

# **AN INTRODUCTION TO ALGEBRAICALLY CLOSED FIELDS & VARIETIES**

**Bruno Poizat**  
**Université Pierre et Marie Curie**

This introductory chapter has two aims: to explain to geometers what is the Logic point of view on algebraically closed fields, and to unveil to logicians the fundamentals of algebraic geometry. It is expected that geometers and logicians will find here a common language; since Logic is far more direct than Geometry in the introduction of its basic concepts, this language will have a definite logical flavour; I hope that it will help the geometers to understand what arose the interest of logicians in algebraic groups, at an admittedly elementary level, but which nevertheless may bring some new contributions in this field.

I wrote this note when I was an invited professor in the University of Notre Dame du Lac; on this occasion, I witnessed how serious a matter was language tests for post-graduate students in the U.S.; this is the reason why I also designed this chapter to be an introduction to mathematical French, this beautiful language being so necessary for anybody who wish to have a deep insight either in Geometry or in Logic.

Corps algébriquement clos

Un corps algébriquement clos est un corps où les équations polynomiales ont autant de solutions qu'il est raisonnable d'en espérer;  $K$  est algébriquement clos si et seulement s'il satisfait la conclusion du Théorème des Zéros de Hilbert: tout système formé d'un nombre fini d'équations et d'inéquations polynomiales, en plusieurs variables, à coefficients dans  $K$ , et qui a une solution dans une extension de  $K$ , a déjà une solution dans  $K$ .

La première chose que vous dira un logicien, à propos de cet énoncé, c'est qu'il fait intervenir une quantification portant sur toutes les extensions possibles de  $K$ ; une telle quantification est dite "d'ordre supérieur". Pour de très bonnes raisons, que je ne vais pas justifier ici, les logiciens, lorsqu'ils décrivent une structure comme celle d'un corps  $K$ , aiment s'en tenir à des énoncés qui ne mentionnent que son addition  $+$ , sa multiplication  $\cdot$ , son zéro  $0$  et son unité  $1$ , et qui ne comportent que des quantifications, dites du premier ordre, portant sur les éléments de  $K$ .

Et vous savez certainement que les corps algébriquement clos ont une définition équivalente plus simple, qui entre dans ce cadre: tout polynôme non-constant, en une variable, à coefficients dans  $K$ , a un zéro dans  $K$ . Strictement parlant, cet énoncé n'est du premier ordre qu'au prix d'une certaine hypocrisie, puisque le quanteur 'tout polynôme' porte non pas sur les éléments de  $K$ , mais sur les suites finies (de longueur arbitraire) d'éléments de  $K$ ; on le remplacera donc par une collection infinie d'énoncés, un par degré possible du polynôme, qui ont sans conteste la forme requise:

$$(\forall a_0) \dots (\forall a_{n-1}) (\exists x) x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

On voit d'ailleurs sans peine qu'un nombre fini d'entre eux ne peut suffire à impliquer la totalité des autres. Dans le même cadre entre l'expression de la caractéristique, et même par un énoncé sans quanteurs  $1 + \dots + 1 = 0$  si elle vaut  $p$ ; pour la caractéristique nulle, il faut une infinité d'énoncés, tous ceux de la forme  $1 + \dots + 1 \neq 0$ .

C'est un fait que deux corps algébriquement clos de même caractéristique satisfont les mêmes énoncés du premier ordre; c'est là l'expression rigoureuse d'un sentiment familier aux mathématiciens du début de ce siècle: si vous montrez une propriété des nombres complexes, par exemple en suivant une méthode analytique, et si cette propriété s'exprime par un énoncé du premier ordre ne parlant que de la somme et du produit de ce corps, alors elle est aussi vraie pour tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle, et même pour tout corps algébriquement clos de caractéristique finie assez grande! La seule propriété d'un corps algébriquement clos qui échappe au premier ordre, c'est au fond ce qui le caractérise à isomorphie près, c'est-à-dire son degré de transcendance sur son corps premier.

### Ensembles constructibles

Si je n'entreprends pas de justifier ce que j'ai dit au paragraphe précédent, ce n'est pas tellement pour éviter de nous égarer dans des considérations logiques, au demeurant peu difficiles, que parce que la Géométrie ne consiste pas à comparer des corps, mais à étudier les objets qu'on peut définir dans un corps  $K$  donné.

Les parties définissables les plus simples de  $K^n$  sont formées des zéros d'un certain polynôme  $P(\bar{x})$  en  $n$  variables  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . L'équation  $P(\bar{x}) = 0$  est considérée par les logiciens comme une "formule" définissant l'ensemble  $A$  de ses solutions; on peut insister sur les paramètres de cette équation, qui sont en l'occurrence les coefficients du polynôme en question, en les faisant apparaître dans l'écriture:  $P(\bar{x}, \bar{a}) = 0$ ;  $\bar{x}$  et  $\bar{a}$  ne sont pas vus de la même façon: le premier est un uple de variables, le second un uple de constantes, intervenant dans la formule servant à définir  $A$ , qui est l'ensemble des  $\bar{x}$  annulant  $P(\bar{x}, \bar{a})$ ; évidemment rien n'interdit de considérer l'ensemble des  $\bar{x} \wedge \bar{y}$  tels que  $P(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ !

Si  $A$  est défini par l'équation  $P(\bar{x}) = 0$  et  $B$  par l'équation  $Q(\bar{x}) = 0$ , leur réunion  $A \cup B$  est définie par la formule  $P(\bar{x}) = 0 \vee Q(\bar{x}) = 0$ , où  $\vee$  désigne le symbole de disjonction. Dans ce cas particulier, on peut en faire

l'économie, puisque cette formule équivaut à l'équation  $P(\bar{x}) \cdot Q(\bar{x}) = 0$ . Par contre, on ne peut esquiver les symboles de conjonction quand on forme des intersections, et on appelle fermé de Zariski une partie  $A$  de  $K^n$  qui est définie par la conjonction d'un nombre fini d'équations:  $P_1(\bar{x}) = 0 \wedge \dots \wedge P_k(\bar{x}) = 0$ .

En fait, par noethérianité de l'anneau des polynômes en  $n$  variables, un système formé d'une infinité d'équations peut se remplacer par un sous-système fini, si bien qu'une intersection quelconque de fermés de Zariski en est encore un; on voit aussi sans peine que la réunion de deux fermés de Zariski l'est encore. Mais le passage au complémentaire nous fournit de nouveaux ensembles, les ouverts de Zariski, définis par la disjonction d'un nombre fini d'inéquations:  $P_1(\bar{x}) \neq 0 \vee \dots \vee P_k(\bar{x}) \neq 0$ . Si un ouvert de Zariski peut être défini par une seule inéquation on dit qu'il est principal.

Les géomètres qualifient de constructible un ensemble qui est combinaison booléenne finie de fermés de Zariski: il s'obtient à partir de ces derniers par applications successives de réunion, intersection et passage au complément; il est défini par une formule booléenne à partir d'équations polynomiales, et on voit facilement qu'on peut la mettre sous la forme d'une disjonction de systèmes formés d'un nombre fini d'équations et d'un seule inéquation:

$$\vee (P_1(\bar{x}) = 0 \wedge \dots \wedge P_k(\bar{x}) = 0 \wedge Q(\bar{x}) \neq 0).$$

On a coutume de noter  $\varphi(\bar{x})$  une telle formule, définissant un ensemble  $A$  de  $n$ -uples, ou  $\varphi(\bar{x}; \bar{a})$  si on veut insister sur les paramètres, ou coefficients, qui y figurent. Si tous ces  $\bar{a}$  sont dans le corps premier, engendré par  $1$ , on dit que la formule est sans paramètres.

