Vorwort.

Nachdem ich in den letzten Jahren einige Sätze, Principien und Methoden, welche der Theorie der allgemeinen und linearen Differentialgleichungen angehören, veröffentlicht habe, will ich im vorliegenden Werke eine zusammenhängende Theorie der dahin gehörigen Untersuchungen entwickeln, welcher jene einzelnen, hier bedeutend erweiterten und verallgemeinerten Sätze entnommen waren. Damit der Zusammenhang der Entwicklung selbst nicht unterbrochen werde, mögen in diesem Vorworte einige Bemerkungen über den Zweck und den Inhalt der vorliegenden Untersuchungen vorausgeschickt werden.

Wie schon zum Zwecke der Anwendung der von Herrn Fuchs aufgestellten Principien auf vorgelegte lineare homogene Differentialgleichungen in den Arbeiten des Herrn Frobenius die Einführung des Begriffes der Irreductibilität linearer homogener Differentialgleichungen als nothwendig sich ergab, so ist es zum Zwecke von Betrachtungen der Eigenschaften allgemeiner Differentialgleichungen unabweislich, die Irreductibilität derselben in der allgemeinsten Weise zu definiren; nachdem dies geschehen und untersucht worden, unter welchen Bedingungen überhaupt eine Differentialgleichung, wenn diese mit einer anderen ein Integral gemein hat, alle Integrale mit jener gemeinsam haben muss, wird die Frage aufgeworfen, nach welchen Methoden man entscheidet, ob eine Differentialgleichung irreductibel ist, eine Frage, welche für die einfachsten linearen nicht homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit der Aufsuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zusammenfällt, unter denen das Integral einer durch ein Abel'sches Integral definirten Transcendenten algebraisch durch eben diese Transcendente ausdrückbar ist; ähnliche Untersuchungen lassen sich für die Integrale anderer transcendenter Functionen durchführen, welche wieder auf eben diese Transcendenten algebraisch reducirbar sind. Schwieriger ist die Irreductibilitätsuntersuchung der allgemeinen linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung; die algebraische Beziehung zwischen zwei Fundamentalintegralen derselben kennzeichnet diese als reductibel, und schliesst man diesen Fall aus, so findet man, dass, wenn eine solche Differentialgleichung reductibel ist, sie als algebraisches Integral erster Ordnung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung und zwar auch eine homogene besitzen muss; für den Fall eines algebraischen Zusammenhanges der beiden Fundamentalintegrale werden Bedingungen für die Gültigkeit eben dieses Satzes aufgestellt, die allgemeine Untersuchung jedoch erst später wieder aufgenommen, und zunächst erst für allgemeine lineare homogene und nicht homogene Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung der ähnliche Satz bewiesen, dass, wenn dieselbe reductibel ist, also ein algebraisches Integral ϱ^{ter} Ordnung besitzt, und zwischen den m particulären Fundamentalintegralen und deren $\varrho - 1$ ersten Ableitungen keine algebraische Beziehung besteht, jenes algebraische Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung sein muss.

