{ten} Grade ist, und bildet daraus durch Differentiation

$$\frac{d^{m_1+1} z_1}{dx_1^{m_1+1}} = \chi_1\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right), \cdots$$

$$\cdots \frac{d^{m_1+1} z_1}{dx_1^{m_1+1}} = \chi_\lambda\left(x_1, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right),$$

. . . .

setzt diese Werthe in die Gleichung (31) ein, und multiplicirt die sich so ergebenden λ Werthe der φ — Function, so erhält man

$$(33) \cdots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}, \psi_1, \chi_1, \cdots\right) \times$$

$$\cdots \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}, \psi_\lambda, \chi_\lambda, \cdots\right),$$

und die linke Seite dieser Gleichung ist rational in $z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$, da sie das Eliminationsresultat der höheren Ableitungen von z_1 als von der $m_1 - 1^{\text{ten}}$ Ordnung zwischen den Gleichungen (31) und (32) darstellt; bezeichnen wir diese Gleichung durch

$$(34) \cdots \Psi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right) = 0,$$

oder durch

$$(35) \cdots \Sigma P z_1^\alpha \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^\beta \left(\frac{d^2 z_1}{dx_1^2}\right)^\gamma \cdots \left(\frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}\right)^\mu = 0,$$

worin P eine ganze rationale Function von $x_1, x_{\varkappa+1}, x_{\varkappa+2}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ bedeutet, so würde sie nach Wegschaffung der algebraischen Irrationalitäten $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$, da sie nur von der $m_1 - 1^{\text{ten}}$ Ordnung ist und das Integral z_1 besitzt, eine für alle Werthe von

$$z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$$

identische sein müssen. Fassen wir nunmehr die Functionen $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ von x_1 auf, denken uns alle Verzweigungspunkte derselben verzeichnet, bilden alle Werthecombinationen dieser Grössen, welche die Umläufe von x_1 um diese einzelnen Verzweigungspunkte erzeugen und setzen alle diese Werthecombinationen in $\Psi = 0$ oder in die Grössen P der Gleichung (35) ein, so wird, wenn die so hervorgehenden Werthe von Ψ durch $\Psi_1, \Psi_2, \cdots \Psi_\nu$ bezeichnet werden, das Product

$$(36) \cdots \Psi \cdot \Psi_1 \cdot \Psi_2 \cdots \Psi_\nu = 0$$

gesetzt offenbar in x_1 rational sein, da für jeden Umlauf um einen

Verzweigungspunkt die P der einen Summe Ψ_α in die P der anderen Summe Ψ_β übergehen, und somit (36) der oben gemachten Bemerkung gemäss für beliebige Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ identisch gleich Null sein müssen. Wenn aber für ein beliebig gewähltes Werthesystem die linke Seite von (36) verschwinden soll, so muss jedenfalls eins der Ψ für unendlich viele Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ Null werden d. h. es müssen die entsprechenden Coefficienten P für jedes x_1 Null sein; da aber die P des einen Ψ in die P des andern Ψ übergehen, wenn man x_1 alle Umläufe um jene Verzweigungspunkte machen lässt, so werden also auch die P eines jeden Ψ Null sein, somit jedes Ψ für beliebige Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ verschwinden, und daher auch die Gleichung (34) oder (33) für beliebige Werthe der eben bezeichneten Grössen bestehen. Die einzelnen φ-Functionen der Gleichung (33) waren nun aus der Eliminationsgleichung (31) entstanden, indem man die Gleichung (32), welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten als irreductibel vorausgesetzt war, nach $\frac{d^{m_1} z_1}{dx_1^{m_1}}$ auflöste, die successiven Ableitungen bildete und in (32) einsetzte; da nun (33) für beliebige Werthe von z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ verschwinden musste, so wird jedenfalls einer der Factoren, also eine der φ-Functionen für beliebige Werthe dieser Grössen identisch Null sein; ist man nun im Stande, in der nach der höchsten Ableitung aufgelösten Gleichung (32) durch geschlossene Umläufe der Grössen z_1, $\frac{dz_1}{dx_1}, \cdots \frac{d^{m_1-1} z_1}{dx_1^{m_1-1}}$ zu allen Auflösungen $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_\lambda$ zu gelangen, oder was dasselbe aussagt, *ist die Gleichung* (32) *in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel mit Adjunction der Grössen* $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$, dann wird das Verschwinden irgend einer der λ φ-Functionen das Verschwinden einer jeden anderen dieser Functionen nach sich ziehen; daraus folgt dann, dass für jedes particuläre Integral der Differentialgleichung (32) auch die Gleichung (31) mit Beibehaltung der Werthe $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ befriedigt sein wird, d. h. *das Eliminationsresultat bestehen bleibt für jedes Integral der Gleichung* (32) — anders ausgedrückt, *es werden in dem oben ausgesprochenen allgemeinen Satze von der Erhaltung der algebraischen Relation in den eben bezeichneten Fällen die unabhängigen Variabeln der zu substituirenden particulären*

Integrale des zweiten Systems ihre Werthe behalten. Offenbar wird dies nach den obigen Auseinandersetzungen stets der Fall sein, wenn die Differentialgleichungen (1) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten vom ersten Grade sind, also jedenfalls für lineare Differentialgleichungen.

Wir wollen nunmehr einen zweiten Satz von der Erhaltung einer algebraischen Beziehung beweisen, von dem wir gleich nachher eine Reihe von Anwendungen machen wollen.

Seien wiederum die zwei Systeme von Differentialgleichungen (1) und (2) gegeben, über die wir jedoch fürs erste noch gar keine Voraussetzung machen, und bestehe auch jetzt zwischen einzelnen particulären Integralen derselben und deren Ableitungen eine algebraische Beziehung (3), so stelle man die erste Gleichung von (1) mit der Beziehung (3) zusammen, und eliminire, indem man die erstere M_1-mal, die letztere m_1-mal nach x_1 differentiirt, aus den so entstehenden, von einander unabhängigen $M_1 + m_1 + 2$ Gleichungen die Grössen

$$z_1, \frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2 z_1}{dx_1^2}, \cdots \frac{d^{M_1+m_1} z_1}{dx_1^{M_1+m_1}},$$

indem $x_2, \cdots x_\varkappa, z_2, \cdots z_\varkappa$ wieder als Parameter betrachtet, und die Differentialquotienten der Grössen $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ nach x_1 genommen in solche nach $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ genommen verwandelt werden; es ergiebt sich sodann eine Differentialgleichung von der Form

