

#### IV. Abschnitt.

### Die ebenen Schnitte der Flächen zweiter Ordnung.

#### I. Kapitel.

#### Allgemeine Theorie der ebenen Schnitte.

##### § 106. Beziehung des ebenen Schnittes zu einer Geraden.

**1. Allgemeine Darstellung der Schnittkurve.** Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene wird in gemeinen Koordinaten  $x, y, z$  durch die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad g(x, y, z) = 0, \quad (2) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

und in homogenen gemeinen Koordinaten  $x, y, z, t$  durch die beiden Gleichungen:

$$(3) \quad f(x, y, z, t) = 0, \quad (4) \quad ux + vy + wz + st = 0$$

dargestellt. Hier haben  $g$  und  $f$  die Bedeutung § 66, (1) und (3) und sind  $u, v, w, s$  die homogenen Koordinaten der schneidenden Ebene.

**2. Schnittpunkte der Schnittkurve mit einer Geraden.** Liegt eine gerade Linie in der schneidenden Ebene, so sind ihre Schnittpunkte mit der Fläche zugleich auch ihre Schnittpunkte mit der Schnittkurve der Fläche und der Ebene.

Ist nun die Gerade in der Form (§ 67, (2)):

$$(5) \quad x = x_0 + \alpha\sigma, \quad y = y_0 + \beta\sigma, \quad z = z_0 + \gamma\sigma$$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (2), wenn:

$$(6) \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0, \quad (7) \quad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

Ihre Schnittpunkte mit der Kurve (1), (2) sind dann, wie § 67, (4), durch die quadratische Gleichung:

$$(8) \quad h(\alpha, \beta, \gamma)\sigma^2 + 2(g_1^0\alpha + g_2^0\beta + g_3^0\gamma)\sigma + g^0 = 0$$

bestimmt.

Ist die Gerade dagegen in der Parameterstellung (§ 67, (6)):

$$(9) \quad x = x_1 + \lambda x_2, \quad y = y_1 + \lambda y_2, \quad z = z_1 + \lambda z_2, \quad t = t_1 + \lambda t_2$$

gegeben, so liegt sie in der Ebene (4), wenn:

$$(10) \quad ux_1 + vy_1 + wz_1 + st_1 = 0, \quad (11) \quad ux_2 + vy_2 + wz_2 + st_2 = 0,$$

und ihre Schnittpunkte mit der Kurve (3), (4) sind, wie § 67, (7), durch die Gleichung:

$$(12) \quad f_{11} + 2\lambda f_{12} + \lambda^2 f_{22} = 0$$

bestimmt.

**3. Tangente in einem Punkte der Schnittkurve.** Wenn der Punkt  $P_0 = x_0, y_0, z_0$  in (5) nicht nur der Gleichung (6), sondern auch der Gleichung (§ 66, (9)):

$$(13) \quad g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = 0$$

entspricht, so liegt er auf der Schnittkurve (1), (2) selbst. Ist dann außerdem in (8):

$$(14) \quad g_1^0 \alpha + g_2^0 \beta + g_3^0 \gamma = 0,$$

so fallen die beiden Schnittpunkte der Geraden (5) mit der Kurve (1), (2) im Punkte  $P_0$  zusammen.

*Eine durch den Punkt  $x_0, y_0, z_0$  der Schnittkurve (1), (2) in der Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  laufende Gerade ist Tangente der Kurve in ihm, wenn neben (6) und (13) die Bedingungen (7) und (14) erfüllt sind.*

Liegt der Punkt  $P_1 = x_1, y_1, z_1, t_1$ , indem neben (10) auch:

$$(15) \quad f_{11} = f_1^{(1)} x_1 + f_2^{(1)} y_1 + f_3^{(1)} z_1 + f_4^{(1)} t_1$$

ist, auf der Kurve (3), (4) selbst und ist neben (11) noch:

$$(16) \quad f_{12} = f_1^{(1)} x_2 + f_2^{(1)} y_2 + f_3^{(1)} z_2 + f_4^{(1)} t_2 = 0,$$

so fallen die beiden Schnittpunkte der Geraden (9) mit der Kurve (3), (4) im Punkte  $P_1$  zusammen.

*Eine den Punkt  $x_1, y_1, z_1, t_1$  der Schnittkurve (3), (4) mit dem Punkte  $x_2, y_2, z_2, t_2$  verbindende Gerade ist Tangente der Kurve in  $x_1, y_1, z_1, t_1$ , wenn neben (10) und (15) die Bedingungen (11) und (16) erfüllt sind.*

**4. Normale der Schnittkurve.** Für die Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  der Tangente der Kurve (1), (2) im Punkte  $x_0, y_0, z_0$  gelten die Gleichungen (7) und (14). Für die Richtungskosinus  $\alpha', \beta', \gamma'$  der Normale der Kurve in diesem Punkte ist dann:

$$\begin{aligned} \alpha' \alpha + \beta' \beta + \gamma' \gamma &= 0, \\ u \alpha' + v \beta' + w \gamma' &= 0, \end{aligned}$$

oder wenn man mittels (7) und (14)  $\alpha, \beta, \gamma$  eliminiert:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' & \gamma' \\ u & v & w \\ g_1^0 & g_2^0 & g_3^0 \end{vmatrix} = 0, \quad u \alpha' + v \beta' + w \gamma' = 0.$$

**5. Doppelpunkte der Schnittkurve.** Die Bedingung (14) ist für alle in der Ebene (2) durch den Punkt  $x_0, y_0, z_0$  gehenden Richtungen  $\alpha, \beta, \gamma$  erfüllt, wenn sie eine Folge der Bedingung (7) ist, also:

$$(18) \quad g_1^0 : g_2^0 : g_3^0 = u : v : w$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor  $\varrho$ :

$$(19) \quad g_1^0 + \varrho u = 0, \quad g_2^0 + \varrho v = 0, \quad g_3^0 + \varrho w = 0.$$

*Ein solcher Punkt der Schnittkurve (1), (2), der die Eigenschaft hat, daß alle durch ihn gehenden Geraden der Ebene (2) Tangenten der Kurve in ihm sind, ist ein Doppelpunkt der Schnittkurve.*

Die Gleichung (13) wird infolge von (19):

$$-\varrho(x_0 u + y_0 v + z_0 w) + g_4^0 = 0$$

oder nach (6):

$$g_4^0 + \varrho s = 0.$$

*Ein Doppelpunkt  $x_0, y_0, z_0$  der Schnittkurve (1), (2) ist daher durch die Gleichungen:*

$$(20) \quad \begin{cases} g_1^0 + \varrho u = 0, & g_2^0 + \varrho v = 0, & g_3^0 + \varrho w = 0, & g_4^0 + \varrho s = 0, \\ & & & u x_0 + v y_0 + w z_0 + s = 0 \end{cases}$$

*gekennzeichnet, welche die Gleichung (13) schon zur Folge haben.*

Die Bedingung (16) ist für alle der Gleichung (11) entsprechenden Punkte  $x_2, y_2, z_2, t_2$  erfüllt, wenn (I § 51, (3)):

$$(21) \quad f_1^{(1)} : f_2^{(1)} : f_3^{(1)} : f_4^{(1)} = u : v : w : s$$

oder:

*Ein Doppelpunkt  $x_1, y_1, z_1, t_1$  der Schnittkurve (3), (4) ist durch die Gleichungen:*

$$(22) \quad \begin{cases} f_1^{(1)} + \varrho u = 0, & f_2^{(1)} + \varrho v = 0, & f_3^{(1)} + \varrho w = 0, & f_4^{(1)} + \varrho s = 0, \\ & & & u x_1 + v y_1 + w z_1 + s t_1 = 0 \end{cases}$$

*gekennzeichnet, welche die Gleichung (15) zur Folge haben.<sup>49)</sup>*

**6. Tangentialebene als schneidende Ebene.** Wenn zwischen den Koordinaten  $x_1, y_1, z_1, t_1$  eines Punktes und den Koordinaten  $u, v, w, s$  einer Ebene die Gleichungen (22) bestehen, so liegt der Punkt nach (15) auf der Fläche (3) und kann die Gleichung (4) der Ebene in der Form:

$$(23) \quad f_1^{(1)} x + f_2^{(1)} y + f_3^{(1)} z + f_4^{(1)} t = 0$$

geschrieben werden. Sie ist nach § 67, (17) die Tangentialebene der Fläche im Punkte  $x_1, y_1, z_1, t_1$ .

Ist umgekehrt  $x_1, y_1, z_1, t_1$  ein Punkt der Fläche, so sind für die Koordinaten  $u, v, w, s$  seiner Tangentialebene (23) die Bedingungen (22) erfüllt.

Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene hat daher immer dann und nur dann einen Doppelpunkt, wenn die Ebene Tangentialebene der Fläche ist. Der Doppelpunkt der Schnittkurve ist dann der Berührungspunkt der Tangentialebene.<sup>178)</sup>

**7. Mittelpunkt der Schnittkurve.** Der Punkt  $x_0, y_0, z_0$  der geraden Linie (5) ist der Mittelpunkt der beiden Schnittpunkte der Linie mit der Kurve (1), (2), wenn in (8):

$$(24) \quad g_1^0 \alpha + g_2^0 \beta + g_3^0 \gamma = 0.$$

Diese Bedingung ist nach (7) insbesondere für alle in der Ebene (2) durch  $x_0, y_0, z_0$  gehenden Geraden erfüllt, wenn:

$$(25) \quad g_1^0 : g_2^0 : g_3^0 = u : v : w.$$

Ein solcher Punkt, der alle durch ihn gehenden Sehnen der Schnittkurve halbiert, ist *Mittelpunkt der Kurve* (§ 11, 4).

Der Mittelpunkt der Kurve (1), (2) ist somit durch die Gleichungen:

$$(26) \quad \begin{cases} g_1^0 + \varrho u = 0, & g_2^0 + \varrho v = 0, & g_3^0 + \varrho w = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0 \end{cases}$$

gekennzeichnet.<sup>6)</sup>

## § 107. Einteilung der ebenen Schnitte nach dem Rang.

**1. Allgemeine Gleichungen der Doppelemente.** Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung § 106, (3) mit der Ebene  $u, v, w, s$  hat nach § 106, (22) einen *Doppelpunkt*  $x, y, z, t$ , wenn die fünf Bedingungen:

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 + \varrho u = 0, & f_2 + \varrho v = 0, & f_3 + \varrho w = 0, & f_4 + \varrho s = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0, \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben<sup>49)</sup>:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + \varrho u = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + \varrho v = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + \varrho w = 0, \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + \varrho s = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0 \end{cases}$$

unter Elimination von  $\varrho$  erfüllt sind. Sie werden aber bei Elimination von  $\varrho$  in der Form:

$$(3) \quad \frac{f_1}{u} = \frac{f_2}{v} = \frac{f_3}{w} = \frac{f_4}{s},$$

$$(4) \quad ux + vy + wz + st = 0$$

in  $x, y, z, t$  linear und homogen. Sie können also dann als Gleichungen von vier Ebenen betrachtet werden, denen der Punkt  $x, y, z, t$  angehören muß. Je nachdem diese vier Ebenen keinen oder einen Punkt oder eine Achse gemein haben oder alle vier zusammenfallen, wird die Schnittkurve keinen oder einen Doppelpunkt oder eine Doppelachse oder eine Doppelebene haben. Sie wird danach ein eigentlicher Kegelschnitt, ein Strahlenpaar oder ein Doppelstrahl sein, oder die schneidende Ebene  $u, v, w, s$  wird alle ihre Punkte mit der Fläche gemein haben, also selbst ein Bestandteil der Fläche sein (§ 18, 1; § 19, 9).

**2. Schnittkurven ohne Doppelpunkt.** Die in  $x, y, z, t, \varrho$  linearen homogenen Gleichungen (2) können nur bestehen, wenn „die mit den Koordinaten  $u, v, w, s$  der Ebene geränderte Determinante  $A$  der Fläche“<sup>(119)</sup>:

$$(5) \quad A^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet. Es folgt daher:

Die Schnittkurve § 106, (3), (4) hat keinen Doppelpunkt, ist ein eigentlicher Kegelschnitt, wenn:

$$(6) \quad A^u \neq 0.$$

**3. Schnittkurven mit Doppelementen überhaupt.** Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines oder mehrerer Doppelpunkte ist dagegen:

$$(7) \quad A^u = 0.$$

Sie ist nach § 106, 6 zugleich die Bedingung dafür, daß  $u, v, w, s$  eine Tangentialebene der Fläche ist.<sup>(178)</sup>

Die Entwicklung der Determinante (5) nach der letzten Zeile und Kolonne gibt für die Gleichung (7):

$$(8) \quad -A^u = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv + 2A_{14}us + 2A_{24}vs + 2A_{34}ws + A_{44}s^2 = 0.$$

Alle Ebenen  $u, v, w, s$ , welche die Fläche § 106, (3) in einem nicht eigentlichen Kegelschnitt schneiden und daher Tangentialebenen sind, genügen der Bedingung (8).

Sie wurde unter der Voraussetzung  $A \neq 0$  schon in § 78, (7)

als Gleichung der eigentlichen Fläche in laufenden Ebenenkoordinaten erhalten

Die Bedingung (8) ist identisch in  $u, v, w, s$  erfüllt, wenn alle  $A_{ki}$  verschwinden, also die Fläche zweiter Ordnung ein Ebenenpaar oder eine Doppelebene ist (§ 81, (27)).

**4. Die Unterdeterminanten vierten Grades von  $A^u$ .** Wir bezeichnen mit  $A_{kl}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) die Unterdeterminanten vierten Grades der Determinante fünften Grades  $A^u$ . Sie zerfallen in drei Arten: erstens die sechszehn  $A_{kl}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ), die durch Ränderung der  $A_{ki}$  (§ 66, 6) entstehen, z. B.:

$$(9) \quad A_{12}^u = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & s \\ u & w & s & 0 \end{vmatrix} \quad \text{neben} \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

zweitens die acht ( $k = 1, 2, 3, 4$ ):

$$(10) \quad A_{k5}^u = A_{5k}^u = - (A_{k1}u + A_{k2}v + A_{k3}w + A_{k4}s);$$

drittens die eine:

$$(11) \quad A_{55}^u = A.$$

Falls die Determinante  $A^u$  verschwindet, ist für  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ :

$$(12) \quad \begin{cases} a_{11}A_{k1}^u + a_{12}A_{k2}^u + a_{13}A_{k3}^u + a_{14}A_{k4}^u + uA_{k5}^u = 0, \\ a_{21}A_{k1}^u + a_{22}A_{k2}^u + a_{23}A_{k3}^u + a_{24}A_{k4}^u + vA_{k5}^u = 0, \\ a_{31}A_{k1}^u + a_{32}A_{k2}^u + a_{33}A_{k3}^u + a_{34}A_{k4}^u + wA_{k5}^u = 0, \\ a_{41}A_{k1}^u + a_{42}A_{k2}^u + a_{43}A_{k3}^u + a_{44}A_{k4}^u + sA_{k5}^u = 0. \end{cases}$$

Ist jetzt:

$$(13) \quad A_{k1}^u = 0, \quad A_{k2}^u = 0, \quad A_{k3}^u = 0, \quad A_{k4}^u = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

so folgt aus (12), da  $u, v, w, s$  nicht alle verschwinden können:

$$(14) \quad A_{k5}^u = A_{5k}^u = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4;$$

damit aber wieder aus (12) mit  $k = 5$ :

$$(15) \quad A_{55}^u = A = 0.$$

*I. Wenn also neben  $A^u$  selbst die sechszehn Unterdeterminanten (13) sämtlich verschwinden, so verschwinden auch die neun Unterdeterminanten (14) und (15) (§ 44, 10).*

**5. Schnittkurve mit einem bestimmten Doppelpunkt.** Unter der Voraussetzung (7) ergibt die Auflösung der Gleichungen (2):

$$(16) \quad x : y : z : t : \varrho = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u : A_{k5}^u,$$

$k = 1, 2, 3, 4$  oder 5, und daher unter Elimination von  $\varrho$  (§ 79, (4)):

$$(17) \quad x : y : z : t = A_{k1}^u : A_{k2}^u : A_{k3}^u : A_{k4}^u,$$

$k = 1, 2, 3, 4$  oder 5. Die Verhältnisse (17) sind bestimmt, wenn  $A_{k1}^u, A_{k2}^u, A_{k3}^u, A_{k4}^u$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) nicht sämtlich verschwinden; dazu dürfen aber nach 4, I schon  $A_{k1}^u, A_{k2}^u, A_{k3}^u, A_{k4}^u$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) nicht sämtlich verschwinden.

Die Schnittkurve hat daher immer dann und nur dann einen bestimmten Doppelpunkt, mit den Koordinaten (17), wenn<sup>76</sup>):

$$(18) \quad A^u = 0, \text{ aber } A_{ki}^u \text{ } (k, l = 1, 2, 3, 4) \text{ nicht alle } 0.$$

Sind dabei die Bedingungen (14) und (15) erfüllt, so wird nach (16)  $\varrho = 0$ , und die Gleichungen (2) stimmen mit den Gleichungen § 67, (32) für den Doppelpunkt der Fläche selbst überein.

**6. Andere Form der Bedingungen eines bestimmten Doppelpunktes.** Für die Determinante fünften Grades (5) ist unbedingt (entsprechend wie I Anm. 1, III, (9)):

$$(19) \quad \begin{vmatrix} A_{22}^u & A_{23}^u \\ A_{32}^u & A_{33}^u \end{vmatrix} = A^u \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} & u \\ a_{41} & a_{44} & s \\ u & s & 0 \end{vmatrix} = A^u \alpha_{44}^u,$$

wo wir allgemein mit  $\alpha_{ki}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) die mit den Koordinaten der Ebene  $u, v, w, s$  geränderten Unterdeterminanten  $\alpha_{ki}$  bezeichnen, z. B.:

$$(20) \quad \alpha_{13}^u = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & v \\ a_{31} & a_{32} & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix} \text{ neben } \alpha_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Mit Hinzufügung der entsprechenden Formeln ist:

$$(21) \quad \begin{cases} A_{22}^u A_{33}^u - (A_{23}^u)^2 = A^u \alpha_{44}^u, & A_{33}^u A_{11}^u - (A_{31}^u)^2 = A^u \alpha_{55}^u, \\ & A_{11}^u A_{22}^u - (A_{12}^u)^2 = A^u \alpha_{66}^u, \\ A_{11}^u A_{44}^u - (A_{14}^u)^2 = A^u \alpha_{11}^u, & A_{22}^u A_{44}^u - (A_{24}^u)^2 = A^u \alpha_{22}^u, \\ & A_{33}^u A_{44}^u - (A_{34}^u)^2 = A^u \alpha_{33}^u. \end{cases}$$

Setzt man daher zur Abkürzung (§ 79, (5); (6)):

$$(22) \quad A'^u = A_{11}^u + A_{22}^u + A_{33}^u + A_{44}^u,$$

$$(23) \quad A''^u = \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u + \alpha_{44}^u + \alpha_{55}^u + \alpha_{66}^u,$$

so folgt ebenso wie in § 79, (9) zunächst:

$$(24) \quad \begin{cases} A'^u A_{11}^u = (A_{11}^u)^2 + (A_{12}^u)^2 + (A_{13}^u)^2 + (A_{14}^u)^2 + A^u (\alpha_{11}^u + \alpha_{55}^u + \alpha_{66}^u), \\ A'^u A_{44}^u = (A_{41}^u)^2 + (A_{42}^u)^2 + (A_{43}^u)^2 + (A_{44}^u)^2 + A^u (\alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u) \end{cases}$$

und danach die identische Gleichung<sup>80)</sup>:

$$(25) \quad (A'^u)^2 = (A_{11}^u)^2 + (A_{22}^u)^2 + (A_{33}^u)^2 + (A_{44}^u)^2 + 2(A_{23}^u)^2 + 2(A_{31}^u)^2 \\ + 2(A_{12}^u)^2 + 2(A_{14}^u)^2 + 2(A_{24}^u)^2 + 2(A_{34}^u)^2 + 2A^u A''^u.$$

Wenn nun  $A^u = 0$  und  $A'^u = 0$ , verschwinden nach (25) alle  $A_{kl}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ). Wenn dagegen alle  $A_{kl}^u = 0$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), verschwindet nach (22)  $A'^u$  und, da für die Determinante fünften Grades:

$$|A_{kl}^u| = (A^u)^4$$

ist (entsprechend wie I Anm. 1, III, (7)), auch  $A^u$ .

Daher sind die Bedingungen:

$$(26) \quad A^u = 0, \quad \text{alle} \quad A_{kl}^u = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

gleichbedeutend mit:

$$(27) \quad A^u = 0, \quad A'^u = 0;$$

ferner die Bedingungen (18) eines bestimmten Doppelpunktes gleichbedeutend mit:

$$(28) \quad A^u = 0, \quad A'^u \neq 0.$$

**7. Schnittkurve mit bestimmter Doppelachse.** Der Doppelpunkt (17) wird *unbestimmt*, wenn die Bedingungen (26) oder (27) erfüllt sind. In diesem Falle gehen also die vier Ebenen (3), (4), falls sie nicht alle vier zusammenfallen (vgl. 9), durch eine gemeinsame Achse. Diese wird schon durch zwei von den Gleichungen (3), etwa durch:

$$(29) \quad f_2 w - f_3 v = 0, \quad ux + vy + wz + st = 0$$

in laufenden Koordinaten  $x, y, z, t$  dargestellt oder, was dasselbe ist, durch die zweite, dritte und fünfte Gleichung (2) unter Elimination von  $\rho$ .

Die gleichzeitige Elimination von  $x$  und  $\rho$  aus den drei genannten Gleichungen gibt aber in:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t & v \\ a_{31} & a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t & w \\ u & vy + wz + st & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(30) \quad \alpha_{13}^u y - \alpha_{12}^u z + \alpha_{14}^u t = 0$$

die Projektion der Achse (29) auf die  $yz$ -Ebene. Ebenso gibt die Elimination von  $y$  und  $\rho$  oder  $z$  und  $\rho$ :

$$(30') \quad \alpha_{11}^u z - \alpha_{13}^u x + \alpha_{15}^u t = 0, \quad \alpha_{12}^u x - \alpha_{11}^u y + \alpha_{16}^u t = 0.$$

Wie hier die zweite und dritte, könnte man aber auch irgend zwei andere der vier ersten Gleichungen (2) mit der fünften verbinden.



Damit ergibt sich aber (I § 48, (11)):

Die Schnittkurve ist unter den Voraussetzungen (26) oder (27) eine Doppelgerade mit den Achsenkoordinaten (§ 81, (2))<sup>79)</sup>:

$$(31) \quad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = \alpha_{k1}'' : \alpha_{k2}'' : \alpha_{k3}'' : \alpha_{k4}'' : \alpha_{k5}'' : \alpha_{k6}'', \\ k = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ oder } 6.$$

Die Doppelgerade ist bestimmt, wenn noch die weitere Voraussetzung hinzugefügt wird, daß:

$$(32) \quad \alpha_{kl}'' \quad (k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \text{ nicht alle } 0.$$

Da aus (26) nach 4, I die Gleichung (15) folgt, so ergibt sich:

Eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ( $A \neq 0$ ) kann von einer Ebene niemals in einer Doppelgeraden geschnitten werden, sondern nur in einem eigentlichen Kegelschnitt oder einem getrennten Linienpaar.

Beim Kegel ( $A = 0$ ,  $A' \neq 0$ ) muß jede in einer Doppellinie schneidende Ebene nach (14) und (10) durch die Spitze gehen (§ 79, (4)).

