Erstes Kapitel.

Die Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen und die Anwendung des Irreductibilitätsbegriffes bei der Untersuchung von Transcendenten.

§ 1.

Die Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen.

Die Aufstellung von Theoremen, welche grössere Klassen algebraischer Differentialgleichungen umfassen, erfordert die Einführung des Begriffes der Irreductibilität der Differentialgleichungen, welche bisher*) nur bei gewissen Klassen linearer homogener Differentialgleichungen Berücksichtigung gefunden hat.

Die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y_1, y_2, \dots, y_q, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

in welcher $y_1, y_2, \dots, y_q$ algebraische irreductible Functionen von x bedeuten, während f eine ganze rationale Function der innerhalb der Klammern enthaltenen Grössen vorstellt, soll dann eine irreductible genannt werden, wenn sie weder in Bezug auf $\frac{d^m z}{dx^m}$ im algebraischen Sinne reductibel ist, noch mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung und von demselben Charakter

$$\varphi\left(x, y_1, y_2, \dots, y_q, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0,$$

worin φ wieder eine ganze rationale Function bedeutet, und $\mu < m$ ist, irgend ein Integral gemein hat.

Für $m=0$ fällt diese Definition der Irreductibilität der Differentialgleichungen mit derjenigen für algebraische Gleichungen zusammen.

Aus der gegebenen Definition folgt, dass eine irreductible Differentialgleichung mit keiner anderen algebraischen Differentialgleichung derselben Ordnung, welche jedoch in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten

*) Vergl. die Arbeiten des Herrn Frobenius über lineare Differentialgleichungen im Journal für Mathematik von Borchardt.

von niedrigerem Grade ist, ein Integral gemein haben kann, oder auch, dass eine irreductible Differentialgleichung für kein particuläres Integral sich in Factoren zerlegen lassen darf, welche den Charakter der gegebenen Differentialgleichung haben und in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade sind. Besitzt nämlich eine irreductible Differentialgleichung mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber von niedrigerem Grade in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten ein gemeinsames Integral, so kann man mit den linken Seiten der beiden Differentialgleichungen, als Polynome von $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers verfahren, ohne noch z irgend ein Integral bedeuten zu lassen; dann kann sich im Laufe der Operationen ein Rest ergeben, der ohne Benutzung des speciellen Werthes des gemeinsamen Integrales verschwindet, oder man gelangt zu einem Reste, der $\frac{d^m z}{dx^m}$ gar nicht mehr enthält, sondern nur aus einer rationalen Verbindung der $m-1$ ersten Differentialquotienten besteht; ist das erstere der Fall, so würde sich die gegebene Differentialgleichung für jedes z , als algebraische Gleichung in $\frac{d^m z}{dx^m}$ aufgefasst, in Factoren niedrigeren Grades in dieser Grösse zerlegen lassen, was nicht sein sollte, und träte das letztere ein, so würde, da bei der successiven Division in Folge der Annahme eines gemeinsamen Integrales der beiden Differentialgleichungen, auch stets der Rest durch dasselbe Integral identisch Null würde, somit auch der letzte Rest diese Eigenschaft besitzen, und daher das den beiden Differentialgleichungen gemeinsame Integral einer Differentialgleichung niedriger Ordnung genügen, was wiederum der Annahme der Irreducibilität widerspricht. Da aber ferner, wenn die irreductible Differentialgleichung sich für irgend ein particuläres Integral z_1 mit Benutzung desselben in Factoren zerlegen lassen würde, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade wären, einer dieser Factoren verschwinden, und somit eine Differentialgleichung derselben Ordnung und in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niedrigerem Grade existiren müsste, welche mit der gegebenen Differentialgleichung ein Integral gemein hat — was, wie eben gezeigt worden, nicht möglich ist — so kann also auch für kein Integral einer irreductibeln Differentialgleichung eine derartige Zerlegung stattfinden.