$$(37) \cdots \varphi\Bigg(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_{\varkappa+1} \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+1}+m_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{M_{\varkappa+1}+m_1}}, \cdots$$
$$\cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{M_{\varkappa+\lambda}+m_1} z_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}^{M_{\varkappa+\lambda}+m_1}}\Bigg) = 0,$$

aus der wir vermöge der Gleichungen (2) die Differentialquotienten von $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$, welche resp. von einer höheren Ordnung als der $n_1, \cdots n_\lambda^{\text{ten}}$ sind, eliminiren können. Nehmen wir an, dass die Gleichungen (2), als algebraische Gleichungen in dem höchsten Differentialquotienten aufgefasst, irreductibel sind, und sich aus ihnen

$$\frac{d^{n_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}} = \varphi_{11}\left(x_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}\right), \cdots$$
$$\cdots \frac{d^{n_1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1}} = \varphi_{\mu 1}\left(x_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1-1}}\right),$$
$$\frac{d^{n_1+1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1+1}} = \chi_{11}, \cdots \frac{d^{n_1+1} z_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}^{n_1+1}} = \chi_{\mu 1}, \cdots$$

ebenso

$$\frac{d^{n_2} z_{\varkappa+2}}{dx^{n_2}_{\varkappa+2}} = \varphi_{12}\left(x_{\varkappa+2}, z_{\varkappa+2}, \frac{dz_{\varkappa+2}}{dx_{\varkappa+2}}, \cdots \frac{d^{n_2-1} z_{\varkappa+2}}{dx^{n_2-1}_{\varkappa+2}}\right), \cdots \frac{d^{n_2} z_{\varkappa+2}}{dx^{n_2}_{\varkappa+2}} = \varphi_{\nu 2}$$

$$\frac{d^{n_2+1} z_{\varkappa+2}}{dx^{n_2+1}_{\varkappa+2}} = \chi_{12}, \cdots \frac{d^{n_2+1} z_{\varkappa+2}}{dx^{n_2+1}_{\varkappa+2}} = \chi_{\nu 2}, \cdots$$

u. s. w. ergiebt, so wird das gesuchte Eliminationsresultat in der Form dargestellt werden können

$$(38) \cdots \prod_{\alpha, \cdots \varrho} \varphi\left(x_1, x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}, z_{\varkappa+1}, \frac{dz_{\varkappa+1}}{dx_{\varkappa+1}}, \cdots \frac{d^{n_1-1} z_{\varkappa+1}}{dx^{n_1-1}_{\varkappa+1}}, \varphi_{\alpha 1}, \chi_{\alpha 1}, \cdots \right.$$

$$\left. \cdots z_{\varkappa+\lambda}, \frac{dz_{\varkappa+\lambda}}{dx_{\varkappa+\lambda}}, \cdots \frac{d^{n_\lambda-1} z_{\varkappa+\lambda}}{dx^{n_\lambda-1}_{\varkappa+\lambda}}, \varphi_{\varrho\lambda}, \chi_{\varrho\lambda} \cdots \right) = 0.$$

Unterwerfen wir nun die Differentialgleichungen (2) der weiteren Beschränkung, dass zwischen ihren particulären Integralen $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ und deren Ableitungen bis zur resp. $n_1 - 1^{\text{ten}}$, $n_2 - 1^{\text{ten}}$, $\cdots n_\lambda - 1^{\text{ten}}$ Ordnung keine algebraische Beziehung stattfinde, so muss die Gleichung (38) nothwendig eine in all diesen Grössen identische sein, d. h. es muss Π für beliebige Werthe dieser Grössen verschwinden. Nun ist aber vermöge der angenommenen algebraischen Irreductibilität der Functionen $\varphi, \chi, \cdots$ wiederum ersichtlich, dass, wenn in jenem Π-Producte ein Factor verschwindet, jeder derselben Null werden muss, und wenn wir somit willkürliche andere particuläre Integrale des Systems von Differentialgleichungen (2) herausgreifen, so wird nach schon wiederholt dagewesenen Schlüssen durch dieselben auch die Gleichung (37) befriedigt werden; daraus folgt aber wieder genau wie oben, dass zu jeder willkürlichen Wahl von $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ als Integralen ihrer resp. Differentialgleichungen ein Integral der Differentialgleichung (1) gehören wird, welches mit den anderen und deren Ableitungen in derselben algebraischen Beziehung (3) stehen, und worin die Variable x_1 stets wieder durch dieselben algebraischen Gleichungen (4) mit den Grössen $x_{\varkappa+1}, \cdots x_{\varkappa+\lambda}$ verbunden sein wird; dasselbe gilt für die Integrale der übrigen Gleichungen (1), und es mag nur noch bemerkt werden, dass die aufgestellte Bedingung der algebraischen Irreductibilität der Gleichungen (2) in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten und die Annahme, dass eine Gleichung von der Form (38) nicht bestehen darf, also $z_{\varkappa+1}, \cdots z_{\varkappa+\lambda}$ auch nicht Integrale von algebraischen Differentialgleichungen niederer Ordnung als der resp. $n_1, n_2 \cdots n_\lambda^{\text{ten}}$ sein dürfen, von im oben angegebenen Sinne irreductiblen Differentialgleichungen erfüllt sein kann. Fassen wir die nunmehr gewonnenen Resultate zusammen, so erhalten wir den folgenden Satz:

II. Besteht zwischen particulären Integralen der beiden Systeme von Differentialgleichungen (1) *und* (2) *und den Ableitungen derselben eine algebraische Beziehung, und sind die Differentialgleichungen des zweiten Systems nicht nur der Bedingung unterworfen, dass sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind, sondern dass auch keine algebraische Relation zwischen den in Betracht kommenden particulären Integralen und deren Ableitungen bis zu einer Ordnung hin, die um eine Einheit kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung ist, bestehe, so bleibt die algebraische Beziehung erhalten, wenn man statt der Integrale des Systemes* (2) *beliebige andere particuläre Integrale setzt, vorausgesetzt, dass statt der Integrale des Systemes* (1) *passende Integrale substituirt werden, wobei die unabhängigen Variablen beider Systeme durch dieselben algebraischen Gleichungen* (4) *mit einander verbunden bleiben.*

Wir heben den folgenden speciellen Fall hervor, der häufige Anwendung finden wird:

Besteht zwischen dem Integrale irgend einer Differentialgleichung und nicht algebraischen particulären Integralen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibel sind, irgend eine algebraische Beziehung, und findet zwischen den letzteren Integralen nicht schon selbst ein algebraischer Zusammenhang statt, so wird die algebraische Beziehung erhalten bleiben, wenn man für die Integrale der Differentialgleichungen erster Ordnung beliebige particuläre Integrale setzt, wenn man nur für das Integral der Differentialgleichung beliebiger Ordnung ein passendes particuläres Integral substituirt.