Die Arbeit wendet sich sodann zur Begründung eines Fundamentalsatzes in der Theorie der Differentialgleichungen, welcher die Basis für die Untersuchungen über das Abel'sche Theorem der Differentialgleichungen, die Transformationstheorie der durch Differentialgleichungen definirten Transcendenten und die Natur dieser Integrale bildet; besteht zwischen particulären Integralen von in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibeln Differentialgleichungen und zwar solchen Integralen, welche gleichartigen Differentialgleichungen niederer Ordnung nicht genügen, und particulären Integralen algebraischer Differentialgleichungen, deren unabhängige Variablen zu denen des ersten Systems in algebraischer Beziehung stehen, und deren Ableitungen eine algebraische Relation, so bleibt diese bestehen, wenn man für die ersteren Integrale beliebige andere particuläre Integrale jenes Systems setzt, wenn man nur für die Integrale des zweiten Systems passende particuläre Integrale dieses Systems substituirt — lautet jenes Theorem und ein ähnlicher Satz mit engeren Bedingungen, welche Sätze nach genauer Discussion des algebraischen Zusammenhanges zwischen den unabhängigen Variabeln der Differentialgleichungen auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung angewendet werden. Mit Hülfe dieser Sätze werden die Fragen nach dem algebraischen Zusammenhange zwischen Abel'schen Integralen unter sich und mit anderen Transcendenten erörtert, wonach analytische Functionen, denen ein Additionstheorem zukommt, in solche Beziehungen nicht eintreten können. Die Methode der Untersuchung führt unmittelbar auf ein Problem, das uns im Folgenden noch häufig beschäftigt und ein weitergehendes Interesse hat; die Untersuchung der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen war lediglich dadurch ermöglicht worden, dass sich das allgemeine Integral in bestimmter Weise mit Hülfe der particulären Fundamentalintegrale und willkürlicher Constanten zusammensetzen lässt, und es tritt nun die allgemeine Frage auf, für welche Klassen von Differentialgleichungen das allgemeine Integral eine algebraische Function particulärer Integrale und willkührlicher Constanten ist, eine Frage, welche identisch ist mit der nach der Zahl der selbständigen Transcendenten, welche durch eine gegebene Differentialgleichung definirt werden; an dieser Stelle wird zunächst die Untersuchung für solche Differentialgleichungen erster Ordnung durchgeführt, deren allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären und einer willkührlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, und gefunden, dass auch solche Transcendenten nicht mit Abel'schen Integralen in einer algebraischen Beziehung stehen können. Die Anwendung des obigen Fundamentalsatzes auf diese Gattung von Fragen wird mit der Untersuchung des algebraischen Zusammenhanges zwischen Integralen von homogenen und nicht homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung beschlossen.