**8. Andere Form der Bedingungen einer Doppellinie.** Durch Multiplikation der Entwicklungen:

$$(33) \quad \begin{cases} -A_{11}'' = \alpha_{66}v^2 + \alpha_{55}w^2 + \alpha_{11}s^2 - 2\alpha_{15}ws + 2\alpha_{16}vs - 2\alpha_{56}vw, \\ -A_{22}'' = \alpha_{44}w^2 + \alpha_{66}u^2 + \alpha_{22}s^2 - 2\alpha_{26}us + 2\alpha_{24}ws - 2\alpha_{64}wu, \\ -A_{33}'' = \alpha_{55}u^2 + \alpha_{44}v^2 + \alpha_{33}s^2 - 2\alpha_{34}vs + 2\alpha_{35}us - 2\alpha_{45}uv, \\ -A_{44}'' = \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 + 2\alpha_{23}vw + 2\alpha_{31}wu + 2\alpha_{12}uv \end{cases}$$

mit  $u^2, v^2, w^2, s^2$  und Addition folgt:

$$(34) \quad \begin{cases} -(A_{11}''u^2 + A_{22}''v^2 + A_{33}''w^2 + A_{44}''s^2) = 2\alpha_{11}u^2s^2 + 2\alpha_{22}v^2s^2 \\ \quad + 2\alpha_{33}w^2s^2 + 2\alpha_{44}v^2w^2 + 2\alpha_{55}w^2u^2 + 2\alpha_{66}u^2v^2 \\ - 2\alpha_{15}u^2ws + 2\alpha_{16}u^2vs - 2\alpha_{56}u^2vw - 2\alpha_{26}v^2us + 2\alpha_{24}v^2ws - 2\alpha_{64}v^2wu \\ - 2\alpha_{34}w^2vs + 2\alpha_{35}w^2us - 2\alpha_{45}w^2uv + 2\alpha_{23}vws^2 + 2\alpha_{31}wus^2 + 2\alpha_{12}uvs^2. \end{cases}$$

Andererseits ist:

$$(35) \quad \begin{cases} -\alpha_{11}'' = a_{22}w^2 + a_{33}v^2 - 2a_{23}vw, & -\alpha_{44}'' = a_{11}s^2 + a_{44}u^2 - 2a_{14}us, \\ -\alpha_{22}'' = a_{33}u^2 + a_{11}w^2 - 2a_{31}wu, & -\alpha_{55}'' = a_{22}s^2 + a_{44}v^2 - 2a_{24}vs, \\ -\alpha_{33}'' = a_{11}v^2 + a_{22}u^2 - 2a_{12}uv, & -\alpha_{66}'' = a_{33}s^2 + a_{44}w^2 - 2a_{34}ws, \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \alpha_{14}'' = a_{31}vs - a_{12}ws + a_{24}wu - a_{34}uv, \\ \alpha_{25}'' = a_{12}us - a_{23}us + a_{34}uv - a_{14}vw, \\ \alpha_{36}'' = a_{23}us - a_{31}vs + a_{14}vw - a_{24}wu, \end{cases}$$

und hieraus:

$$(37) \quad \begin{cases} (\alpha_{11}^u \alpha_{44}^u + \alpha_{22}^u \alpha_{55}^u + \alpha_{33}^u \alpha_{66}^u) - (\alpha_{14}^u \alpha_{14}^u + \alpha_{25}^u \alpha_{25}^u + \alpha_{36}^u \alpha_{36}^u) \\ = 2\alpha_{11} u^2 s^2 + 2\alpha_{23} v^2 s^2 + 2\alpha_{38} w^2 s^2 + 2\alpha_{44} v^2 w^2 + 2\alpha_{55} w^2 u^2 + 2\alpha_{66} u^2 v^2 \\ - 2\alpha_{15} u^2 w s + 2\alpha_{16} v^2 v s - 2\alpha_{56} u^2 v w - 2\alpha_{26} v^2 u s + 2\alpha_{24} v^2 w s - 2\alpha_{64} v^2 w u \\ - 2\alpha_{34} w^2 v s + 2\alpha_{35} w^2 u s - 2\alpha_{45} w^2 u v + 2\alpha_{23} v w s^2 + 2\alpha_{31} w u s^2 + 2\alpha_{13} u v s^2. \end{cases}$$

Nach (34) und (37) ist daher:

$$(38) \quad \begin{cases} (\alpha_{11}^u \alpha_{44}^u + \alpha_{22}^u \alpha_{55}^u + \alpha_{33}^u \alpha_{66}^u) - (\alpha_{14}^u \alpha_{14}^u + \alpha_{25}^u \alpha_{25}^u + \alpha_{36}^u \alpha_{36}^u) \\ = - (A_{11}^u u^2 + A_{22}^u v^2 + A_{33}^u w^2 + A_{44}^u s^2). \end{cases}$$

Für die Determinante vierten Grades  $A_{11}^u$  ist nun unbedingt (I Anm. 1, III, (9)):

$$(39) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{55}^u & \alpha_{51}^u \\ \alpha_{15}^u & \alpha_{11}^u \end{vmatrix} = A_{11}^u \begin{vmatrix} a_{22} & v \\ v & 0 \end{vmatrix} = -A_{11}^u v^2.$$

In derselben Weise erhält man die Gruppe von Formeln:

$$(40) \quad \begin{cases} v^2 A_{11}^u = (\alpha_{15}^u)^2 - \alpha_{11}^u \alpha_{55}^u, & w^2 A_{22}^u = (\alpha_{26}^u)^2 - \alpha_{22}^u \alpha_{66}^u, & u^2 A_{33}^u = (\alpha_{34}^u)^2 - \alpha_{33}^u \alpha_{44}^u, \\ w^2 A_{11}^u = (\alpha_{16}^u)^2 - \alpha_{11}^u \alpha_{66}^u, & u^2 A_{22}^u = (\alpha_{24}^u)^2 - \alpha_{22}^u \alpha_{44}^u, & v^2 A_{33}^u = (\alpha_{35}^u)^2 - \alpha_{33}^u \alpha_{55}^u, \\ s^2 A_{11}^u = (\alpha_{56}^u)^2 - \alpha_{55}^u \alpha_{66}^u, & s^2 A_{22}^u = (\alpha_{46}^u)^2 - \alpha_{44}^u \alpha_{66}^u, & s^2 A_{33}^u = (\alpha_{45}^u)^2 - \alpha_{44}^u \alpha_{55}^u, \\ u^2 A_{44}^u = (\alpha_{23}^u)^2 - \alpha_{22}^u \alpha_{33}^u, & v^2 A_{44}^u = (\alpha_{13}^u)^2 - \alpha_{11}^u \alpha_{33}^u, & w^2 A_{44}^u = (\alpha_{12}^u)^2 - \alpha_{11}^u \alpha_{22}^u. \end{cases}$$

Danach folgt aus (23):

$$(41) \quad \begin{cases} A''^u \alpha_{11}^u = (\alpha_{11}^u)^2 + (\alpha_{12}^u)^2 + (\alpha_{13}^u)^2 + \alpha_{11}^u \alpha_{44}^u + (\alpha_{15}^u)^2 + (\alpha_{16}^u)^2 - (v^2 + w^2)(A_{11}^u + A_{44}^u), \\ A''^u \alpha_{22}^u = (\alpha_{21}^u)^2 + (\alpha_{22}^u)^2 + (\alpha_{23}^u)^2 + (\alpha_{24}^u)^2 + \alpha_{22}^u \alpha_{55}^u + (\alpha_{26}^u)^2 - (w^2 + u^2)(A_{22}^u + A_{44}^u), \\ A''^u \alpha_{33}^u = (\alpha_{31}^u)^2 + (\alpha_{32}^u)^2 + (\alpha_{33}^u)^2 + (\alpha_{34}^u)^2 + (\alpha_{35}^u)^2 + \alpha_{33}^u \alpha_{66}^u - (u^2 + v^2)(A_{33}^u + A_{44}^u), \\ A''^u \alpha_{44}^u = \alpha_{44}^u \alpha_{11}^u + (\alpha_{42}^u)^2 + (\alpha_{43}^u)^2 + (\alpha_{44}^u)^2 + (\alpha_{45}^u)^2 + (\alpha_{46}^u)^2 - (u^2 + s^2)(A_{22}^u + A_{33}^u), \\ A''^u \alpha_{55}^u = (\alpha_{51}^u)^2 + \alpha_{55}^u \alpha_{22}^u + (\alpha_{53}^u)^2 + (\alpha_{54}^u)^2 + (\alpha_{55}^u)^2 + (\alpha_{56}^u)^2 - (v^2 + s^2)(A_{33}^u + A_{11}^u), \\ A''^u \alpha_{66}^u = (\alpha_{61}^u)^2 + (\alpha_{62}^u)^2 + \alpha_{66}^u \alpha_{33}^u + (\alpha_{64}^u)^2 + (\alpha_{65}^u)^2 + (\alpha_{66}^u)^2 - (w^2 + s^2)(A_{11}^u + A_{22}^u). \end{cases}$$

Durch Addition dieser Gleichungen und der Gleichung (38) in der Form:

$$(42) \quad \begin{aligned} & 2(\alpha_{11}^u \alpha_{44}^u + \alpha_{22}^u \alpha_{55}^u + \alpha_{33}^u \alpha_{66}^u) \\ & = 2\{(\alpha_{14}^u)^2 + (\alpha_{25}^u)^2 + (\alpha_{36}^u)^2\} - 2(A_{11}^u u^2 + A_{22}^u v^2 + A_{33}^u w^2 + A_{44}^u s^2) \end{aligned}$$

folgt aber die identische Gleichung<sup>80)</sup>:

$$(43) \quad \begin{aligned} & (A''^u)^2 = (\alpha_{11}^u)^2 + (\alpha_{22}^u)^2 + (\alpha_{33}^u)^2 + (\alpha_{44}^u)^2 + (\alpha_{55}^u)^2 + (\alpha_{66}^u)^2 \\ & 2\{(\alpha_{12}^u)^2 + (\alpha_{13}^u)^2 + (\alpha_{14}^u)^2 + (\alpha_{15}^u)^2 + (\alpha_{16}^u)^2 + (\alpha_{23}^u)^2 + (\alpha_{24}^u)^2 + (\alpha_{25}^u)^2 \\ & + (\alpha_{26}^u)^2 + (\alpha_{34}^u)^2 + (\alpha_{35}^u)^2 + (\alpha_{36}^u)^2 + (\alpha_{45}^u)^2 + (\alpha_{46}^u)^2 + (\alpha_{56}^u)^2\} \\ & - 2A''^u (u^2 + v^2 + w^2 + s^2). \end{aligned}$$

Wenn daher  $A''^u = 0$  ist, so folgt aus  $A''^u = 0$  das Verschwinden aller  $\alpha_{ki}^u$  und umgekehrt.

*Daher sind die Bedingungen:*

$$(44) \quad A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad \text{alle } \alpha_{ki}^u = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

*gleichbedeutend mit:*

$$(45) \quad A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u = 0;$$

*ferner die Bedingungen (27) und (32) einer Doppellinie gleichbedeutend mit:*

$$(46) \quad A^u = 0, \quad A'^u = 0, \quad A''^u \neq 0.$$

**9. Die schneidende Ebene gehört der Fläche an.** Die Doppellinie (31) wird unbestimmt, wenn die Bedingungen (44) oder (45) erfüllt sind. Dann fallen die beiden Ebenen (29) zusammen. Die aus der Matrix ihrer Koeffizienten:

$$(47) \quad \begin{vmatrix} wa_{21} - va_{31} & wa_{22} - va_{32} & wa_{23} - va_{33} & wa_{24} - va_{34} \\ u & v & w & s \end{vmatrix}$$

gebildeten Determinanten sind in der Tat die Unterdeterminanten  $\alpha_{11}^u, \alpha_{12}^u, \alpha_{13}^u, \alpha_{14}^u, \alpha_{15}^u, \alpha_{16}^u$ , die nach (44) verschwinden. Ebenso fallen alle Ebenen (3), (4) in eine zusammen. Jeder Punkt der schneidenden Ebene ist daher Doppelpunkt der Schnittkurve.

*Unter den Bedingungen (44) oder (45) gehört die schneidende Ebene in ihrer ganzen Ausdehnung der Fläche an.*

Die Fläche muß daher selbst ein *Ebenenpaar* oder eine *Doppelsebene* sein. Aus diesem Grunde sind nach § 81, (1) die Unterdeterminanten  $A_{ki}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) alle 0.

Die schneidende Ebene muß im Falle des *Ebenenpaares* durch dessen Achse gehen, so daß nach § 81, (2) (I § 48, (12')) die Gleichungen bestehen:

$$(48) \quad \begin{cases} \alpha_{k6}v - \alpha_{k5}w + \alpha_{k1}s = 0, & \alpha_{k4}w - \alpha_{k6}u + \alpha_{k2}s = 0, \\ \alpha_{k5}u - \alpha_{k4}v + \alpha_{k3}s = 0, & \alpha_{k1}u + \alpha_{k2}v + \alpha_{k3}s = 0; \end{cases}$$

im Falle der *Doppelsebene* sind schon alle  $\alpha_{ki} = 0$  (§ 81, (20)).

Die linken Seiten von (48) sind aber die 48 Unterdeterminanten dritten Grades, welche  $A^u$  neben den 36  $\alpha_{ki}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) und den 16  $A_{ki}$  noch besitzt, z. B.:

$$(49) \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ v & w & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} & w \\ a_{42} & a_{43} & s \end{vmatrix} = \alpha_{16}v - \alpha_{15}w + \alpha_{11}s.$$

**II. Wenn also neben  $A^u$  und  $A'^u$  die 36 Unterdeterminanten  $\alpha_{ki}^u$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) sämtlich verschwinden, so verschwinden auch die 16  $A_{ki}$  ( $k, l = 1, 2, 3, 4$ ) und die 48 übrigen Unterdeterminanten dritten Grades von  $A^u$  in (5) (vgl. 4, I).**

## II. Kapitel.

## Das Hauptachsenproblem der ebenen Schnitte.

## § 108. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten der Schnittkurve.

1. Koordinatensystem in der schneidenden Ebene. Die Gleichung der die Fläche:

$$(1) \quad g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

schneidenden Ebene:

$$(2) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

sei in der Hesseschen Normalform:

$$(3) \quad \frac{ux + vy + wz + s}{e} = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \delta = 0,$$

wo:

$$(4) \quad e = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

nicht verschwindet, wenn die Ebene (2) als endlich vorausgesetzt wird. Von den Koeffizienten:

$$(5) \quad \alpha_3 = \frac{u}{e}, \quad \beta_3 = \frac{v}{e}, \quad \gamma_3 = \frac{w}{e}, \quad \delta = \frac{s}{e};$$

$$(5') \quad \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$$

sind die drei ersten die Richtungskosinus der *Normale*  $\xi$  der Ebene.

Es sei nun  $\Omega\xi\eta$  ein beliebiges in der Ebene (2) liegendes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt  $\Omega$  die Koordinaten  $x_0, y_0, z_0$  und dessen Achsen  $\xi$  und  $\eta$  die Richtungskosinus  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  haben, so daß:

$$(6) \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0 \quad (\alpha_3 x_0 + \beta_3 y_0 + \gamma_3 z_0 + \delta = 0),$$

$$(7) \quad \begin{cases} u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0 & (\alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0), \\ u\alpha_2 + v\beta_2 + w\gamma_2 = 0 & (\alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 = 0). \end{cases}$$

2. Neues Koordinatensystem im Raume. Wir führen nun  $\Omega\xi\eta\zeta$  als neues System im Raume ein, auf das wir von dem alten,  $Oxyz$  mittels der Formeln übergehen:

$$(8) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = y_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = z_0 + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{cases} \quad (9) \quad \begin{cases} \xi = \alpha_1(x - x_0) + \beta_1(y - y_0) + \gamma_1(z - z_0), \\ \eta = \alpha_2(x - x_0) + \beta_2(y - y_0) + \gamma_2(z - z_0), \\ \zeta = \alpha_3(x - x_0) + \beta_3(y - y_0) + \gamma_3(z - z_0). \end{cases}$$

Die Gleichung der Fläche (1) lautet in dem neuen System:

$$(10) \quad g(x, y, z) = a'_{11}\xi^2 + a'_{22}\eta^2 + a'_{33}\xi^2 + 2a'_{23}\eta\xi + 2a'_{31}\xi\xi + 2a'_{12}\xi\eta \\ + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + 2a'_{34}\xi + a'_{44} = 0,$$

wo die Koeffizienten die Werte § 66, (19)—(21) haben, und die Gleichung der Ebene (2) wird nach (3), (6), (9):

$$(11) \quad \xi = 0.$$

In bezug auf das ebene System  $\Omega\xi\eta$  ist daher die Gleichung der Schnittkurve (1), (2)<sup>179)</sup>:

$$(12) \quad a'_{11}\xi^2 + 2a'_{12}\xi\eta + a'_{22}\eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0.$$

**3. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten.** Der Punkt  $\Omega$  und die Achsen  $\xi, \eta$  waren vorerst in der Ebene (2) beliebig gewählt.

Die Koeffizienten  $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}$  in (10) hängen nach § 66, (19) nur von der Richtung der Achsen  $\xi, \eta$ , aber nicht von  $\Omega$  ab. Wir nennen nun die Richtungen der Achsen  $\xi$  und  $\eta$  zwei *Hauptachsenrichtungen* der Kurve (12), wenn sie senkrecht sind und<sup>88)</sup>:

$$(13) \quad a'_{12} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 \\ = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_1 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_1 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_1 = 0.$$

Die entsprechenden Koeffizienten:

$$(14) \quad a'_{11} = h(\alpha_1\beta_1\gamma_1), \quad a'_{22} = h(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$$

heißen alsdann *Hauptachsenkoeffizienten*.

Die Werte der Koeffizienten  $a'_{13}, a'_{23}$  sind:

$$(15) \quad \begin{cases} a'_{13} = h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3, \\ a'_{23} = h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\alpha_3 + h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\beta_3 + h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2)\gamma_3; \end{cases}$$

und außerdem bestehen die Formeln:

$$(16) \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,$$

$$(17) \quad \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \quad \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 = 0,$$

$$(18) \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

Die zehn Gleichungen (13)—(18) enthalten somit die vollständige Erklärung der zehn Unbekannten  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; a'_{11}, a'_{22}; a'_{13}, a'_{23}$  des Hauptachsenproblems.

Die beiden Gruppen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a'_{11}, a'_{13}$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, a'_{22}, a'_{23}$  von je fünf Unbekannten sind vertauschbar (§ 88, 4).

Die Gleichungen (16) bis (18), neben denen noch (5') besteht, haben (§ 88, (7); (8)) zur Folge, daß:

$$(19) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

$$(20) \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \quad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

**4. Notwendige Bedingungen für einzelne Gruppen.** Aus den drei Gleichungen aus (14), (13), (15):

$$(21) \quad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_1 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_1 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_1 = a'_{11}, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_2 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_2 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_2 = 0, \\ h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\alpha_3 + h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\beta_3 + h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3 = a'_{13} \end{cases}$$

folgt durch Multiplikation mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  oder  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  oder  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  und Addition mit Rücksicht auf (19); (20):

$$(22) \quad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\alpha_1 + a'_{13}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\beta_1 + a'_{13}\beta_3, \\ h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\gamma_1 + a'_{13}\gamma_3. \end{cases}$$

*Die beiden Gruppen von fünf Unbekannten genügen daher jeweils den fünf Gleichungen:*

$$(23) \quad \begin{cases} h_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\alpha_1 + a'_{13}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\beta_1 + a'_{13}\beta_3, \\ h_3(\alpha_1\beta_1\gamma_1) = a'_{11}\gamma_1 + a'_{13}\gamma_3, \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1; \end{cases} \quad (23') \quad \begin{cases} h_1(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\alpha_2 + a'_{23}\alpha_3, \\ h_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\beta_2 + a'_{23}\beta_3, \\ h_3(\alpha_2\beta_2\gamma_2) = a'_{22}\gamma_2 + a'_{23}\gamma_3, \\ \alpha_3\alpha_2 + \beta_3\beta_2 + \gamma_3\gamma_2 = 0, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1. \end{cases}$$

**5. Hinreichende Gleichungen für die zehn Unbekannten.** Umgekehrt folgt aus den drei ersten Gleichungen (23) durch Multiplikation mit  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und Addition mit Rücksicht auf die vierte und fünfte (23) wieder die erste (21) oder (14), und ebenso aus (23') wieder die zweite (14). Multipliziert man ferner die drei ersten Gleichungen (23) mit  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und (23') mit  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und addiert, so folgt mit Rücksicht auf den Wert (13) von  $a'_{12}$  und die vierte (23') und (23):

$$\begin{aligned} a'_{12} &= a'_{11}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2), \\ a'_{12} &= a'_{22}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2), \end{aligned}$$

und daraus für  $a'_{11} \neq a'_{22}$ :

$$(24) \quad a'_{12} = 0, \quad (25) \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

übereinstimmend mit (13) und (18). Für  $a'_{11} = a'_{22}$  folgt dagegen (24)

erst unter Hinzufügung von (25). Auch die Gleichungen (15) gehen mit Rücksicht auf (5') aus (23), (23') wieder hervor.

Die zehn Gleichungen (23) und (23') sind für die Unbekannten  $a'_{11}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $a'_{13}$  und  $a'_{22}$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $a'_{23}$  an sich hinreichend, wenn  $a'_{11} \neq a'_{22}$ , dagegen erst in Verbindung mit (25), wenn  $a'_{11} = a'_{22}$  (§ 88, 6).

#### 6. Die quadratische Gleichung der Hauptachsenkoeffizienten.

Die vier ersten Gleichungen (23) lauten mit Rücksicht auf (5) ausführlich:

$$(26) \quad \begin{cases} (a_{11} - a'_{11})\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 - \frac{u}{e} a'_{13} = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - a'_{11})\beta_1 + a_{23}\gamma_1 - \frac{v}{e} a'_{13} = 0, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + (a_{33} - a'_{11})\gamma_1 - \frac{w}{e} a'_{13} = 0, \\ u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0, \end{cases}$$

und ebenso die Gleichungen (23') mit  $a'_{22}$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$ ,  $a'_{23}$ , für  $a'_{11}$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $a'_{13}$ . Da  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ ,  $\frac{a_{13}}{e}$  nach (16) nicht alle verschwinden können, muß die Determinante der in ihnen linearen und homogenen Gleichungen (26) verschwinden. Es folgt daher (§ 88, 7):

Jeder der beiden Hauptachsenkoeffizienten  $a'_{11}$ ,  $a'_{22}$  muß der in  $\lambda$  quadratischen Gleichung<sup>133)</sup>:

$$(27) \quad H(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Sie heißt die quadratische Gleichung des Hauptachsenproblems der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (2).

### § 109. Die Wurzeln der quadratischen Gleichung.

1. Die Determinante und ihre Unterdeterminanten. Die Unterdeterminanten dritten Grades der Determinante:

$$(1) \quad H(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

sollen in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} H_{11}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & w \\ v & w & 0 \end{vmatrix}, \quad H_{22}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{33} - \lambda & a_{31} & w \\ a_{13} & a_{11} - \lambda & u \\ w & u & 0 \end{vmatrix}, \\ \\ H_{33}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & u \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}; \\ \\ H_{23}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & u \\ a_{31} & a_{32} & w \\ u & v & 0 \end{vmatrix}, \quad H_{31}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & v \\ a_{12} & a_{13} & u \\ v & w & 0 \end{vmatrix}, \\ \\ H_{12}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{33} - \lambda & a_{31} & w \\ a_{23} & a_{21} & v \\ w & u & 0 \end{vmatrix}; \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} H_{14}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{31} \\ v & w & u \end{vmatrix}, \quad H_{24}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{33} - \lambda & a_{31} & a_{32} \\ a_{13} & a_{11} - \lambda & a_{12} \\ w & u & v \end{vmatrix}, \\ \\ H_{34}(\lambda) = - \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ u & v & w \end{vmatrix}; \end{array} \right.$$

$$(4) \quad H_{44}(\lambda) = \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \quad (\S 88, (17)).$$

**2. Entwicklung der Determinante.** Die Differentialquotienten von  $H(\lambda)$  nach  $\lambda$  sind:

$$(5) \quad H'(\lambda) = -H_{11}(\lambda) - H_{22}(\lambda) - H_{33}(\lambda),$$

$$(6) \quad H''(\lambda) = -2(u^2 + v^2 + w^2) = -2e^2 \quad (\S 108, (4)).$$

Nach der Maclaurinschen Reihe ist dann:

$$(7) \quad H(\lambda) = H(0) + H'(0)\lambda + \frac{1}{2}H''(0)\lambda^2.$$

Nach § 107, (9); (20) ist nun:

$$(8) \quad H(0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = A_{44}^u;$$



$$(9) \quad H_{11}(0) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & v \\ a_{32} & a_{33} & w \\ v & w & 0 \end{vmatrix} = \alpha_{11}^u, \quad H_{22}(0) = \alpha_{22}^u, \quad H_{33}(0) = \alpha_{33}^u.$$

Setzen wir daher zur Abkürzung (§ 89, (5)):

$$(10) \quad A_{44}^u = \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u,$$

so wird die *quadratische Gleichung* § 108, (27) *des Hauptachsenproblems der Schnittkurve*:

$$(11) \quad H(\lambda) = -e^2 \lambda^2 - A_{44}^u \lambda + A_{44}^u = 0.$$

**3. Die Diskriminante der quadratischen Gleichung.** Nach (11) ist der Differentialquotient von  $H(\lambda)$  auch:

$$(12) \quad H'(\lambda) = -2e^2 \lambda - A_{44}^u.$$

Die Wurzel der Gleichung  $H'(\lambda) = 0$  ist daher (Fig. 182):

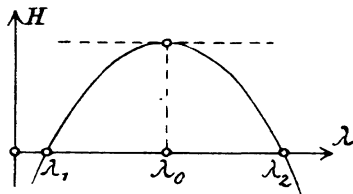


Fig. 182.

$$(13) \quad \lambda = \lambda_0 = -\frac{A_{44}^u}{2e^2}, \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2,$$

worauf identisch:

$$(14) \quad H'(\lambda_0) = 0.$$

Mit (13) wird nun nach (11):

$$(15) \quad 4e^2 H(\lambda_0) = (A_{44}^u)^2 + 4e^2 A_{44}^u.$$

*Die Diskriminante der Gleichung* (11), welche zunächst den Wert:

$$(16) \quad \Theta = (A_{44}^u)^2 + 4e^2 A_{44}^u$$

hat, ist in der Form darstellbar:

$$(17) \quad \Theta = 4e^2 H(\lambda_0).$$

**4. Identische Gleichung zwischen  $H(\lambda)$  und  $H'(\lambda)$ .** Für die Determinante vierten Grades (1) ist (I Anm. 1, III, (9)):

$$\begin{vmatrix} H_{22}(\lambda) & H_{23}(\lambda) \\ H_{32}(\lambda) & H_{33}(\lambda) \end{vmatrix} = H(\lambda) \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & u \\ u & 0 \end{vmatrix}$$

oder entwickelt und die beiden entsprechenden Gleichungen hinzugefügt:

$$(18) \quad \begin{cases} H_{22}(\lambda) H_{33}(\lambda) - H_{23}^2(\lambda) = -u^2 H(\lambda), \\ H_{33}(\lambda) H_{11}(\lambda) - H_{31}^2(\lambda) = -v^2 H(\lambda), \\ H_{11}(\lambda) H_{22}(\lambda) - H_{12}^2(\lambda) = -w^2 H(\lambda). \end{cases}$$

Multipliziert man jetzt die Gleichung (5) mit  $-H_{11}(\lambda)$  und benutzt die beiden letzten Gleichungen (18), so folgt:

$$(19) \quad \begin{cases} -H_{11}(\lambda)H'(\lambda) = H_{11}^2(\lambda) + H_{12}^2(\lambda) + H_{13}^2(\lambda) - (v^2 + w^2)H(\lambda), \\ -H_{22}(\lambda)H'(\lambda) = H_{21}^2(\lambda) + H_{22}^2(\lambda) + H_{23}^2(\lambda) - (w^2 + u^2)H(\lambda), \\ -H_{33}(\lambda)H'(\lambda) = H_{31}^2(\lambda) + H_{32}^2(\lambda) + H_{33}^2(\lambda) - (u^2 + v^2)H(\lambda). \end{cases}$$

Durch Addition dieser drei Formeln folgt nach (5) und (13) (§ 44, (40)):

*Zwischen  $H(\lambda)$ ,  $H'(\lambda)$  und den sechs Unterdeterminanten (2) besteht identisch in  $\lambda$  die Gleichung:*

$$(20) \quad \begin{cases} H'^2(\lambda) = H_{11}^2(\lambda) + H_{22}^2(\lambda) + H_{33}^2(\lambda) + 2H_{23}^2(\lambda) \\ \quad + 2H_{31}^2(\lambda) + 2H_{12}^2(\lambda) - 2e^2H(\lambda). \end{cases}$$

**5. Realität der Wurzeln der quadratischen Gleichung.** Setzt man in (20) insbesondere  $\lambda = \lambda_0$ , so wird nach (14):

$$0 = H_{11}^2(\lambda_0) + H_{22}^2(\lambda_0) + H_{33}^2(\lambda_0) + 2H_{23}^2(\lambda_0) \\ + 2H_{31}^2(\lambda_0) + 2H_{12}^2(\lambda_0) - 2e^2H(\lambda_0),$$

und folgt nach (17):

*Die Diskriminante  $\Theta$  der quadratischen Gleichung (11) ist als Summe von Quadraten in der Form darstellbar:*

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \Theta = H_{11}^2(\lambda_0) + H_{22}^2(\lambda_0) + H_{33}^2(\lambda_0) + 2H_{23}^2(\lambda_0) \\ \quad + 2H_{31}^2(\lambda_0) + 2H_{12}^2(\lambda_0), \end{cases}$$

wo  $\lambda_0$  den Wert (13) hat und in (13)  $A_{44}^u$  aus (10) und (9) zu entnehmen ist.