Es ist nicht nöthig, an dieser Stelle auf eine Ausdehnung der beiden aufgestellten Sätze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung auf den Fall näher einzugehen, in welchem die Systeme von Differentialgleichungen die abhängigen Variabeln $z_1, \cdot\cdot z_\varkappa, z_{\varkappa+1} \cdot\cdot z_{\varkappa+\lambda}$ nicht getrennt enthalten, sondern gleichzeitige totale Differentialgleichungen darstellen; man sieht ohne Schwierigkeit, in welcher Weise diese Sätze, die ganz allgemein gelten, zu generalisiren sind, und es soll im Folgenden nun eine Reihe von Anwendungen dieser Sätze auf verschiedene Fragen der Analysis gegeben werden.

§ 6.

Algebraische Beziehungen zwischen Abel'schen Integralen und Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen; Beziehungen zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen.

Seien die Differentialgleichungen gegeben

$$(39) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = y_1, \quad \frac{dz}{dx} = y_2, \cdots \frac{dz}{dx} = y_\lambda,$$

in denen $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ algebraische Functionen bedeuten, und welche nicht algebraisch integrirbar sein sollen, so soll die Frage nach der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen den Integralen dieser Differentialgleichungen

$$z_1 = \int y_1 dx, \quad z_2 = \int y_2 dx, \cdots\cdot z_\lambda = \int y_\lambda dx$$

aufgeworfen werden, welche wir in der irreductibeln algebraischen Form

$$(40) \cdots\cdot z_1 = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_\lambda)$$

zu Grunde legen wollen. Nehmen wir an, dass nicht schon $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ in einem algebraischen Zusammenhange stehen — in welchem Falle dann diese Relation als zu untersuchende Elementarbeziehung zu Grunde gelegt würde — so werden wir nach dem Satze II des vorigen Paragraphen für irgend eines der Integrale $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ ein beliebiges anderes particuläres Integral der entsprechenden Differentialgleichung setzen dürfen, wenn nur für z_1 ein passendes Integral substituirt wird; man erhält somit

$$z_1 + m = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_{\lambda-1}, z_\lambda + \mu),$$

worin μ eine willkürliche, m eine von μ abhängige Constante bedeutet, oder kürzer geschrieben

$$(41) \cdots\cdot z_1 = \Phi(z_\lambda) \quad \text{und} \quad z_1 + m = \Phi(z_\lambda + \mu)$$

also

$$(42) \cdots\cdot \Phi(z_\lambda + \mu) = \Phi(z_\lambda) + m.$$

Da diese Gleichung aber, nachdem z_1 herausgefallen, eine algebraische Beziehung zwischen $z_2, \cdots z_\lambda$ ausdrücken würde, welche der Annahme nach nicht bestehen sollte, so muss dieselbe identisch erfüllt sein, und da für $z_\lambda = 0$ sich $m = \Phi(\mu) - \Phi(0)$ ergiebt, so folgt

$$(43) \cdots\cdot \Phi(z_\lambda + \mu) = \Phi(z_\lambda) + \Phi(\mu) - \Phi(0).$$

Wird nun diese Gleichung, die, wie eben hervorgehoben worden, eine identische sein muss, nach z_λ und μ differentiirt, so ergiebt sich

$$\Phi'(z_\lambda + \mu) = \Phi'(z_\lambda) = \Phi'(\mu),$$

also

$$z_1 = \Phi(z_\lambda) = c z_\lambda + c_1,$$

und man ersieht aus (42), dass

$$c(z_\lambda + \mu) + c_1 = c z_\lambda + c_1 + m \quad \text{oder} \quad c\mu = m,$$

also c eine Constante ist, während c_1 algebraisch von $z_2, \cdots z_{\lambda-1}$ und x abhängt; da dasselbe aber für die Beziehung von z_1 zu $z_{\lambda-1}$, $z_{\lambda-2}, \cdots z_2$ gilt, so folgt der Satz:

Die einzig mögliche Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ist die lineare mit constanten Coefficienten

$$A_1 \int y_1\, dx + A_2 \int y_2\, dx + \cdots + A_\lambda \int y_\lambda\, dx = B,$$

worin B eine algebraische Function von x bedeutet).*

Es folgt hieraus schon, dass, wenn Logarithmen in die algebraische Beziehung eintreten sollen, oder wenn eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen statthaben soll, dieselbe, weil die Logarithmen selbst als Integrale algebraischer Functionen dargestellt werden können, nothwendig die Form haben muss

$$A_1 \int y_1\, dx + A_2 \int y_2\, dx + \cdots + A_\lambda \int y_\lambda\, dx =$$
$$= a_1 \log v_1 + a_2 \log v_2 + \cdots + a_p \log v_p + b,$$

worin $A_1, A_2, \cdots A_\lambda, a_1, a_2, \cdots a_p$ Constanten und $v_1, v_2, \cdots v_p, b$ algebraische Functionen von x bedeuten.

Wir werfen nunmehr die Frage auf, ob in eine algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen auch die Umkehrungsfunction des Logarithmus, also die Exponentialfunction, deren Exponent eine algebraische Function von x ist, eintreten kann**). Werde die wieder in irreductibel-algebraischer Form angenommene Beziehung durch

$$z_1 = \varphi(x, z_2, z_3, \cdots z_\lambda, \zeta) \quad \text{oder} \quad z_1 = \Phi(\zeta)$$

dargestellt, wenn Φ nur eine Abkürzung von φ bedeutet, und

$$\zeta = e^w \quad \text{oder} \quad \frac{d\zeta}{dx} = \zeta \frac{dw}{dx}$$

ist, worin w eine algebraische Function von x bezeichnet, und nimmt man wieder an, dass nicht schon zwischen $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ und ζ eine

*) Vergl. oeuvres de H. Abel, tome II. pag. 206. 1881.