Ces ensembles constructibles sont qualifiés de définissables par les logiciens; d'habitude, ils qualifient ainsi les parties d'une structure définies par une formule où peuvent intervenir des quantifications du premier ordre. Si les quantifications ne sont pas apparues dans nos ensembles constructibles, c'est que, dans le cas particulier des corps algébriquement clos, il se trouve que tout ce qui se définit avec des quantificateurs peut se définir sans. Ce phénomène est

appelé élimination des quanteurs. Géomètres et logiciens le placent sous le vocable de deux saints patrons différents:

**THEOREME DE CHEVALLEY:** La projection d'un ensemble constructible est un ensemble constructible. (Note: si  $A \subset K^n$  est défini par la formule  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ , sa projection  $B \subset K^{n-1}$  parallèlement à la dernière coordonnée est définie par  $(\exists x_n) \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ ).

**THEOREME DE TARSKI:** A toute formule  $\varphi(\bar{x})$  du langage des corps est associée une formule  $\psi(\bar{x})$  sans quanteurs de ce même langage telle que dans tout corps algébriquement clos  $K$ ,  $\varphi(\bar{x})$  et  $\psi(\bar{x})$  définissent le même ensemble.

Ce résultat n'est en fait que l'avatar contemporain du plus ancien algorithme mathématique, connu depuis les temps babyloniens qui consiste à résoudre les systèmes d'équations et d'inéquations par élimination successive des inconnues, s'appuyant sur la remarque que la condition d'existence de l'inconnue éliminée s'exprime par la satisfaction de systèmes d'équations et d'inéquations pour les inconnues restantes.

Pourquoi donc avoir empoisonné l'existence d'un lecteur géomètre par l'introduction de quanteurs dont la seule propriété remarquable est de s'éliminer? C'est que les quanteurs ont une grande force d'expression, et permettent de voir directement que certains ensembles sont constructibles; par exemple, nous dirons qu'une fonction  $f$  de  $K^n$  dans  $K^m$  est constructible si son graphe l'est; l'image d'une fonction constructible est constructible, étant définie par  $(\exists \bar{x}) \bar{y} = f(\bar{x})$ : il en est de même de son domaine d'injectivité, défini par  $(\forall \bar{u}) \bar{u} = \bar{x} \vee f(\bar{u}) \neq f(\bar{x})$ , etc...

Comme on le voit, la définition naturelle de nombreux ensembles constructibles met en jeu des quanteurs, dont l'élimination a un côté accidentel. Le groupe  $GL_2(K)$  est constitué du sous-ensemble de  $K^4$  défini par l'inéquation  $x_{11}x_{22} \neq x_{12}x_{21}$ ; la multiplication matricielle a un graphe tout à fait constructible. Notons  $I$  la matrice identité, et  $J$  la matrice diagonale dont

les valeurs propres sont 1 et  $-1$ ; la propriété "la matrice  $X$  est conjuguée de la matrice  $J$ " se traduit naturellement par une formule avec quanteurs:

$(\exists Y)(\exists Z) YZ = I \wedge YXZ = J$ , qui devient bien une formule du langage des corps quand on remplace les matrices par des quadruplets de nombres. Par ailleurs, dans ce cas elle ne signifie rien d'autre que la matrice  $X$  admet 1 et  $-1$  comme valeurs propres si on est en caractéristique différente de 2; en caractéristique 2, elle signifie que  $X = I$ . On peut donc la remplacer par l'énoncé sans quanteurs:

$$(1 + 1 = 0 \wedge X = I) \vee (1 + 1 \neq 0 \wedge X^2 = I \wedge X \neq I \wedge X \neq -I).$$

Remarquons que le théorème de Tarski est plus précis que celui de Chevalley, puisqu'il introduit de l'uniformité: la formule  $\psi(\bar{x})$  sans quanteurs équivalente à  $\phi(\bar{x})$  peut être choisie indépendamment du corps algébriquement clos considéré. Cela a une importante conséquence relative aux extensions de corps: soit  $\phi(\bar{x})$  une formule du langage des corps, soit  $K \subset L$  une extension de corps, et soit  $\bar{a}$  dans  $K$ ; si  $\bar{a}$  satisfait  $\phi$  au sens de  $K$ , il n'a aucune raison en général de satisfaire  $\phi$  au sens de  $L$ , puisque cette fois le champ des quanteurs de  $\phi$  doit être étendu à  $L$  tout entier (par exemple, si  $a$  n'est pas carré dans  $K$ , il peut devenir carré dans  $L$ !); cependant, ce sera vrai si  $K$  et  $L$  sont algébriquement clos, puisqu'on peut alors remplacer  $\phi$  par une formule  $\psi$  sans quanteurs; une telle extension, qui préserve la satisfaction des formules, est qualifiée d'élémentaire par les logiciens.

Par exemple, si la formule  $\phi(x, y, \bar{a})$  définit le graphe d'une fonction de  $K$  dans  $K$ , ce qui s'exprime par la satisfaction de la formule suivante par le uple de paramètres  $\bar{a}$ :  $(\forall x)(\exists! y) \phi(x, y, \bar{a})$ , cette même formule définit le graphe d'une fonction de  $L$  dans  $L$ . Ou encore, si  $A$  et  $B$  sont deux matrices à coefficients dans  $K$  qui ne sont pas conjuguées dans  $GL_2(K)$ , elles ne le sont pas d'avantage dans  $GL_2(L)$ : l'extension du corps de base est sans influence sur les propriétés qui s'expriment par la satisfaction de formules du premier ordre.

### Points idéaux

Le corps  $K$  étant fixé, ce qu'un logicien appelle un point est ce qu'un géomètre appelle un point rationnel, c'est-à-dire un élément de  $K^n$ . Le géomètre, lui, veut prévoir toutes les extensions possibles du corps  $K$ , et ajoute systématiquement à ces points des "points idéaux", correspondant aux idéaux premiers de l'anneau de polynômes  $K[\bar{X}]$ ; ces idéaux, le logicien les appelle types. Deux  $n$ -uples  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  d'une extension algébriquement close  $L$  de  $K$  sont dits de même type s'ils satisfont les mêmes formules à paramètres dans  $K$ ; comme les quanteurs s'éliminent cela revient à dire que  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  annullent les mêmes polynômes de l'anneau  $K[\bar{X}]$ ; comme ces polynômes forment un idéal premier de  $K[\bar{X}]$ , on voit bien qu'il y a correspondance entre les types et les idéaux premiers, les points rationnels s'identifiant aux idéaux maximaux de  $K[X_1, \dots, X_n]$ .

Nous dirons que le point idéal  $p$  satisfait l'équation  $P(\bar{X}) = 0$  si le polynôme  $P$  est dans l'idéal associé à  $p$ ; cela nous permet de considérer un ensemble constructible non seulement comme ensemble de points, mais aussi comme ensemble de points idéaux. Nous munissons ainsi l'ensemble  $S_n(K)$  des idéaux premiers en  $n$  variables de la topologie constructible ayant pour base les ensembles constructibles: un ouvert est par définition une réunion d'ensembles constructibles; les constructibles  $y$  sont à la fois ouverts et fermés, et un fermé est par définition une intersection de constructibles;  $S_n(K)$  est un espace totalement discontinu, et il est facile de voir qu'il est compact; ses ouverts-fermés sont exactement les ensembles constructibles.