Die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf Integrale von Differentialgleichungen bildet den Gegenstand eines weiteren Kapitels der vorliegenden Untersuchungen, indem nicht, wie für Integrale algebraischer Functionen, eine additive Beziehung von Functionen gesucht wird, deren Gränzen in algebraischem Zusammenhange stehen — und für Quadraturen ist die einzig mögliche analystische Beziehung eine additive — sondern das Problem erweitert wird zur Feststellung irgend einer algebraischen Beziehung zwischen den Werthen eines und desselben particulären Integrales irgend einer Differentialgleichung für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variabeln. Nachdem der Satz für homogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung entwickelt ist, wird nachgewiesen, dass irreductible Differentialgleichungen von einer höheren Ordnung als der ersten ein dem Geschlechte 1 zugehöriges Abel'sches Theorem, in welches die Werthe der unabhängigen Variabeln selbst nicht eintreten sollen, nicht besitzen können, dass ferner für hierher gehörige Differentialgleichungen erster Ordnung das allgemeine Integral eine von der unabhängigen Variabeln freie, algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkührlichen Constanten sein muss, und es ist dann leicht, die allgemeine nothwendige und hinreichende Form der hierher gehörigen Differentialgleichungen erster Ordnung aufzustellen. Lässt man nunmehr in die das Abel'sche Theorem repräsentirende, dem Geschlechte 1 zugehörige, algebraische Gleichung zwischen den Werthen des particulären Integrales einer Differentialgleichung auch die unabhängigen Variabeln eintreten, so wird man wieder auf irreductible Differentialgleichungen erster Ordnung geführt, für welche jedoch das allgemeine Integral algebraisch von einem particulären, einer Constanten und der unabhängigen Variabeln abhängt. Nachdem die Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, für welche die Beziehung des allgemeinen zu einem particulären Integrale eine ganze oder gebrochene algebraische ist, und für diese Fälle die Form des zugehörigen Abel'schen Theorems, soweit es allgemein angegeben werden kann, ermittelt worden, wendet sich die Untersuchung zu denjenigen Differentialgleichungen, für welche das Abel'sche Theorem dem Geschlechte $p = 2$ angehört. Indem die Klasse der zugehörigen irreductibeln Differentialgleichungen sich auf diejenigen zweiter oder erster Ordnung beschränkt, und als nothwendige Bedingung dieser Differentialgleichungen die ermittelt worden, dass das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und zweier oder einer willkührlichen Constanten ist, in welche auch die unabhängige Variable algebraisch eintritt, wird diese letztere Eigenschaft allen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung zugesprochen, und die nothwendige Form aller Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, welchen eine derartige Beziehung zukommt. Nachdem wieder die allgemeine Form der ganzen und gebrochenen rationalen Beziehungen untersucht worden, welche mit Hülfe zweier particulärer Integrale und einer Constanten das allgemeine Integral liefern, wird die Existenz derartiger algebraischer Beziehungen von der Integrabilitätsbedingung einer Pfaff'schen Gleichung abhängig gemacht und gezeigt, dass die einzige Klasse von Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine algebraische Function zweier particulärer Integrale und einer willkührlichen Constanten ist, in welche die unabhängige Variable nicht eintritt, die der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und der durch algebraische Substitution aus diesen abgeleiteten ist, und es ist leicht, dann das Abel'sche Theorem für diese Klasse von Differentialgleichungen zu entwickeln, in welches zwei particuläre Integrale für algebraisch unter einander zusammenhängende Werthe der Variabeln eintreten. Nach einigen allgemeinen Betrachtungen über die Form des Additionstheorems der ϑ-functionen, Abel'schen Integrale und Abel'schen Functionen, welche zu schliessen gestatten, dass in dem Abel'schen Theorem von Differentialgleichungen höherer Ordnung als der ersten die Geschlechtszahl die Einheit übersteigen muss, und die algebraische Relation keine lineare sein darf, wird die Frage nach der Gestalt des Abel'schen Theorems für beliebige lineare homogene Differentialgleichungen aufgeworfen, und die Form der allgemeinsten algebraischen Relation gefunden, welche zwischen particulären Integralen derselben für algebraisch von einander abhängige Werthe der unabhängigen Variabeln stattfinden kann. Den Abschluss dieser Betrachtungen bildet die schon oben begonnene Untersuchung der reductibeln linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche, wenn die zwei Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, die einzig mögliche Form dieser Relation aufgestellt, und allgemein nachgewiesen wird, dass dieselben stets ein Integral erster Ordnung in Form einer linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung besitzen; daraus folgt dann unmittelbar die Aufstellung des Abel'schen Theorems für die reductibeln homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Wir kommen nunmehr zur Inhaltsangabe des zweiten Theiles der vorliegenden Untersuchungen, der sich mit der Natur der Integrale linearer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung beschäftigt, insofern sich diese durch algebraisch-logarithmische Functionen oder durch Verbindungen solcher Functionen und Abel'scher Integrale darstellen lassen. Es ist bekannt, dass die Arbeiten Abel's über die Theorie der elliptischen Transcendenten in ihren Resultaten sich von denen Gauss's und Jacobi's wesentlich dadurch unterscheiden, dass in denselben — vorzüglich in dem berühmten précis d'une théorie des fonctions elliptiques und in einigen vor kurzem aus dem Nachlasse von Abel veröffentlichten Noten — allgemeine Fundamentalsätze der Integralrechnung entwickelt werden, welche sich mit den Beziehungen zwischen algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen sowie mit den Reductionen solcher Functionen auf einander beschäftigen, von dem sogenannten Abel'schen Theorem abgesehen, das die Grundlage der neueren Analysis geworden ist. Nachdem ich in dem ersten Theile der vorliegenden Arbeit eine Anbahnung zur Ausdehnung des Abel'schen Theorems und der darauf beruhenden Theorieen von Quadraturen auf Lösungen von Differentialgleichungen versucht habe, beschäftige ich mich im zweiten Theile mit der Ausdehnung der Abel'schen Untersuchungen über die Reduction von Integralen algebraischer Functionen auf Integrale linearer Differentialgleichungen. Abel hat gezeigt, dass, wenn das Integral einer algebraischen Function auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale zurückführbar ist, das allgemeine algebraische Reductionsproblem darauf zurückgeführt werden könne, dass die Variabeln der Reductionsfunctionen rational aus den Variabeln des Abel'schen Integrales und dessen Irrationalität zusammengesetzt sind, wobei er für die Reduction elliptischer und hyperelliptischer Integrale auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale die Variabeln der Reductionsfunctionen rein rational von der Variabeln der transformirten Function abhängig zu machen im