Da somit die Diskriminante  $\Theta$  nicht negativ sein kann, so folgt:

*Die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Hauptachsenproblems der ebenen Schnitte sind stets reell.<sup>133)</sup>*

**6. Bedingungen einer Doppelwurzel.** Da die Diskriminante  $\Theta$  nur verschwinden kann, wenn die sechs Quadrate in (21) einzeln verschwinden, so folgt:

I. *Die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (11) sind immer dann und nur dann einander gleich, wenn zwischen den Koeffizienten  $a_{ki}$  und  $u, v, w$  die sechs Bedingungen erfüllt sind:*

$$(22) \quad \begin{cases} H_{11}(\lambda_0) = 0, & H_{22}(\lambda_0) = 0, & H_{33}(\lambda_0) = 0, \\ H_{23}(\lambda_0) = 0, & H_{31}(\lambda_0) = 0, & H_{12}(\lambda_0) = 0, \end{cases}$$

in denen  $\lambda_0$  den Wert (13) hat.

Wenn die Gleichung (11) eine Doppelwurzel hat, so muß diese, da sie als solche auch der Gleichung (12) genügt, selbst den Wert (13) haben. Aber schon daraus, daß für eine Doppelwurzel  $\lambda$ :

$$(23) \quad H(\lambda) = 0 \quad \text{und} \quad H'(\lambda) = 0,$$

folgt nach (20), daß für sie auch:

$$(24) \quad \begin{cases} H_{11}(\lambda) = 0, & H_{22}(\lambda) = 0, & H_{33}(\lambda) = 0, \\ H_{23}(\lambda) = 0, & H_{31}(\lambda) = 0, & H_{12}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

II. Für eine Doppelwurzel  $\lambda$  der Gleichung (11) verschwinden daher stets die sechs Unterdeterminanten (2).

Setzt man umgekehrt von einer Größe  $\lambda$  voraus, daß sie den sechs Gleichungen (24) genügt, so folgen für sie nach (18), wo  $u^2$ ,  $v^2$ ,  $w^2$  nicht alle drei verschwinden können, und aus (5) die Gleichungen (23), welche  $\lambda$  als Doppelwurzel kennzeichnen.

III. Wenn für eine Größe  $\lambda$  die sechs Unterdeterminanten (2) verschwinden, so ist sie eine Doppelwurzel der Gleichung (11).

Statt daher die Gleichungen (22) mit dem bestimmten Werte (13) als Bedingungen der Doppelwurzel zu nehmen, kann man auch die Gleichungen (24) mit unbestimmtem Werte von  $\lambda$  benutzen und sagen:

IV. Die Gleichung (11) hat immer dann und nur dann eine Doppelwurzel, wenn die sechs Gleichungen (24) durch ein und denselben Wert  $\lambda$  befriedigt werden können, der dann zugleich die Doppelwurzel ist.

Kommt es auf dessen Kenntnis nicht an, so geben die Gleichungen (24) unter Elimination von  $\lambda$  die Bedingungen einer Doppelwurzel. Sie sind zwar nicht unabhängig voneinander, sollen aber der Symmetrie wegen als „überzählige Bedingungen“ alle beibehalten werden.

7. Verschwindende Wurzeln. Für die beiden Wurzeln  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  der Gleichung (11) ist:

$$(25) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{A_{44}^u}{e^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A_{44}^u}{e^2}; \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Daher sind für:

$$(26) \quad \begin{cases} A_{44}^u \neq 0 : \text{beide Wurzeln von Null verschieden;} \\ A_{44}^u = 0, A_{44}'^u \neq 0 : \text{eine Wurzel } \lambda_1 = 0, \text{ die andere } \lambda_2 = -\frac{A_{44}^u}{e^2}; \\ A_{44}^u = 0, A_{44}'^u = 0 : \text{beide Wurzeln } \lambda_1 = \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

8. Positive und negative Wurzeln. Aus (25) folgt für die Vorzeichen der Wurzeln (§ 21, (25)):

$$(27) \quad \begin{cases} A_{44}^u < 0, & A_{44}'^u < 0 : ++ \\ A_{44}^u < 0, & A_{44}'^u > 0 : -- \\ A_{44}^u > 0 & : \pm \mp. \end{cases}$$

### § 110. Bestimmung der Hauptachsenkoeffizienten und Hauptachsenrichtungen.

**1. Die zu einer Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung.** Jeder Hauptachsenkoeffizient  $a'_{kk}$  ( $k = 1, 2$ ) ist nach § 108, (27) eine Wurzel  $\lambda_k$  der Gleichung  $H(\lambda) = 0$ . Die zu ihm und damit *zu der Wurzel  $\lambda_k$  gehörige Hauptachsenrichtung* muß nach § 108, (26) den Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\alpha_k + a_{12}\beta_k + a_{13}\gamma_k - \frac{u}{e} a'_{k3} = 0, \\ a_{21}\alpha_k + (a_{22} - \lambda_k)\beta_k + a_{23}\gamma_k - \frac{v}{e} a'_{k3} = 0, \\ a_{31}\alpha_k + a_{32}\beta_k + (a_{33} - \lambda_k)\gamma_k - \frac{w}{e} a'_{k3} = 0, \\ u\alpha_k + v\beta_k + w\gamma_k = 0, \end{cases}$$

die eben wegen  $H(\lambda_k) = 0$  miteinander verträglich sind, genügen.

**2. Die zu einer einfachen Wurzel gehörige Hauptachsenrichtung.** Ist nun  $\lambda_k$  eine einfache Wurzel, für die nach § 109, 6, III niemals alle Unterdeterminanten § 109, (2) verschwinden, so geben die Gleichungen (1) für die Verhältnisse der Unbekannten ein einziges bestimmtes Wertsystem:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_k : \beta_k : \gamma_k : -\frac{a'_{k3}}{e} = H_{11}(\lambda_k) : H_{12}(\lambda_k) : H_{13}(\lambda_k) : H_{14}(\lambda_k), \\ = H_{21}(\lambda_k) : H_{22}(\lambda_k) : H_{23}(\lambda_k) : H_{24}(\lambda_k), \\ = H_{31}(\lambda_k) : H_{32}(\lambda_k) : H_{33}(\lambda_k) : H_{34}(\lambda_k), \\ = H_{41}(\lambda_k) : H_{42}(\lambda_k) : H_{43}(\lambda_k) : H_{44}(\lambda_k). \end{cases}$$

Damit ist aber die Richtung  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  bis auf die Pfeilspitze bestimmt.

*Zu einer einfachen Wurzel  $\lambda_k$  gehört stets eine und nur eine den Gleichungen (1) entsprechende Hauptachsenrichtung.*

Wie in § 90, (4), (5) folgt aus (2) auch<sup>121)</sup>:

$$(3) \quad \begin{cases} \varrho \alpha_k^2 = H_{11}(\lambda_k), & \varrho \beta_k^2 = H_{22}(\lambda_k), & \varrho \gamma_k^2 = H_{33}(\lambda_k), \\ \varrho \beta_k \gamma_k = H_{23}(\lambda_k), & \varrho \gamma_k \alpha_k = H_{31}(\lambda_k), & \varrho \alpha_k \beta_k = H_{12}(\lambda_k), \end{cases}$$

$$(4) \quad \varrho = -H'(\lambda_k),$$

$$(5) \quad -\varrho \frac{\alpha_k a'_{k3}}{e} = H_{14}(\lambda_k), \quad -\varrho \frac{\beta_k a'_{k3}}{e} = H_{24}(\lambda_k), \quad -\varrho \frac{\gamma_k a'_{k3}}{e} = H_{34}(\lambda_k),$$

$$(6) \quad \varrho \frac{a'^2_{k3}}{e^2} = H_{44}(\lambda_k).$$

**3. Fall von zwei einfachen Wurzeln.** Sind nun die beiden Wurzeln  $\lambda_k$  verschieden, so gehört zu jeder von ihnen eine bestimmte

Hauptachsenrichtung  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ , die in Verbindung mit dem Koeffizienten  $a'_{k3}$  den Gleichungen (1) genügt. Die beiden Gruppen  $a'_{kk} = \lambda_k, \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, a'_{k3}$  ( $k = 1, 2$ ) von fünf Größen genügen also den Gleichungen § 108, (23) und (23'), die für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  nach § 108, 5 für ein System von Hauptachsenrichtungen hinreichend sind.

*Hat die Gleichung  $H(\lambda) = 0$  zwei verschiedene Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , so gibt es stets ein und nur ein System von zwei zueinander senkrechten Hauptachsenrichtungen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  mit zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten  $a'_{11} = \lambda_1, a'_{22} = \lambda_2$ .*

Wie die beiden Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$ , so sind auch die beiden Gruppen  $a'_{11}, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, a'_{13}$  und  $a'_{22}, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, a'_{23}$  vertauschbar und können etwa nach der algebraischen Größenfolge von  $\lambda_1 < \lambda_2$  auf die Achsen  $\xi$  und  $\eta$  verteilt werden.

**4. Fall einer Doppelwurzel.** Durch Elimination von  $a'_{k3}$  folgt aus der zweiten und dritten Gleichung (1):

$$(7) \quad \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} \alpha_k + \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda_k & v \\ a_{32} & w \end{vmatrix} \beta_k + \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} \gamma_k = 0.$$

Ist nun  $\lambda_k$  Doppelwurzel, so ist nach § 109, 6, II auch:

$$H_{11}(\lambda_k) = 0, \quad H_{12}(\lambda_k) = 0,$$

oder mit Rücksicht auf § 109, (2) nach der letzten Zeile entwickelt

$$\begin{vmatrix} v & a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v & -w \\ a_{22} - \lambda_k & v \end{vmatrix} = 0, \quad w \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v & -u \\ a_{23} & v \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} a_{21} & v \\ a_{31} & w \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda_k & v \\ a_{32} & w \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{23} & v \\ a_{33} - \lambda_k & w \end{vmatrix} = u : v : w.$$

Danach kommt die Gleichung (7) mit der vierten Gleichung (1) überein.

Im Falle einer Doppelwurzel  $\lambda_k$  gehen je zwei der drei ersten Gleichungen (1) bei Elimination von  $a'_{k3}$  die vierte. Die Gleichungen (1) legen also den Richtungen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  keine andere Bedingung auf, als daß sie auf der Normale der Ebene  $u, v, w$ ,  $s$  senkrecht stehen. Jede beliebige in der Ebene liegende Achse erfüllt diese Bedingung, so daß  $\xi$  und  $\eta$  (§ 108, (7)) irgend zwei solche Achsen sein können, die zueinander senkrecht sind (§ 108, (25)).

*Hat die Gleichung  $H(\lambda) = 0$  zwei gleiche Wurzeln  $\lambda_1 = \lambda_2$ , so bestimmt jedes in der schneidenden Ebene liegende rechtwinklige Achsen-system  $\Omega\xi\eta$  zwei Hauptachsenrichtungen, und die zugehörigen Hauptachsenkoeffizienten sind immer  $\lambda_1 = \lambda_2$ .*

**5. Gesamtergebnis der Hauptachsentransformation.** Aus den Entwicklungen von § 108—110 geht nun hervor:

*Sind in einem rechtwinkligen System  $Oxyz$  im Raume eine Fläche zweiter Ordnung:*

$$(9) \quad \begin{cases} g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ \quad + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{cases}$$

*und eine Ebene:*

$$(10) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

*gegeben, so nimmt die Schnittkurve beider in einem rechtwinkligen System  $\Omega\xi\eta$  in der Ebene (10), dessen Achsen bei beliebigem Anfangspunkt  $\Omega$  die stets vorhandenen Hauptachsenrichtungen der Kurve haben, die folgenden Formen an:*

1. für  $A_{44}'' \neq 0$ :

$$(11) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0,$$

wo  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die nicht verschwindenden Wurzeln der Gleichung  $H(\lambda) = 0$  sind ( $\lambda_1 \lambda_2 = -A_{44}'' : e^2$ );

a) Die Hauptachsenrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  sind für  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  eindeutig bestimmt und zwar ist:

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = H_{k1}(\lambda_1) : H_{k2}(\lambda_1) : H_{k3}(\lambda_1), \\ \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = H_{k1}(\lambda_2) : H_{k2}(\lambda_2) : H_{k3}(\lambda_2). \end{cases}$$

b) Sie sind für  $\lambda_1 = \lambda_2$  zwei beliebige rechtwinklige Richtungen in der Ebene (10).

2. für  $A_{44}'' = 0$ ,  $A_{44}''' \neq 0$ :

$$(13) \quad \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0,$$

wo  $\lambda_2 = -A_{44}''' : e^2$ .

Die Hauptachsenrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  sind eindeutig bestimmt und zwar ist:

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_{k1}'' : \alpha_{k2}'' : \alpha_{k3}'' \quad (\S 109, (9)), \\ \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = H_{k1}(\lambda_2) : H_{k2}(\lambda_2) : H_{k3}(\lambda_2). \end{cases}$$

3. für  $A_{44}'' = 0$ ,  $A_{44}''' = 0$ :

$$(15) \quad 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0.$$

Die Hauptachsenrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  sind zwei beliebige rechtwinklige Richtungen in (10).

**6. Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten paralleler Schnitte.** Da zur Bestimmung der Koeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und der Richtungen  $\xi$  und  $\eta$  nur die Determinante  $H(\lambda)$  in § 109, (1) und ihre Unterdeterminanten gebraucht werden und diese von  $s$  in § 108, (2) unabhängig sind, so folgt:

*Parallele Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung haben dieselben Hauptachsenrichtungen und Hauptachsenkoeffizienten.*<sup>180)</sup>

**7. Schnitte parallel einer Tangentialebene.** Für die *Tangentialebene* der Fläche  $g(x, y, z) = 0$  im Punkte  $x, y, z$  sind die Stelungskoeffizienten  $u, v, w$  nach § 67, (18):

$$(16) \quad u = g_1, \quad v = g_2, \quad w = g_3,$$

während zugleich (§ 67, (12)):

$$(17) \quad g_1 x + g_2 y + g_3 z + g_4 = g = 0.$$

Dabei sollen  $g_1, g_2, g_3$  nicht alle verschwinden.

Indem man nun in der Unterdeterminante:

$$(18) \quad A_{44}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix}$$

die bezüglich mit  $x, y, z$  multiplizierten Elemente der drei ersten Kolonnen von denen der vierten abzieht und hernach ebenso mit den Zeilen verfährt (I Anm. 1, IV, 4), ergibt sich (§ 66, (8)):

$$A_{44}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$(19) \quad A_{44}^u = A.$$

*Ist die schneidende Ebene  $u, v, w, s$  einer Tangentialebene der Fläche parallel, so ist das Produkt der Hauptachsenkoeffizienten des ebenen Schnittes (§ 109, (25)):*

$$(20) \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A}{G^2}, \quad G^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2.$$

Die Hauptachsenkoeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2$  selbst sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(21) \quad H(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**8. Die Hauptkrümmungsradien in einem Punkte der Fläche.** Die *Hauptkrümmungsradien*  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der Fläche zweiter Ordnung  $g = 0$  im Punkte  $x, y, z$  sind durch die Gleichung bestimmt:<sup>181)</sup>

$$(22) \quad H\left(-\frac{G}{\varrho}\right) = \begin{vmatrix} a_{11} + \frac{G}{\varrho} & a_{12} & a_{13} & g_1 \\ a_{21} & a_{22} + \frac{G}{\varrho} & a_{23} & g_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + \frac{G}{\varrho} & g_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die beiden Hauptkrümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  der Fläche  $g(x, y, z) = 0$  im Punkte  $x, y, z$  stehen mit den Hauptachsenkoeffizienten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der der Tangentialebene dieses Punktes parallelen Schnitte in der Beziehung:

$$(23) \quad \varrho_1 = -\frac{G}{\lambda_1}, \quad \varrho_2 = -\frac{G}{\lambda_2}; \quad G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}.$$

Das Produkt der reziproken Hauptkrümmungsradien (Gauß'sches Krümmungsmaß) ist daher:

$$(24) \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{A}{G^4}.$$

Die Krümmungsmittelpunkte der Fläche werden erhalten, indem die relativen Längen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  in (23) auf der Normale mit den Richtungskosinus (§ 67, (19)):

$$(25) \quad \frac{g_1}{G}, \quad \frac{g_2}{G}, \quad \frac{g_3}{G}; \quad G = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2}$$

abgetragen werden, und zwar je nach ihrem Vorzeichen nach der positiven oder negativen Seite.

### III. Kapitel.

#### Zurückführung auf kanonische Gleichungsformen.

##### § 111. Einteilung der Schnittkurven nach dem Mittelpunkt.

1. Bestimmungsgleichungen des Mittelpunktes. Die Gleichungen § 106, (26) für den Mittelpunkt der Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene lauten in homogener Schreibweise (mit  $x:t, y:t, z:t, \varrho:t$  für  $x, y, z, \varrho$ ):

$$(1) \quad \begin{cases} f_1 + \varrho u = 0, & f_2 + \varrho v = 0, & f_3 + \varrho w = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0 \end{cases}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + \varrho u = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + \varrho v = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + \varrho w = 0, \\ ux + vy + wz + st = 0. \end{cases}$$



Jeder Punkt, der diesen Gleichungen unter Elimination von  $\varrho$  genügt, soll Mittelpunkt der Schnittkurve heißen (§ 23, (2); § 94, (2)).

Aus den vier Gleichungen (1) gehen durch Elimination von  $\varrho$  die drei Gleichungen hervor:

$$(3) \quad \begin{cases} f_1 : f_2 : f_3 = u : v : w, \\ ux + vy + wz + st = 0. \end{cases}$$

Diese aber können als Gleichungen von drei Ebenen betrachtet werden, denen ein Mittelpunkt angehören muß. Je nachdem diese drei Ebenen einen Punkt oder eine Achse gemein haben oder alle zusammenfallen, wird es einen Mittelpunkt oder eine Mittelpunktsachse oder keine bestimmten Mittelpunkte geben.<sup>92)</sup>

**2. Ein bestimmter Mittelpunkt.** Durch Auflösung der Gleichungen (2) folgt zunächst:

$$(4) \quad x : y : z : t : \varrho = A_{14}^u : A_{24}^u : A_{34}^u : A_{44}^u : A_{54}^u,$$

wo  $A_{k4}^u$  wie in § 107, (9); (10) die Unterdeterminanten der Elemente vierter Zeile oder Kolonne in der Determinante  $A^u$  in § 107, (5) bedeuten:

$$(5) \quad A_{14}^u = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & s \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}, \dots, \dots A_{44}^u = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix},$$

$$(6) \quad A_{54}^u = - (A_{14}^u u + A_{24}^u v + A_{34}^u w + A_{44}^u s).$$

Sind daher:

$$(7) \quad A_{14}^u, A_{24}^u, A_{34}^u, A_{44}^u \text{ nicht alle } 0,$$

so hat die Schnittkurve einen einzigen bestimmten Mittelpunkt mit den Koordinaten:

$$(8) \quad x_0 : y_0 : z_0 : t_0 = A_{14}^u : A_{24}^u : A_{34}^u : A_{44}^u.$$

Die Bedingung:

$$(9) \quad A_{54}^u = 0$$

bedeutet nach (6), falls die Fläche  $f = 0$  einen bestimmten Mittelpunkt § 94, (4) hat, daß die Ebene  $u, v, w, s$  durch ihn hindurchgeht; dagegen ist sie andernfalls nach § 94, (5) identisch in  $u, v, w, s$  erfüllt. Aus (9) folgt aber nach (4)  $\varrho = 0$ . Der Mittelpunkt (2) der Schnittkurve ist dann nach § 94, (2) zugleich auch der Mittelpunkt der Fläche.

Wenn die Fläche zweiter Ordnung mehr als einen Mittelpunkt hat, ist ein bestimmter Mittelpunkt der Schnittkurve unbedingt auch Mittelpunkt der Fläche; wenn aber die Fläche nur einen Mittelpunkt

hat, gilt dies nur unter der Bedingung, daß die schneidende Ebene durch ihn geht.

**3. Ein bestimmter endlicher Mittelpunkt.** Ist nun:

$$(10) \quad A_{44}^u \neq 0,$$

so hat die Schnittkurve nach (8) einen bestimmten *endlichen* Mittelpunkt mit den gemeinen Koordinaten (§ 23, (12); § 94, (16)):

$$(11) \quad x_0 = \frac{A_{14}^u}{A_{44}^u}, \quad y_0 = \frac{A_{24}^u}{A_{44}^u}, \quad z_0 = \frac{A_{34}^u}{A_{44}^u}.$$

**4. Ort der Mittelpunkte paralleler Schnitte.** Nach (5) ist die Bedingung (10) von  $s$  unabhängig, während die Koordinaten (11) lineare Funktionen von  $s$  sind. Daher folgt (I § 43, (2)):

*Hat die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene  $u, v, w, s$  einen bestimmten endlichen Mittelpunkt, so gilt dasselbe von der Schnittkurve mit jeder parallelen Ebene, und der Ort der Mittelpunkte der parallelen Schnitte ist eine gerade Linie.*

Man kann sie die der Stellung  $u, v, w$  konjugierte Gerade nennen (vgl. 68, 2).<sup>50)</sup> Ihre Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  verhalten sich wie die Koeffizienten von  $s$  in (11), also nach (5):

$$(12) \quad \alpha : \beta : \gamma = \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w : \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w : \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w,$$

so daß umgekehrt (§ 66, (11)):

$$(13) \quad u : v : w = h_1(\alpha, \beta, \gamma) : h_2(\alpha, \beta, \gamma) : h_3(\alpha, \beta, \gamma).$$

Nach § 68, (3) hat daher die der Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  konjugierte Ebene wieder die Stellung  $u, v, w$  (vgl. die Spezialfälle § 55, 8; § 58, 4; § 72, 9).