**) Vgl. die Untersuchungen von Liouville über algebraisch-logarithmische Integrale.

algebraische Beziehung besteht, so folgt, da das allgemeine Integral der Differentialgleichung in ζ durch $\mu e^w = \mu\zeta$ dargestellt wird, wiederum nach Satz II.

$$(44) \cdots\cdots z_1 + m = \Phi(\mu\zeta) \quad \text{oder} \quad \Phi(\mu\zeta) = \Phi(\zeta) + m,$$

und da für $\zeta = 1 \quad m = \Phi(\mu) - \Phi(1)$ sich ergiebt,

$$(45) \cdots\cdots \Phi(\mu\zeta) = \Phi(\zeta) + \Phi(\mu) - \Phi(1);$$

die Differentiation der in ζ und μ identischen Gleichung liefert

$$\Phi'(\mu\zeta) = \frac{\Phi'(\zeta)}{\mu} = \frac{\Phi'(\mu)}{\zeta},$$

somit

$$\zeta\Phi'(\zeta) = c \quad \text{oder} \quad z_1 = \Phi(\zeta) = c\log\zeta + c_1 = cw + c_1,$$

worin c wie aus (44) hervorgeht, eine Constante darstellt, d. h. es kommt in der oben angenommenen algebraischen Beziehung ζ selbst gar nicht vor, oder *es giebt keine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen, in welche eine Exponentialfunction mit algebraischem Exponenten eintritt.*

Diese Frage mag noch etwas weiter gefasst werden; es soll untersucht werden, ob zwischen Abel'schen Integralen und einer analytischen Function, welche ein Additionstheorem besitzt, überhaupt eine algebraische Beziehung bestehen könne. Sei w das von x algebraisch abhängige Argument der Function v, der ein Additionstheorem angehören soll, so genügt dieselbe bekanntlich einer algebraischen Differentialgleichung

$$(46) \cdots\cdots F\left(v, \frac{dv}{dw}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dw} = \varphi(v),$$

welche die unabhängige Variable w nicht explicite enthält, und deren allgemeines Integral sich in der Form darstellt

$$V = \psi(w + c),$$

oder auch, da die v-Function ein algebraisches Additionstheorem besitzen sollte, die Beziehung liefert

$$(47) \cdots\cdots V = f\big(\psi(w), \psi(c)\big) = f(v, \mu),$$

in der f eine algebraische Function und μ eine willkürliche Constante bedeutet.

Setzen wir nun die zu untersuchende algebraische Relation zwischen Abel'schen Integralen und der Function v wieder in die Form

$$(48) \cdots\cdots z_1 = \Phi(v),$$

so folgt nach Satz II

$$(49) \cdots\cdots z_1 + m = \Phi(V) = \Phi\big[f(v, \mu)\big] = \Phi(v) + m,$$

und da diese Gleichung wieder unter der Annahme, dass nicht schon zwischen weniger Abel'schen Integralen und der Function v eine algebraische Gleichung stattfinden solle, eine identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach v und μ

$$(50) \ldots \frac{\partial \Phi[f(v,\mu)]}{\partial f(v,\mu)} \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} = \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v}, \quad \frac{\partial \Phi[f(v,\mu)]}{\partial f(v,\mu)} \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial m}{\partial \mu},$$

und daraus wieder durch Division der beiden Gleichungen

$$(51) \ldots \frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \varkappa \cdot \frac{\dfrac{\partial f(v,\mu)}{\partial v}}{\dfrac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu}},$$

worin $\varkappa$ eine von v unabhängige Grösse bedeutet; beachtet man aber, dass nach (46) und (47)

$$\frac{dv}{\varphi(v)} + \frac{d\mu}{\varphi(\mu)} = \frac{dV}{\varphi(V)} = \frac{\dfrac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} dv + \dfrac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} d\mu}{\varphi[f(v,\mu)]},$$

also

$$\frac{\partial f(v,\mu)}{\partial v} = \frac{\varphi[f(v,\mu)]}{\varphi(v)}, \quad \frac{\partial f(v,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\varphi[f(v,\mu)]}{\varphi(\mu)}$$

ist, so folgt aus (51)

$$\frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \frac{K}{\varphi(v)},$$

worin K von v unabhängig ist, also

$$z_1 = \Phi(v) = K\int \frac{dv}{\varphi(v)} + L = Kw + L,$$

und es enthält daher jene algebraische Relation die Function v gar nicht; *es giebt somit keine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen und solchen analytischen Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen.*

Bemerkt man jedoch, dass die eben gemachten Schlüsse wesentlich auf der Existenz der Gleichung (47) beruhten, so wird man auf die Frage geführt, ob in eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen ein Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten darf, für welche sich das allgemeine Integral als algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ausdrücken lässt, in welche die unabhängige Variable nicht explicite eintritt. Bevor wir diese Frage beantworten, wollen wir erst die Gestalt aller algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(52) \ldots \frac{dv}{dw} = \varphi(v, w)$$

ermitteln, für welche, wenn v ein particuläres, V das allgemeine Integral bedeutet,

$$(53) \ldots V = f(v, \mu)$$

ist, worin f eine algebraische Function und μ eine willkürliche Constante ist.

Zuerst ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn überhaupt für eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen dem allgemeinen Integrale V, einem particulären v, einer willkürlichen Constanten μ und der unabhängigen Variabeln w eine algebraische Beziehung

$$V = F(v, w, \mu)$$

stattfinden soll, wobei v nicht ein algebraisches Integral sein soll, diese Beziehung nach dem Satze I des letzten Paragraphen erhalten bleiben muss, wenn man für v ein beliebiges anderes particuläres Integral und für V ein passendes Integral derselben Differentialgleichung substituirt; wenn dann die Constante μ bei dieser Substitution nicht herausfällt, so wird offenbar V, da sein Ausdruck noch die willkürliche Constante enthält, wieder das allgemeine Integral jener Differentialgleichung sein; besteht somit zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale eine algebraische Beziehung*), so darf man statt des particulären Integrales ein willkürliches anderes substituiren — vorausgesetzt, dass die Constante nicht herausfällt — es bleibt jener algebraische Ausdruck noch das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung.

So wird in der Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dw} - v = w$$

mit dem particulären Integrale $v = e^w + w - 1$ das allgemeine

*) Es lässt sich ohne weitere Schwierigkeit mit Hülfe der Sätze I und II des vorigen Paragraphen die Richtigkeit der beiden folgenden Theoreme erkennen:

Lässt sich in einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln, von μ particulären Integralen und m willkürlichen Constanten ausdrücken, so erhält man im Allgemeinen immer wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für eines jener particulären Integrale, welches nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung als der m^{ten} angehört, ein beliebiges anderes, für die $\mu - 1$ übrigen aber bestimmte andere particuläre Integrale eben dieser Differentialgleichung substituirt,

und als specieller Fall:

Lässt sich in einer algebraischen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln, eines particulären Integrales, das nicht schon einer Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} Genüge leistet, und m willkürlicher Constanten ausdrücken, so erhält man im Allgemeinen wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für das particuläre Integral ein beliebiges anderes eben dieser Differentialgleichung substituirt.