So wird z. B. die Operation des grössten gemeinsamen Theilers zwischen den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung

$$z'^2 - z' - (z - x)^2 - (z - x) = 0 \quad \text{und} \quad z' - z + x - 1 = 0,$$

welche das gemeinsame Integral $z = e^x + x$ besitzen, einen gleich Null identischen Rest liefern und daher die algebraische Reducibilität der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades in der Form

$$z'^2 - z' - (z - x)^2 - (z - x) = (z' - z + x - 1)(z' + z - x)$$

nach sich ziehen; dagegen wird dieselbe Operation ausgeübt auf die beiden Differentialgleichungen

$$z''^3 + xz'' - z' - 8 = 0 \quad \text{und} \quad z''^2 + xz' - 2z - 4 = 0,$$

welchen das particuläre Integral $z = x^2$ gemeinsam ist, als Rest der letzten Division

$$(z' + 8)^2 + (xz' - 2z - 4)(x - xz' + 2z + 4)^2$$

liefern, welcher Ausdruck ebenfalls für $z = x^2$ verschwindet.

Es war oben gezeigt worden, dass, wenn der Rest nicht identisch verschwindet sondern ein Differentialausdruck niederer Ordnung wird, das gemeinsame Integral auch der hierdurch definirten Differentialgleichung niederer Ordnung genügen wird, aber es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass nicht jedes Integral des Restes auch ein gemeinsames Integral der beiden Differentialgleichungen wird sein müssen, da man nur schliessen kann, dass für jedes Integral des Restes die beiden Differentialgleichungen derselben Ordnung aber verschiedenen Grades, wenn die höchste Ableitung als Unbekannte aufgefasst wird, eine gemeinsame Wurzel haben, doch braucht diese nicht die höchste Ableitung jenes Integrales des Restes zu sein. So wird, z. B. die Operation des grössten gemeinschaftlichen Theilers zwischen den Differentialgleichungen

$$z'' - 3z' + 2z = 0 \quad \text{und} \quad z''^2 - zz' = 0,$$

welche das Integral $z = e^x$ gemeinsam haben, den Rest

$$9z'^2 - 13zz' + 4z^2$$

liefern, und es hat in der That auch die Differentialgleichung

$$9z'^2 - 13zz' + 4z^2 = 0$$

das Integral $z = e^x$, während ihr zweites selbständiges particuläres Integral $z = e^{\frac{4}{3}x}$ weder der einen noch der anderen Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leistet; dagegen haben für $z = e^{\frac{4}{3}x}$, $z' = \frac{4}{3}e^{\frac{4}{3}x}$ die beiden Gleichungen

$$Z - 3z' + 2z = 0 \quad \text{und} \quad Z^2 - zz' = 0$$

oder

$$Z + \frac{2}{3}e^{\frac{4}{3}x} = 0 \quad \text{und} \quad Z^2 - \frac{4}{3}(e^{\frac{4}{3}x})^2$$

die Lösung $Z = -\frac{2}{3}e^{\frac{4}{3}x}$ gemein, ohne dass diese die zweite Ableitung von $e^{\frac{4}{3}x}$ ist.

Ist eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung in Bezug auf den Differentialquotienten erster Ordnung im algebraischen Sinne irreducibel, so muss sie, wenn sie reductibel sein soll, ein algebraisches Integral besitzen.

Es mag endlich noch bemerkt werden, dass, wie schon hervorgehoben worden, die Definition der Irreducibilität algebraischer Gleichungen zwar in der oben für die allgemeinen algebraischen Differentialgleichungen aufgestellten enthalten ist, dass jedoch eine wesentliche Abweichung in den aus dieser Definition hergeleiteten Folgerungen statthat; während nämlich für eine algebraische Gleichung der Satz gilt, dass, wenn sie *eine* Lösung besitzt, welche nicht die Wurzel einer gleichartigen Gleichung niederen Grades ist, keine ihrer Lösungen einer Gleichung niedrigeren Grades genügen darf, da offenbar *eine* einer solchen Gleichung angehörende Lösung in Folge der Zerlegbarkeit des Gleichungspolynoms dieselbe Eigenschaft für alle anderen Lösungen nach sich zieht, wird eine Differentialgleichung particuläre Integrale haben können, welche Differentialgleichungen niederer Ordnung genügen, und auch solche, welche nur Differentialgleichungen derselben oder höherer Ordnung angehören, wie z. B. eine Differentialgleichung erster Ordnung ein transcendentes und ein algebraisches Integral haben kann. Eine Differentialgleichung, welche singuläre Integrale besitzt, kann, wie aus der Definition der Irreducibilität unmittelbar hervorgeht, nicht irreducibel sein, da ein solches Integral auch die durch Differentiation der Differentialgleichung nach dem höchsten Differentialquotienten hervorgehende Differentialgleichung befriedigen muss.