On obtient une autre topologie  $Z_n(K)$  sur ce même ensemble en prenant pour fermés les fermés de Zariski, définis par les systèmes d'équations polynômiales: c'est une topologie noethérienne; pas de suite infinie décroissante de fermés, pas de suite infinie croissante d'ouverts; naturellement, vu la dissymétrie qu'elle introduit entre l'équation et l'inéquation, la topologie de Zariski ne satisfait pas l'axiome de séparation de Hausdorff.

En ce qui concerne cette dernière, ça ne fait pas une grande différence de ne regarder que sa trace sur les points rationnels de  $K^n$ ; en effet, on voit facilement qu'un constructible qui contient un point idéal contient un point rationnel, si bien que ce qu'on obtient est une topologie noethérienne dont les constructibles peuvent être identifiés avec ceux de  $Z_n(K)$ . Mais pour ce qui est de la compacité de  $S_n(K)$ , il est essentiel d'avoir ajouté les points idéaux: les points rationnels forment une partie dense, mais discrète, de  $S_n(K)$ .

Pour illustrer l'utilité de cette compacité, je vais déterminer les applications constructibles. Soit donc  $f$  une application constructible de  $K^n$  dans  $K$ , dont le graphe est défini par une formule à paramètres dans  $K$ . Soit  $\bar{a}$  un type, et soit  $\bar{a}$  un élément de ce type gisant dans une extension  $L$  de  $K$ . Il est clair qu'un automorphisme de  $L$  qui fixe (point par point)  $K$  et  $\bar{a}$  doit fixer  $f(\bar{a})$ . Si on est en caractéristique 0, il est nécessaire que  $f(\bar{a})$  s'exprime comme  $R(\bar{a})$ , où  $R(\bar{x})$  est une fraction rationnelle à coefficients dans  $K$ ; on observe que  $f(\bar{x}) = R(\bar{x})$  est une formule  $A(\bar{x})$  satisfaite par  $\bar{a}$ , c'est-à-dire par le type  $p$ . Nous recouvrons donc l'espace des types  $S_n(K)$  par des ouverts-fermés; par compacité, un nombre fini d'entre eux,  $A_1, \dots, A_n$ , correspondant à des fractions rationnelles  $R_1, \dots, R_n$ , suffit à ce recouvrement; comme, au niveau constructible, nous sommes libres de faire des combinaisons booléennes, nous pouvons supposer que  $A_1, \dots, A_n$  forment une partition de  $K^n$ : en caractéristique nulle, à toute application constructible  $f$  est associée un découpage de  $K^n$  en un nombre fini de parties constructibles sur chacune desquelles  $f$  s'exprime rationnellement (avec, bien sûr, un dénominateur qui ne s'annule pas sur l'ensemble en question). En caractéristique  $p$ ,  $f$  est la racine  $p^{\text{m}^\circ}$  d'une telle expression.

Les logiciens travaillent au niveau constructible, qui entre dans le cadre très général de leur logique du premier ordre; ce qu'ils font est invariant par bijection constructible; il leur est difficile de trouver des propriétés intrinsèques distinguant le positif du négatif, puisqu'ils autorisent le libre emploi de la négation. Le travail des géomètres est beaucoup plus fin, et une de leur première exigence est de conserver la topologie de Zariski; ce qu'ils considèrent comme équivalents, ce sont deux variétés qui se correspondent par un

isomorphisme géométrique: ces isomorphismes sont des applications constructibles très particulières.

Une des ambitions de ce recueil, c'est de montrer que certaines constructions qui sont habituellement considérées comme typiquement géométriques peuvent s'obtenir au niveau constructible; par exemple, la dimension est une notion constructible; mais surtout, lorsqu'on est en présence d'une loi de groupe, ces deux niveaux deviennent équivalents, puisque nous verrons qu'un groupe constructible est constructiblement isomorphe à un unique groupe algébrique.

Si on fait cela, ce n'est pas seulement pour des questions de méthode, mais c'est parce qu'on espère étendre ces propriétés géométriques à des contextes beaucoup plus vastes; et, en effet, dans ce qu'un logicien appelle un groupe "stable" - il s'agit d'une classe très vaste de groupes - certains sous-ensembles définissables, et certaines applications définissables ont un comportement analogue aux variétés et aux morphismes qu'on voit dans un groupe algébrique.

Cela est particulièrement vrai des groupes qui ont la propriété maximale de stabilité, dont les groupes algébriques sont un cas particulier, qui sont qualifiés de "groupes de rang de Morley fini" ; certains pensent même que ces groupes ressemblent tellement à des groupes algébriques qu'ils doivent être des groupes algébriques (à l'exception de quelques contre-exemples triviaux), et nous discuterons la conjecture suivante, due à Grégoire CHERLIN: "Tout groupe simple de rang de Morley fini est un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos". Cette conjecture est extrêmement ambitieuse, puisqu'elle donnerait une caractérisation abstraite, sans référence à un contexte géométrique, de la notion de groupe algébrique.

### Dimension

Si  $t$  est un type en  $n$  variables, c'est-à-dire un idéal premier de  $K[\bar{X}] = K[X_1, \dots, X_n]$ , le corps des quotients de l'anneau intègre  $K[\bar{X}]/t$  a un certain

degré de transcendance sur  $K$ , qu'on appelle le poids de  $t$ .

La hauteur (de Krull) de  $t$  est ainsi calculée par induction: elle vaut 0 si  $t$  est maximal; elle vaut au moins  $d+1$  si  $t$  est strictement contenu dans un idéal premier de hauteur au moins  $d$ .

Le rang (de Cantor) de  $t$  est son rang de dérivation dans l'espace topologique  $S_n(K)$ , qui est ainsi défini: il vaut 0 si  $t$  est isolé; il vaut au moins  $d+1$  si  $t$  est point d'accumulation de types de rang au moins  $d$ .

Les géomètres savent bien que la hauteur est égale au poids: c'est une conséquence de leur lemme de normalisation; mais la plupart d'entre eux ignorent l'existence du rang, qui est égal lui aussi au poids et à la hauteur. On donne à cette valeur commune le nom de dimension de  $t$ .

Cette dimension entre dans un cadre logique général, celui des rangs de Lascar et de Morley, qu'il est inutile de définir ici. Un simple apparté pour logiciens: pour les types en une variable, ces trois nombres sont trivialement égaux; l'inégalité de Lascar permet d'identifier RU et poids, comme d'ailleurs dans toute structure de rang 1; et dans une structure oméga-un-catégorique, il y a égalité du rang de Cantor, du rang de Morley, et du rang U de Lascar.

On appellera dimension de l'ensemble constructible (non vide)  $A$  le maximum des dimensions de ses points idéaux; grâce à la définition de la dimension par le rang, on voit que celle-ci se définit entièrement au niveau constructible: une partie  $A$  de  $K^n$  est de dimension au moins  $d+1$  si et seulement si elle possède une infinité de sous-ensembles constructibles  $A_1, \dots, A_m, \dots$  deux-à-deux disjoints et de dimension  $d$ ; nous voyons que l'image de  $A$  par une application constructible est de dimension inférieure, que la dimension est conservée par bijection constructible.

Notons aussi que si on étend le corps  $K$  en  $L$ , on voit apparaître de nouvelles parties constructibles de  $A$ , puisqu'il y a de nouveaux paramètres qui peuvent être coefficients de nos équations, mais elles ne font pas changer la dimension:  $A$  a même dimension au sens de  $K$  que son extension naturelle à  $L$  (si on veut, la dimension est plus une propriété de la formule qui définit  $A$  que de  $A$  lui-même, considéré comme partie de  $K^n$ ).