Integral in der Form ausgedrückt sein

$$V = \mu v - (\mu - 1)(w - 1),$$

und setzt man statt v das particuläre Integral $v_1 = \mu_1 e^w + w - 1$, so wird V in $\mu v_1 - (\mu - 1)(w - 1)$ übergehen, also noch immer das allgemeine Integral darstellen; nur wenn statt v das einzige algebraische Integral $w - 1$ substituirt wird, fällt μ heraus, und man erhält für V dasselbe particuläre algebraische Integral.

Um nun die charakteristische Eigenschaft der Gleichung (52) zu finden, für welche die Beziehung (53) stattfinden soll, setzen wir

$$\frac{dv}{dw} = \varphi(v, w), \quad \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \frac{dv}{dw} = \varphi\big(f(v, \mu), w\big),$$

woraus sich

$$\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \varphi(v, w) = \varphi\big(f(v, \mu), w\big)$$

ergiebt, und da, wenn angenommen wird, dass v nicht eine algebraische Function von w ist, diese Gleichung eine in v und μ identische sein muss, so wird die Differentiation nach diesen Grössen die Beziehungen liefern

$$\frac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)} \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} = \frac{\partial^2 f(v, \mu)}{\partial v^2} \varphi(v, w) + \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} \frac{\partial \varphi(v, w)}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)} \frac{\partial f(v, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial^2 f(v, \mu)}{\partial v \partial \mu} \varphi(v, w),$$

oder durch Elimination von $\dfrac{\partial \varphi\big(f(v, \mu), w\big)}{\partial f(v, \mu)}$, wie eine leichte Rechnung ergiebt,

$$\varphi(v, w) = M \frac{\dfrac{\partial f(v, \mu)}{\partial \mu}}{\dfrac{\partial f(v, \mu)}{\partial v}},$$

worin M eine algebraische Function von w und μ bedeutet, und $\varphi(v, w)$ von μ frei sein muss; setzt man $\mu = 0$, so folgt

$$\varphi(v, w) = \psi(v) \chi(w),$$

und somit als nothwendige Form der Differentialgleichung (52), für welche die Relation (53) existiren soll,

$$(54) \quad \ldots \quad \frac{dv}{dw} = \psi(v) \chi(w),$$

worin ψ und χ algebraische Functionen bedeuten. Fragen wir nun umgekehrt, welchen Differentialgleichungen von dieser Form auch wirklich eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und *einem* particulären Integrale entspricht, so kann wegen

$$\frac{dV}{\psi(V)} = \chi(w) dw, \quad \frac{dv}{\psi(v)} = \chi(w) dw$$

die Frage auch so gestellt werden: wann hat die Differentialgleichung

$$(55) \cdots\cdot \frac{dV}{\psi(V)} = \frac{dv}{\psi(v)}$$

ein allgemeines algebraisches Integral? Ist nun α ein willkürlicher constanter Werth, und sei $V_{v=\alpha} = C$, so können wir das Integral der Gleichung (55) in die Form setzen

$$(56) \cdots\cdot \int\limits_\alpha^V \frac{dt}{\psi(t)} - \int\limits_\alpha^v \frac{dt}{\psi(t)} = \int\limits_\alpha^C \frac{dt}{\psi(t)},$$

und eliminirt man nun unter der Annahme, dass der Differentialgleichung (55) ein algebraisches Integral von der Form der Gleichung (53) zukommen soll, aus den hieraus sich ergebenden Gleichungen

$$V = f(v, \mu) \quad \text{und} \quad C = f(\alpha, \mu)$$

die Constante μ, so folgt die algebraische Beziehung

$$C = f_1(v, V),$$

d. h. nach (56), das Integral

$$\int \frac{dt}{\psi(t)}$$

besitzt ein algebraisches Additionstheorem. Lassen sich umgekehrt zwei gleichartige Integrale dieser Form zu einem solchen vereinigen mit algebraischer Relation zwischen den oberen Grenzen, so wird jede Differentialgleichung von der Gestalt (54) wegen der daraus folgenden Beziehung (55) eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale liefern, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{dv}{dw} = f(v, w)$ *so beschaffen ist, dass ihr allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, ist die, dass* $f(v, w) = \psi(v)\,\chi(w)$, *worin* $\chi(w)$ *eine willkürliche algebraische Function von* w *und* $\psi(v)$ *eine solche algebraische Function von* v *bedeutet, dass* $\frac{dv}{\psi(v)}$ *ein Differential erster Gattung vom Geschlechte 1 bedeutet.*

Nehmen wir nun an, es bestehe für Abel'sche Integrale und dem Integrale einer Differentialgleichung (54), deren Functionen $\psi(v)$ und $\chi(w)$ die eben angegebenen Eigenschaften haben sollen, eine algebraische Beziehung, so werden für eine solche alle die oben aus der Gleichung (47) abgeleiteten Folgerungen gelten, und wir werden also auch zu der Beziehung (51) geführt werden

$$\frac{\partial \Phi(v)}{\partial v} = \varkappa \frac{\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v}}{\frac{d f(v, \mu)}{\partial \mu}}.$$

Nun ist aber vermöge der Annahme

$$\frac{dV}{\psi(V)} = \frac{dv}{\psi(v)} + \frac{d\mu}{\psi(\mu)},$$

und daher wie oben

$$\frac{\partial f(v, \mu)}{\partial v} = \frac{\psi[f(v, \mu)]}{\psi(v)}, \quad \frac{d f(v, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\psi[f(v, \mu)]}{\psi(\mu)},$$

woraus

$$\frac{\partial \Phi(v)}{dv} = \frac{K}{\psi(v)}$$

folgt, worin K von v unabhängig ist, und also

$$(57) \cdots \cdot z_1 = \Phi(v) = K\int \frac{dv}{\psi(v)} + L = K\int \chi(w) dw + L;$$

da w eine algebraische Function von x ist, so stellt $\int \chi(w) dw$ wieder nur ein Abel'sches Integral dar, ohne dass das Integral v der Differentialgleichung (54) selbst in die algebraische Beziehung eingeht, und wir erhalten also den Satz:

