A COLLECTION OF PAPERS IN MATHEMATICS AND RELATED SCIENCES,
A FESTSCHRIFT IN HONOUR OF THE LATE GALAYE DIA
EDITORS : PROFS HAMET SEYDI, GANE SAMB LO, ABOUBAKARY DIAKHABY
SPAS-EDS (SAINT-LOUIS, CALGARY, 2018), WWW.STATPAS.ORG/SPASEDS/
IN EUCLID (WWW.PROJECTEUCLID.ORG)
DOI : 10.16929/SBS/2018.100

CHAPTER 30

Réflexion sur la relativité de l'égalité mathématique à travers les notions de nombre, fonction, ensemble et l'affectation algorithmique, *by A. Maitournam*

Aboubakar Maitournam. Email : maitourna1@gmail.com
Département de mathématiques et informatique, Université Abdou Moumouni de Niamey, faculté des sciences et techniques. Niamey, Niger.

Abstract. In that paper, we explore the notion of equality through four simple but fundamental objects of mathematical structure : numbers, functions in particular Boolean functions, sets, and the algorithmic assignment.

Keywords. Epistémologie, relativité; égalité; égalité presque partout; égalité presque sûre; identité; nombres; fonctions; ensembles; sémantique; syntaxe; contenant; contenu; algorithmique; affectation
AMS 2010 Mathematics Subject Classification. 00-XX; 00A20; 00A30

Cite the chapter as :
Maitournam A. (2018). Réflexion sur la relativité de l'égalité mathématique à travers les notions de nombre, fonction, ensemble et l'affectation algorithmique.
In *A Collection of Papers in Mathematics and Related Sciences, a festschrift in honour of the late Galaye Dia*. Spas Editions, Euclid Series Book, pp. 651– 657. Doi : 10.16929/sbs/2018.100-10-01

1. Introduction

La notion d'égalité est omniprésente en sciences. Ainsi, en physique, la plupart des lois de la nature comme par exemple la gravitation universelle et le principe fondamental de la dynamique de Newton, la relativité générale d'Einstein et la théorie cinétique des gaz de Boltzmann, sont définies par des équataions entre grandeurs physiques donc par des relations entre objets (nombres, vecteurs, matrices, fonctions, structures algébriques ou géométriques, ...) sous forme d'équations destinées à l'origine à trouver des inconnues. Ainsi le terme algèbre vient de l'arabe (Al Jabr ou inconnue). Par définition, une égalité mathématique (Albin (1997), Christian (1997), Etienne (2009)) est une relation entre deux objets mathématiques, signifiant qu'ils auront la même valeur, le même sens, le même rôle dans les calculs ou démonstrations mathématiques. Elle est représentée par le symbole " $=$ " introduit par le mathématicien gallois Robert Recorde au 16'eme siècle. Dans son sens général, la notion d'égalité est toujours relative, contextuelle. Nous explorons alors cette relativité à travers quatre objets simples mais fondamentaux de l'édifice mathématique : les nombres, les fonctions, les ensembles, et l'affectation algorithmique.

2. Egalité mathématique entre nombres

Les nombres constituent une des briques fondamentales de l'arithmetique et donc des mathématiques (Georges (1994)). L'égalité mathématique entre deux nombres signifie qu'ils auront la même valeur, le même signe, dans les calculs ou démonstrations mathématiques. Par exemple, une expression comme

$$x = x \tag{2.1}$$

où x est un nombre est une identité (Alfred (1969)), donc une égalité parfaite, car elle représente le même objet mathématique à savoir x dupliqué. L'identité est donc une égalité idéale car les deux entités mathématiques situées de part et d'autre du symbole $=$ sont parfaitement superposables. Toutefois, visuellement et physiquement, une telle égalité est une dualité (Joel (1974)), un dédoublement, une occupation de deux espaces physiques distincts, en considérant le plan physique bidimensionnel sur lequel est écrit cette égalité.

Plus généralement, une égalité

$$x = y \tag{2.2}$$

entre deux nombres x et y, représente sur le plan syntaxique deux symboles différents (à savoir x et y) mais sémantiquement ces derniers représenteront la même quantité mathématique. Par conséquent, l'égalité mathématique entre nombres, dans son expression générique signifie que deux symboles syntaxiquement différents représentent sémantiquement le même objet mathématique (le même nombre). Cette égalité est donc relative au sens et non à la syntaxe. Cette remarque s'applique aussi à l'égalité entre fonctions mathématiques dont les nombres sont des avatars.

3. Egalité mathématique entre fonctions

Introduite par Leibniz puis enrichie par Jean Bernoulli et Euler (Christian (1997)), la notion de fonction est un objet essentiel des mathématiques, en particulier de l'analyse. L'égalité mathématique

$$f = g \tag{3.1}$$

entre deux fonctions f et g, signifie qu'en appliquant ces dernières à tout nombre ou vecteur ou matrice ou tout autre objet mathématique x pour lequel elles sont définies, on obtiendrait le même résultat, la même image $f(x) = g(x)$.

Physiquement, elle signifie que le système physique modélisé par la fonction f prenant comme entrée (input) x, donnera le même résultat (output) que celui modélisé par la fonction g prenant aussi comme entrée (input) x. Les deux systèmes modélisés par f et g peuvent pourtant être physiquement très différents comme l'illustre l'exemple des fonctions de l'algèbre de Boole (Aboubakar (2017)). L'égalité mathématique entre fonctions est donc relative, focalisée sur le résultat de la transformation fonctionnelle et non sur la fonction.