Si  $A$  est de dimension  $d$ , il ne contient qu'un nombre fini de types de dimension  $d$ : ce nombre est appelé degré de Morley de  $A$ ; c'est aussi le nombre maximal d'ensembles constructibles de dimension  $d$  en lequel on peut partitionner  $A$ . Plus généralement, les idéaux minimaux de  $A$  forment un ensemble discret: chacun est isolé des autres types de  $A$  par la conjonction des équations d'un de ses systèmes générateurs; par compacité de la topologie constructible, ils sont en nombre fini; mais, bien sûr, cette notion d'idéal minimal, contrairement à celle d'idéal de dimension maximale, ne se conserve pas par bijection constructible!

### Élimination d'imaginaires

En géométrie comme en logique, on est très vite confronté à la prise de quotients; partant d'une structure  $M$ , on est amené à définir une autre structure  $N$  sur un ensemble de la forme  $M^n/E$ , où  $E$  est une relation d'équivalence entre  $n$ -uples d'éléments de  $M$  définissable dans  $M$ . Par exemple, la façon la plus naturelle de définir la droite projective est de l'introduire comme un quotient du plan affine privé de son origine; mais on peut également le définir en ajoutant un point à l'infini à la droite affine, si bien que, du point de vue constructible, la droite projective n'est rien que la droite affine plus un point!

C'est là un phénomène tout à fait général lorsque la structure de base est un corps algébriquement clos; les passages au quotient s'éliminent d'eux-mêmes, car, du point de vue constructible tout est affine! Par exemple, si  $G$  est un groupe constructible, et si  $H$  est un sous groupe normal définissable de  $G$ , le groupe quotient  $G/H$  est constructible; par contraste, on connaît les difficultés qu'ont les géomètres débutants à faire de  $G/H$  un groupe algébrique quand  $G$  l'est.

Tout cela est conséquence du théorème suivant:

**THEOREME.** Toute relation d'équivalence  $E(\bar{x}, \bar{y})$  entre  $n$ -uples de  $K$  constructible est de la forme  $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ , où  $f$  est une application constructible de  $K^n$  dans  $K^m$ .

On voit donc qu'au lieu de parler de  $K^n/E$  il n'y a qu'à parler de  $f(K^n)$ , qui est une partie constructible de  $K^m$ ! Pour dire la même chose de façon plus pédante: la catégorie des ensembles constructibles, avec comme morphismes les fonctions constructibles, admet des quotients.

Une classe modulo une relation d'équivalence définissable est qualifiée d'élément imaginaire, relativement à  $M$ , par les logiciens. Dans le cas des corps algébriquement clos, ces imaginaires peuvent se remplacer par des éléments réels; pour cette raison, on dit que ces corps éliminent les imaginaires.

Preuve du théorème: Je rappelle la définition, due à André Weil, du corps de définition  $k$  de l'idéal  $I$  de  $K[\bar{X}]$ : on considère  $K[\bar{X}]/I$  comme  $K$ -espace vectoriel, et une base  $B$  de cet espace formée de monômes; tout monôme s'écrit donc de manière unique modulo  $I$  comme  $\sum a_i m_i$ ,  $a_i$  dans  $K$ ,  $m_i$  dans  $B$  et le corps  $k$  est le corps engendré par tous ces coefficients  $a_i$ . Comme on s'en rend compte aisément, un automorphisme du corps  $K$  fixe l'idéal  $I$  si et seulement s'il fixe  $k$  point par point; on en déduit que  $k$  est le plus petit corps  $k$  tel que  $I$  possède un système générateur formé de polynômes à coefficients dans  $k$ ; il est donc finiment engendré, et indépendant de la base de monômes choisie.

Soit  $E \subset K^n \times K^n$  une relation d'équivalence constructible; soit  $\bar{a}$  un  $n$ -uple dans une extension  $L$  de  $K$ , et soit  $C$  la classe de  $\bar{a}$  modulo  $E$ ; soient  $I_1, \dots, I_m$  les idéaux premiers minimaux de  $L[\bar{X}]$  contenus dans  $C$ , et soit  $\bar{c}$  un  $n$ -uple engendrant le corps de définition de leur intersection  $I$ .

On voit sans peine que  $I_1, \dots, I_m$  sont les idéaux premiers minimaux contenant l'idéal radical  $I$ , si bien que, pour un  $K$ -automorphisme de  $L$ , fixer  $\bar{c}$  ou permuter  $I_1, \dots, I_m$ , c'est la même chose. C'est aussi la même chose que fixer  $C$ , puisque, comme  $E$  est une relation définissable avec paramètres dans

$K$ , elle est préservée par cet automorphisme  $s$ , et  $sC = C$  dès que l'intersection de  $C$  et de  $sC$  n'est pas vide.

Si en outre  $s$  fixe  $\bar{a}$ , il fixe  $C$ , donc  $\bar{c}$ ; comme cela se produit pour tout  $K(\bar{a})$ -automorphisme de  $L$ , ce dernier s'exprime comme  $\bar{c} = f(\bar{a})$ , où  $f$  est une application définissable avec paramètres dans  $K$ ; cette expression de  $\bar{c}$  en fonction de  $\bar{a}$  ne dépend bien sûr que du type de  $\bar{a}$  sur  $K$ . En utilisant la compacité de la topologie constructible, on fait un patchwork de fonctions partielles constructibles qui donne une expression uniforme du tuple  $\bar{c}$  de paramètres canonique de la classe  $C$ . Fin

Remarque Cette élimination des imaginaires permet de généraliser la construction de Weil, correspondant à des idéaux, c'est-à-dire des fermés de Zariski, aux ensembles constructibles les plus généraux. Pour trouver le "corps de définition" de la formule  $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ , c'est-à-dire un tuple  $\bar{c}$  "canonique" tel que fixer  $\bar{c}$  c'est la même chose que fixer la formule, on considère la relation d'équivalence constructible suivante:

$$(\forall \bar{x}) \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, \bar{z}).$$

Elle est définissable sans paramètres, et se met sous la forme  $f(\bar{y}) = f(\bar{z})$ , où  $f$  est définissable sans paramètres; on pose  $\bar{c} = f(\bar{a})$ .

### Variétés

J'en viens maintenant à la deuxième partie de mon programme; après avoir expliqué au géomètre ce que voit un logicien dans un corps algébriquement clos, il me faut expliquer au logicien le b.a. ba de la géométrie, c'est-à-dire expliquer ce qu'est une variété algébrique. Une variété est une certaine structure qu'on met sur un ensemble constructible; la structure de variété n'est pas conservée par bijection constructible, mais seulement par des applications constructibles très particulières, qu'on appelle les morphismes; la variété n'est donc pas déterminé par l'ensemble constructible sous-jacent; de fait, tout ensemble constructible infini peut être muni d'une infinité de structures de variété distinctes.

Ces variétés sont obtenues en recollant des morceaux d'espace affine  $K^n$ ; suivant la terminologie de Dieudonné, j'appellerai ensemble affine un fermé de Zariski de  $K^n$ , c'est-à-dire une partie  $A$  de  $K^n$  défini par un système d'équations  $P_1(\bar{x}) = 0 \wedge \dots \wedge P_m(\bar{x}) = 0$ . L'ensemble  $I$  des polynômes qui s'annulent sur  $A$  est l'intersection des idéaux maximaux, et aussi des idéaux premiers, qui contiennent  $P_1, \dots, P_m$ : c'est l'idéal radical engendré par ces polynômes. La topologie de Zariski de  $A$  est par définition celle induite par la topologie de Zariski de  $K^n$ .