In eine algebraische Beziehung zwischen Abel'schen Integralen kann nie das Integral einer Differentialgleichung erster Ordnung eingehen, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, welche die unabhängige Variable nicht explicite enthält.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass man die vorigen Betrachtungen auf die Frage nach den etwa stattfindenden algebraischen Beziehungen zwischen Abel'schen Integralen und einer durch irgend eine Differentialgleichung definirten Transcendenten ausdehnen kann; sei z. B. v die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 v}{dw^2} + P\frac{dv}{dw} + Qv = 0,$$

worin w eine algebraische Function von x, P und Q rationale Functionen von w sein sollen, und werde wieder

$$z_1 = \Phi(v)$$

gesetzt, so wird nach Satz II unter der Annahme, dass nicht schon zwischen den anderen Abel'schen Integralen $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$, v und $\frac{dv}{dw}$ ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, die Beziehung folgen

$$z_1 + m = \Phi(\mu v) = \Phi(v) + m = \Phi(v) + \Phi(\mu) - \Phi(1),$$

und somit wieder mit Hülfe bekannter Schlüsse

$$z_1 = \Phi(v) = c \log v + c_1,$$

so dass in der obigen Relation nie v selbst, sondern nur der Logarithmus dieser Grösse vorkommen kann, oder auch, wenn

$$v = e^{\int t\,dw}$$

gesetzt wird, nur die Quadratur eines Integrales der Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dt}{dw} + t^2 + Pt + Q = 0.$$

§ 7.

Algebraische Beziehungen zwischen Integralen linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen Integralen oder zwischen Integralen der Differentialgleichungen (39) festgestellt, wollen wir jetzt nach der allgemeinen Gestalt einer algebraischen Relation für Integrale $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ der Differentialgleichungen

$$(58) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} = zy_1, \quad \frac{dz}{dx} = zy_2, \cdots \frac{dz}{dx} = zy_\lambda$$

fragen, worin $y_1, y_2, \cdots y_\lambda$ irreductible algebraische Functionen bedeuten; es bedarf nach dem Früheren keiner weiteren Auseinandersetzung, dass unter der Annahme, dass nicht schon zwischen $z_2, z_3, \cdot\cdot z_\lambda$ eine algebraische Beziehung stattfinde, sich für die Relation

$$z_1 = \Phi(z_\lambda)$$

die Bedingungen ergeben

$$(59) \cdots\cdot m z_1 = \Phi(\mu z_\lambda) = m\Phi(z_\lambda) = \frac{\Phi(z_\lambda)\,\Phi(\mu)}{\Phi(1)},$$

woraus durch Differentiation nach z_λ und μ

$$z_\lambda \frac{\Phi'(z_\lambda)}{\Phi(z_\lambda)} = c_\lambda$$

folgt, worin c_λ von z_λ unabhängig, also durch Integration

$$z_1 = \Phi(z_\lambda) = a_\lambda z_\lambda^{c_\lambda},$$

und es wird c_λ vermöge der Functionalgleichung (59) oder der Beziehung

$$a_\lambda (\mu z_\lambda)^{c_\lambda} = m a_\lambda z_\lambda^{c_\lambda}$$

eine Constante sein müssen; man schliesst leicht, indem man auf die anderen Integrale $z_2, z_3, \cdots$ übergeht, dass *die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen particulären Integralen der homogenen linearen*

Differentialgleichungen erster Ordnung (58) *die Gestalt hat*

$$(60) \cdots\cdot z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_\lambda^{c_\lambda} = A,$$

worin A *eine algebraische Function von* x *und* $c_1, c_2, \cdots c_\lambda$ *rationale Constanten sein müssen.* Dass in der That derartige Beziehungen zwischen particulären Integralen derselben Differentialgleichung für verschiedene algebraisch von einander abhängige Argumente existiren, werden wir später bei der Besprechung des verallgemeinerten Abel'-schen Theorems sehen.

Werfen wir endlich noch die Frage nach der Form der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen Integralen des Systems von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung auf

$$(61) \cdots\cdot \frac{dz}{dx} + zy_1 = \eta_1, \ \frac{dz}{dx} + zy_2 = \eta_2, \cdots \frac{dz}{dx} + zy_\lambda = \eta_\lambda,$$

und bezeichnen diese Relation durch

$$(\mathrm{A}) \cdots\cdot \varphi(z_1, z_2, \cdots z_\lambda) = 0;$$

da nun allgemein

$$(62) \cdots\cdot z_\varkappa = c_\varkappa e^{-\int y_\varkappa dx} + e^{-\int y_\varkappa dx} \int e^{\int y_\varkappa dx} \eta_\varkappa dx = c_\varkappa \zeta_\varkappa + Z_\varkappa$$

ist, worin $\zeta_\varkappa$ und $Z_\varkappa$ als Integrale der Differentialgleichungen

$$(63) \cdots\cdot \frac{d\zeta_\varkappa}{dx} + \zeta_\varkappa y_\varkappa = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dZ_\varkappa}{dx} + Z_\varkappa y_\varkappa = \eta_\varkappa$$

aufgefasst werden können, und die algebraische Beziehung (A) in eine algebraische Beziehung zwischen

$$c_1\zeta_1 + Z_1, \ c_2\zeta_2 + Z_2, \cdots c_\lambda\zeta_\lambda + Z_\lambda$$

übergeht, so wollen wir jene Beziehung jetzt gleich in der allgemeineren Form

$$(64) \cdots\cdot \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda, Z_1, Z_2, \cdots Z_\lambda) = 0$$

zu Grunde legen. Nehmen wir an, dass in der Gleichung (64) mindestens zwei Z vorkommen — wozu wir für das System (61) wenigstens berechtigt sind, da $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ nicht algebraische Functionen sein sollten*) — und setzen die algebraische Beziehung (64) in die Form

$$(65) \cdots\cdot Z_1 = \Phi(Z_\lambda),$$

so wird nach Satz II des vorigen Paragraphen, wenn wir annehmen, dass nicht schon zwischen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdot \zeta_\lambda, Z_2, Z_3, \cdots\cdot Z_\lambda$ eine algebraische Beziehung stattfinde — indem wir diejenige algebraische Beziehung der Untersuchung zu Grunde legen, welche

*) Die Annahme, dass ein $\zeta_\varkappa$ eine algebraische Function ist, zieht offenbar nach sich, dass das entsprechende $Z_\varkappa$ das Product aus einer algebraischen Function in ein Abel'sches Integral ist.