En théorie de la mesure et de l'intégration (Walter (1974)), l'égalité entre fonctions est définie presque partout, c'est-à-dire quelle est fausse sur un ensemble mesurable de mesure nulle. Ainsi

$$f = g, \mu - pp \tag{3.2}$$

où μ est une mesure abstraite signifie que

$$\mu\{x \in X/f(x)\neg g(x)\} \tag{3.3}$$

est négligeable, X étant l'ensemble sur lequel sont définies les fonctions f et g. En théorie des probabilités, les fonctions correspondent aux variables aléatoires et la mesure à la loi de probabilité; du coup dans ce cas de figure, l'égalité est définie presque sûrement qui correspond à la notion *presque partout* de la théorie de la mesure. Ainsi en théorie de la mesure, l'égalité est relative à la mesure choisie, en particulier en théorie des probabilités, l'égalité est relative à la loi de probabilité considérée.

La relativité de l'égalité mathématique est aussi présente dans le cadre ensembliste. En effet, il y a une correspondance canonique entre un ensemble et sa fonction indicatrice à travers l'équipotence entre $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X et $\{0,1\}^X$ l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$.

4. Egalité mathématique entre ensembles

La notion d'ensemble est au coeur des mathématiques depuis la création de la théorie dite des ensembles par Cantor (Paul (1970)). En effet, cette dernière interroge les fondements axiomatiques des mathématiques au même titre que par exemple la logique de Russell ou Gödel. En mathématiques, deux ensembles A et B sont égaux si A est inclus dans B et B est inclus dans A, donc si A et B ont le même contenu. Ce dernier peut dans certains cas être identifié à l'objet topologique appelé intérieur d'un ensemble (le plus grand ouvert contenu dans un ensemble). Ainsi c'est le contenu qui intéresse les mathématiques dans le cas de l'égalité ensembliste et non le contenant. Ce dernier peut être identifié dans certains cas à la frontière topologique d'un ensemble. La quintessence de la relativité de l'égalité mathématique et sa focalisation sur l'essentiel (résultat, contenu) est illustrée in fine par la notion d'affectation cruciale en algorithmique et donc en informatique. La notion d'affectation permet de réaliser physiquement (électroniquement) la relativité de l'égalité mathématique.

5. Egalité mathématique et algorithmique

Dans tous les cas de figure, la relativité du concept mathématique de l'égalité est résumée par la notion d'affectation (Maurice (2015)), symbolisée en algorithmique par $\longleftarrow$. Par exemple, les expressions

$$x \longleftarrow a \tag{5.1}$$

et

$$y \longleftarrow a \tag{5.2}$$

notées

$$x = a \tag{5.3}$$

et

$$y = a \tag{5.4}$$

dans certains langages informatiques comme le langage C,

$$x := a \tag{5.5}$$

et

$$y := a \tag{5.6}$$

en langage Pascal; signifient que la valeur a est affectée aux variables x et y. Cela veut dire que les deux emplacements mémoires virtuels ou physiques abritant les variables x et y contiendront la même valeur a et donc seront mathématiquement égaux. Algorithmiquement un appel à x ou y serait identique dans une instruction. La relativité ici est ainsi claire car c'est le contenu qui importe plus que le contenant.

6. Conclusion

En définitive l'égalité dans le sens général n'est pas absolue. Elle est relative, contextuelle. Il en est de même en mathématiques où même l'identité n'est pas une égalité absolue, car elle est une occupation de deux emplacements virtuels ou physiques distincts (plan du tableau, d'un support papier, adresse électronique,..), ce qui est parfaitement résumé par la notion algorithmique d'affectation. L'égalité mathématique entre nombres, fonctions ou ensembles est donc sémantique, focalisée sur le contenu et non le contenant, sur le résultat et non sur le système ou fonction qui génère ce résultat. Cela autorise l'essentialisation des choses qui est la quintessence de l'esprit scientifique.

Webographie.

Sites Web génériques :

https ://fr.wikipedia.org/wiki/Affectation (informatique)
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction (mathématiques)
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Robert Recorde
https ://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie des ensembles

Bibliography

Michel A.(1997). *Dictionnaire des mathématiques*. Encyclopédie Universalis.

Houzel C.(1997). *Dictionnaire des mathématiques algèbre, analyse, géométrie*. ,Encyclopedia Universaliset Albin Michel, Paris.

Ghys E.(2009). *Egalité Images des Mathématiques*, CNRS,2009, http ://images.math.cnrs.fr/Egalite.html

GIfrah G.(1994). *Histoire universelle des chiffres*. Robert Laffont.

ATarski A.(1969). *Introduction à la logique*. Gauthiers Villars.

Merker J. (2009). *Dynamique de l'égalité*. Images des Mathématiques, CNRS, 2009, http ://images.math.cnrs.fr/Dynamique-de-l-egalite.html

Maitournam A.(2017). *Sur les nombreuses façons de réaliser physiquement l'égalité mathématique entre deux fonctions*. Images des Mathématiques, CNRS, 2017 http ://images.math.cnrs.fr/Sur-les-nombreuses-facons-de-realiser-physiquement-l-egalitemathematique-entre.html

Margenstern M. (2015). Contribution de l'informatique théorique à la philosophie. Images des Mathématiques, CNRS. http ://images.math.cnrs.fr/Contribution-de-l-informatique-theorique-a-la-philosophie.html

Halmos R.R (1970). *Introduction à la théorie des ensembles*. Gauthier-Villars.

Walter R. (1998). *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 1998 (3 ème édition). tesciences.fr.gd/Nombres.htm