J'appelle morphisme de l'ensemble affine  $A \subset K^n$  vers l'ensemble affine  $B \subset K^m$  toute application  $f$  de  $A$  dans  $B$  satisfaisant au choix l'une des conditions suivantes:

(1) (définition globale)  $f$  est polynomiale, i.e. il existe un uple

$(P_1(\bar{X}), \dots, P_m(\bar{X}))$  de polynômes donnant les coordonnées de  $f(\bar{X})$  lorsque  $\bar{X}$  parcourt  $A$ .

(ii) (définition locale)  $f$  est localement rationnelle, i.e. il existe un recouvrement  $(U_i)_i$  de  $A$  par des ouverts de Zariski avec des uples  $(R_1^i(\bar{X}), \dots, R_m^i(\bar{X}))$  de fractions rationnelles, dont les dénominateurs ne s'annulent pas lorsque  $\bar{X}$  parcourt  $U_i$ , et qui donne la valeur de  $f(\bar{X})$  quand  $\bar{X}$  est dans  $U_i$ .

On voit que ce qui fait la particularité des morphismes parmi les applications constructibles générales, c'est d'abord que les racines  $p^\circ$ , si on est en caractéristique  $p$ , ne doivent pas intervenir, et qu'ensuite les expressions rationnelles de  $f$  doivent être valables sur un ouvert de Zariski et non pas sur un constructible quelconque. Naturellement, comme les ouverts ne forment pas une algèbre de Boole, on ne peut supposer les  $U_i$  disjoints: ils auront au contraire tendance à s'intersecter très largement.

Il nous faut montrer l'équivalence des deux définitions, c'est à dire que (ii) implique (i).

Preuve : Il suffit de le faire lorsque  $m = 1$ ; par noethérianité, les  $U_i$  sont en nombre fini, et comme chaque ouvert est réunion d'ouverts principaux, on peut supposer que chacun est défini par une seule inéquation  $Q_i \neq 0$ ; si donc  $Q_i(\bar{X}) \neq 0$ ,  $f(\bar{X}) = P_1(\bar{X})/S_i(\bar{X})$  et  $S_i(\bar{X}) \neq 0$ , aucun point de  $A$  ne satisfait

$Q_i \neq 0$  et  $S_i = 0$ , ce qui veut dire que  $Q_i$  appartient au radical de l'idéal engendré par  $I$  et  $S_i$ ,  $Q_i^r = US_i + V$ , où  $V$  est un polynôme qui s'annule sur  $A$ ; en conséquence  $f = UP_i/Q_i^r$  lorsque  $Q_i \neq 0$ , soit encore  $Q_i^r \neq 0$ . On est donc ramené au cas où  $f(\bar{X}) = P_i(\bar{X})/Q_i(\bar{X})$  pour  $Q_i(\bar{X}) \neq 0$ .

Comme aucun point de  $A$  ne peut annuler tous les  $Q_i^2$ , ces polynômes engendrent avec  $I$  l'idéal trivial, et on a une expression  $1 - \sum B_j Q_j^2 = 0$  modulo  $I$ ; par ailleurs  $(P_i Q_j - P_j Q_i) Q_i Q_j$  est dans  $I$ , puisque  $P_i/Q_i = P_j/Q_j$  pour chaque point de  $A$  n'annulant ni  $Q_i$  ni  $Q_j$ ; en gardant  $i$  fixé, et en additionnant, on obtient modulo  $I$ :

$$\sum B_j P_j Q_j Q_i^2 = \sum P_i Q_i B_j Q_j^2 = P_i Q_i;$$

par conséquent, pour un  $\bar{x}$  de  $A$  tel que  $Q_i(\bar{x}) \neq 0$ ,  $f(\bar{x}) = P_i/Q_i = \sum B_j P_j Q_j$ ; cette expression polynomiale de  $f$  est valable sur  $A$  tout entier, puisqu'elle ne dépend pas de  $i$ . Fin.

Nous appelons variété un ensemble  $V$ , recouvert par des ensembles  $V_1, \dots, V_n$ , avec des bijections  $f_1, \dots, f_n$  entre  $V_1, \dots, V_n$  et des ensembles affins  $U_1, \dots, U_n$  soumis aux conditions suivantes:

- l'ensemble  $U_{ij} = f_i(V_i \cap V_j)$  est un ouvert de  $U_i$ ,
- l'application  $f_{ij} = f_i \circ f_j^{-1}$ , qui est une bijection de  $U_{ji}$  dans  $U_{ij}$ , est

localement rationnelle.

On dit souvent que la variété est un atlas dont les cartes sont les  $U_i$ ; les  $f_{ij}$  sont les "applications changement de carte".

Nous définissons comme suit la topologie de Zariski de  $V$ : une partie  $X$  de  $V$  est ouverte si pour chaque  $i$ ,  $f_i(X \cap V_i)$  est un ouvert de  $U_i$ ; comme les  $U_{ij}$  sont ouverts, et les changements de carte continus, on voit que, si  $X$  est inclus dans  $U_i$  il est ouvert si et seulement si  $f_i(X)$  est un ouvert de  $U_i$ .

Etant données deux variétés  $V = (V_i, f_i)$  et  $W = (W_j, g_j)$ , nous définissons localement la notion de morphisme de  $V$  dans  $W$  par lecture dans les cartes:  $f^{-1}(W_j) \cap V_i$  est un ouvert  $A_{ij}$  de  $V_i$ , et l'application  $g_j \circ f_i^{-1}$ , restreinte à  $f_i(A_{ij})$ , est localement rationnelle. On voit que le composé de deux morphismes est un morphisme.

Un isomorphisme, c'est un morphisme bijectif dont l'inverse est aussi un morphisme; deux variétés isomorphes ont exactement les mêmes propriétés géométriques. On dit qu'une variété est affine si elle est isomorphe à un ensemble affine, considéré comme une variété où il n'y a qu'une seule carte.

On appelle application rationnelle de domaine  $U$ , où  $U$  est un ouvert de  $V$ , une application définie sur  $U$  et qui, une fois lue dans les cartes, est localement rationnelle; un morphisme, c'est donc une application rationnelle définie partout. Le faisceau structurel de la variété, c'est la donnée, pour chaque ouvert  $U$  de  $V$ , de l'anneau des applications rationnelles de domaine  $U$  et à valeur dans  $K$ ; ce faisceau détermine la variété à isomorphisme près: les géomètres préfèrent définir la variété par son faisceau, ce qui évite de recoller des cartes qui n'ont rien d'intrinsèque. C'est moins pratique pour nous, qui voulons traiter les variétés comme des objets définissables, et les manipuler comme il est usuel en logique, c'est-à-dire conformément à l'intuition, en évitant tout artifice. (Le propre de la logique par rapport aux autres disciplines mathématiques, c'est de s'être donné les moyens de suivre cette intuition sans faillir à la rigueur).

Nous observons en effet qu'une variété  $V$  est bien un objet constructible:  $V$  peut être considéré comme la réunion disjointe des  $U_i$ , quotientée par la relation d'équivalence associée aux  $f_{ij}$ , qui identifie un point de  $U_{ij}$  à un point de  $U_{jj}$ ; ou encore on peut faire du patchwork et poser  $V = U_1 \cup (U_2 - U_{21}) \cup \dots$ . On voit alors que les morphismes deviennent des applications définissables.

Pendant qu'on y est, on remarque qu'on obtient des variétés en recollant d'autres variétés: reprendre la définition des variétés, mais en supposant cette fois que les  $U_i$  sont des variétés et non plus des ensembles affines; à chaque  $U_i$  est associé un système de cartes affines  $U_{i,k}$ ; si on les met toutes ensemble on voit que la condition de changement de carte est bien respectée et qu'on obtient bien ainsi une variété.