$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$ mit der kleinsten Zahl der Z verbindet —,

(66) $Z_1 + m\zeta_1 = \Phi(Z_\lambda + \mu\zeta_\lambda) = \Phi(Z_\lambda) + m\zeta_1 = \Phi(Z_\lambda) + \Phi(\mu\zeta_\lambda) - \Phi(0)$

sein, und somit, wie unmittelbar zu sehen,

$$Z_1 = \Phi(Z_\lambda) = aZ_\lambda + b,$$

worin a nach (66) durch den Ausdruck

$$a = \frac{m}{\mu}\frac{\zeta_1}{\zeta_\lambda} = \varkappa\frac{\zeta_1}{\zeta_\lambda}$$

gegeben ist, in dem $\varkappa$ constant, und b von Z_1 und Z_λ unabhängig ist; schliesst man so weiter, so ergiebt sich die gesuchte algebraische Relation in der Form

$$(67) \cdots\cdot \varkappa_1\frac{Z_1}{\zeta_1} + \varkappa_2\frac{Z_2}{\zeta_2} + \cdots + \varkappa_\lambda\frac{Z_\lambda}{\zeta_\lambda} = U,$$

worin $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_\lambda$ Constanten und U eine algebraische Function von $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$ sein wird. Da aber die Existenz einer Relation zwischen $Z_2, \cdots Z_\lambda, \zeta_1, \cdots \zeta_\lambda$ ausgeschlossen war, so dürfen wir wieder nach Satz II in (67) $\mu\zeta_1$ statt ζ_1 und $Z_1 + m\zeta_1$ statt Z_1 setzen, und es müsste diese Beziehung unverändert bleiben; es ergiebt sich aber dann

$$(68) \cdots\cdot \frac{\varkappa_1}{\mu}\frac{Z_1}{\zeta_1} + \varkappa_2\frac{Z_2}{\zeta_2} + \cdots + \varkappa_\lambda\frac{Z_\lambda}{\zeta_\lambda} = U_1 - \frac{m\varkappa_1}{\mu},$$

worin U_1 aus U hervorgeht, wenn ζ_1 durch $\mu\zeta_1$ ersetzt wird, und aus (67) und (68) würde wiederum folgen, dass

$$\frac{\varkappa_1 - \mu}{\mu}\frac{Z_1}{\zeta_1} = U_1 - U - \frac{m\varkappa_1}{\mu},$$

d. h. es wäre schon Z_1 algebraisch ausdrückbar durch $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\lambda$, was gegen die Annahme war — es giebt somit keine Elementarbeziehung zwischen den ζ und Z, in welcher mindestens zwei der Z-Grössen vorkommen.

Untersuchen wir nun Beziehungen zwischen *einer* Z-Grösse, z. B. Z_1 und ν ζ-Grössen, nehmen aber jetzt wieder an, dass nicht schon zwischen Z_1 und weniger als ν dieser ζ-Grössen eine algebraische Beziehung stattfinden soll, wobei ausserdem fürs erste $\nu \geqq 2$ sein soll; setzt man diese Beziehung in die Form

$$(69) \cdots\cdot \zeta_{\varrho_1} = \Phi(\zeta_{\varrho_2}),$$

so wird sich wiederum nach Satz II und mit Hülfe der für die Gleichung (59) gemachten Schlüsse

$$(70) \cdots\cdot \zeta_{\varrho_1}^{\alpha_1}\zeta_{\varrho_2}^{\alpha_2}\cdots\zeta_{\varrho_\nu}^{\alpha_\nu} = V$$

ergeben, worin V eine algebraische Function von Z_1 und x ist, während $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ rationale Zahlen bedeuten; da aber andererseits auch zwischen den ν ζ-Grössen keine algebraische Relation bestehen soll, weil sonst schon zwischen Z und weniger als ν ζ-Grössen auch ein algebraischer Zusammenhang existirte, so darf man in (70) ζ_{ϱ_1} durch $\mu\,\zeta_{\varrho_1}$ und Z_1 durch $Z_1 + m\zeta_1$ ersetzen und erhielte

$$(71) \cdots\cdot \quad \mu^{\alpha_1}\,\zeta_{\varrho_1}^{\alpha_1}\,\zeta_{\varrho_2}^{\alpha_2} \cdots \zeta_{\varrho_\nu}^{\alpha_\nu} = V_1,$$

worin V_1 aus V erhalten wird, wenn Z_1 durch $Z_1 + m\zeta_1$ ersetzt wird, und somit

$$(72) \cdots\cdot \quad V_1 = \mu^{\alpha_1}\,V,$$

welche Gleichung eine Beziehung zwischen Z_1 und ζ_1 fixiren würde, welche offenbar nicht identisch sein kann; wir sehen somit, dass eine Elementarbeziehung zwischen Z_1 und einigen der ζ-Functionen nur *eine* dieser letzteren Functionen enthalten kann. Sei diese Beziehung

$$(73) \cdots\cdot \quad Z_1 = \Phi(\zeta_\varrho),$$

so folgt, da immer angenommen wird, dass die Integrale der in Rede stehenden Differentialgleichungen nicht algebraisch sind,

$$Z_1 + m\zeta_1 = \Phi(\mu\zeta_\varrho) = \Phi(\zeta_\varrho) + m\zeta_1,$$

und da diese Gleichung keine identische sein kann, da ζ_1 nur in dem Ausdrucke $m\zeta_1$ enthalten ist, so ist ζ_ϱ eine algebraische Function von ζ_1, und es geht (73) über in

$$(74) \cdots\cdot \quad Z_1 = \Psi(\zeta_1);$$

aber hieraus folgt wieder

$$Z_1 + m\zeta_1 = \Psi(\mu\zeta_1) = \Psi(\zeta_1) + m\zeta_1,$$

oder wie leicht zu sehen, da diese Gleichung identisch sein muss, $\Psi'(\zeta_1) = \text{const.}$, und daher

$$(75) \cdots\cdot \quad Z_1 = a\zeta_1 + b,$$

worin a eine Constante und b eine algebraische Function von x ist; wir finden somit, *dass die einzig mögliche Elementarbeziehung zwischen Integralen der Systeme* (63) *in der Form enthalten ist*

$$Z_\varkappa = a_\varkappa\,\zeta_\varkappa + b_\varkappa,$$

worin $a_\varkappa$ eine Constante, $b_\varkappa$ eine algebraische Function von x ist.