**5. Ein bestimmter unendlich ferner Mittelpunkt.** Wenn im Gegensatz zu (10) jetzt:

$$(14) \quad A_{44}^u = 0, \quad A_{14}^u, \quad A_{24}^u, \quad A_{34}^u \text{ nicht alle } 0,$$

so ist der Mittelpunkt (8) unendlich fern in der Richtung:

$$(15) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A_{14}^u : A_{24}^u : A_{34}^u.$$

Die direkte Auflösung der mit  $t = 0$  reduzierten Gleichungen (2) gibt aber für  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  auch (§ 94, (19)):

$$(16) \quad x_0 : y_0 : z_0 = \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_{k1}^u : \alpha_{k2}^u : \alpha_{k3}^u \quad (k = 1, 2 \text{ oder } 3).$$

Mit  $A_{44}^u = 0$  folgt nun aus den drei letzten Gleichungen § 107, (21):

$$-(A_{14}^u)^2 = A^u \alpha_{11}^u, \quad -(A_{24}^u)^2 = A^u \alpha_{22}^u, \quad -(A_{34}^u)^2 = A^u \alpha_{33}^u$$

und daher mit der Bezeichnung § 109, (10) (§ 94, (29))<sup>80)</sup>:

$$(17) \quad A^u A_{44}^u = -(A_{14}^u)^2 - (A_{24}^u)^2 - (A_{34}^u)^2.$$

Die Bedingungen eines unendlich fernen Mittelpunktes sind somit statt (14) auch:

$$(18) \quad A_{44}^u = 0, \quad A^u A_{44}'^u \neq 0.$$

6. Bedeutung der Bedingung  $A_{44}^u = 0$ . Nach § 80, (19'); (20) ist:

$$(19) \quad -A_{44}^u = \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 + 2\alpha_{23}vw + 2\alpha_{31}wu + 2\alpha_{12}uv = 0$$

die Gleichung der Schnittkurve § 66, (23) der Fläche mit der unendlich fernen Ebene in laufenden Ebenenkoordinaten  $u, v, w, s$ .

Die Bedingung (19) bedeutet daher, daß die Ebene  $u, v, w, s$  durch eine Tangente der unendlich fernen Kurve der Fläche zweiter Ordnung geht.

7. Bedingungen einer Mittelpunktsachse. Die drei Verhältnisse (8) werden unbestimmt, wenn:

$$(20) \quad A_{14}^u = 0, \quad A_{24}^u = 0, \quad A_{34}^u = 0, \quad A_{44}^u = 0.$$

Nun ist für die Determinante  $A^u$  in § 107, (5) unbedingt:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{14}^u + a_{21}A_{24}^u + a_{31}A_{34}^u + a_{41}A_{44}^u + uA_{54}^u &= 0, \\ a_{12}A_{14}^u + a_{22}A_{24}^u + a_{32}A_{34}^u + a_{42}A_{44}^u + vA_{54}^u &= 0, \\ a_{13}A_{14}^u + a_{23}A_{24}^u + a_{33}A_{34}^u + a_{43}A_{44}^u + wA_{54}^u &= 0, \\ a_{14}A_{14}^u + a_{24}A_{24}^u + a_{34}A_{34}^u + a_{44}A_{44}^u + sA_{54}^u &= A^u, \end{aligned}$$

und daher im Falle (20):

$$uA_{54}^u = 0, \quad vA_{54}^u = 0, \quad wA_{54}^u = 0, \quad sA_{54}^u = A^u.$$

Da aber  $u, v, w$  nicht alle verschwinden, so folgt zunächst  $A_{54}^u = 0$  und danach  $A^u = 0$ .

Die Bedingungen (20) haben daher stets zur Folge, daß auch:

$$(21) \quad A_{45}^u = 0, \quad A^u = 0.$$

Andererseits gilt unter der Voraussetzung  $A_{44}^u = 0$  die Gleichung (17), aus der dann mit  $A^u = 0$  die drei ersten Gleichungen (20) folgen.

Die Bedingungen (20) sind daher ersetzbar durch:

$$(22) \quad A_{44}^u = 0, \quad A^u = 0.$$

Mit (20) werden ferner nicht nur die drei Verhältnisse (8), sondern nach (21) auch die vier Verhältnisse (4) unbestimmt. Die Gleichungen (2) zählen daher nur mehr für drei, die Gleichungen (3) nur mehr für zwei unabhängige.

Unter den Bedingungen (20) oder (22) bilden die den Gleichungen (2) unter Elimination von  $q$  genügenden Punkte  $x, y, z, t$  im allgemeinen (vgl. (25)) eine gerade Linie, die Mittelpunktsachse der Schnittkurve.

Infolge der ersten Gleichung (21) muß die schneidende Ebene im

vorliegenden Falle mit Rücksicht auf (6) durch den Mittelpunkt der Fläche gehen, falls diese einen bestimmten Mittelpunkt hat.

**8. Eine bestimmte Mittelpunktsachse.** Die Mittelpunktsachse wird schon durch drei von den Gleichungen (2) bestimmt, etwa die drei letzten. Eliminiert man aus diesen  $x$  und  $q$  oder  $y$  und  $q$  oder  $z$  und  $q$ , so erhält man wie in § 107, (30):

$$(23) \quad \alpha_{13}^u y - \alpha_{12}^u z + \alpha_{14}^u t = 0, \quad \alpha_{11}^u z - \alpha_{13}^u x + \alpha_{15}^u t = 0, \quad \alpha_{12}^u x - \alpha_{11}^u y + \alpha_{16}^u t = 0.$$

Wie die erste, könnte man auch die zweite oder dritte Gleichung (2) ausschalten. Damit aber folgt (I § 48, (11)):

*Die Achsenkoordinaten der Mittelpunktsachse der Schnittkurve sind ( $k = 1, 2$  oder  $3$ ):*

$$(24) \quad q_{23}^0 : q_{31}^0 : q_{12}^0 : q_{14}^0 : q_{24}^0 : q_{34}^0 = \alpha_{k1}^u : \alpha_{k2}^u : \alpha_{k3}^u : \alpha_{k4}^u : \alpha_{k5}^u : \alpha_{k6}^u.$$

*Die Mittelpunktsachse ist bestimmt, wenn:*

$$(25) \quad \alpha_{k1}^u, \alpha_{k2}^u, \alpha_{k3}^u, \alpha_{k4}^u, \alpha_{k5}^u, \alpha_{k6}^u \quad (k = 1, 2, 3) \text{ nicht alle } 0.$$

Die Bedingungen (20) und (25) oder (22) und (25) sind also für eine bestimmte Mittelpunktsachse der Schnittkurve notwendig und hinreichend.

**9. Eine bestimmte endliche Mittelpunktsachse.** Die Mittelpunktsachse (24) ist endlich (I § 48, (19)), wenn:

$$(26) \quad \alpha_{k1}^u, \alpha_{k2}^u, \alpha_{k3}^u \quad (k = 1, 2, 3) \text{ nicht alle } 0,$$

und hat dann die *Richtungskosinus*:

$$(27) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = \alpha_{k1}^u : \alpha_{k2}^u : \alpha_{k3}^u.$$

Die Identität § 109, (20) gibt nach § 109, (8); (9) mit  $\lambda = 0$  und der bereits § 109, (10) eingeführten Abkürzung:

$$(28) \quad A_{44}'^u = \alpha_{11}^u + \alpha_{22}^u + \alpha_{33}^u,$$

wie schon § 44, (40) die Identität:<sup>80)</sup>

$$(29) \quad (A_{44}'^u)^2 = (\alpha_{11}^u)^2 + (\alpha_{22}^u)^2 + (\alpha_{33}^u)^2 + 2(\alpha_{23}^u)^2 + 2(\alpha_{31}^u)^2 + 2(\alpha_{12}^u)^2 - 2e^2 A_{44}^u, \\ e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Ist jetzt:

$$(30) \quad \alpha_{11}^u = 0, \quad \alpha_{22}^u = 0, \quad \alpha_{33}^u = 0, \quad \alpha_{23}^u = 0, \quad \alpha_{31}^u = 0, \quad \alpha_{12}^u = 0,$$

so folgt aus (28):  $A_{44}'^u = 0$  und dann aus (29):  $A_{44}^u = 0$ . Ist umgekehrt:

$$(31) \quad A_{44}'^u = 0, \quad A_{44}^u = 0,$$

so gehen aus (29) die Gleichungen (30) hervor.

*Die Gleichungen (30) und (31) bedingen sich also gegenseitig.*

Innerhalb der Voraussetzungen (20); (25) oder (22); (25) der

Mittelpunktsachse überhaupt sind daher die Bedingungen (26), die auch (25) einschließen, ersetzbar durch  $A''_{44} \neq 0$ , also:

*Die Bedingungen einer endlichen Mittelpunktsachse sind:*

$$(32) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0.$$

**10. Eine bestimmte unendlich ferne Mittelpunktsachse.** Die Mittelpunktsachse (24) ist *unendlich fern*, wenn die Bedingungen (30) oder (31), also mit Hinzunahme von (22) die Bedingungen:

$$(33) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0$$

erfüllt sind, dagegen mit Rücksicht auf (25) für  $k = 1, 2, 3$ :

$$(34) \quad \alpha''_{k4}, \alpha''_{k5}, \alpha''_{k6} \text{ nicht alle } 0.$$

Infolge von (30) geben nun die Formeln § 107, (40):

$$v^2 A''_{11} = (\alpha''_{15})^2, \quad w^2 A''_{22} = (\alpha''_{26})^2, \quad u^2 A''_{33} = (\alpha''_{34})^2,$$

$$w^2 A''_{11} = (\alpha''_{16})^2, \quad u^2 A''_{22} = (\alpha''_{24})^2, \quad v^2 A''_{33} = (\alpha''_{35})^2,$$

und die Formel § 107, (38) mit gleichzeitiger Rücksicht auf (33):

$$u^2 A''_{11} + v^2 A''_{22} + w^2 A''_{33} = (\alpha''_{14})^2 + (\alpha''_{25})^2 + (\alpha''_{36})^2.$$

Durch Addition (§ 107, (22)) folgt, daß innerhalb der Voraussetzungen (33):

$$(35) \quad e^2 A'' = (\alpha''_{14})^2 + (\alpha''_{15})^2 + (\alpha''_{16})^2 + (\alpha''_{24})^2 + (\alpha''_{25})^2 + (\alpha''_{26})^2 \\ + (\alpha''_{34})^2 + (\alpha''_{35})^2 + (\alpha''_{36})^2,$$

also  $\alpha''_{k4}, \alpha''_{k5}, \alpha''_{k6}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) nicht alle oder alle 0 sind, je nachdem  $A'' \neq 0$  oder  $= 0$  ist.

*Die Bedingungen einer bestimmten unendlich fernen Mittelpunktsachse der Schnittkurve sind daher an Stelle von (33), (34) auch:*

$$(36) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A'' \neq 0.$$

**11. Keine bestimmten Mittelpunkte der Schnittkurve.** Sind nunmehr neben (33) im Gegensatz zu (34), bezüglich (25):

$$(37) \quad \alpha''_{k1}, \alpha''_{k2}, \alpha''_{k3}, \alpha''_{k4}, \alpha''_{k5}, \alpha''_{k6} \quad (k = 1, 2, 3) \text{ alle } 0,$$

so wird die Mittelpunktsachse (24) unbestimmt. Die sechs Unterdeterminanten  $k = 1$  in (37) sind zugleich die Unterdeterminanten zweiten Grades der Matrix:

$$\begin{vmatrix} wa_{21} - va_{31} & wa_{22} - va_{32} & wa_{23} - va_{33} & wa_{24} - va_{34} \\ u & v & w & s \end{vmatrix};$$

ihr Verschwinden bedeutet den Zusammenfall der Ebenen:

$$wf_2 - vf_3 = 0, \quad ux + vy + wz + st = 0.$$

So fallen infolge von (37) die drei Ebenen (3) alle zusammen, so daß jeder Punkt der schneidenden Ebene  $u, v, w, s$  als Mittelpunkt zu gelten hat.

Die Bedingungen dieses Falles sind nach (35) statt (33) und (37) auch:

$$(38) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A'' = 0.$$

**12. Gesamtübersicht.** Die Schnittkurve § 110, (9); (10) hat unter der Bedingung (§ 23, 8; § 94, 10):

$$(39) \quad \begin{cases} A''_{44} \neq 0: \text{einen endlichen Mittelpunkt;} \\ A''_{44} = 0, A'' A''_{44} \neq 0: \text{einen unendl. f. Mittelpunkt;} \\ A''_{44} = 0, A'' = 0, A''_{44} \neq 0: \text{eine endl. Mittelpunktsachse;} \\ A''_{44} = 0, A'' = 0, A''_{44} = 0, A'' \neq 0: \text{eine u. f. Mittelpunktsachse;} \\ A''_{44} = 0, A'' = 0, A''_{44} = 0, A'' = 0: \text{keine best. Mittelpunkte.} \end{cases}$$

## § 112. Mittelpunktsgleichung der Schnittkurven mit endlichen Mittelpunkten.

**1. Allgemeine Form der Mittelpunktsgleichung.** In der Gleichung § 108, (12) der Schnittkurve der Fläche  $g(x, y, z) = 0$  mit der Ebene  $u, v, w, s$  fehlen die linearen Glieder, wenn:

$$(1) \quad \begin{cases} a'_{14} = g_1^0 \alpha_1 + g_2^0 \beta_1 + g_3^0 \gamma_1 = 0, \\ a'_{24} = g_1^0 \alpha_2 + g_2^0 \beta_2 + g_3^0 \gamma_2 = 0, \end{cases}$$

oder auch:

$$g_1^0 : g_2^0 : g_3^0 = \beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1 : \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1 : \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1,$$

oder (I § 37, (12)) nach § 108, (5):

$$g_1^0 : g_2^0 : g_3^0 = u : v : w,$$

oder mit einem Proportionalitätsfaktor  $\varrho$ :

$$(2) \quad g_1^0 + \varrho u = 0, \quad g_2^0 + \varrho v = 0, \quad g_3^0 + \varrho w = 0.$$

Dies sind aber, da  $\Omega = x_0, y_0, z_0$  auch der Gleichung § 108, (6) genügt, die Bedingungen § 106, (26) des Mittelpunktes. Auch umgekehrt folgt mit Rücksicht auf § 108, (7) das Verschwinden der Koeffizienten (1), wenn man für  $g_1^0, g_2^0, g_3^0$  die Werte (2) einsetzt.

Die Gleichung der Schnittkurve erhält daher in einem Koordinatensystem  $\Omega \xi \eta$  ihrer Ebene immer dann und nur dann die Form:

$$(3) \quad a'_{11} \xi^2 + 2a'_{12} \xi \eta + a'_{22} \eta^2 + a'_{44} = 0,$$

wenn der Anfangspunkt  $\Omega$  ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen  $\xi, \eta$  ein (endlicher) Mittelpunkt der Kurve ist.<sup>93)</sup>

Sie heißt dann die *Mittelpunktsgleichung* der Kurve und ist dadurch gekennzeichnet, daß die linearen Glieder  $2a'_{14} \xi + 2a'_{24} \eta$  fehlen.

**2. Das konstante Glied der Mittelpunktsleichung.** Das konstante Glied der Gleichung (3) wird nach § 66, (21) und nach (2):

$$a'_{44} = g^0 = g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = g_4^0 - \varrho(u x_0 + v y_0 + w z_0)$$

und nach § 108, (6):

$$(4) \quad a'_{44} = g_4^0 + \varrho s,$$

wo für  $x_0, y_0, z_0$  die Koordinaten des Mittelpunktes  $\Omega$  zu setzen sind. Man kann daher  $a'_{44}$  bestimmen, indem man  $x_0, y_0, z_0$  und  $\varrho$  aus den folgenden Gleichungen eliminiert (§ 111, (2)):

$$(5) \quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} & + \varrho u = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} & + \varrho v = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} & + \varrho w = 0, \\ a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + (a_{44} - a'_{44}) + \varrho s & = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s & = 0. \end{cases}$$

**3. Das konstante Glied bei bestimmtem Mittelpunkt.** Durch Elimination von  $x_0, y_0, z_0, 1$  und  $\varrho$  aus (5) folgt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - a'_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt:

$$(6) \quad A^u - A_{44}^u a'_{44} = 0.$$

*Im Falle eines bestimmten endlichen Mittelpunktes (§ 111, (10)) ist daher (§ 95, (7)):*

$$(7) \quad a'_{44} = \frac{A^u}{A_{44}^u} \quad (A_{44}^u \neq 0).$$

**4. Das konstante Glied bei bestimmter Mittelpunktsachse.** Im Falle einer Mittelpunktsachse ist nach § 111, (20) und (21):

$$(8) \quad A_{14}^u = 0, \quad A_{24}^u = 0, \quad A_{34}^u = 0, \quad A_{44}^u = 0, \quad A^u = 0,$$

so daß die Gleichung (6) unbrauchbar wird. Jedoch gibt dann die Elimination von  $y_0, z_0, 1, \varrho$  aus den vier letzten Gleichungen (5):

$$\begin{vmatrix} a_{21}x_0 + a_{24} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31}x_0 + a_{34} & a_{32} & a_{33} & w \\ a_{41}x_0 + (a_{44} - a'_{44}) & a_{42} & a_{43} & s \\ ux_0 + s & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder da der Koeffizient  $-A_{14}^u$  von  $x_0$  nach (8) verschwindet:

$$(9) \quad A_{11}^u - a_{11}^u a'_{44} = 0.$$

Auf gleiche Weise folgt bei Unterdrückung der zweiten oder dritten Gleichung (5):

$$(9) \quad A_{22}^u - \alpha_{22}^u a_{44}' = 0, \quad A_{33}^u - \alpha_{33}^u a_{44}' = 0.$$

Durch Addition der Gleichungen (9) erhält man sodann mit Rücksicht auf § 107, (22) und § 109, (10):

$$(10) \quad A''^u - A_{44}'^u a_{44}' = 0.$$

*Im Falle einer bestimmten endlichen Mittelpunktsachse (§ 111, (32)) ist daher:*

$$(11) \quad a_{44}' = \frac{A''^u}{A_{44}'^u} \quad (A_{44}'^u \neq 0).$$

**5. Das konstante Glied bei unbestimmtem Mittelpunkt.** Ist der Mittelpunkt ganz unbestimmt, so ist nach § 111, (37):

$$(12) \quad \alpha_{k1}^u = 0, \quad \alpha_{k2}^u = 0, \quad \alpha_{k3}^u = 0, \quad \alpha_{k4}^u = 0, \quad \alpha_{k5}^u = 0, \quad \alpha_{k6}^u = 0, \\ k = 1, 2, 3,$$

so daß die Gleichungen (9) unbrauchbar werden. Jedoch gibt dann die Elimination  $x_0, 1, \varrho$  aus der ersten, vierten und fünften Gleichung (5):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} & u \\ a_{41} & a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} - a_{44}' & s \\ u & vy_0 + wz_0 + s & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder da die Koeffizienten  $\alpha_{34}^u$  und  $-\alpha_{24}^u$  von  $y_0$  und  $z_0$  nach (12) verschwinden:

$$(13) \quad \alpha_{44}^u + u^2 a_{44}' = 0,$$

und entsprechend:

$$(13) \quad \alpha_{55}^u + v^2 a_{44}' = 0, \quad \alpha_{66}^u + w^2 a_{44}' = 0,$$

und durch Addition mit Rücksicht auf (12) und § 107, (23); § 108, (4):

$$(14) \quad A''^u + e^2 a_{44}' = 0.$$

*Im Falle eines unbestimmten Mittelpunktes (§ 111, (38)) ist daher:*

$$(15) \quad a_{44}' = -\frac{A''^u}{e^2}.$$

**6. Die Hauptachsengleichung der Schnittkurve.** Die Herstellung der Gleichung (3) erfolgte durch Verlegung des Anfangspunktes  $\Omega$  nach einem Mittelpunkt ohne Rücksicht auf die Richtung der Achsen  $\xi, \eta$ . Andererseits entstand die Gleichung § 110, (11) durch Annahme der Hauptachsenrichtungen für die Achsen  $\xi, \eta$  ohne Rücksicht auf die Wahl von  $\Omega$ .

*Legt man daher gleichzeitig die Achsen  $\xi, \eta$  nach den Hauptachsenrichtungen und den Anfangspunkt  $\Omega$  in einen (endlichen) Mittelpunkt,*



so muß die Gleichung der Schnittkurve die Form erhalten:

$$(16) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a'_{44} = 0.$$

Die alsdann nach Lage und Richtung bestimmten Achsen sind die *Hauptachsen* der Kurve und (16) ist die *Hauptachsengleichung*.

**7. Hauptachsengleichung der Kurven mit Mittelpunkt.** Nach § 110, (11) und § 111, (10) ist:

$$(17) \quad A''_{44} \neq 0$$

die gemeinsame Voraussetzung dafür, daß keine der Größen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  in (16) verschwindet, und dafür, daß ein bestimmter endlicher Mittelpunkt vorliegt.

Unter der Voraussetzung (17) kann also die Gleichung der Schnittkurve auf die Form:

$$(18) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$$

gebracht werden, wo weder  $\lambda_1$  noch  $\lambda_2$  verschwindet.

Die Hauptachsen  $\xi$ ,  $\eta$  sind nach § 110, 5 eindeutig bestimmt, wenn  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  verschieden, dagegen beliebig drehbar, wenn  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

**8. Hauptachsengleichung der Kurven mit Mittelpunktsachse.** Die Bedingungen einer endlichen Mittelpunktsachse § 111, (32):

$$(19) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} \neq 0,$$

haben nach § 110, (13) gleichzeitig zur Folge, daß eine der Wurzeln  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  verschwindet.

Unter der Voraussetzung (19) kann die Gleichung der Schnittkurve auf die Form:

$$(20) \quad \lambda_2 \eta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0$$

gebracht werden, wo  $\lambda_2$  nicht verschwindet.

Der Anfangspunkt  $\Omega$  des Systems  $\Omega \xi \eta$  ist dann einfach unbestimmt, ein beliebiger Punkt der Mittelpunktsachse; die Achsen  $\xi$ ,  $\eta$  sind eindeutig bestimmt.

Die *Hauptachse*  $\xi$ , deren Richtungskosinus nach § 110, (14):

$$(21) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = H_{k1}(0) : H_{k2}(0) : H_{k3}(0) = \alpha''_{k1} : \alpha''_{k2} : \alpha''_{k3}$$

sind, kommt nach § 111, (27) in die Mittelpunktsachse selbst zu liegen.

**9. Hauptachsengleichung der Kurven mit unbestimmtem Mittelpunkt.** Die Bedingungen eines unbestimmten Mittelpunktes § 111, (38):

$$(22) \quad A'' = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A''_{44} = 0, \quad A'' = 0$$

haben nach § 110, (15) gleichzeitig zur Folge, daß die Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$  beide verschwinden.

Unter der Voraussetzung (22) hat die Gleichung in jedem System  $\Omega\xi\eta$  in homogenen Koordinaten  $\xi, \eta, \tau$  die Form:

$$(23) \quad -\frac{A''^u}{e^2}\tau^2 = 0.$$

**10. Bedeutung der Hauptachsengleichung.** Nach ihrer Form stellt die Gleichung (18) eine eigentliche Mittelpunktskurve zweiter Ordnung, eine *Ellipse oder Hyperbel* dar, wenn:

$$(24) \quad A'' \neq 0,$$

ein eigentliches *Strahlenpaar* mit endlichem Mittelpunkt, wenn:

$$(25) \quad A'' = 0.$$

Im letzteren Falle, wo der Mittelpunkt  $\xi = 0, \eta = 0$  auf der Kurve liegt und zugleich ihr Doppelpunkt ist, muß mit (17) nach § 107, (28):

$$(25') \quad A'^u \neq 0$$

sein.

Da  $s$  in (18) nur in  $A''$  § 107, (5) vorkommt, folgt nach § 110, 6:

*Elliptische oder hyperbolische Schnitte paralleler Ebenen sind ähnlich* (im weiteren Sinne § 14, 10) *und ähnlich liegend.*<sup>180)</sup>

Nach ihrer Form stellt die Gleichung (20) ein *Parallelstrahlenpaar* dar, wenn:

$$(26) \quad A'^u \neq 0,$$

einen endlichen *Doppelstrahl*, wenn:

$$(27) \quad A'^u = 0.$$

Im letzteren Falle, wo die Mittelpunktsachse  $\eta = 0$  auf der Kurve liegt und zugleich die Doppellinie und die Kurve selbst darstellt, muß mit (19) nach § 107, (46):

$$(28) \quad A''^u \neq 0$$

sein.

*Parallellinien- und Doppellinienschnitte paralleler Ebenen sind parallel.*

Die Gleichung (23) stellt eine *unendlich ferne Doppellinie* dar.

**11. Übersicht der Hauptachsengleichungen.** Nach dem Range geordnet (§ 107, (6); (28); (46)), zerfallen die Schnittkurven mit endlichen Mittelpunkten in die folgenden Formen (§ 24, 9):

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} A'' \neq 0; A''_{44} \neq 0: \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0: \text{Ellipsen und Hyperbeln;} \\ A'' = 0, A'' \neq 0; A''_{44} \neq 0: \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0: \text{Gekreuzte Strahlen-} \\ \quad \text{paare;} \\ A'' = 0, A'' \neq 0; A''_{44} = 0, A''_{44} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0: \text{Parallel-} \\ \quad \text{linienpaare;} \\ A'' = 0, A'' = 0, A''' \neq 0; A''_{44} = 0, A''_{44} \neq 0: \lambda_2 \eta^2 = 0: \text{Endliche} \\ \quad \text{Doppelgerade;} \\ A'' = 0, A'' = 0, A''' \neq 0; A''_{44} = 0, A''_{44} = 0: -\frac{A'''}{e^2} \tau^2 = 0: \text{Un-} \\ \quad \text{endlich ferne Doppelgerade.} \end{array} \right.$$

### § 113. Schnittkurven ohne endlichen Mittelpunkt.

**1. Einführung der Hauptachsenrichtungen.** Die gemeinsame Bedingung der Schnittkurven ohne endlichen Mittelpunkt ist nach § 111, (18) und (33):

$$(1) \quad A''_{44} = 0.$$

Führt man daher in der schneidenden Ebene ein Koordinatensystem  $\Omega \xi \eta$  ein, dessen Achsen  $\xi$  und  $\eta$ , bei verfügbar bleibendem Anfangspunkt  $\Omega = x_0, y_0, z_0$ , die *Hauptachsenrichtungen* haben, so wird die Gleichung der Schnittkurve nach § 110, (13) und (15):

$$(2) \quad \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14} \xi + 2a'_{24} \eta + a'_{44} = 0.$$

Je nachdem dann ein unendlich ferner Mittelpunkt oder eine solche Mittelpunktsachse vorliegt, ist:

$$(3) \quad \lambda_2 = -A''_{44}:e^2 \quad \text{oder} \quad (3') \quad \lambda_2 = 0.$$

**2. Beziehung der Hauptachsenrichtungen zu dem unendlich fernen Mittelpunkt.** Die Schnittkurve hat nach § 111, (17); (18) einen bestimmten unendlich fernen *Mittelpunkt*, wenn neben (1):

$$(4) \quad (A''_{14})^2 + (A''_{24})^2 + (A''_{34})^2 = -A'' A''_{44} \neq 0.$$

Er liegt nach § 111, (15); (16) in der Richtung:

$$(5) \quad \alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = A''_{14} : A''_{24} : A''_{34} = \alpha''_{k1} : \alpha''_{k2} : \alpha''_{k3}, \quad k = 1, 2 \text{ oder } 3,$$

und gehört der Schnittkurve selbst an. Diese Richtung hat aber nach § 110, (14) auch die Hauptachse  $\xi$ .