Je conclus cette section par trois exemples de variété:

1 - la droite affine plus un point, sous-ensemble affine du plan défini par les équations  $X(Y - 1) = 0 \wedge Y(Y - 1) = 0$ ,

2 - la droite avec un point dédoublé;  $U_1$  est la droite  $Y = 1$  dans le plan,  $U_2$  la droite  $Y = -1$ ;  $U_{12}$  est  $U_1$  privé du point  $(0,1)$ , et  $U_{21}$  est  $U_2$  privé du point  $(0,-1)$ ; les changements de carte sont  $f_{12}(x,-1) = (x,1)$ ,  $f_{21}(x,1) = (x,-1)$ ,

3 - la droite projective; mêmes cartes que précédemment, mais avec  $f_{12}(x,-1) = (1/x,1)$ ,  $f_{21}(x,1) = (1/x,-1)$ .

Du point de vue constructible, ces trois choses sont les mêmes: une droite plus un point; mais elles sont fort distinctes du point de vue géométrique; la première est affine; elle est réductible, contrairement aux deux autres; la seconde n'est pas séparable; quand à la troisième, c'est une variété complète.

### Variétés induites

Une variété  $V = (V_i, f_i)$  induit de façon naturelle une structure de variété sur certaines de ses parties constructibles. Si  $F$  est un fermé de  $V$ , chaque  $F \cap V_i$  est un ensemble affine, et les restrictions des  $f_{ij}$  les recollent sans problème: on obtient bien une structure de variété sur  $F$ .

On en obtient également une sur un ouvert  $O$  de  $V$ ; il suffit pour cela de mettre une structure de variété sur chaque  $O \cap V_i$ , dont la topologie de Zariski est celle induite par  $V$ , et telle que la restriction d'une application rationnelle de  $V$  à  $O \cap V_i$  soit encore rationnelle pour cette dernière: les restrictions des  $f_{ij}$  satisferont la condition de recollement.

Soit donc  $O$  un ouvert de l'ensemble affine  $A \subset K^n$ , défini par la disjonction  $Q_1(\bar{X}) \neq 0 \vee \dots \vee Q_s(\bar{X}) \neq 0$ , et soient  $O_1, \dots, O_s$  les ouverts principaux associés à chacune de ces inéquations. Soit  $U_1$  le fermé de  $A \times K \subset K^{n+1}$  défini par l'équation  $Q_1(\bar{X})Y = 1$ :  $U_1$  est bien un ensemble affine, défini par cette équation et les équations en  $\bar{X}$  qui définissent  $A$ . Soit  $f_1$  la bijection qui à un point  $\bar{X}$  de  $O_1$  associe le point  $(\bar{X}, 1/Q_1(\bar{X}))$  de  $U_1$ : on observe que  $f_1$ , comme son inverse, sont des applications continues, l'image d'une équation en  $\bar{X}$  et  $Y$  étant l'équation obtenue en substituant  $Y$  par  $1/Q_1(\bar{X})$  et en chassant le dénominateur. Si donc on fait ça pour tous les  $O_i$ , les

$U_{ij}$  sont bien des ouverts, l'application  $f_{ij}$  est bien rationnelle, avec  $Q_i$  comme seul dénominateur; une application rationnelle sur  $A$  se lit bien rationnellement dans chaque carte  $U_i$ ; nous avons tout ce qu'il nous fallait.

Chaque ouvert affine principal, grâce à cette astuce qui consiste à ajouter une coordonnée, devient ainsi une variété affine; par exemple, le groupe  $GL_n(K)$ , sous-ensemble de  $K^{n^2}$  défini par l'inéquation  $\det(\bar{X}) \neq 0$ , est une variété affine.

Si nous considérons une application rationnelle de domaine  $O_1$  et à valeur dans  $K$ , par transport par  $f_1$  cette application rationnelle devient une application rationnelle partout définie sur  $U_1$ , c'est-à-dire, comme nous l'avons vu, un polynôme; en revenant à  $O_1$ , on voit que cette application rationnelle est polynôme en  $\bar{X}$  et  $Q_1(\bar{X})^{-1}$ , qu'elle est de la forme  $P(\bar{X})/Q_1(\bar{X})^m$ , expression valable sur  $O_1$  tout entier. Par contraste, une application rationnelle dont le domaine est un ouvert non-principal peut ne pas avoir d'expression uniforme sur son domaine; et un ouvert non-principal d'une variété affine n'est pas nécessairement affine.

Pour ces structures de variété  $W$  que nous avons définies sur les ouverts et les fermés de  $V$ , l'application identité est bien sûr un morphisme de  $W$  dans  $V$ ; la topologie de Zariski de  $W$  est celle induite par celle de  $V$ ; mais surtout, et c'est la raison pour laquelle on dit que  $W$  est une sous-variété de  $V$ , le faisceau de  $W$  est induit par celui de  $V$ , ce qui signifie (i) si  $r$  est une application rationnelle de  $V$  dans  $K$  de domaine  $O$ , sa restriction à  $O \cap W$  est une application rationnelle de  $W$  dans  $K$ , (ii) toute application rationnelle (partielle) de  $W$  dans  $K$  s'obtient localement comme restriction d'une application rationnelle définie sur un ouvert de  $V$ .

C'est évident dans le cas d'un ouvert; pour un fermé, on utilise la caractérisation des fonctions rationnelles ayant pour domaine un ouvert affine principal.

En combinant ces deux constructions, on obtient une structure de sous-variété sur les ensembles qui sont intersection d'un ouvert et d'un fermé; mais tous les constructibles ne sont pas ainsi (ils sont réunion d'un nombre fini

d'ensembles comme ça), et on n'obtient pas de structure de variété induite sur un constructible quelconque: le problème est que le faisceau induit n'est pas nécessairement localement affine.

Si  $U$  est affine, les idéaux maximaux de l'anneau des fonctions rationnelles de domaine  $U$ , c'est-à-dire des morphismes de  $U$  dans  $K$ , correspondent aux points de  $U$ ; si  $A$  est le sous-ensemble de  $K^2$  défini par  $X \neq 0 \vee Y = 0$ , on voit que pour le faisceau induit sur n'importe quel voisinage de  $(0,0)$  il manque toujours des points. Pourtant, si  $B$  est le fermé de  $K^3$  défini par  $XZ = 1 \vee (X=0 \wedge Y=0 \wedge Z=0)$ , le morphisme  $(X,Y,Z) \longrightarrow (X,Y)$  de  $B$  dans  $K^2$  définit une bijection entre  $B$  et  $A$ ; on voit que l'image d'un morphisme n'est pas nécessairement une sous-variété.

Remarque: Tout constructible  $A \subset K^n$ , défini par

$$\bigvee (P_{i_1}(\bar{X}) = 0 \wedge \dots \wedge P_{i_s}(\bar{X}) = 0 \wedge Q_i(\bar{X}) \neq 0)$$

est projection du fermé  $B \subset K^{n+1}$  défini par

$$\bigvee (P_{i_1}(\bar{X}) = 0 \wedge \dots \wedge P_{i_s}(\bar{X}) = 0 \wedge TQ_i(\bar{X}) = 1);$$

si on suppose en outre que les différents termes de la disjonction définissent des parties disjointes de  $A$  (et on peut toujours se ramener à ce cas, grâce à une induction aisée sur le rang et le degré de Morley!), cette projection induit une bijection de  $B$  sur  $A$ ; l'inverse de cette projection n'est pas en général continu.