Stande war. Von der Ausdehnung dieses letzteren Satzes schon auf den unmittelbar nächsten Fall von der Reduction eines Abel'schen Integrales auf algebraisch-logarithmische Functionen und elliptische Integrale sagt aber Abel: „mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais". In den vorliegenden Untersuchungen ist das Reductionsproblem nicht bloss für Quadraturen, sondern auch für Integrale linearer Differentialgleichungen auf das rationale zurückgeführt, und ich will im Folgenden kurz die wesentlichsten Resultate dieser Untersuchungen angeben. Wir theilen die Behandlung der Frage in zwei Theile, von denen der erste sich mit den Beziehungen beschäftigt, welche zwischen den Grenzen der Integrale der Differentialgleichung, insofern diese durch Quadraturen darstellbar sind, und den Coefficienten der Differentialgleichung bestehen, der zweite die Natur der Abel'schen Integrale und der zu ihnen gehörigen algebraischen Irrationalitäten zu untersuchen hat, welche linearen Differentialgleichungen genügen. Die erstere Untersuchung beschäftigt sich einerseits mit den Folgerungen, welche aus der Existenz eines durch algebraisch-logarithmische Functionen und Abel'sche Integrale darstellbaren Integrales einer solchen Differentialgleichung für die Beschaffenheit nothwendig daraus folgender Integrale hergeleitet werden können, andererseits mit der Untersuchung der Form eines jeden in der angegebenen Weise darstellbaren Integrales, und die Beantwortung der hier auf geworfenen Fragen bildet die eigentliche Ausdehnung der bekannten Abel'schen Sätze. Die Annahme algebraisch-logarithmischer Integrale linearer Differentialgleichungen führt auf die Existenz anderer, deren Argumente rational aus den Coefficienten der Differentialgleichung zusammengesetzt sind, und dasselbe gilt für solche aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen additiv zusammengesetzten Integrale, wobei für die Grenzen der letzteren algebraische Gleichungen eintreten, deren Coefficienten wiederum rational jene Grössen enthalten, und schon hier wird, wenigstens für binomische Irrationalitäten, die Reduction auf das rationale Problem entwickelt, für welches die Coefficienten der eben bezeichneten algebraischen Gleichungen nur rational aus der unabhängigen Variabeln zusammengesetzt sind, eine Reduction, deren Verallgemeinerung erst später gegeben werden kann, nachdem die nothwendige Beschaffenheit der Irrationalitäten untersucht worden. Zunächst wird die Bedeutung der rationalen Reduction an einigen Anwendungen nachgewiesen, indem mit Hülfe von Methoden, wie sie die Functionentheorie nahe legt und die ich schon zum Zwecke des Nachweises, dass ein allgemeines Transformationsproblem für hyperelliptische Integrale von höherer Ordnung als der ersten nicht existirt, früher verwerthet habe, die Fragen der Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische und hyperelliptische Integrale niederer Ordnung beantwortet werden, wobei zugleich zum Abschluss dieser Untersuchungen die Verwerthung der hyperelliptischen ϑ-functionen für die Behandlung dieser Probleme besprochen wird; alle diese Reductionsprobleme werden an Beispielen erläutert. Sind die Integrale der linearen Differentialgleichung nicht additiv aus algebraisch-logarithmischen Functionen und Abel'schen Integralen zusammengesetzt, so lässt sich mit Hülfe oben bewiesener Sätze die nothwendige Form dieser Verbindungen feststellen, und auch für diese Zusammensetzung die Reduction auf andere rationale Formen vollziehen, welche dann auch Integrale der Differentialgleichung sein müssen. Nunmehr wendet sich die Untersuchung zur Beschaffenheit eines jeden algebraisch-logarithmischen Integrales und wirft die Frage auf, welche Eigenschaften die reducirte Differentialgleichung haben müsse, damit jenes Integral stets rational durch die Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar sei; diese Frage wird dann ausgedehnt auf solche Integrale von Differentialgleichungen, welche durch elliptische und Abel'sche Integrale darstellbar sind, und ähnlich durch Auffindung von Bedingungen beantwortet, wobei sich eine interessante Reduction algebraischer irreductibler Gleichungen vermöge der Transformationstheorie der elliptischen und Abel'schen Functionen ergiebt.