In der That besteht zwischen den Integralen

$$\zeta = e^{-x} \quad \text{und} \quad Z = e^{-x} + x - 1$$

der Differentialgleichungen

$$\frac{d\zeta}{dx} + \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dZ}{dx} + Z = x$$

die Beziehung

$$Z = \zeta + x - 1.$$

Bevor wir dieses Kapitel schliessen, welches die Aufstellung der Sätze I und II zum Gegenstande hatte, wollen wir zum Beweise eben dieser Sätze noch eine Bemerkung hinzufügen. Sei

$$F(x, z_1, z_2, \cdots z_\lambda) = 0$$

eine algebraische Relation zwischen particulären Integralen algebraischer Differentialgleichungen, so ist unmittelbar klar, dass, wenn man die Variable x solche Umläufe machen lassen kann, dass z. B. das Integral z_1 in ein anderes particuläres Integral z_1' der die Grösse z_1 definirenden Differentialgleichung übergeht, weil dann auch $z_2, z_3, \cdots z_\lambda$ nur in dieselben oder andere particuläre Integrale der resp. Differentialgleichungen übergehen können, dieselbe algebraische Beziehung zwischen den neuen particulären Integralen

$$F(x, z_1', z_2', \cdots z_\lambda') = 0$$

bestehen wird; insofern man also durch geschlossene Umläufe ein particuläres Integral in ein anderes übergehen lassen kann, würden die oben bewiesenen Sätze von der Erhaltung der algebraischen Relation unmittelbar ersichtlich sein; dass dies jedoch im allgemeinen nicht der Fall ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung — so hat z. B. die Differentialgleichung

$$z \frac{d^2 z}{dx^2} - \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - z \frac{dz}{dx} = 0$$

das allgemeine Integral

$$z = c_1 e^{ce^x},$$

worin c und c_1 willkürliche Constanten bedeuten, und da alle Integrale eindeutig sind, so kann man durch geschlossene Umläufe des x nicht von einem particulären Integrale zum anderen übergehen, trotzdem wird aber unter den oben angegebenen Bedingungen eine algebraische Beziehung für ein neues System particulärer Integrale auch solcher Differentialgleichungen erhalten bleiben. Wären $z_1, z_2, \cdots z_\lambda$ Lösungen irreductibler algebraischer Gleichungen, für welche ebenfalls der Satz von der Erhaltung des algebraischen Zusammenhanges besteht, so liesse sich dieser Satz unmittelbar aus der Ueberlegung herleiten, dass man von irgend einer Lösung einer irreductiblen algebraischen Gleichung zu jeder derselben gelangen kann, wenn man x geschlossene Umläufe beschreiben lässt; aber man kann nicht immer, wie eben hervorgehoben worden, bei Differentialgleichungen, selbst nicht bei irreductibeln, durch geschlossene Umläufe von einem particulären Integrale zu einem anderen gelangen — so kennen wir z. B. homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zwei überall eindeutige Integrale besitzen, welche nicht als Integrale algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung darstellbar sind*).

---

*) Es mag dieser Punkt mit einigen Worten erläutert werden: Seien zwei particuläre Fundamentalintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten y_1 und y_2, und mag y_1 bei der Umkreisung eines singulären Punktes der Coefficienten in $ay_1 + by_2$ übergehen, so kann man y_1 und $ay_1 + by_2$ im Allgemeinen als zwei Fundamentalintegrale betrachten, da die homogene Beziehung $my_1 + n(ay_1 + by_2) = 0$ nur für $b = 0$ bestehen kann, und wir sehen somit, dass, wenn in einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ein particuläres Integral existirt, das nicht bei einem Umlauf um einen singulären Punkt in sich selbst mit einem constanten Factor versehen übergeht, dann stets zwei particuläre Fundamentalintegrale vorhanden sind, von denen das eine bei einer Umkreisung in das andere übergeht, wie dies bei irreductibeln algebraischen Gleichungen der Fall ist. Geht nun y_1 in ay_1 über und y_2 ebenso in Ay_2, so wird man im Allgemeinen $\varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 y_2$ und $a\varkappa_1 y_1 + A\varkappa_2 y_2$, von denen das erste bei einer Umkreisung in das zweite übergeht, als Fundamentalintegrale betrachten dürfen, da $m(\varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 y_2) + n(a\varkappa_1 y_1 + A\varkappa_2 y_2) = 0$ die Bedingung $a = A$ nach sich zieht, und wir sehen also, *dass nur dann nicht zwei Fundamentalintegrale existiren, von denen das eine bei einer Umkreisung eines singulären Punktes in das andere übergeht, wenn y_1 und y_2 in dasselbe Vielfache ihrer resp. Werthe durch eine Umkreisung übergeführt werden,* was z. B. der Fall ist, wenn die Differentialgleichung zwei eindeutige Integrale besitzt. In diesem Falle muss aber die Fuchs'sche Fundamentalgleichung zwei nur um eine ganze Zahl verschiedene Lösungen r und r_1 besitzen, und ihre Integrale werden dann bekanntlich in der Umgebung des singulären Punktes die Form haben

$$y_1 = (x-\alpha)^r \varphi_{11} \quad \text{und} \quad y_2 = (x-\alpha)^{r_1} \left\{\varphi_{12} + \varphi_{22} \log(x-\alpha)\right\},$$

worin φ_{11}, φ_{12}, φ_{22} eindeutige, nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $x - \alpha$ fortschreitende, in $x = \alpha$ von Null verschiedene Reihen vorstellen und $\varphi_{22} = C\varphi_{11}$ ist; da nun bei einer Umkreisung von α

$$y_1 \text{ in } e^{2r\pi i} y_1,\; y_2 \text{ in } e^{2r_1\pi i}(x-\alpha)^{r_1}\left\{\varphi_{12} + \varphi_{22}\log(x-\alpha) + 2\pi i\varphi_{22}\right\} =$$
$$= e^{2r\pi i} y_2 + 2\pi i C e^{2r\pi i} y_1 (x-\alpha)^{r_1 - r}$$

übergeht, so muss der Annahme gemäss $\varphi_{22} = 0$ sein, so dass

$$y_1 = (x-\alpha)^r \varphi_{11},\; y_2 = (x-\alpha)^{r_1} \varphi_{12}$$

wird, und diese Form müssten die Fundamentalintegrale um jeden singulären Punkt herum haben, wenn nicht solche particuläre Integrale existiren sollen, welche bei der Umkreisung eines kritischen Punktes in einander übergehen, was wir aber auch, wie mit Hülfe der Substitution $y = (x-\alpha)^r z$ unmittelbar ersichtlich ist, so ausdrücken können, dass die aus der Differentialgleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ transformirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{2r}{x-\alpha} + P\right)\frac{dz}{dx} + \left(\frac{r(r-1)}{(x-\alpha)^2} + \frac{Pr}{x-\alpha} + Q\right) z = 0$$

in der Umgebung von α eindeutige Fundamentalintegrale haben müsse. Dass aber die Differentialgleichung zweiter Ordnung in y dann noch nicht etwa re-