Par contraste, la projection d'un ouvert est toujours un ouvert; si  $\varphi(\bar{x},y)$  définit un ouvert de  $K^{n+1}$ , chaque  $\varphi(\bar{x},a)$  définit un ouvert de  $K^n$ ;  $(\exists y) \varphi(\bar{x},y)$ , qui est la réunion des  $\varphi(\bar{x},a)$ , est, par noethérianité, celle d'un nombre fini d'entre eux. On peut également observer que

$$(\exists y) a_n(\bar{x})y^n + \dots + a_1(\bar{x})y + a_0(\bar{x}) \neq 0$$

équivalent à

$$a_n(\bar{x}) \neq 0 \vee \dots \vee a_1(\bar{x}) \neq 0 \vee a_0(\bar{x}) \neq 0.$$

### Points génériques

Une variété  $V$  est dite irréductible si elle ne peut s'écrire comme réunion de deux sous-fermés propres; une application aisée du lemme de König montre que  $V$  s'écrit sous la forme d'une réunion finie  $V_1 \cup \dots \cup V_n$  de fermés irréductibles; si on jette les  $V_i$  qui sont contenus dans un autre, on observe que ceux qui restent sont les fermés irréductibles maximaux de  $V$ : on les appelle composantes irréductibles de  $V$ ; la décomposition de  $V$  alors obtenue est unique. Les composantes connexes de  $V$  sont également en nombre fini: on les obtient en regroupant les composantes irréductibles qui s'intersectent, et en continuant de proche en proche. Si  $A$  est un sous-ensemble affine de  $K^n$ , il est irréductible si et seulement si l'idéal  $I$  associé est premier; dans le cas général, les composantes irréductibles de  $A$  correspondent aux idéaux premiers minimaux contenant l'idéal radical  $I$ .

Si  $V$  est irréductible, l'intersection de deux ouverts non-vides est non-vide; tout ouvert non-vide est dense dans  $V$ ; il est également irréductible pour la topologie de Zariski induite. On voit qu'il existe un unique type complet satisfaisant toutes les formules définissant un ouvert de  $V$ ; en lisant la variété dans une carte affine, on voit que c'est l'unique type de dimension maximale dans  $V$ ; on l'appelle point générique de  $V$ . Si  $V$  est réductible, on appelle parfois points génériques de  $V$  ceux de ses composantes irréductibles: nous éviterons cette terminologie.

Si  $V$  est irréductible, tout ensemble constructible contenant le générique, c'est-à-dire toute partie constructible de  $V$  de même dimension que  $V$ , contient un ouvert non-vide. En effet cet ensemble s'écrit

$$(F_1 \cap O_1) \cup \dots \cup (F_n \cap O_n);$$

le générique appartient par exemple à  $F_1 \cap O_1$ ; comme il appartient au fermé  $F_1$ , par définition de la généricité  $F_1 = V$ , et notre ensemble contient l'ouvert  $O_1$ .

Supposons que le corps de base soit de caractéristique nulle, et considérons une fonction constructible  $f$  de  $V$  dans  $W$ ,  $V$  étant une variété irréductible; nous restreignons  $f$  à une carte affine  $V_1$ , et nous savons qu'il

est possible de découper  $V_1$  en un nombre fini de parties constructibles sur chacune desquelles  $f$  a une expression rationnelle; celle de ces parties qui contiennent le générique contient un ouvert  $O$ : nous voyons que la restriction de  $f$  à  $O$  est une application rationnelle,  $f$  est "génériquement" un morphisme! Si  $f$  est une bijection constructible entre les variétés irréductibles  $V$  et  $W$ , elle induit ce que les géomètres appellent une "équivalence birationnelle" entre  $V$  et  $W$ , c'est-à-dire un isomorphisme entre un ouvert de  $V$  et un ouvert de  $W$ .

En caractéristique  $p$ , les racine  $p^\circ$  s'introduisent dans le paysage.

Soit  $V$  une variété irréductible; considérons deux applications rationnelles  $f_1$  et  $f_2$  de  $V$  dans  $K$  de domaines respectifs  $O_1$  et  $O_2$ ; on voit en lisant la chose dans des sous-ouverts affines de  $O_1 \cap O_2$ , que la condition  $f_1(\bar{x}) \neq f_2(\bar{x})$  définit un ouvert de cette intersection (c'est vrai en général si la variété d'arrivée est séparée; voir ci-après pour la définition); si donc  $f_1$  et  $f_2$  agréent génériquement, c'est-à-dire sont égales sur un ouvert non-vide (on dit qu'elles ont même germe), elles sont égales sur toute l'intersection  $O_1 \cap O_2$ ; on voit qu'à chaque germe correspond une fonction rationnelle dont le domaine de définition est maximal: elle ne peut se prolonger en une fonction rationnelle sur un ouvert plus large. On observe également que deux morphismes de  $V$  dans  $K$  (ou plus généralement dans une variété séparée) et qui sont égaux sur un ouvert sont égaux partout.

Une dernière utilisation des ensembles irréductibles: soit maintenant  $V$  une variété quelconque; nous observons d'abord que si  $F$  est un fermé irréductible de  $V$ , et  $O$  un ouvert de  $V$ , alors  $F \cap O$  est un fermé irréductible de  $O$ ; par conséquent, si  $F_1$  est un fermé irréductible strictement contenu dans le fermé irréductible  $F_2$ , la dimension de  $F_1$  est strictement inférieure à celle de  $F_2$ : on se ramène au cas affine, où on utilise la caractérisation de la dimension par la hauteur de Krull.

Soit alors  $X$  un constructible de  $V$ ; pour tout type  $t$  de  $X$ , le plus petit fermé  $F_t$  de  $V$  contenant  $t$  est irréductible, et  $t$  est son générique; comme les dimensions sont bornées, chaque  $F_t$  est contenu dans un  $F_t'$  maximal; on observe que, pour la topologie constructible, les  $t'$  en question forme une partie discrète de  $X$ ; par compacité, ils sont en nombre fini, soient

$t_1, \dots, t_n$ , et  $F_{t_1} \cup \dots \cup F_{t_n}$  est l'adhérence  $\bar{X}$  de  $X$  pour la topologie de Zariski; on voit qu'elle est de même dimension que  $X$ , et que tous les points de dimension maximale de  $\bar{X}$  sont dans  $X$ : en conclusion  $X$  et  $\bar{X}$  ont même rang et même degré de Morley, la dimension de  $\bar{X} \setminus X$  est strictement inférieure à celle de  $X$ .

### Produits de variétés

Si  $A \subset K^n$  est défini par les équations  $P_i(\bar{x}) = 0$ , et  $B \subset K^m$  par les équations  $Q_j(\bar{y}) = 0$ , le produit  $A \times B \subset K^{n+m}$  est défini par les équations  $\dots \wedge P_i(\bar{x}) = 0 \wedge \dots \wedge Q_j(\bar{y}) = 0 \wedge \dots$ ; le produit de deux ensembles affins est bien leur produit cartésien si on les considère comme ensembles de points de  $K^n, K^m, K^{n+m}$ ; à l'exception du cas où l'un d'entre eux est fini, il n'en est plus de même si on les considère comme ensembles de points idéaux puisque la donnée du type de  $\bar{x}$  et du type de  $\bar{y}$  ne suffit pas à déterminer le type de  $\bar{x}\bar{y}$ ; et la topologie de Zariski de  $A \times B$  est strictement plus fine que le produit des topologies de Zariski de  $A$  et de  $B$ , une équation en  $\bar{x}\bar{y}$  ne pouvant en général se ramène à un système d'équations en  $\bar{x}$  seulement et d'équations en  $\bar{y}$  seulement.