Die *Hauptachsenrichtung*  $\xi$  ist dieselbe, wie die Richtung nach dem unendlich fernen Mittelpunkt (§ 25, 2).

Wir verfügen über ihre Pfeilspitze, indem wir mit Rücksicht auf (4) in:

$$(6) \quad \tau \alpha_1 = A_{14}^u, \quad \tau \beta_1 = A_{24}^u, \quad \tau \gamma_1 = A_{34}^u; \quad \tau = \sqrt{-A^u A_{44}^u},$$

die positive Wurzel nehmen.

Die Schnittkurve hat nach § 111, (35), (36) eine *bestimmte* unendlich ferne *Mittelpunktsachse*, wenn neben (1):

$$(7) \quad A^u = 0, \quad A_{44}^u = 0, \\ e^2 A'^u = (\alpha_{14}^u)^2 + (\alpha_{15}^u)^2 + (\alpha_{16}^u)^2 + (\alpha_{24}^u)^2 + \cdots + (\alpha_{36}^u)^2 \neq 0.$$

In diesem Falle *sind die Hauptachsenrichtungen* nach § 110, (15) *unbestimmt*.

**3. Verschwinden eines linearen Gliedes.** Die beiden Koeffizienten:

$$(8) \quad \begin{cases} a'_{14} = g_1^0 \alpha_1 + g_2^0 \beta_1 + g_3^0 \gamma_1, \\ a'_{24} = g_1^0 \alpha_2 + g_2^0 \beta_2 + g_3^0 \gamma_2 \end{cases}$$

können mangels eines endlichen Mittelpunktes nach § 112, 1 *niemals beide gleichzeitig verschwinden*. Wohl aber kann über den Punkt  $\Omega = x_0, y_0, z_0$  innerhalb der schneidenden Ebene:

$$(9) \quad ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0$$

derart verfügt werden, daß *einer der Koeffizienten*  $a'_{14}$ ,  $a'_{24}$  und außerdem  $a'_{44}$  verschwindet, also:

$$(10) \quad a'_{24} = g_1^0 \alpha_2 + g_2^0 \beta_2 + g_3^0 \gamma_2 = 0; \quad (11) \quad a'_{44} = g^0 = 0.$$

**4. Der Scheitelpunkt der Kurven mit einem unendlich fernen Mittelpunkt.** Im Falle (4) sind die Hauptachsenrichtungen  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  und  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  mit (5) bekannt. Die drei Gleichungen (9); (10); (11) bestimmen dann nach § 106, (6); (13); (14) den Punkt  $x_0, y_0, z_0$  der Schnittkurve derart, daß deren Tangente in ihm die Richtung  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  hat.

Wir nennen diesen Punkt, in dem Normale und Tangente der Kurve die Hauptachsenrichtungen  $\xi$  und  $\eta$  haben, den *Scheitelpunkt der Kurve* (§ 25, 4).

Da neben (10) auch:

$$(12) \quad u\alpha_1 + v\beta_1 + w\gamma_1 = 0, \quad u\alpha_2 + v\beta_2 + w\gamma_2 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

so folgt durch Elimination von  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ :

$$(13) \quad \begin{vmatrix} g_1^0 & g_2^0 & g_3^0 \\ u & v & w \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0$$

(§ 106, (17)). Es können dann zwei Größen  $\varrho$  und  $\sigma$  so bestimmt werden, daß:

$$(14) \quad g_1^0 + \varrho u + \sigma \alpha_1 = 0, \quad g_2^0 + \varrho v + \sigma \beta_1 = 0, \quad g_3^0 + \varrho w + \sigma \gamma_1 = 0.$$

Auch folgt hieraus umgekehrt durch Multiplikation mit  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  und Addition mit Rücksicht auf (12) wieder (10).

Der Scheitelpunkt hat daher den fünf Gleichungen (9); (11); (14) unter Elimination von  $\varrho$  und  $\sigma$  zu genügen; wir beweisen im Folgenden, daß unter den Voraussetzungen (1) und (4) ein einziger endlicher Scheitelpunkt vorhanden ist.

Aus (14) folgt überdies mit Hinblick auf (12) und (8):

$$(15) \quad a'_{14} = -\sigma.$$

**5. Gleichungen und Koordinaten der Hauptachse.** Abgesehen von der Gleichung (11) liegen für den Scheitelpunkt die folgenden vier Gleichungen vor:

$$(16) \quad \begin{cases} X_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho u + \sigma \alpha_1 = 0, \\ X_2 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho v + \sigma \beta_1 = 0, \\ X_3 = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho w + \sigma \gamma_1 = 0, \\ X_4 = ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0. \end{cases}$$

Da nun für die Determinante  $A^u$  in § 107, (5) infolge von (1) die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{14}^u + a_{21}A_{24}^u + a_{31}A_{34}^u + uA_{54}^u &= 0, \\ a_{12}A_{14}^u + a_{22}A_{24}^u + a_{32}A_{34}^u + vA_{54}^u &= 0, \\ a_{13}A_{14}^u + a_{23}A_{24}^u + a_{33}A_{34}^u + wA_{54}^u &= 0, \\ a_{14}A_{14}^u + a_{24}A_{24}^u + a_{34}A_{34}^u + sA_{54}^u &= A^u, \\ uA_{14}^u + vA_{24}^u + wA_{34}^u &= 0 \end{aligned}$$

gelten, so folgt aus (16) durch Multiplikation mit  $A_{14}^u, A_{24}^u, A_{34}^u, A_{54}^u$  und Addition:

$$A^u + \sigma(A_{14}^u\alpha_1 + A_{24}^u\beta_1 + A_{34}^u\gamma_1) = 0,$$

oder nach (6) und § 108, (16):

$$A^u + \sigma\tau = 0,$$

oder da  $A^u \neq 0$ :

$$(17) \quad \sigma = -\frac{A^u}{\tau} = \frac{-A^u}{\sqrt{-A^u A_{44}^{'u}}} = \frac{\sqrt{-A^u A_{44}^{'u}}}{A_{44}^{'u}}.$$

Setzt man diesen Wert von  $\sigma$  in die Gleichungen (16) ein, so besteht zwischen deren linken Seiten die Identität:

$$A_{14}^u X_1 + A_{24}^u X_2 + A_{34}^u X_3 + A_{54}^u X_4 = 0.$$

Da hier  $A_{14}^u$ ,  $A_{24}^u$ ,  $A_{34}^u$  nach (4) nicht alle verschwinden, ist wenigstens eine der drei ersten Gleichungen (16) von den übrigen Gleichungen (16) abhängig. Die Gleichungen (16) stellen daher unter Elimination von  $\varrho$  eine *gerade Linie* dar, auf der der Scheitelpunkt  $x_0, y_0, z_0$  liegen muß. Um ihre Koordinaten zu bestimmen, eliminieren wir aus den drei letzten Gleichungen  $x_0, 1, \varrho$  und erhalten:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{31} & a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ u & vy_0 + wz_0 + s & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$(18) \quad \alpha_{13}^u y_0 - \alpha_{12}^u z_0 + A_{14} = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(19) \quad A_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{31} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ u & s & 0 \end{vmatrix}.$$

In gleicher Weise folgt durch Elimination von  $y_0, 1, \varrho$  und  $z_0, 1, \varrho$ :

$$(18') \quad \alpha_{11}^u z_0 - \alpha_{13}^u x_0 + A_{24} = 0, \quad \alpha_{12}^u x_0 - \alpha_{11}^u y_0 + A_{34} = 0,$$

wo entsprechend:

$$(19') \quad A_{24} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{32} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ v & s & 0 \end{vmatrix}, \quad A_{34} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} + \sigma\beta_1 & v \\ a_{33} & a_{34} + \sigma\gamma_1 & w \\ w & s & 0 \end{vmatrix}.$$

Die durch die Gleichungen (16) unter Elimination von  $\varrho$  dargestellte Gerade hat die Achsenkoordinaten (I § 48, (11)):

$$(20) \quad q_{23} : q_{31} : q_{12} : q_{14} : q_{24} : q_{34} = \alpha_{11}^u : \alpha_{12}^u : \alpha_{13}^u : A_{14} : A_{24} : A_{34},$$

wo  $A_{14}, A_{24}, A_{34}$  die Werte (19); (19') und darin  $\beta_1, \gamma_1$  und  $\sigma$  die Werte (6) und (17) haben.

Diese Gerade hat die Richtung (5), geht also durch den unendlich fernen Mittelpunkt der Kurve. Sie wird daher (§ 25, 6) die Kurve noch in einem zweiten Punkte schneiden, der mit Rücksicht auf (11) der Scheitelpunkt ist. Sie wird also die  $\xi$ -Achse des neuen Koordinatensystems. Wir nennen sie die *Hauptachse der Schnittkurve*.

**6. Die Koordinaten des Scheitelpunktes.** Nachdem die Gleichungen (9) und (10) durch die Gleichungen (9) und (14) ersetzt sind, bleibt noch die Gleichung (11) hinzuzufügen, die nach (9) und (14) in der Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} g^0 &= g_1^0 x_0 + g_2^0 y_0 + g_3^0 z_0 + g_4^0 = -(\varrho u + \sigma \alpha_1) x_0 - (\varrho v + \sigma \beta_1) y_0 \\ &\quad - (\varrho w + \sigma \gamma_1) z_0 + g_4^0 = g_4^0 - \sigma(\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 z_0) + \varrho s. \end{aligned}$$

*Daher ist der Scheitelpunkt schließlich (mit Rücksicht auf (6) und (17)) aus den Gleichungen zu bestimmen:*

$$(21) \quad \begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} + \varrho u + \frac{A_{14}^u}{A_{44}^{'u}} = 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} + \varrho v + \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{'u}} = 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} + \varrho w + \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{'u}} = 0, \\ \left(a_{41} - \frac{A_{14}^u}{A_{44}^{'u}}\right)x_0 + \left(a_{42} - \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{'u}}\right)y_0 + \left(a_{43} - \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{'u}}\right)z_0 + a_{44} + \varrho s = 0, \\ ux_0 + vy_0 + wz_0 + s = 0, \end{cases}$$

wo  $\varrho$  zu eliminieren ist (§ 97, (21)).

Bezeichnet man nun mit  $X, Y, Z, T, R, S$  die mit abwechselnden Vorzeichen zu versehenen Unterdeterminanten fünften Grades, die aus der Matrix der Koeffizienten von  $x_0, y_0, z_0, 1, \varrho, \frac{1}{A_{44}^{'u}}$  entstehen, indem man je eine der sechs Kolonnen wegläßt, so folgt:

$$x_0 : y_0 : z_0 : 1 : \varrho : \frac{1}{A_{44}^{'u}} = X : Y : Z : T : R : S.$$

Hier ist insbesondere:

$$S = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ a_{41} - \frac{A_{14}^u}{A_{44}^{'u}} & a_{42} - \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{'u}} & a_{43} - \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{'u}} & a_{44} & s \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix} = -A^u + \frac{1}{A_{44}^{'u}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & w \\ A_{14}^u & A_{24}^u & A_{34}^u & 0 & 0 \\ u & v & w & s & 0 \end{vmatrix}$$

oder, nach den Elementen der vierten Zeile entwickelt:

$$S = -A^u + \frac{1}{A_{44}^{'u}} \{ (A_{14}^u)^2 + (A_{24}^u)^2 + (A_{34}^u)^2 \}$$

und nach (4):

$$S = -2A^u.$$

*Unter den Bedingungen (1), (4) gibt es einen bestimmten endlichen Scheitelpunkt mit den Koordinaten (§ 25, (26)):<sup>94)</sup>*

$$(22) \quad x_0 = -\frac{X}{2A^u A_{44}^{'u}}, \quad y_0 = -\frac{Y}{2A^u A_{44}^{'u}}, \quad z_0 = -\frac{Z}{2A^u A_{44}^{'u}},$$

wo:

$$(23) \quad X = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} & u & A_{14}^u \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} & v & A_{24}^u \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} & w & A_{34}^u \\ a_{42} - \frac{A_{24}^u}{A_{44}^{'u}} & a_{43} - \frac{A_{34}^u}{A_{44}^{'u}} & a_{44} & s & 0 \\ v & w & s & 0 & 0 \end{vmatrix}, \dots, \dots$$

**7. Kanonische Gleichung der Schnittkurve.** Mit Rücksicht auf (10), (11) und (15) folgt nun aus (2):

*Unter den Voraussetzungen (1), (4) kann die Gleichung der Schnittkurve stets auf die Form:*

$$(24) \quad \lambda_2 \eta^2 - 2\sigma\xi = 0$$

*gebracht werden, wo  $\lambda_2$  und  $\sigma$  die Werte (3) und (17) haben.*

Die Kurve ist eine Parabel (§ 25, (27)) mit dem Scheitelpunkt (22) und der Hauptachse (20).

**8. Schnitte paralleler Ebenen.** Die Bedingung (1) ist von  $s$  unabhängig, ebenso die Richtung (5) und der Ausdruck  $A_{44}''$  nach § 107, (20) und § 109, (10). Sind daher die Bedingungen (1); (4) für eine Ebene  $u, v, w, s$  erfüllt, so sind sie für alle parallelen Ebenen auch erfüllt, mit Ausnahme einer, für die  $A'' = 0$ . Diese in  $s$  quadratische Gleichung hat nämlich die Diskriminante  $-AA_{44}'' = 0$ .<sup>180)</sup>

*Ist die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene  $u, v, w, s$  eine Parabel, so gilt dasselbe von der Schnittkurve mit jeder parallelen Ebene, die nicht Tangentialebene ist (§ 107, (7))*

*Die Parabeln paralleler Schnitte sind ähnlich liegend.*<sup>180)</sup>

Die homogenen Koordinaten  $x_0, y_0, z_0, t_0$  des Scheitelpunktes (22) sind ganze Funktionen zweiten Grades von  $s$ , etwa:

$$\begin{aligned} \tau x_0 &= A_0 + A_1 s + A_2 s^2, & \tau y_0 &= B_0 + B_1 s + B_2 s^2, & \tau z_0 &= C_0 + C_1 s + C_2 s^2, \\ \tau t_0 &= D_0 + D_1 s + D_2 s^2. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\tau, 1, s, s^2$  folgt die Gleichung einer Ebene; also folgt nach § 66, 8:

*Der Ort der Scheitelpunkte eines Systems paralleler Parabelschnitte ist ein Kegelschnitt (§ 74, 2).*

**9. Gleichung der Schnittkurve bei unendlich ferner Mittelpunktsachse.** Unter den Bedingungen (1); (7) wird die Gleichung (2) infolge von (3'):

$$(25) \quad 2a_{14}'\xi + 2a_{24}'\eta + a_{44}' = 0 (2a_{14}'\xi\tau + 2a_{24}'\eta\tau + a_{44}'\tau^2 = 0),$$

wo nach 3 die Koeffizienten  $a_{14}'$  und  $a_{24}'$  nicht beide verschwinden.

*Die Schnittkurve mit einer unendlich fernen Mittelpunktsachse besteht daher aus einer endlichen und einer unendlich fernen Geraden.*

**10. Die Richtung der endlichen Geraden (25).** Da jetzt nach § 111, (20); (22):

$$A_{14}'' = 0, A_{24}'' = 0, A_{34}'' = 0, A_{44}'' = 0; A'' = 0,$$

so ist für die Determinante  $A''$  mit  $k = 1, 2, 3, 4$ :



$$\begin{aligned}
a_{11} A_{k1}'' + a_{12} A_{k2}'' + a_{13} A_{k3}'' + u A_{k5}'' &= 0, \\
a_{21} A_{k1}'' + a_{22} A_{k2}'' + a_{23} A_{k3}'' + v A_{k5}'' &= 0, \\
a_{31} A_{k1}'' + a_{32} A_{k2}'' + a_{33} A_{k3}'' + w A_{k5}'' &= 0, \\
a_{41} A_{k1}'' + a_{42} A_{k2}'' + a_{43} A_{k3}'' + s A_{k5}'' &= 0, \\
u A_{k1}'' + v A_{k2}'' + w A_{k3}'' &= 0.
\end{aligned}$$

Aus den vier ersten dieser Gleichungen folgt durch Multiplikation mit  $x_0, y_0, z_0, 1$  und Addition:

$$g_1^0 A_{k1}'' + g_2^0 A_{k2}'' + g_3^0 A_{k3}'' + A_{k5}'' (u x_0 + v y_0 + w z_0 + s) = 0.$$

Für einen beliebigen Punkt  $x_0, y_0, z_0$  der Ebene (9) ist daher die Gleichung (10) erfüllt, wenn man für die jetzt völlig verfügbare Hauptachsenrichtung  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  die Richtung:

$$(26) \quad \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 = A_{k1}'' : A_{k2}'' : A_{k3}'' \quad (k = 1, 2 \text{ oder } 3)$$

nimmt, die nach (7) stets bestimmt ist ( $A'' \neq 0$ ). Es ist die Richtung nach dem unendlich fernen Doppelpunkt § 107, (17).

Wählt man dann noch für  $x_0, y_0, z_0$  einen endlichen Punkt der Linie (25), so nimmt die Gleichung (25) mit (10) und (11) die Form an:

$$(27) \quad \xi \tau = 0.$$

Die endliche Gerade der Schnittkurve (die  $\eta$ -Achse) hat dabei die Richtung (26).

## § 114. Unterscheidung nach den Vorzeichen der Koeffizienten.

**1. Kanonische Gleichungen der Schnittkurve.** Nach den vorstehenden Entwicklungen kann die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
(1) \quad g(x, y, z) &= a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{23} yz + 2a_{31} zx \\
&\quad + 2a_{12} xy + 2a_{14} x + 2a_{24} y + 2a_{34} z + a_{44} = 0
\end{aligned}$$

mit der Ebene:

$$(2) \quad ux + vy + wz + s = 0$$

in bezug auf ein in der Ebene (2) selbst gelegenes rechtwinkliges System  $\Omega \xi \eta$  durch eine kanonische Gleichungsform dargestellt werden. Diese ist abhängig einerseits von dem Range der Kurve selbst und andererseits von dem Range des unendlich fernen Punktepaars der Kurve (§ 26, 1) und gehört dementsprechend in ein bestimmtes Feld der folgenden Tabelle (§ 112, (29); § 113, (24); (27)):

| (3)                                                   | I. $A^u \neq 0$ :<br>Eigentl. Kegelschn.                               | II. $A^u = 0, A'^u \neq 0$ :<br>Getrennt. Linienp. | III. $A^u = 0$ ,<br>$A'^u = 0, A''^u \neq 0$ :<br>Doppellin. |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1. $A_{44}^u \neq 0$ :<br>Getrennt. Punktep.          | $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \frac{A^u}{A_{44}^u} = 0$        | $\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0$           | *                                                            |
| 2. $A_{44}^u = 0, A_{44}'^u \neq 0$ :<br>Doppelpunkt. | $\lambda_2 \eta^2 - 2 \frac{\sqrt{-A^u A_{44}'^u}}{A_{44}'^u} \xi = 0$ | $\lambda_2 \eta^2 + \frac{A'^u}{A_{44}'^u} = 0$    | $\lambda_2 \eta^2 = 0$                                       |
| 3. $A_{44}^u = 0, A_{44}'^u = 0$ :<br>Unbestimmt      | **                                                                     | $\eta \tau = 0$                                    | $\tau^2$                                                     |

Dazu käme noch eine *Kolonne* mit der Überschrift (§ 107, (45)):

IV.  $A^u = 0, A'^u = 0, A''^u = 0$ : Unbestimmt,

die in der 3. Zeile die Bemerkung enthält: Ebene (2) Bestandteil der Fläche (1).

In dem freibleibenden Felde \* widersprechen sich nach § 107, (26); (27) Zeilen- und Kolonnenbedingungen; ebenso in dem Felde \*\*, weil  $A_{44}^u = 0, A_{44}'^u = 0$  nach § 111, (17) die Gleichungen § 111, (20) und danach § 111, (21) zur Folge haben.

2. Übergang von einer beliebigen Ebene zur  $xy$ -Ebene. Nimmt man mit:

$$(4) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 1, \quad s = 0$$

die  $xy$ -Ebene als schneidende Ebene (2), so erhält man direkt aus (1) mit  $z = 0$  die Gleichung der Schnittkurve in der Form § 26, (1), falls man nachher  $a_{14}, a_{24}, a_{44}$  mit  $a_{13}, a_{23}, a_{33}$  bezeichnet.

Gleichzeitig wird nach § 107, (5); (9); (20):

$$(5) \begin{cases} A^u = -A; A_{11}^u = -A_{11}, A_{22}^u = -A_{22}, A_{33}^u = 0, A_{44}^u = -A_{33}; \\ \alpha_{11}^u = -a_{22}, \alpha_{22}^u = -a_{11}, \alpha_{33}^u = 0, \alpha_{44}^u = 0, \alpha_{55}^u = 0, \alpha_{66}^u = -a_{33}, \end{cases}$$

und damit nach § 107, (22); (23) und § 109, (10):

$$(6) \quad A'^u = -A', \quad A''^u = -A''; \quad A_{44}'^u = -A_{33}',$$

sowie nach § 109, (25):

$$(7) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = A_{33}', \quad \lambda_1 \lambda_2 = A_{33},$$

wo nunmehr  $A, A_{k1}, A', A'', A_{33}'$  die Bedeutung von § 26, (2) haben. Die Tabelle (3) für die Schnittkurve (1), (2) geht daher mit allen ihren Bestandteilen in die Tabelle § 26, (2) für den Kegelschnitt über. Der Vorzeichenunterschied in den Feldern I, 2 rührt daher, daß die Pfeilspitze der  $\xi$ -Achse in § 25, (8) und § 113, (6), weil im Sinne von (5) auch  $A_{14}^u = -A_{13}, A_{24}^u = -A_{23}, A_{34}^u = 0$  wird, die entgegengesetzte ist.

Es ist nun wie dort, auch in (3) noch nach den *Vorzeichen* der Koeffizienten zu unterscheiden.

**3. Die Arten der eigentlichen Kegeschnitte.** Schreibt man die Gleichung I, 1 der Tabelle (3) mit den Abkürzungen:

$$(8) \quad \alpha = \frac{A^u}{A_{44}^u \lambda_1}, \quad \beta = \frac{A^u}{A_{44}^u \lambda_2}$$

in der Form:

$$(9) \quad \frac{\xi^2}{\alpha} + \frac{\eta^2}{\beta} + 1 = 0,$$

so wird nach § 109, (25):

$$(10) \quad \alpha\beta = \frac{(A^u)^2}{(A_{44}^u)^2 \lambda_1 \lambda_2} = -\frac{e^2 (A^u)^2}{(A_{44}^u)^3}, \quad \alpha + \beta = \frac{A^u(\lambda_1 + \lambda_2)}{A_{44}^u \lambda_1 \lambda_2} = \frac{A^u A_{44}^u}{(A_{44}^u)^2}.$$

Die Vorzeichen der Koeffizienten  $\alpha$ ,  $\beta$  sind daher (§ 26, (7)) für:

$$(11) \quad \begin{cases} -A_{44}^u > 0 & A^u A_{44}^u > 0: ++ \\ -A_{44}^u > 0 & A^u A_{44}^u < 0: -- \\ -A_{44}^u < 0 & : \pm\mp. \end{cases}$$

Die Bedingungen der zweiten Zeile (11) sind aber ersetzbar durch die beiden Angaben:

$$(12) \quad -A_{44}^u > 0, \quad -A_{44}^u \quad \text{und} \quad A^u A_{44}^u \quad \text{nicht beide} > 0.$$

Denn diese lassen nur die Möglichkeiten offen:  $-A_{44}^u > 0, A^u A_{44}^u < 0$  oder  $-A_{44}^u > 0, A^u A_{44}^u = 0$ . Nun ist aber für I, 1  $A^u \neq 0$  und nach § 111, (29) für  $-A_{44}^u > 0$  stets  $A_{44}^u \neq 0$ , so daß die zweite Möglichkeit wegfällt. Für die dritte Zeile (11) sind ebenfalls  $-A_{44}^u$  und  $A^u A_{44}^u$  nicht beide  $> 0$ .