Endlich richtet sich die Untersuchung auf die Erforschung der Eigenschaften der algebraischen Irrationalitäten, welche den einer linearen Differentialgleichung genügenden elliptischen und Abel'schen Integralen zu Grunde liegen; nachdem die Frage wieder auf Integrale erster Gattung zurückgeführt worden, wird gezeigt, dass, wenn einer linearen nicht homogenen Differentialgleichung, deren rechte Seite bei einem geschlossenen Umlaufe der Variabeln, für welchen die Coefficienten der Differentialgleichung unverändert bleiben, in ein Multiplum ihres Werthes übergeht — worin dieses Multiplum bekanntlich eine Einheitswurzel sein muss — ein elliptisches Integral genügt, unter der Voraussetzung, dass die reducirte Differentialgleichung, wenn sie überhaupt durch ein Abel'sches Integral befriedigt wird, als solches nur ein elliptisches Integral mit demselben Modul besitzt, der Integralmodul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication sein muss, wenn jenes Multiplum nicht -1 ist; weiter liefern Betrachtungen, die der Transformationstheorie der elliptischen Functionen angehören, das Resultat, dass jene Multipla nur 3^{te}, 4^{te} und 6^{te} Einheitswurzeln und somit nur drei bestimmte elliptische Integrale, welche zu den binomischen Polynomen 3^{ten}, 4^{ten}

und 6^{ten} Grades gehören, Lösungen jener Differentialgleichung sein können. Nachdem auch für diese Fälle mit Hülfe des Abel'schen Theorems die Reduction auf das rationale Problem ausgeführt und gezeigt worden, wie man alle Differentialgleichungen aufstellt, welche die angegebenen Integrale zu Lösungen haben, wird die Untersuchung auf die Fälle verallgemeinert, dass zwischen mehreren Werthen der die rechte Seite der Differentialgleichung bildenden algebraischen Function eine lineare Relation stattfindet, und die Bedeutung dieser Annahme für die Entwicklung der Function um ihre Verzweigungspunkte herum geprüft; mit Hülfe von Methoden, wie sie schon mehrfach erwähnt worden, wird sodann der Satz bewiesen, dass, wenn einer linearen Differentialgleichung ein elliptisches Integral genügt, und es kommen in der Entwicklung der rechten Seite derselben um einen Verzweigungspunkt herum für einen primzahligen Cyclus ϱ nach Zusammenfassen der gleichen gebrochenen Potenzen nicht alle Potenzen mit dem Nenner ϱ vor, der Modul des elliptischen Integrales ein Modul complexer Multiplication ist, wenn die reducirte Differentialgleichung den angegebenen Beschränkungen unterliegt. Zugleich ergiebt sich aber ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen der Entwicklungsform der algebraischen Function, der complexen Multiplication und den Sätzen von der Zerlegung der Kreistheilungsgleichung, indem gezeigt wird, dass, wenn $\varrho \equiv 3 \pmod{4}$, die Entwicklung der rechten Seite der Differentialgleichung gerade $\frac{\varrho - 1}{2}$ gebrochene Potenzen enthält, deren Nenner ϱ und deren Zähler die $\frac{\varrho - 1}{2}$ quadratischen Reste oder Nichtreste von ϱ sind, dass ferner $\sqrt{-\varrho}$ der Multiplicator der complexen Multiplication des elliptischen Integrales, und der Integralmodul selbst bis auf die durch algebraische Transformation aus diesem herleitbaren bestimmt ist. Aehnliche Sätze lassen sich für den Fall entwickeln, dass der linearen nicht homogenen Differentialgleichung hyperelliptische oder Abel'sche Integrale genügen, wie an den zu einer binomischen Irrationalität gehörigen hyperelliptischen Integralen nachgewiesen wird.

Ich will am Schlusse dieses Vorwortes nur noch bemerken, dass sich grosse Theile dieser Untersuchungen auch auf partielle Differentialgleichungen ausdehnen lassen, worauf ich jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingehen konnte, wenn ich den Zusammenhang des Ganzen nicht beeinträchtigen wollte.

Der Verfasser.