Si  $V = (V_i, f_i)$  et  $W = (W_j, g_j)$ , on définit sur le produit  $V \times W$  une structure de variété en prenant pour cartes les produits  $V_i \times W_j$ ; on vérifie que ça marche, que ça a bien les propriétés fonctorielles d'un produit, et que ça se comporte bien par rapport aux variétés induites.

On dit que la variété  $V$  est séparée si la diagonale - ensemble des points  $(\bar{x}, \bar{x})$  de  $V \times V$  - est un fermé de  $V \times V$ ; dans le cas d'espaces topologiques, cette condition équivaudrait à la séparation de Hausdorff. Une variété affine est séparée, puisque l'égalité  $\bar{x} = \bar{y}$  s'exprime par des équations. Certains réservent le terme "variété" aux variétés séparées, et appellent prévariétés les autres.

Une variété  $V$  est dite complète si pour toute variété  $W$  la deuxième projection  $V \times W \rightarrow W$  est fermée (i.e. l'image d'un fermé est fermée). Pour jeter un peu de lumière sur cette définition, vous pouvez observer que, dans le

cas des espaces topologiques, cette propriété de diagramme serait celle des compacts (anglais). Une sous-variété fermée d'une variété complète est complète; l'image d'une variété complète par un morphisme arrivant dans une variété séparée est un fermé: c'est donc une variété complète; un produit de variétés complètes est une variété complète. Il y a incompatibilité d'humeur entre les variétés complètes et les variétés affines: une variété complète et affine est finie.

L'exemple le plus célèbre de variétés complètes, ce sont les espaces projectifs, et leurs fermés; elles sont essentielles pour établir les propriétés des borels d'un groupe linéaire, que je n'aborderai pas en détail: je renvoie donc aux ouvrages spécialisés.

### Groupes algébriques

Un groupe algébrique est un groupe constructible  $G$ , qui est une variété, telle que la loi de groupe soit un morphisme de  $G \times G$  dans  $G$ . On trouvera dans la littérature la justification des affirmations suivantes:

1 - La variété  $G$  est séparée (c'est facile: la diagonale  $D$  a même dimension que  $G$ ; si  $(a,a') \in \bar{D} \setminus D$ , il en de même de chaque  $(ba,ba')$ , et  $\bar{D} \setminus D$  aurait même dimension).

2 - Tout sous-groupe définissable de  $G$  est fermé (même preuve).

3 - La composante connexe  $G^\circ$  de l'identité est un sous-groupe fermé de  $G$ ; c'est le plus petit sous-groupe fermé de  $G$ , et il est normal dans  $G$ ; il est également irréductible, et les composantes irréductibles de  $G$  sont les classes modulo  $G^\circ$ ; il y a exactement un type de dimension maximale par classe modulo  $G^\circ$ .

4 - Un constructible  $A$  de  $G$  est de dimension maximale si et seulement s'il est d'intérieur non-vide si et seulement si  $G$  est recouvert par un nombre fini de translatés, à droite ou à gauche, de  $A$ :  $G = a_1A \cup \dots \cup a_nA =$

$Ab_1 \cup \dots \cup Ab_m$ ; une telle partie est dite générique. Ces parties de dimension maximale se caractérisent donc simplement grâce à la loi de groupe, sans qu'il soit besoin de faire intervenir la dimension! Nous verrons dans ce recueil que ces parties génériques ont un analogue dans le cas général des groupes stables: on y dispose de l'analogue des constructibles Zariski-denses (ceux dont le complémentaire n'est pas générique), bien qu'on y ait rien qui corresponde à la topologie de Zariski.

Si  $X$  est constructible et Zariski-dense (si  $G$  est connexe, cela signifie que  $X$  est d'intérieur non vide) tout élément de  $G$  s'écrit comme produit de deux éléments de  $X$ .

5 - Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$ , on peut définir sur l'ensemble  $G/H$  des classes à droite modulo  $H$  une structure de variété telle que l'action de  $G$  par multiplication à gauche soit un morphisme de  $G \times G/H$  dans  $G/H$ . Quand  $H$  est normal dans  $G$ ,  $G/H$  devient ainsi un groupe algébrique.

6 - Si  $G/H$  est une variété complète, on dit que  $H$  est un sous-groupe parabolique de  $G$ ; il existe un plus petit sous-groupe parabolique  $G_a$  normal dans  $G$ , qui est contenu dans  $G^o$ ; c'est aussi le plus grand sous-groupe fermé affine connexe contenu dans  $G$ . Les sous-groupes paraboliques minimaux de  $G$  sont aussi les sous-groupes fermés connexes résolubles maximaux de  $G_a$ ; ils sont tous conjugués dans  $G_a$ ; on les appelle groupes de Borel de  $G^a$ .

7 - Un groupe algébrique connexe et complet est appelé variété abélienne; c'est un groupe commutatif; s'il n'est pas réduit à l'identité, il contient des éléments de tout ordre premier à la caractéristique.

Tout groupe algébrique  $G$  contient une plus grande sous-variété abélienne  $A$ , qui est centrale dans  $G$ , mais le quotient  $G/A$  n'est pas affine en général.

8 - Si  $Z(G)$  est le centre de  $G$ ,  $G/Z(G)$  est affine; un groupe algébrique sans centre, en particulier un groupe algébrique simple est affine.

9 - Tout groupe algébrique affine  $G$  est linéaire, c'est-à-dire qu'il est isomorphe - par un isomorphisme qui est à la fois isomorphisme de groupe et variété - à un sous-groupe fermé d'un  $GL_n(K)$  (ouvert principal de  $K^n$  défini par  $\det(\bar{X}) \neq 0$ , muni de la multiplication matricielle, qui est polynomiale);  $G$  a beaucoup de telles représentations linéaires, mais un certain nombre de choses, en particulier la décomposition d'un élément comme produit d'un élément semi-simple et d'un élément unipotent, sont indépendantes de la représentation.

10 - On connaît beaucoup de choses de la structure d'un groupe affine quand on connaît sa décomposition en classes doubles modulo un borel; un élément central dans un borel de  $G$  est central dans  $G$ : les borels d'un groupe simple n'ont pas de centre.

Références

## Logique générale:

Bruno POIZAT, Cours de Théorie des Modèles  
Nur alMantiq walMa'arifah, Villeurbanne, 1985.

## Logique et corps algébriquement clos:

Chantal BERLINE, Déviation des types dans les corps algébriquement clos,  
in Théories Stables III, I.H.P., Paris, 1983.

## Elimination des imaginaires:

Bruno POIZAT, Une théorie de Galois imaginaire  
J.S.L. 48, 1983, 1151-1170.

## Géométrie algébrique générale:

Jean DIEUDONNE, Cours de Géométrie Algébrique  
P.U.F., Paris, 1974.

## Groupes algébriques:

Ellis KOLCHIN, Differential Algebra and Algebraic Groups  
Academic Press, New York, 1973.

## Groupes algébriques affines:

T.A. SPRINGER, Linear Algebraic Groups  
Birkhauser, Basel, 1981  
James E. HUMPHREYS, Linear Algebraic Groups  
Springer, New York, 1975

## Tout en un seul ouvrage:

Bruno POIZAT, Groupes Stables  
Nur alMantiq walMa'arifah, Villeurbanne, 1987

**Bruno Poizat**

**67**

**Bruno POIZAT  
82, rue Racine  
69100 Villeurbanne  
France**