Wir können daher die Angaben (11) auch in folgende Tabelle ordnen, indem wir zugleich die Bezeichnung von § 26, (9) einführen

|                   |                 | $A^u \neq 0$                                              |                                                           |
|-------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
|                   |                 | $-A_{44}^u > 0, A^u A_{44}^u > 0$                         | $-A_{44}^u, A^u A_{44}^u$ nicht beide $> 0$               |
| $A_{44}^u \neq 0$ | $-A_{44}^u > 0$ | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ |
|                   | $-A_{44}^u < 0$ | 0                                                         | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ |

In dem frei bleibenden Felde widersprechen sich Zeilen- und Kolonnenbedingungen. Hier schließt sich die Parabel I, 2 an die zweite Kolonne an:

|      |                                 |   |                                     |
|------|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| (14) | $A_{44}^u = 0, A_{44}^u \neq 0$ | 0 | $\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$ |
|------|---------------------------------|---|-------------------------------------|

da für sie nicht nur  $A''_{44} = 0$ , sondern nach § 111, (17) auch  $A''A''_{44} < 0$  ist.

4. Die Arten der Linienpaare. Die Gleichung II, 1:

$$(15) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A''_{44}}{e^2}$$

stellt, je nachdem  $-A''_{44} > 0$  oder  $< 0$  ein *imaginäres* oder *reelles Linienpaar* dar. Da aber für  $A'' = 0$ ,  $A''_{44} \neq 0$  nach § 107, (24)  $A''$  und  $A''_{44}$  stets dasselbe Vorzeichen haben, können wir die doppelte Form der Bedingungen in folgender Tabelle ausdrücken:

|                   | $A'' = 0, A'' \neq 0$                                 |                                                       |
|-------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
|                   | $-A'' > 0$                                            | $-A'' < 0$                                            |
| $-A''_{44} > 0$   | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ | 0                                                     |
| $A''_{44} \neq 0$ |                                                       |                                                       |
| $-A''_{44} < 0$   | 0                                                     | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 0$ |

Die Gleichung II, 2:

$$(17) \quad \lambda_2 \eta^2 + \frac{A''}{A''_{44}} = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{A''_{44}}{e^2} \quad (\S 109, (26))$$

stellt, je nachdem  $-A'' > 0$  oder  $< 0$ , ein *imaginäres* oder *reelles Parallellinienpaar* dar. Es ergibt sich also im Anschluß an die Tabelle (16):

|      |                                 |                                  |                                  |
|------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| (18) | $A''_{44} = 0, A''_{44} \neq 0$ | $\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$ | $\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$ |
|------|---------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

Für den Fall II, 3 ist nach § 111, (35) stets  $-A'' < 0$ , so daß er sich an die zweite Kolonne von (16) und (18) anreicht:

|      |                              |   |                |
|------|------------------------------|---|----------------|
| (19) | $A''_{44} = 0, A''_{44} = 0$ | 0 | $\eta\tau = 0$ |
|------|------------------------------|---|----------------|

5. Allgemeine Übersicht der Arten der Schnittkurve. Indem man die Tabellen (13), (14), (16), (18), (19) nunmehr in die Tabelle (3) einträgt, ergibt sich die folgende allgemeine Übersicht (20), aus der die Art der Schnittkurve der Fläche (1) mit der Ebene (2) nach den Bedingungen der Zeilen und Kolonnen zu entnehmen ist. Dabei haben  $A''$ ,  $A''$ ,  $A''$ ;  $A''_{44}$ ,  $A''_{44}$  die in § 107, (5); (22); (23), § 111, (5), § 109, (10) angegebene Bedeutung und sind zugleich die Namen der Kegelschnitte eingefügt (§ 26, (19)): <sup>182)</sup>

(20)

| (20)                                       |                                | $A'' \neq 0$ :<br>Eigentl. Kegelschnitte                                    |                                                                       | $A'' = 0, A'' \neq 0$ :<br>Getr. Linieneppare                   | $A'' = 0, A'' = 0, A''' \neq 0$ :<br>$A''' \neq 0$ : |
|--------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| $A''' \neq 0$ :<br>Eigentl.<br>Punkteppare | $-A''' > 0$ :<br>1. Imag. Pp.  | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$<br>Imag. Ellipse  | $-A'''$ , $A'' A'''$<br>nicht beide $> 0$ :<br>II. Reell. Kegelschn.  | $-A'' > 0$ :<br>III. Imag. Liniensp.                            | V. Doppellinien                                      |
|                                            | $-A''' < 0$ :<br>2. Reell. Pp. | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$<br>Reelle Ellipse | $\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$<br>Hyperbel | $-A'' < 0$ :<br>IV. Reell. Liniensp.                            |                                                      |
| $A'' = 0, A''' \neq 0$ :<br>3. Doppelp.    |                                | $\frac{\eta^2}{\beta^2} + 2\xi = 0$<br>Parabel                              | $\frac{\eta^2}{\beta^2} + 1 = 0$<br>Imag.<br>Parallelliniensp.        | $\frac{\eta^2}{\beta^2} - 1 = 0$<br>Reell.<br>Parallelliniensp. | Endl. Doppell.                                       |
|                                            |                                |                                                                             |                                                                       |                                                                 |                                                      |
| $A''' = 0, A''' = 0$ :<br>4. Unbest.       |                                |                                                                             |                                                                       | $\eta(\tau) = 0$<br>Endl. + u. f. Linie                         | Un. f. Doppell.                                      |

Auch diese Tabelle geht für den Spezialfall unter 2 in die Tabelle § 26, (19) über.

## IV. Kapitel.

**Schnitte besonderer Flächen und besondere Schnitte.****§ 115. Ebene Schnitte besonderer Flächen.**

**1. Glockenförmige und sattelförmige Flächen.** Wird eine eigentliche Fläche zweiter Ordnung ( $A \neq 0$ , § 78, (2)) von einer Ebene geschnitten, die parallel ist der Tangentialebene eines reellen endlichen Punktes der Fläche, so ist das Produkt der Hauptachsenkoeffizienten der Schnittkurve nach § 110, (20):

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\frac{A_{44}^u}{G^2} = -\frac{A}{G^2}, \quad G^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2,$$

also von einem unveränderlichen Vorzeichen, dem entgegengesetzten der Determinante  $A$ .

Eine solche Ebene schneidet daher die Fläche nur in Kurven der ersten oder nur in Kurven der zweiten Zeile der Tabelle § 114, (20), je nachdem  $A$  negativ oder positiv ist.

*Insbesondere schneidet die Tangentialebene selbst § 107, (7) die Flächen  $A < 0$ , also (§ 99, (31)) das Ellipsoid, zweischalige Hyperboloid und elliptische Paraboloid, stets in einem imaginären Linienpaar, die reellen Flächen  $A > 0$ , also das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, stets in einem reellen Linienpaar.*

Die Flächen  $A < 0$  sind daher (§ 67, (28)) *nichtgeradlinige*, die reellen Flächen  $A > 0$  *geradlinige*. Jene heißen auch *positiv gekrümmte* oder *glockenförmige*, diese *negativ gekrümmte* oder *sattelförmige*.<sup>181)</sup>

**2. Die Ellipsoide und Hyperboloide.** Für die Fläche:

$$(1) \quad g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

wo die Umkehr der Vorzeichen von  $c^2$  oder  $b^2$  und  $c^2$  vorbehalten bleibt, gibt die Berechnung der geränderten Determinanten § 114, 5:

$$(2) \quad A^u = \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - s^2}{a^2 b^2 c^2};$$

$$(3) \quad A_{11}^u = \frac{b^2 v^2 + c^2 w^2 - s^2}{b^2 c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{c^2 w^2 + a^2 u^2 - s^2}{c^2 a^2}, \quad A_{33}^u = \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 - s^2}{a^2 b^2};$$

$$(4) \quad A_{14}^u = \frac{us}{b^2 c^2}, \quad A_{24}^u = \frac{vs}{c^2 a^2}, \quad A_{34}^u = \frac{ws}{a^2 b^2}, \quad A_{44}^u = -\frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2}{a^2 b^2 c^2};$$

$$(5) \quad \alpha_{11}^u = -\frac{b^2 v^2 + c^2 w^2}{b^2 c^2}, \quad \alpha_{22}^u = -\frac{c^2 w^2 + a^2 u^2}{c^2 a^2}, \quad \alpha_{33}^u = -\frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{a^2 b^2}.$$

Damit wird:

$$(6) \quad A'' = A^u(a^2 + b^2 + c^2 - 1) - \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2 + s^2}{a^2 b^2 c^2},$$

$$(7) \quad A'_{44} = -\frac{b^2 v^2 + c^2 w^2}{b^2 c^2} - \frac{c^2 w^2 + a^2 u^2}{c^2 a^2} - \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{a^2 b^2},$$

oder:

$$(8) \quad A'_{44} = A_{44}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{a^2 b^2 c^2}$$

und überdies nach (2) und (4):

$$(9) \quad A^u + A'_{44} = -\frac{s^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Ohne Rücksicht auf eine etwaige Umkehr der Vorzeichen von  $b^2$  und  $c^2$  ergibt sich daher aus (6), daß  $A^u$  und  $A'^u$ , und aus (8), daß für eine endliche Ebene  $u, v, w, s$  auch  $A'_{44}$  und  $A_{44}$  niemals beide gleichzeitig verschwinden können.

*Die ebenen Schnitte der Ellipsoide und Hyperboloide sind daher entweder eigentliche Kegelschnitte oder getrennte Linienpaare und haben mit der unendlich fernen Geraden zwei getrennte Punkte oder einen Doppelpunkt gemein (§ 114, (3) nur I. und II. Kolonne, 1. und 2. Zeile)*

**3. Das Ellipsoid.** Für das Ellipsoid (1) ist nach (4):

$$(10) \quad -A'_{44} > 0,$$

und nach (7):

$$(11) \quad \text{sign } A^u A'_{44} = -\text{sign } A^u = -\text{sign}(a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - s^2).$$

Aus der Tabelle § 114, (20) folgt daher<sup>183)</sup>:

*Das Ellipsoid (1) wird von der Ebene  $u, v, w, s$  in einer imaginären Ellipse, einem imaginären Linienpaar oder einer reellen Ellipse geschnitten, je nachdem:*

$$(12) \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - s^2 < 0, = 0 \quad \text{oder} \quad > 0.$$

Die Ebenen mit imaginärem Linienpaar sind Tangentialebenen (§ 70, (10)).

**4. Das einschalige Hyperboloid.** Beim einschaligen Hyperboloid:

$$(13) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

( $-c^2$  für  $c^2$  in (1)–(9)) ist nach (9):

$$(14) \quad A^u = -A'_{44} + \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Ist daher:

$$(15) \quad -A'_{44} > 0,$$

so ist stets auch  $A^u > 0$ . Mit (15) ist aber nach (4):

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 < 0,$$

also auch:

$$b^2 v^2 - c^2 w^2 < 0 \quad \text{und} \quad a^2 u^2 - c^2 w^2 < 0$$

und damit nach (7):

$$A'_{44} = \frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{b^2 c^2} + \frac{a^2 u^2 - c^2 w^2}{a^2 c^2} - \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{a^2 b^2} < 0.$$

Neben (15) kann daher nicht  $A''A''_{44} > 0$  sein. Da ferner nach (6) für  $A'' = 0$ :

$$-A'' = -\frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{a^2b^2c^2} < 0,$$

so sind in der Tabelle § 114, (20) die erste und dritte Kolonne unmöglich:

*Das einschalige Hyperboloid hat nur reelle ebene Schnitte.*

*Ist die Ebene  $u, v, w, s$  keine Tangentialebene:*

$$(16) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 \neq 0,$$

*so ist die Schnittkurve eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem:*

$$(17) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 < 0, \quad > 0 \quad \text{oder} \quad = 0;$$

*ist die Ebene eine Tangentialebene:*

$$(18) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 = 0,$$

*so ist die Schnittkurve ein gekreuztes oder paralleles Geradenpaar, je nachdem:*

$$(19) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = s^2 > 0 \quad \text{oder} \quad = 0.$$

In parallelen Geraden schneiden somit die *Tangentialebenen des Asymptotenkegels*:

$$(20) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \quad s = 0$$

(§ 74, 2), in Parabeln die zu einer solchen Tangentialebene *parallelen Ebenen*:

$$(21) \quad a^2u^2 + b^2v^2 - c^2w^2 = 0, \quad s \neq 0.$$

**5. Das zweischalige Hyperboloid.** Beim zweischaligen Hyperboloid:

$$(22) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

( $-b^2, -c^2$  für  $b^2, c^2$  in (1)–(9)) ist nach (6) für  $A'' = 0$ :

$$-A'' = \frac{a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{a^2b^2c^2} > 0,$$

so daß die vierte Kolonne in § 114, (20) unmöglich wird.

*Ist die Ebene  $u, v, w, s$  keine Tangentialebene:*

$$(23) \quad a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 \neq 0,$$

*so ist die Schnittkurve eine Ellipse (imaginär oder reell), Hyperbel oder Parabel, je nachdem:*

$$(24) \quad a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 > 0, \quad < 0 \quad \text{oder} \quad = 0;$$

*ist die Ebene eine Tangentialebene:*

$$(25) \quad a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 - s^2 = 0,$$



so ist die Schnittkurve ein imaginäres Geradenpaar mit endlichem oder unendlich fernem Doppelpunkt, je nachdem:

$$(26) \quad a^2u^2 - b^2v^2 - c^2w^2 = s^2 > 0 \quad \text{oder} \quad = 0.$$

In Parabeln schneiden die zu einer Tangentialebene des Asymptotenkegels parallelen Ebenen.

**6. Die Paraboloid.** Für die Fläche:

$$(27) \quad g = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0,$$

wo die Umkehr des Vorzeichens von  $c^2$  vorbehalten bleibt, gibt die Berechnung der geränderten Determinanten:

$$(28) \quad A^u = \frac{b^2v^2 + c^2w^2 + 2us}{b^2c^2},$$

$$(29) \quad A_{11}^u = -\frac{s^2}{b^2c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{c^2w^2 + 2us}{c^2}, \quad A_{33}^u = \frac{b^2v^2 + 2us}{b^2},$$

$$(30) \quad A_{44}^u = -\frac{u^2}{b^2c^2},$$

$$(31) \quad \alpha_{11}^u = -\frac{b^2v^2 + c^2w^2}{b^2c^2}, \quad \alpha_{22}^u = -\frac{u^2}{c^2}, \quad \alpha_{33}^u = -\frac{u^2}{b^2}.$$

Damit wird:

$$(32) \quad A'^u = (b^2 + c^2)A^u - \frac{u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 + s^2}{b^2c^2},$$

$$(33) \quad A_{44}'^u = -\frac{b^2v^2 + c^2w^2}{b^2c^2} - \frac{u^2}{b^2} - \frac{u^2}{c^2}.$$

Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen von  $c^2$  folgt aus (32), daß  $A^u$  und  $A'^u$  niemals beide gleichzeitig verschwinden können.

Die ebenen Schnitte der Paraboloid sind daher entweder eigentliche Kegelschnitte oder getrennte Linienpaare (§ 114, (3) nur I. und II. Kolonne).

**7. Das elliptische Paraboloid.** Beim elliptischen Paraboloid (27) ist nach (30) für jede endliche Ebene:

$$-A_{44}^u > 0 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem  $u \neq 0$  oder  $= 0$ , also die Ebene nicht parallel oder parallel der  $x$ -Achse ist. Die zweite Zeile der Tabelle § 114, (20) ist daher unmöglich.

Nach (33) ist  $A_{44}'^u < 0$  und danach:

$$\text{sign } A^u A_{44}'^u = -\text{sign } A^u = -\text{sign } (b^2v^2 + c^2w^2 + 2us).$$

Ist die endliche Ebene  $u, v, w, s$  keine Tangentialebene (§ 70, (32)):

$$(34) \quad b^2v^2 + c^2w^2 + 2us \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Ellipse oder Parabel, je nachdem die Ebene

zur Hauptachse nicht parallel oder parallel ist; die Ellipse ist imaginär oder reell, je nachdem

$$(35) \quad b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2us < 0 \quad \text{oder} \quad > 0.$$

Ist  $A'' = 0$ , so kann nach (28) nicht  $u = 0$  ( $A''_{44} = 0$ ) sein, ohne daß auch  $v = 0$ ,  $w = 0$ , und ist nach (32)  $-A''^u > 0$ .

Ist die endliche Ebene  $u, v, w, s$  eine Tangentialebene:

$$(36) \quad b^2 v^2 + c^2 w^2 + 2us = 0,$$

so ist sie der Hauptachse nicht parallel, und die Schnittkurve ist ein imaginäres Linienpaar mit endlichem Doppelpunkt.

**8. Das hyperbolische Paraboloid.** Beim hyperbolischen Paraboloid:

$$(37) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0$$

( $-c^2$  für  $c^2$  in (27)—(33)) ist für jede Ebene nach (30):

$$-A''_{44} < 0 \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem  $u \neq 0$  oder  $= 0$ . Die erste Zeile der Tabelle § 114, (20) ist daher unmöglich.

Ist die endliche Ebene  $u, v, w, s$  keine Tangentialebene:

$$(38) \quad b^2 v^2 - c^2 w^2 + 2us \neq 0,$$

so ist die Schnittkurve eine Hyperbel oder Parabel, je nachdem die Ebene zu der Hauptachse nicht parallel oder parallel ist.

Ist  $A'' = 0$ , so ist nach (32)  $-A''^u < 0$ ; ist neben  $A'' = 0$  auch  $A''_{44} = 0$  ( $u = 0$ ), so ist nach (28) und (33) zugleich  $A''^u_{44} = 0$ . Daher ist in der Tabelle § 114, (20) nur das zweite und vierte Feld der vierten Kolonne möglich.

Ist die endliche Ebene  $u, v, w, s$  eine Tangentialebene:

$$(39) \quad b^2 v^2 - c^2 w^2 + 2us = 0,$$

so ist die Schnittkurve ein Linienpaar mit endlichem Doppelpunkt oder eine einzelne endliche gerade Linie (in Verbindung mit einer unendlich fernen), je nachdem sie der Hauptachse nicht parallel oder parallel ist.

Die in einer einzelnen geraden Linie schneidenden Ebenen sind also die beiden Scharen paralleler Ebenen (§ 62, (13); (13')):

$$(40) \quad b^2 v^2 - c^2 w^2 = 0, \quad u = 0.$$

**9. Der elliptische Kegel.** Für den elliptischen Kegel:

$$(41) \quad g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

gibt die Berechnung der geränderten Determinanten:

$$(42) \quad A^u = \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2},$$

$$(43) \quad A_{11}^u = \frac{s^2}{b^2 c^2}, \quad A_{22}^u = \frac{s^2}{c^2 a^2}, \quad A_{33}^u = -\frac{s^2}{a^2 b^2},$$

$$(44) \quad A_{44}^u = \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2}{a^2 b^2 c^2},$$

$$(45) \quad \begin{cases} \alpha_{11}^u = \frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{b^2 c^2}, & \alpha_{22}^u = \frac{-c^2 w^2 + a^2 u^2}{c^2 a^2}, & \alpha_{33}^u = -\frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{a^2 b^2}, \\ \alpha_{44}^u = -\frac{s^2}{a^2}, & \alpha_{55}^u = -\frac{s^2}{b^2}, & \alpha_{66}^u = \frac{s^2}{c^2}. \end{cases}$$

Damit wird:

$$(46) \quad A'^u = A^u(a^2 + b^2 - c^2) + A_{44}^u,$$

$$(47) \quad A_{44}'^u = \frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{b^2 c^2} + \frac{a^2 u^2 - c^2 w^2}{a^2 c^2} - \frac{a^2 u^2 + b^2 v^2}{a^2 b^2},$$

$$(48) \quad A''^u = A_{44}'^u - \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) s^2,$$

$$(49) \quad A_{44}''^u = (a^2 + b^2 - c^2) A_{44}^u - \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Nach (42) verschwindet  $A^u$  gleichzeitig mit  $s$ . Sonst ist stets  $A^u > 0$ . Ist nun  $-A_{44}^u > 0$ , so folgt aus (47) gerade wie unter 4 aus (15), daß  $A_{44}'^u < 0$  und daher  $A^u A_{44}'^u < 0$ . Es folgt daher mit Rücksicht auf die Tabelle § 114, (20):

Jede nicht durch die Spitze des Kegels (41) gehende Ebene  $u, v, w, s$  schneidet in einem reellen eigentlichen Kegelschnitt: einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem:

$$(50) \quad a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 < 0, \quad > 0 \quad \text{oder} \quad = 0.^1)$$

In letzterem Falle ist die Ebene einer Tangentialebene parallel (§ 71, (8)).

Ist  $A^u = 0$  oder  $s = 0$ , so ist nach (46) und (48):  $-A'^u = -A_{44}^u$  und  $A''^u = A_{44}'^u$ . Ist daher  $A'^u \neq 0$ , so ist auch  $A_{44}^u \neq 0$ . Ist aber  $A'^u = 0$ , also auch  $A_{44}^u = 0$ , so ist nach (49)  $A_{44}'^u \neq 0$ , also auch  $A''^u \neq 0$ . Daher folgt aus der Tabelle § 114, (20):

Eine durch die Spitze gehende Ebene schneidet in einem imaginären oder reellen Geradenpaar oder einer Doppelgeraden, je nachdem:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 < 0, \quad > 0 \quad \text{oder} \quad = 0.$$

Die längs einer Geraden berührenden Tangentialebenen des Kegels sind daher durch die Bedingungen:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 = 0, \quad s = 0$$

gekennzeichnet (§ 71, (8); (9)).

### § 116. Gleichseitig hyperbolische Schnitte.

**1. Allgemeine Bedingung der gleichseitig hyperbolischen Schnitte.** Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene  $u, v, w, s$  kann stets durch eine Gleichung von der Form § 110, (11) dargestellt werden, die sich auf ein in der Ebene liegendes rechtwinkliges Koordinatensystem  $\Omega\xi\eta$  bezieht und in der (§ 109, (25)):

$$(1) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{A'_{44}u}{e^2}, \quad \lambda_1\lambda_2 = -\frac{A''_{44}}{e^2}, \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Ist nun:

$$(2) \quad A'_{44} = 0,$$

so werden  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entgegengesetzt gleich, etwa  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $\lambda_2 = -\lambda$ , und nimmt die Gleichung der Schnittkurve die Form:

$$(3) \quad \lambda(\xi^2 - \eta^2) + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

an, worin nach (1):

$$(4) \quad \lambda^2 = \frac{A''_{44}}{e^2}.$$

*Unter der Bedingung (2) ist daher der ebene Schnitt eine gleichseitige Hyperbel (§ 26, (26)).<sup>184)</sup>*

**2. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte.** Wir verstehen dabei unter gleichseitiger Hyperbel *alle in der Form (3) enthaltenen Kegelschnitte.*

Wenn neben (2)  $A''_{44} \neq 0$ , also nach (4):

$$(5) \quad A''_{44} > 0,$$

hat die Kurve (3) nach § 111, (11) einen bestimmten Mittelpunkt:

$$(6) \quad x = \frac{A'_{14}}{A''_{44}}, \quad y = \frac{A'_{24}}{A''_{44}}, \quad z = \frac{A'_{34}}{A''_{44}},$$

und ihre Gleichung kann nach § 112, (18) auf die Form:

$$(7) \quad \lambda(\xi^2 - \eta^2) + \frac{A''_{44}}{A''_{44}} = 0$$

gebracht werden. Es ergibt sich daher als Sonderfall der zweiten Zeile der Tabelle § 114, (20):

*Je nachdem neben (2) und (5):*

$$(8) \quad A''_{44} \neq 0 \quad \text{oder} \quad A''_{44} = 0,$$

*ist die Schnittkurve eine eigentliche gleichseitige Hyperbel oder ein rechtwinkliges Geradenpaar.*

Ist aber neben (2):

$$(9) \quad A''_{44} = 0,$$

*so besteht der gleichseitig hyperbolische Schnitt (3) aus einer endlichen*

und einer unendlich fernen Geraden oder ist eine unendlich ferne Doppelgerade. Er kann dann in homogenen Koordinaten in der Form:

$$(10) \quad \eta\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \tau^2 = 0$$

dargestellt werden (§ 114, (20), 4. Zeile).

**3. Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte.** Die Bedingung (2) oder § 109, (10):

$$(11) \quad A'_{44}'' = \alpha_{11}'' + \alpha_{23}'' + \alpha_{33}'' = 0,$$

ist nach § 109, (1) eine in  $u, v, w$  homogene Gleichung zweiten Grades.

Diejenigen Ebenen  $u, v, w, s$ , welche die Fläche zweiter Ordnung in einer gleichseitigen Hyperbel (3) schneiden, sind die  $\infty^2$  Tangentialebenen einer unendlich fernen Kurve zweiter Klasse, die durch die Gleichung (11) dargestellt wird (§ 80, (19')).

Die Ebenen gehen büschelweise durch eine Tangente dieser Kurve. Diejenigen von ihnen, die neben (11) die Gleichung:

$$(12) \quad s = 0$$

erfüllen, also durch den Koordinatenanfangspunkt  $O$  gehen, umhüllen einen Kegel zweiter Klasse (§ 80, (20')).

Wir nennen diesen Kegel zweiter Klasse:

$$(13) \quad A'_{44} = 0, \quad s = 0$$

den Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Fläche zweiter Ordnung.

Jede Tangentialebene dieses Kegels und jede zu ihr parallele Ebene schneidet alsdann die Fläche in einer gleichseitigen Hyperbel (im allgemeinen Sinne (3)).

Die Tangenten der Kurve (11) sind nach § 21, (40); § 26, (26) auch diejenigen Geraden der unendlich fernen Ebene, welche die unendlich ferne Kurve der Fläche und den imaginären Kugelkreis (§ 91, 8) in vier harmonischen Punkten treffen.

**4. Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte beim Hyperboloid und Kegel.** Von den Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung können nur diejenigen gleichseitig hyperbolische Schnitte haben, die überhaupt hyperbolische besitzen, die beiden Hyperboloide und der Kegel (§ 115, 4; 5; 9).

Die Gleichungen der beiden Hyperboloide sind:

$$(14) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2,$$

$$(14') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b^2 < c^2,$$

und die ihrer Asymptotenkegel:

$$(15) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad (15') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Jeder der letzteren kann zugleich als beliebiger elliptischer Kegel gelten.

Der Leitkegel (13) der gleichseitig hyperbolischen Schnitte hat für die Flächen (14) und (15) nach § 115, (7) und (47) dieselben Gleichungen:

$$(16) \quad \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)u^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)v^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)w^2 = 0, \quad s = 0,$$

und für die Flächen (14') und (15') ebenso:

$$(16') \quad \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)u^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)w^2 = 0, \quad s = 0.$$

*Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des Hyperboloids und seines Asymptotenkegels ist also ein mit diesem konzentrischer und coaxialer Kegel zweiter Klasse.*

Er kann nach § 80, 10 ein imaginärer oder ein elliptischer oder ein in zwei Ebenenbüschel (ein Strahlenpaar) zerfallender Kegel sein. Das letztere tritt bei (16) ein, wenn mit  $b^2 = c^2$  der Kegel (15) von der besonderen Art § 54, 8 ist (für  $a^2 = c^2$  imaginäres Strahlenpaar).

**5. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Hyperboloide und Kegel.** Jede (reelle) Tangentialebene des Kegels (16) oder (16') und jede zu ihr parallele Ebene schneidet das Hyperboloid (14) oder (14') und seinen Asymptotenkegel in einer gleichseitigen Hyperbel. Diese ist, da nach § 115, (8) und (49)  $A''_{44}$  nicht neben  $A'^u_{44}$  verschwinden kann, nach (7) stets entweder eine eigentliche gleichseitige Hyperbel oder ein rechtwinkliges Geradenpaar, und zwar nach (8), je nachdem  $A'' \neq 0$  oder  $A'' = 0$ , je nachdem also die schneidende Ebene  $u, v, w, s$  keine oder eine Tangentialebene des Hyperboloids ist.

Nun ist aber für die Hyperboloide (14) und (14') nach § 115, (9) bezüglich:

$$(17) \quad A'' = \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2} - A''_{44}, \quad (17') \quad A'' = -\frac{s^2}{a^2 b^2 c^2} - A''_{44},$$

und für einen gleichseitig hyperbolischen Schnitt  $u, v, w, s$  nach (5)  $A''_{44} > 0$ . Im Falle (17') kann daher für einen solchen  $A''$  nicht verschwinden, während es im Falle (17) für jedes reelle der Gleichung (16) genügende Wertsystem  $u, v, w$  zwei reelle Werte von  $s$ :

$$(18) \quad s^2 = A''_{44} a^2 b^2 c^2$$

gibt (§ 109, (8)) für die  $A'' = 0$  wird.

*I. Bei dem einschaligen Hyperboloid gibt es in jedem (reellen) Büschel paralleler gleichseitig hyperbolischer Schnittebenen zwei (reelle) Tangential-*

ebenen; sie schneiden die Fläche in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.

II. Beim zweischaligen Hyperboloid gibt es nur eigentliche gleichseitige Hyperbeln als Schnittkurven.

III. Beim Kegel (15) ist nach § 115, (42):

$$(19) \quad A^u = \frac{s^2}{a^2 b^2 c^2},$$

so daß gerade die Ebenen des Leitkegels (16) in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden schneiden, alle parallelen Ebenen in eigentlichen gleichseitigen Hyperbeln.

IV. Bei dem am Schluß von 4 erwähnten Kegel bilden also die in rechtwinkligen Erzeugenden schneidenden Ebenen zwei Büschel, deren Achsen in Ebenen- und Punktkoordinaten die Gleichungen haben:

$$(20) \quad (a^2 - b^2)v^2 - (a^2 + b^2)w^2 = 0, \quad s = 0;$$

$$(21) \quad \frac{y^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{a^2 + b^2} = 0, \quad x = 0; \quad a^2 > b^2,$$

also nach § 59, (21) und § 84, (8) die Polstrahlen der Kreisschnittebenen sind.

**6. Ort der Punkte des einschaligen Hyperboloids mit rechtwinkligen Erzeugenden.** Die Berechnung der geränderten Determinanten gibt für die Fläche (14) nach § 115, (4):

$$(22) \quad A_{14}^u = -\frac{us}{b^2 c^2}, \quad A_{24}^u = -\frac{vs}{c^2 a^2}, \quad A_{34}^u = \frac{ws}{a^2 b^2}.$$

Für den Mittelpunkt (6) eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes, der mit (18) in ein rechtwinkliges Geradenpaar zerfällt, ist daher:

$$(23) \quad x = -\frac{a^2 u}{s}, \quad y = -\frac{b^2 v}{s}, \quad z = \frac{c^2 w}{s}.$$

Danach ist, wieder mit Rücksicht auf (18):

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{s^2} = \frac{a^4 u^2 + b^4 v^2 + c^4 w^2}{A_{44}^u a^2 b^2 c^2}$$

oder nach § 115, (8) mit  $A_{44}^u = 0$  und  $-c^2$  für  $c^2$ :

$$(24) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Die Punkte des einschaligen Hyperboloids, durch die zwei zueinander rechtwinklige Erzeugende gehen, liegen auf der Kugel (24) (§ 64, (3)).

**7. Beziehung des Leitkegels (16) zum Asymptotenkegel.** Die Gleichungen (16) oder (16') können mit der Abkürzung:

$$(25) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = d \quad \text{oder} \quad (25') \quad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = d$$

in der Form geschrieben werden:

$$(26) \quad \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} \right) - d(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \quad s = 0,$$

oder:

$$(26') \quad \left( \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} \right) - d(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \quad s = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichungen folgt (§ 71, (22); (8); § 118, (12)).

*Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des Hyperboloids ist mit dem Reziprokalkegel des Asymptotenkegels konfokal.*

**8. Nichtvorhandensein von drei rechtwinkligen Erzeugenden bei Kegel und Hyperboloid.** Der erste der beiden Reziprokalkegel zweiter Klasse:

$$(27) \quad \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0, \quad s = 0, \quad (27') \quad \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0, \quad s = 0$$

der Kegel (15), (15') ist der Ort *aller* Ebenen, die auf einer Erzeugenden des Kegels (15) senkrecht stehen. Der zu (27) konfokale Kegel (26) hat mit (27) selbst *keine* reellen Tangentialebenen gemein (§ 118, 8). Daher kann die Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes für  $d \neq 0$  niemals auf einer Erzeugenden des Kegels (15) senkrecht stehen, also auch zwei rechtwinklige Erzeugende, in denen eine solche Ebene den Kegel (15) schneidet, niemals beide auf einer dritten.

*Bei einem elliptischen Kegel gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden.*

Da nun zu jeder Erzeugenden des Kegels (15) ein Paar paralleler Erzeugenden des Hyperboloids (14) gehört und umgekehrt, so folgt:

*In einer Regelschar eines einschaligen Hyperboloids gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden.*

**9. Gleichseitiger Kegel und gleichseitige Hyperboloide.** Ist jedoch in (25), (25')  $d = 0$ , so fällt der Leitkegel (26), (26') der gleichseitig hyperbolischen Schnitte mit dem konfokalen Reziprokalkegel (27), (27') zusammen. In diesem Falle steht daher *jede* Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes auf einer Erzeugenden des Asymptotenkegels senkrecht und *jede* auf einer Erzeugenden senkrechte Ebene ist Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes.

*Wir nennen das einschalige Hyperboloid (14) und den Kegel (15) gleichseitig (§ 64, (8); (12)), wenn:*

$$(28) \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

*und das zweischalige Hyperboloid (14') und den Kegel (15') gleichseitig, wenn:*

$$(28') \quad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

Dann lautet das gewonnene Resultat:



Bei dem gleichseitigen Kegel schneidet jede auf einer Erzeugenden senkrechte Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel, beziehungsweise, wenn sie durch die Spitze geht, in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.

Der gleichseitige Kegel besitzt  $\infty^1$  Systeme von drei zueinander senkrechten Erzeugenden; jede Erzeugende bestimmt ein solches System.

Bei dem gleichseitigen einschaligen und dem gleichseitigen zweischaligen Hyperboloid schneidet jede auf einer Erzeugenden des Asymptotenkegels senkrechte Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel.

Jede Regelschar des gleichseitigen einschaligen Hyperboloids enthält  $\infty^1$  Systeme von drei zueinander senkrechten Erzeugenden.

**10. Leitkegel des gleichseitig hyperbolischen Paraboloids, hyperbolischen Zylinders und Ebenenpaares.** Die Gleichung des hyperbolischen Paraboloids ist:

$$(29) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 2x = 0,$$

die des hyperbolischen Zylinders:

$$(30) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

und die der Asymptotenebenen der beiden Flächen (29) und (30):

$$(31) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Der Leitkegel (13) der gleichseitig hyperbolischen Schnitte hat für diese drei Flächen nach § 115, (33) die Gleichung:

$$(32) \quad \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)u^2 + \frac{v^2}{c^2} - \frac{w^2}{b^2} = 0, \quad s = 0.$$

Der Leitkegel der gleichseitig hyperbolischen Schnitte des hyperbolischen Paraboloids, des hyperbolischen Zylinders und des Ebenenpaares ist ein mit diesen koaxialer Kegel zweiter Klasse.

**11. Arten der gleichseitig hyperbolischen Schnitte beim hyperbolischen Paraboloid.** Jede Tangentialebene des Kegels (32) und jede zu ihr parallele Ebene  $u, v, w, s$  schneidet das hyperbolische Paraboloid in einer gleichseitigen Hyperbel.

Diese zerfällt nach (9) in eine einzelne Gerade (in Verbindung mit einer unendlich fernen, wie in (10)), wenn die Ebene neben (32) auch noch die Gleichung  $u = 0$  (§ 115, (30)) erfüllt, so daß:

$$(33) \quad b^2 v^2 - c^2 w^2 = 0, \quad u = 0;$$

sie ist dann einer der Asymptotenebenen parallel.

I. *Alle den Asymptotenebenen parallelen Ebenen und nur diese schneiden das hyperbolische Paraboloid in einer einzelnen endlichen Geraden (§ 115, (40)).*

Im übrigen, für  $u \neq 0$ , schneidet eine Ebene  $u, v, w, s$ , für die  $u, v, w$  der Gleichung (32) genügen, nach (8) in einer eigentlichen gleichseitigen Hyperbel oder einem rechtwinkligen Geradenpaar, je nachdem  $A^u \neq 0$  oder  $A^u = 0$  ist. Nach § 115, (28) gibt es aber zu jedem  $u, v, w$  mit  $u \neq 0$  einen Wert:

$$(34) \quad s = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{2u},$$

für den  $A^u = 0$  wird.

II. *In jedem Büschel paralleler gleichseitig hyperbolischer Schnitte gibt es also stets eine und nur eine Tangentialebene. Sie schneidet das Paraboloid in zwei zueinander senkrechten Erzeugenden.*

12. **Ort der Punkte des hyperbolischen Paraboloids mit rechtwinkligen Erzeugenden.** Die Berechnung der geränderten Determinanten gibt für die Fläche (29), wie § 115, (30):

$$(35) \quad A_{14}^u = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2 + us}{b^2 c^2}, \quad A_{24}^u = \frac{uv}{c^2}, \quad A_{34}^u = -\frac{uw}{b^2}, \quad A_{44}^u = \frac{u^2}{b^2 c^2}.$$

Für den Mittelpunkt (6) eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes, der mit (34) in ein rechtwinkliges Geradenpaar zerfällt, ist daher:

$$(36) \quad x = \frac{s}{u} = -\frac{b^2 v^2 - c^2 w^2}{2u^2}, \quad y = \frac{b^2 v}{u}, \quad z = -\frac{c^2 w}{u}.$$

Der zweite Wert (36) von  $x$  ist aber nach (32) auch:

$$(37) \quad x = \frac{b^2 - c^2}{2}.$$

*Die Punkte des hyperbolischen Paraboloids (29), durch die zwei zueinander rechtwinklige Erzeugende gehen, liegen auf der Ebene (37) (§ 65, (44)) mit umgekehrtem Vorzeichen von  $x$  in der Ausgangsgleichung (§ 65, (8)).*

13. **Beziehung des Leitkegels zu den Asymptotenebenen.** Mit der Abkürzung:

$$(38) \quad d = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}$$

kann die Gleichung (32) in der Form:

$$(39) \quad \left(\frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2}\right) - d(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \quad s = 0$$

geschrieben werden. Daher gehört der Leitkegel (32) einem *konfokalen System* (§ 118, (12)) mit den *Fokallinien* (§ 118, (17)):

$$(40) \quad \frac{v^2}{b^2} - \frac{w^2}{c^2} = 0, \quad s = 0$$

an.

In Punktkoordinaten lautet die Gleichung des Kegels (32) nach § 71, (11); (12'):

$$(41) \quad \frac{x^2}{b^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

während die *Fokallinien* (40) durch (§ 118, (3)):

$$(42) \quad b^2 y^2 - c^2 z^2 = 0, \quad x = 0$$

und die in derselben Hauptebene liegenden *Scheitellinien* des Kegels durch:

$$(43) \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad x = 0$$

dargestellt sind.

Die *Scheitellinien* (43) des *Leitkegels* der *gleichseitig hyperbolischen* Schnitte des *hyperbolischen Paraboloids* sind daher die *Scheitelerzeugenden* des letzteren (§ 65, (6)).

Die ihnen entsprechenden Tangentialebenen des Leitkegels sind die Asymptotenebenen des Paraboloids, die nach 11, I in der Tat gleichseitig hyperbolische Schnitte im Sinne von (10) liefern.

Die *Fokallinien*  $f, f'$  in (42) des *Leitkegels* der *gleichseitig hyperbolischen* Schnitte sind die *Normalen der Asymptotenebenen* oder die *Normalen der Scheitelerzeugenden*  $s', s$  in der *Scheiteltangentialebene*  $x = 0$  des *Paraboloids* (Fig. 183).

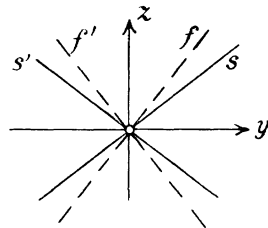


Fig. 183.

**14. Nichtvorhandensein von drei rechtwinkligen Erzeugenden beim hyperbolischen Paraboloid.** Die Brennnlinien sind daher auch die Träger *aller* Ebenen  $u, v, w$  des Bündels am Scheitel  $O$ , die auf einer Asymptotenebene senkrecht stehen. Da aber der Kegel (39)

mit seinen Brennnlinien keine Tangentialebene gemein hat, kann die Ebene eines gleichseitig hyperbolischen Schnittes niemals auf einer Asymptotenebene senkrecht stehen, also auch auf keiner Erzeugenden, die einer solchen stets parallel ist.

Auf dem *hyperbolischen Paraboloid* gibt es im allgemeinen keine drei zueinander senkrechten Erzeugenden (§ 65, 17).

**15. Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid.** Ist jedoch in (38)  $d = 0$ , also  $b^2 = c^2$ , so zerfällt der Kegel (39) in die beiden Ebenenbüschel der Fokalstrahlen (40), die dann zugleich aufeinander senkrecht werden:

$$(44) \quad v^2 - w^2 = 0$$

und mit den Scheitelerzeugenden:

$$(45) \quad y^2 - z^2 = 0, \quad x = 0$$

zusammenfallen.

Das hyperbolische Paraboloid, welches alsdann die Gleichung:

$$(46) \quad \frac{y^2 - z^2}{b^2} + 2x = 0$$

erhält, ist in diesem Falle *gleichseitig*.

*Das gleichseitige hyperbolische Paraboloid wird daher von jeder durch eine der beiden Scheitelerzeugenden gehenden Ebene in einem rechtwinkligen Geradenpaar, von jeder parallelen Ebene in einer gleichseitigen Hyperbel geschnitten.*

Seien  $A$  und  $A'$  die beiden Asymptotenebenen,  $a$  und  $a'$  ihre Schnittlinien mit der Ebene  $x = 0$ , also die Scheitelerzeugenden des Paraboloids, und  $g$  die mit  $a$ ,  $g'$  die mit  $a'$  gleichnamigen Erzeugenden. Dann ist irgendeine Erzeugende  $g$  parallel zur Ebene  $A$  und daher senkrecht zu deren Normale  $a'$ . Man kann daher durch  $a'$  eine Ebene  $\Gamma'$  legen, die zu  $g$  senkrecht ist. Da  $\Gamma'$  durch  $a'$  geht, schneidet sie das Paraboloid in zwei rechtwinkligen Erzeugenden  $a'$  und  $h$ , die wie  $\Gamma'$  selbst beide zu  $g$  senkrecht sind.

*Zu jeder Erzeugenden  $g$  gibt es daher eine gleichnamige senkrechte Erzeugende  $h$ , so daß  $g$  und  $h$  zusammen mit der ungleichnamigen Scheitelerzeugenden  $a'$  ein System von drei senkrechten Strahlen bilden (§ 65, 17).*

## § 117. Die Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung.

**1. Allgemeiner Begriff eines Kreisschnittes.** Die Schnittkurve der Fläche zweiter Ordnung mit einer Ebene § 110, (9); (10) kann nach § 110, (11) stets durch eine Gleichung von der Form:

$$(1) \quad \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2a'_{14} \xi + 2a'_{24} \eta + a'_{44} = 0$$

dargestellt werden, die sich auf ein in der Ebene liegendes rechtwinkliges Koordinatensystem  $\Omega\xi\eta$  bezieht und in der  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die Wurzeln der quadratischen Gleichung  $H(\lambda) = 0$  in § 109, (11) bedeuten.

*Sind diese beiden Wurzeln einander gleich:*

$$(2) \quad \lambda_1 = \lambda_2,$$

*so ist die Kurve (1) ein Kreisschnitt, ihre Ebene eine Kreisschnittebene der Fläche.<sup>150)</sup>*

Der gemeinsame Wert  $\lambda$  von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , mit dem die Gleichung

(1) die Form:

$$(3) \quad \lambda(\xi^2 + \eta^2) + 2a'_{14}\xi + 2a'_{24}\eta + a'_{44} = 0$$

annimmt, entspricht alsdann nach § 109, (25) den Gleichungen:

$$(4) \quad 2\lambda = -\frac{A'_{44}u}{e^2}, \quad \lambda^2 = -\frac{A'_{44}}{e^2}; \quad e^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

**2. Arten der Kreisschnitte.** Wenn neben (2):

$$(5) \quad A'_{44} \neq 0,$$

hat der Kreisschnitt (3) nach § 111, (11) einen *endlichen Mittelpunkt*:

$$(6) \quad x_0 = \frac{A'_{14}}{A'_{44}}, \quad y_0 = \frac{A'_{24}}{A'_{44}}, \quad z_0 = \frac{A'_{34}}{A'_{44}},$$

und seine Gleichung kann nach § 112, (18) auf die Form gebracht werden:

$$(7) \quad \lambda(\xi^2 + \eta^2) + \frac{A'_{44}}{A'_{44}} = 0.$$

Das Quadrat des Radius des Kreises ist daher mit Rücksicht auf (4):

$$(8) \quad \rho^2 = -\frac{A'_{44}}{A'_{44}\lambda} = \frac{2A'_{44}e^2}{A'_{44}A'_{44}}.$$

Da nun nach (4)  $A'_{44} < 0$  und  $A'_{44} \neq 0$  sein muß (§ 114, (11)), so folgt (für eine reelle Ebene  $u, v, w, s$ ):

*Ein unter der Bedingung (2) entstehender Kreisschnitt hat unter der Bedingung (5) den endlichen Mittelpunkt (6) und das Radiusquadrat (8). Er ist für:*

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'_{44} > 0 : \text{ein imaginärer Kreis;} \\ A'_{44} < 0 : \text{ein reeller Kreis;} \\ A'_{44} = 0 : \text{ein Nullkreis.} \end{array} \right.$$

Wenn in (3):

$$(10) \quad \lambda = 0 (A'_{44} = 0, \quad A'_{44} = 0 \text{ nach (4)}),$$

so besteht der Kreisschnitt (3) aus einer *endlichen und einer unendlich fernen Geraden* oder ist eine *unendlich ferne Doppelgerade* (§ 114, (3)) und kann in der Form:

$$(11) \quad \eta\tau = 0 \quad \text{oder} \quad \tau^2 = 0$$

dargestellt werden mit homogenen Koordinaten  $\xi, \eta, \tau$ .

Jeder Kreisschnitt (3) geht durch die beiden imaginären Kreispunkte der schneidenden Ebene (§ 100, 2).

**3. Die überzähligen Bedingungen der Kreisschnitte.** Die Bedingung (2) ist nach § 109, 6, IV immer dann und nur dann erfüllt,

wenn zwischen den Koeffizienten  $a_{ki}$  der Fläche, den Koeffizienten  $u, v, w$  der Ebene und der Doppelwurzel  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  die sechs Gleichungen bestehen:

$$(12) \begin{cases} H_{11}(\lambda) = \alpha_{11}'' + \lambda(v^2 + w^2) = -(a_{33} - \lambda)v^2 - (a_{22} - \lambda)w^2 + 2a_{23}vw = 0, \\ H_{22}(\lambda) = \alpha_{22}'' + \lambda(w^2 + u^2) = -(a_{11} - \lambda)w^2 - (a_{33} - \lambda)u^2 + 2a_{31}wu = 0, \\ H_{33}(\lambda) = \alpha_{33}'' + \lambda(u^2 + v^2) = -(a_{22} - \lambda)u^2 - (a_{11} - \lambda)v^2 + 2a_{12}uv = 0, \\ H_{23}(\lambda) = \alpha_{23}'' - \lambda vw = (a_{11} - \lambda)vw + a_{23}u^2 - a_{12}wu - a_{31}uv = 0, \\ H_{31}(\lambda) = \alpha_{31}'' - \lambda wu = (a_{23} - \lambda)wu + a_{31}v^2 - a_{23}uv - a_{12}vw = 0, \\ H_{12}(\lambda) = \alpha_{12}'' - \lambda uv = (a_{33} - \lambda)uv + a_{12}w^2 - a_{31}vw - a_{23}wu = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von  $\lambda$  ergeben sich hieraus die Bedingungen für die Koeffizienten  $u, v, w$  einer Ebene, die einen Kreisschnitt der Fläche  $a_{ki}$  liefert.

**4. Systeme paralleler Kreisschnittebenen.** Da die Bedingungen (12), sowie (5) und (10), nur die Koordinaten  $u : v : w$  der Stellung der schneidenden Ebene § 114, (2), nicht  $s$  enthalten, so folgt:

*Wenn die Fläche von einer Ebene in einem Kreise (7) geschnitten wird, so wird sie auch von allen parallelen Ebenen in einem solchen geschnitten.*

Mittelpunkt (6) und Radiusquadrat (8) sind dagegen von  $s$  abhängig (§ 107, (5)).

*Wenn die Fläche von einer Ebene in einem Kreise (11) geschnitten wird, so wird sie auch von allen parallelen Ebenen in einem solchen geschnitten.*

Die Kreisschnittebenen der Fläche treten also in Büscheln paralleler Ebenen auf.

**5. Abhängigkeit der überzähligen Bedingungen voneinander.** Für die Determinante  $H(\lambda)$  in § 109, (1) ist unbedingt (I Anm. 1, III, (17)):

$$(13) \begin{cases} H_{11}(\lambda)u + H_{12}(\lambda)v + H_{13}(\lambda)w = 0, \\ H_{21}(\lambda)u + H_{22}(\lambda)v + H_{23}(\lambda)w = 0, \\ H_{31}(\lambda)u + H_{32}(\lambda)v + H_{33}(\lambda)w = 0. \end{cases}$$

Wenn daher keine der drei Größen  $u, v, w$  verschwindet, folgen aus den drei letzten Gleichungen (12) sofort die drei ersten. Setzt man aber die drei ersten Gleichungen (12) voraus, so daß aus (13) wird:

$$\begin{aligned} w H_{31}(\lambda) + v H_{12}(\lambda) &= 0, \\ w H_{23}(\lambda) + u H_{12}(\lambda) &= 0, \\ v H_{23}(\lambda) + u H_{31}(\lambda) &= 0, \end{aligned}$$

so folgen, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & w & v \\ w & 0 & u \\ v & u & 0 \end{vmatrix} = 2uvw$$

nicht verschwindet, die drei letzten Gleichungen (12).

Die drei ersten Gleichungen (12) aber, wie auch die drei letzten, sind bei allgemeinen Koeffizienten  $a_{ki}$ ,  $u, v, w$  voneinander unabhängig, da jede einen Koeffizienten  $a_{ki}$  enthält, der in den beiden andern nicht vorkommt.

*Die überzähligen Bedingungen (12) zählen im allgemeinen für drei, nach Elimination von  $\lambda$  für zwei unabhängige Bedingungen.*

Da sich indessen nicht allgemein angeben läßt, welche drei gerade die unabhängigen sind, so ist es vorteilhafter, alle sechs beizubehalten.

**6. Anwendung der überzähligen Bedingungen auf das dreiaxige Ellipsoid.** Für das Ellipsoid:

$$(14) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > b^2 > c^2,$$

lauten die Bedingungen (12):

$$(15) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)v^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right)w^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)w^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)u^2 = 0, \\ \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right)u^2 + \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)v^2 = 0, \end{cases} \quad (16) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)vw = 0, \\ \left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right>wu = 0, \\ \left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)uv = 0. \end{cases}$$

Nach (16) muß, da  $a^2 \neq b^2 \neq c^2$ , wenigstens eine der Größen  $u, v, w$  verschwinden; nach (15) und (16) können aber auch nicht zwei von ihnen verschwinden.

Ist zunächst  $u = 0$ ,  $v \neq 0$ ,  $w \neq 0$ , so folgt aus (16):  $\lambda = \frac{1}{a^2}$  und damit aus (15):

$$\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)v^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)w^2 = 0.$$

Den beiden hierdurch bestimmten Stellungen  $u : v : w$  entsprechen die durch  $O$  ( $s = 0$ ) gehenden Ebenen (§ 71, 11):

$$(17) \quad \lambda = \frac{1}{a^2} : (a^2 - b^2) \frac{y^2}{b^2} + (a^2 - c^2) \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

und alle zu diesen parallelen Ebenen. Ebenso erhält man mit  $v = 0$  und mit  $w = 0$ :

$$(17) \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{b^2}: & (b^2 - c^2) \frac{z^2}{c^2} + (b^2 - a^2) \frac{x^2}{a^2} = 0, \\ \lambda = \frac{1}{c^2}: & (c^2 - a^2) \frac{x^2}{a^2} + (c^2 - b^2) \frac{y^2}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Das dreiachsige Ellipsoid (14) besitzt daher sechs Systeme (§ 100, 2) von Kreisschnittebenen, je zwei Systeme parallel jeder Hauptachse. Aber nur das der mittleren Achse parallele System ist reell (§ 58, (21)).

### 7. Mittelpunkt und Radius der Kreisschnitte des Ellipsoids.

Die den reellen Kreisschnittebenen  $u, v, w, s$  entsprechenden Werte von  $u, v, w$  sind nach (17):

$$(18) \quad u = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad v = 0, \quad w = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{c}.$$

Mit diesen werden die geränderten Determinanten § 115, 2:

$$(19) \quad \begin{cases} A_{14}^u = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{ab^2c^2} s, & A_{24}^u = 0, & A_{34}^u = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{a^2b^2c} s, \\ A_{44}^u = -\frac{a^2 - c^2}{a^2b^2c^2}, & A^u = \frac{a^2 - c^2 - s^2}{a^2b^2c^2}, \\ A_{44}'^u = -2 \frac{a^2 - c^2}{a^2c^2}, \end{cases}$$

während:

$$(20) \quad c^2 = u^2 + v^2 + w^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2c^2}.$$

Danach ergibt sich für Mittelpunkt (6) und Radiusquadrat (8) des Kreisschnittes  $u, v, w, s$  in (18):

$$(21) \quad x = -\frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2 - c^2} s, \quad y = 0, \quad z = -\frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{a^2 - c^2} s;$$

$$(22) \quad \rho^2 = \frac{b^2(a^2 - c^2 - s^2)}{a^2 - c^2}.$$

Mit  $s = 0$  wird der Radius der mittleren Halbachse  $b$  gleich. Mit  $s = \sqrt{a^2 - c^2}$  wird  $\rho = 0$  und folgen aus (21) die Kreispunkte (§ 58, (22)):

$$(23) \quad x = -a \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = -c \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Das Vorzeichen jeder der drei Wurzeln  $\sqrt{b^2 - c^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - c^2}$ ,  $\sqrt{a^2 - b^2}$  ist dabei beliebig, aber überall dasselbe.

Die Werte (21) und (22) stimmen mit § 58, (19) und (16) überein, wenn dort (§ 58, (18); (3)):

$$\frac{1}{\alpha} = ku, \quad \frac{1}{\gamma} = kw, \quad -2\xi_0 = ks; \quad k = \frac{b\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}}$$

gesetzt wird.



**8. Der Kreisschnittkoeffizient als Hauptachsenkoeffizient.** Der Koeffizient  $\lambda$  in der Gleichung (3), der „*Kreisschnittkoeffizient*“, hängt nach (4) von den Koeffizienten  $a_{ki}$  der Fläche und den Koeffizienten  $u, v, w$  der schneidenden Ebene ab. Die letztere Abhängigkeit ist jedoch nur eine scheinbare.

Für die Determinante  $H(\lambda)$  in § 109, (1) gelten nämlich unbedingt die Gleichungen (I Anm. 1, III, (17)):

$$(24) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)H_{11}(\lambda) + a_{12}H_{12}(\lambda) + a_{13}H_{13}(\lambda) + uH_{14}(\lambda) = H(\lambda), \\ a_{21}H_{11}(\lambda) + (a_{22} - \lambda)H_{12}(\lambda) + a_{23}H_{13}(\lambda) + vH_{14}(\lambda) = 0, \\ a_{31}H_{11}(\lambda) + a_{32}H_{12}(\lambda) + (a_{33} - \lambda)H_{13}(\lambda) + wH_{14}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Bestehen nun die sechs Gleichungen (12), mit denen nach § 109, 6, III auch  $H(\lambda) = 0$  ist, so folgt aus (24), da  $u, v, w$  nicht alle drei verschwinden:

$$(25) \quad H_{14}(\lambda) = 0.$$

In gleicher Weise aber ergibt sich:

$$(25) \quad H_{24}(\lambda) = 0, \quad H_{34}(\lambda) = 0.$$

Nun ist für die Determinante  $H(\lambda)$  wieder unbedingt:

$$(26) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)H_{41}(\lambda) + a_{12}H_{42}(\lambda) + a_{13}H_{43}(\lambda) + uH_{44}(\lambda) = 0, \\ a_{21}H_{41}(\lambda) + (a_{22} - \lambda)H_{42}(\lambda) + a_{23}H_{43}(\lambda) + vH_{44}(\lambda) = 0, \\ a_{31}H_{41}(\lambda) + a_{32}H_{42}(\lambda) + (a_{33} - \lambda)H_{43}(\lambda) + wH_{44}(\lambda) = 0, \end{cases}$$

also bei Voraussetzung von (25) mit Hinblick auf § 109, (4):

$$(27) \quad H_{44}(\lambda) = \Delta(\lambda) = 0.$$

Die sechs Gleichungen (12) haben daher stets zur Folge (§ 44, 10), daß auch:

$$(28) \quad H_{14}(\lambda) = 0, \quad H_{24}(\lambda) = 0, \quad H_{34}(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen gibt aber den Satz:

*Sollen bei gegebenen Koeffizienten  $a_{ki}$  der Fläche zwischen den Stellungskoeffizienten  $u, v, w$  einer Ebene und einer Größe  $\lambda$  die sechs Gleichungen (12) bestehen, so muß diese eine Wurzel der kubischen Gleichung  $\Delta(\lambda) = 0$  sein, oder:*

*Der Kreisschnittkoeffizient  $\lambda$  in (3), der als Hauptachsenkoeffizient der Schnittkurve (§ 108, (27)) eingeführt wurde, ist stets ein Hauptachsenkoeffizient der Fläche selbst (§ 88, (17)).*

Die Gleichung (27) ist daher das Resultat der Elimination der beiden Verhältnisse  $u : v : w$  aus den Gleichungen (12), die für drei unabhängige Gleichungen zwischen  $\lambda$  und  $u : v : w$  zählen.

**9. Beziehung der Kreisschnittebenen zu den Hauptachsenrichtungen der Fläche.** Die kubische Gleichung (27) des Hauptachsenproblems der Fläche selbst hat nach § 89, 3 drei reelle Wurzeln  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Setzt man eine solche Wurzel  $\lambda$  in die Gleichungen (12) ein, so zählen sie nach 5 noch als zwei unabhängige Gleichungen für die zwei Verhältnisse  $u:v:w$  und bestimmen die Stellung der zu der Wurzel  $\lambda$  gehörigen Kreisschnittebenen.

Andererseits ist für die Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  der zu der Wurzel  $\lambda$  gehörigen Hauptachsenrichtung der Fläche nach § 90, (3):

$$(29) \quad \alpha : \beta : \gamma = \mathcal{A}_{i1}(\lambda) : \mathcal{A}_{i2}(\lambda) : \mathcal{A}_{i3}(\lambda), \quad i = 1, 2 \text{ oder } 3.$$

Die Unterdeterminanten § 109, (3) und (4) von  $H(\lambda)$  stehen aber unbedingt in der Beziehung (§ 45, (5)):

$$(30) \quad -H_{i4}(\lambda) = u\mathcal{A}_{i1}(\lambda) + v\mathcal{A}_{i2}(\lambda) + w\mathcal{A}_{i3}(\lambda), \quad i = 1, 2, 3.$$

Für das den Gleichungen (12) und daher (25) genügende Wertesystem  $u:v:w$ ,  $\lambda$  ist daher mit Rücksicht auf (29):

$$(31) \quad 0 = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

also:

*Die einer Wurzel  $\lambda$  der kubischen Gleichung  $\mathcal{A}(\lambda) = 0$  entsprechenden Kreisschnittebenen sind zu der derselben Wurzel entsprechenden Hauptachse der Fläche parallel.*

Daß die Gleichung (31) auch besteht, wenn wegen des Verschwindens aller  $\mathcal{A}_{ih}(\lambda_k)$  die Bestimmung (29) versagt, wird sich zu (36) ergeben.

**10. Anzahl der einer Wurzel  $\lambda$  entsprechenden Kreisschnittebenen.** Um die einer Wurzel  $\lambda$  der kubischen Gleichung (27) entsprechenden Kreisschnitte zu bestimmen, bietet sich in den drei ersten Gleichungen (12) für jedes der drei Verhältnisse  $v:w$ ,  $w:u$ ,  $u:v$  eine quadratische Gleichung dar. Durch Auflösung dieser erhält man:

$$(32) \quad \begin{cases} v:w = a_{23} + \varepsilon_1 \sqrt{-\mathcal{A}_{11}(\lambda)} : a_{33} - \lambda = a_{22} - \lambda : a_{23} - \varepsilon_1 \sqrt{-\mathcal{A}_{11}(\lambda)}, \\ w:u = a_{31} + \varepsilon_2 \sqrt{-\mathcal{A}_{22}(\lambda)} : a_{11} - \lambda = a_{33} - \lambda : a_{31} - \varepsilon_2 \sqrt{-\mathcal{A}_{22}(\lambda)}, \\ u:v = a_{12} + \varepsilon_3 \sqrt{-\mathcal{A}_{33}(\lambda)} : a_{22} - \lambda = a_{11} - \lambda : a_{12} - \varepsilon_3 \sqrt{-\mathcal{A}_{33}(\lambda)}, \end{cases}$$

wo  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  je  $\pm 1$  bedeuten. Daneben ist nach (30) und (25):

$$(33) \quad \begin{cases} u\mathcal{A}_{11}(\lambda) + v\mathcal{A}_{12}(\lambda) + w\mathcal{A}_{13}(\lambda) = 0, \\ u\mathcal{A}_{21}(\lambda) + v\mathcal{A}_{22}(\lambda) + w\mathcal{A}_{23}(\lambda) = 0, \\ u\mathcal{A}_{31}(\lambda) + v\mathcal{A}_{32}(\lambda) + w\mathcal{A}_{33}(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Ist nun die benutzte Wurzel  $\lambda$  eine einfache Wurzel der Gleichung  $\mathcal{A}(\lambda) = 0$ , so können nach § 89, 5, I  $\mathcal{A}_{11}(\lambda)$ ,  $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ ,  $\mathcal{A}_{33}(\lambda)$

nicht sämtlich verschwinden. Ist also etwa  $\Delta_{11}(\lambda) \neq 0$ , so gibt die erste Zeile (32) zwei bestimmte, untereinander verschiedene Werte des Verhältnisses  $v:w$ . Zugleich liefert die erste Gleichung (33) zu jedem der beiden Werte von  $v:w$  einen bestimmten Wert von  $u:w$  oder  $u:v$ .

I. Einer einfachen Wurzel der Gleichung  $\Delta(\lambda) = 0$  entsprechen also stets zwei verschiedene Stellungen  $u:v:w$  von Kreisschnittebenen.

Ist dagegen  $\lambda$  eine zweifache Wurzel, so verschwinden für diese nach § 89, 5, II alle Unterdeterminanten  $\Delta_{ki}(\lambda)$ , aber nach § 89, 6, IV nicht alle Diagonalelemente  $a_{11} - \lambda$ ,  $a_{22} - \lambda$ ,  $a_{33} - \lambda$  von  $\Delta(\lambda)$ . Ist also etwa  $a_{11} - \lambda \neq 0$ , so geben die auf:

$$(34) \quad \begin{cases} v:w = a_{23}:a_{33} - \lambda = a_{22} - \lambda:a_{23}, \\ w:u = a_{31}:a_{11} - \lambda = a_{33} - \lambda:a_{31}, \\ u:v = a_{12}:a_{22} - \lambda = a_{11} - \lambda:a_{12} \end{cases}$$

reduzierten Gleichungen (32) in:

$$(35) \quad u:v:w = a_{11} - \lambda:a_{12}:a_{31}$$

ein einziges bestimmtes Wertsystem von  $u:v:w$ .

II. Einer zweifachen Wurzel der Gleichung  $\Delta(\lambda) = 0$  entspricht also stets eine einzige Stellung von Kreisschnittebenen.

Die der Doppelwurzel entsprechende unbestimmte Hauptachsenrichtung  $\alpha, \beta, \gamma$  hat im Falle  $a_{11} - \lambda \neq 0$  nach § 90, 4 nur der Bedingung:

$$(36) \quad (a_{11} - \lambda)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0$$

zu genügen, so daß nach (35) wieder die Bedingung (31) erfüllt ist.

III. Ist  $\lambda$  eine dreifache Wurzel, so werden nach § 89, 6, V die Gleichungen (12) identisch in  $u:v:w$  erfüllt.

Hiernach ergibt sich zunächst ohne Rücksicht auf die Realitätsfrage (§ 90, 3; 5; 6):

IV. Je nachdem die Fläche zweiter Ordnung drei verschiedene oder zwei gleiche oder drei gleiche Hauptachsenkoeffizienten, also drei, eine oder keine bestimmte Hauptachse hat, besitzt sie sechs oder drei (s. unten 14) oder  $\infty^2$  Systeme paralleler Kreisschnittebenen.

11. Die reellen Kreisschnittebenen. Sind die drei Hauptachsenkoeffizienten  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , die Wurzeln der Gleichung  $\Delta(\lambda) = 0$ , verschieden und ihrer algebraischen Größe nach geordnet:

$$(37) \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3,$$

so ist nach § 89, (20):

$$(38) \quad \Delta_{ii}(\lambda_1) \geq 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_2) \leq 0, \quad \Delta_{ii}(\lambda_3) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

wo bei jeder Wurzel (§ 89, 5, I) wenigstens für ein  $i$  das Ungleichheitszeichen gilt. Hiernach sind die Werte (32) für  $\lambda = \lambda_1, \lambda_3$  imaginär, für  $\lambda = \lambda_2$  reell, und folgt mit Rücksicht auf 9:

I. *Sind die drei Hauptachsenkoeffizienten der Fläche zweiter Ordnung verschieden, so hat die Fläche zwei reelle Systeme paralleler Kreisschnittebenen, die dem algebraisch mittleren Hauptachsenkoeffizienten entsprechen und der zu ihm gehörigen Hauptachse parallel sind.*

Sind zwei Wurzeln einander gleich,  $\lambda_1 = \lambda_2$  oder  $\lambda_2 = \lambda_3$ , die dritte,  $\lambda_3$  oder  $\lambda_1$ , verschieden, so ist nach § 89, (24) für die einfache Wurzel:

$$(39) \quad \Delta_{ii}(\lambda_3) \geq 0 \quad \text{oder} \quad \Delta_{ii}(\lambda_1) \geq 0.$$

Für diese sind daher die Werte (32) imaginär. Für die zweifache Wurzel gelten die Werte (34), und folgt somit:

II. *Sind unter den drei Hauptachsenkoeffizienten zwei gleiche, so hat die Fläche ein diesen entsprechendes reelles System paralleler Kreisschnittebenen, das zu der einen bestimmten Hauptachsenrichtung (§ 90, 5) senkrecht ist.*

III. *Sind alle drei Hauptachsenkoeffizienten gleich, hat die Fläche alle Ebenen zu Kreisschnittebenen.*

**12. Bestimmung der reellen Kreisschnittebenen bei gegebener Hauptachsengleichung.** Ist die Fläche zweiter Ordnung von vornherein durch ihre Hauptachsengleichung § 90, (12) gegeben:

$$(40) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

und sind die Hauptachsenkoeffizienten *verschieden* und so geordnet, daß:

$$(41) \quad a_{11} < a_{22} < a_{33},$$

so entsprechen die reellen Kreisschnittebenen nach 11, I dem Hauptachsenkoeffizienten  $\lambda = a_{22}$ . Statt die Auflösungen (32) der drei ersten Gleichungen (12) zu benutzen, entnehmen wir diesen selbst mit  $\lambda = a_{22}$ :

$$(42) \quad v = 0; \quad (a_{11} - a_{22})w^2 - (a_{22} - a_{33})u^2 = 0.$$

Die Ebenen, deren Stellungenkoordinaten  $u : v : w$  diesen Bedingungen genügen, sind dem Ebenenpaare:

$$(43) \quad (a_{33} - a_{22})z^2 - (a_{22} - a_{11})x^2 = 0$$

parallel. Das reelle Ebenenpaar (43) selbst, dessen Achse die dem Hauptachsenkoeffizienten  $\lambda = a_{22}$  entsprechende  $y$ -Achse ist, nennen wir die *Hauptkreisschnittebenen*.

Ist dagegen:

$$(44) \quad a_{11} < a_{22} = a_{33} \quad \text{oder} \quad a_{11} = a_{22} < a_{33},$$

so bleibt nach 11, II mit  $\lambda = a_{22}$  nur die eine Hauptkreisschnittebene:  
(45)  $x = 0$  oder  $z = 0$ ,

der alle andern parallel sind.

### 13. Die Hauptkreisschnittebenen aller Flächen zweiter Ordnung.

Nach 12 erhalten wir nun sofort die Hauptkreisschnittebenen der durch ihre *kanonischen Gleichungen* dargestellten reellen Flächen zweiter Ordnung. In der folgenden Tabelle ist immer unter 1. die Gleichung der Fläche angegeben; unter 2. die jedesmalige Anordnung der Hauptachsenkoeffizienten nach der *algebraischen* Größe in der Weise (41) oder (44); die Hauptkreisschnittebenen selbst sind jedesmal unter 3. in der Form (43) oder (45) und unter 4. in vereinfachter Form angegeben. Bei den mit \* bezeichneten Flächen sind die Kreisschnitte nach (11) *gerade Linien*.

*Flächen mit drei verschiedenen Hauptachsenkoeffizienten.*

#### I. Ellipsoid (§ 58, (21)):

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $a^2 > b^2 > c^2$ ;      2.  $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$ ;
3.  $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)x^2 = 0$ ;      4.  $(a^2 - b^2)\frac{x^2}{a^2} - (b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0$ .

#### II. Einschaliges Hyperboloid (oder elliptischer Kegel) (§ 59, (21)):

1.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (oder  $= 0$ ),  $a^2 > b^2$ ;      2.  $-\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$ ;
3.  $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0$ ;      4.  $(a^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} - (a^2 + c^2)\frac{z^2}{c^2} = 0$ .

#### III. Zweischaliges Hyperboloid (oder elliptischer Kegel) (§ 60, (21)):

1.  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  (oder  $= 0$ ),  $b^2 < c^2$ ;      2.  $-\frac{1}{b^2} < -\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}$ ;
3.  $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)x^2 - \left(-\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}\right)y^2 = 0$ ;      4.  $(a^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} - (c^2 - b^2)\frac{y^2}{b^2} = 0$ .

#### IV. Elliptisches Paraboloid (oder elliptischer Zylinder) (§ 61, (15); § 59, (26)):

1.  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2x$  (oder  $= 1$ ),  $b^2 > c^2$ ;      2.  $0 < \frac{1}{b^2} < \frac{1}{c^2}$ ;
3.  $\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)z^2 - \left(\frac{1}{b^2} - 0\right)x^2 = 0$ ;      4.  $(b^2 - c^2)\frac{z^2}{c^2} - x^2 = 0$ .

#### V.\* Hyperbolisches Paraboloid (oder hyp. Zylinder oder Ebenenpaar) (§ 62, (13)):

1.  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x$  (oder  $= 1$  oder  $= 0$ );      2.  $-\frac{1}{c^2} < 0 < \frac{1}{b^2}$ ;
3.  $\left(\frac{1}{b^2} - 0\right)y^2 - \left(0 + \frac{1}{c^2}\right)z^2 = 0$ ;      4.  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ .

*Flächen mit zwei gleichen Hauptachsenkoeffizienten.*

I. *Rotationsellipsoid:*

$$1. \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2; \quad 2. \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} < \frac{1}{c^2}; \quad 3. z = 0;$$

oder:

$$1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2; \quad 2. \frac{1}{a^2} < \frac{1}{c^2} = \frac{1}{c^2}; \quad 3. x = 0.$$

II. *Rotationshyperboloid (oder -kegel):*

$$1. \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (oder } = 0); \quad 2. -\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}; \quad 3. z = 0;$$

oder:

$$1. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \text{ (oder } = 0); \quad 2. -\frac{1}{c^2} = -\frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}; \quad 3. x = 0.$$

III. *Rotationsparaboloid (oder -zylinder):*

$$1. \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 2x \text{ (oder } = 1); \quad 2. 0 < \frac{1}{b^2} = \frac{1}{b^2}; \quad 3. x = 0.$$

IV.\* *Parabolischer Zylinder (od. Parallelebenenpaar od. Doppelebene):*

$$1. \frac{z^2}{c^2} = 2x \text{ (oder } = 1 \text{ oder } = 0); \quad 2. 0 = 0 < \frac{1}{c^2}; \quad 3. z = 0.$$

*Flächen mit drei gleichen Hauptachsenkoeffizienten.*

I. *Kugel:*

$$1. \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} = 1; \quad 2. \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}; \quad 3. \text{jede endliche Ebene.}$$

II. 1. *Endliche und unendlich ferne Ebene (unendlich ferne Doppelebene);* 2.  $0 = 0 = 0$ ; 3. jede endliche Ebene.

Damit sind die reellen Hauptkreisschnittebenen aller Flächen zweiter Ordnung aus einem einheitlichen Gesetz hergeleitet.

**14. Allgemeine Bedeutung der Bedingungen der Kreisschnitte.**

Nach § 48, (16) stellt die Gleichung:

(46)  $(a_{11} - \lambda)x^2 + (a_{22} - \lambda)y^2 + (a_{33} - \lambda)z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$  in laufenden Punktkoordinaten  $x, y, z$  der unendlich fernen Ebene (I § 49, 2) das Kegelschnittbüschel dar, welches die vier Schnittpunkte  $S_1, S_2, S_3, S_4$  (§ 100, 1) der unendlich fernen Kurve der Fläche zweiter Ordnung (§ 66, (23)) und des Kugelkreises § 84, (10') als Grundpunkte hat. Die Determinante § 109, (1) ist die mit den Koordinaten  $u, v, w$  einer Geraden der unendlich fernen Ebene (I § 49, 4) geränderte Determinante des Kegelschnittes  $\lambda$  in (46). Soll nun die Gerade  $u, v, w$  Bestandteil eines solchen Kegelschnittes, also Verbindungslinie zweier Grundpunkte sein, so müssen nach § 44, (19); 9 die sechs Bedingungen (12) bestehen.

*Die Bedingungen (12) drücken also gerade aus, daß die Ebene mit der Stellung  $u, v, w$  durch zwei von den vier Schnittpunkten der unendlich fernen Kurve der Fläche und des imaginären Kugelkreises geht.*

Im allgemeinen gibt es sechs Gerade  $u, v, w$ , die den Bedingungen (12) genügen, nämlich die Seiten des vollständigen Vierecks  $S_1 S_2 S_3 S_4$ . Fallen aber (§ 100, 1) dessen Ecken paarweise, in  $S_1 = S_3$  und  $S_2 = S_4$ , zusammen, so gibt es drei solche Gerade (10, IV), nämlich die Berührungssehne  $S_1 S_2$  und die beiden gemeinsamen Tangenten des Kugelkreises und der unendlich fernen Kurve der Fläche in den Berührungspunkten  $S_1$  und  $S_2$ . Die Berührungssehne gibt eigentliche Kreisschnitte (§ 100, 2, II), während die Tangenten nur imaginäre „Kreisparabeln“ liefern, insofern die beiden Kreispunkte derjenigen (imaginären) Ebenen, die durch eine Tangente des Kugelkreises gehen, zusammenfallen (§ 2, 9).

---