Bevor wir nun zur Aufstellung einer charakteristischen Eigenschaft irreducibler Differentialgleichungen übergehen, sei eine einfache Bemerkung vorausgeschickt, von der wir im Folgenden häufig Gebrauch machen werden. Wenn zwei algebraische Differentialgleichungen

$$f(x, z, z', z'', \dots z^{(m)}) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, z, z', z'', \dots z^{(n)}) = 0$$

irgend ein particuläres Integral gemein haben, so wird man durch n -malige Differentiation der ersten und m -malige der zweiten Gleichung im Ganzen $m + n + 2$ Gleichungen erhalten, aus denen man, wenn z_1 das gemeinsame Integral bedeutet, die $m + n + 1$ Grössen

$$z_1, z_1', z_1'', \dots z_1^{(m+n)}$$

auf algebraischem Wege eliminiren, und so zu einer algebraischen Gleichung in x gelangen kann, welche nothwendig identisch erfüllt sein muss; man sieht aber sogleich, dass die Durchführung der successiven Elimination bis zu dem von z und dessen Ableitungen freien Ausdrücke nur dann möglich ist, wenn das gemeinsame Integral ein algebraisches

ist, weil sich die Grössen $z_1, z_1', \dots, z_1^{(m+n)}$ vermöge des Eliminationsprocesses als algebraische Functionen von x ergeben, und dass somit die Existenz eines gemeinsamen transcendenten Integrales als nothwendige Bedingung erfordert, dass die successive Elimination undurchführbar d. h. die oben hergeleiteten Differentialgleichungen nicht von einander unabhängig sind; so haben z. B. die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3 \frac{dz}{dx} + 2z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} - z = 0,$$

das gemeinsame transcendente Integral $z = e^x$, daher liefert die Differentiation der zweiten Gleichung eine Beziehung $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx} = 0$, welche mit der durch 2 multiplicirten zweiten Gleichung zusammengestellt, wieder auf die erste Differentialgleichung zurückführt.

Wir beweisen nun folgenden für die weitere Theorie wesentlichen Satz:

Wenn eine algebraische Differentialgleichung mit einer anderen gleichartigen von niedrigerer Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, ein Integral gemein hat, welches keiner Differentialgleichung noch niedriger Ordnung genügt, so werden sämtliche Integrale der zweiten Differentialgleichung auch der ersten genügen, oder die Differentialgleichung niedriger Ordnung wird ein algebraisches Integral der ersteren sein.

Hat nämlich die Differentialgleichung

$$(1) \dots F\left(x, y_1, y_2, \dots, y_q, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^\mu z}{dx^\mu}\right) = 0$$

mit der gleichartigen Differentialgleichung

$$(2) \dots f\left(x, y_1, y_2, \dots, y_q, z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

worin $m < \mu$ ist, ein Integral z_1 gemein, welches nicht zugleich einer gleichartigen Differentialgleichung niedriger Ordnung angehören soll, so denke man sich die Gleichung (2) für $z = z_1$ ($\mu - m$)-mal differenziert, woraus sich mit Einschluss von (1) und (2) $\mu - m + 2$ Gleichungen ergeben, aus denen die $\mu - m + 1$ Grössen

$$\frac{d^m z_1}{dx^m}, \quad \frac{d^{m+1} z_1}{dx^{m+1}}, \quad \dots, \quad \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu}$$

eliminiert werden sollen, so dass man vermöge der rationalen Ausdrückbarkeit der Ableitungen der irreductibeln algebraischen Functionen $y_1, y_2, \dots, y_q$ durch x und diese Functionen selbst eine algebraische gleichartige Differentialgleichung

$$(3) \dots \varphi\left(x, y_1, y_2, \dots, y_q, z_1, \frac{dz_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}\right) = 0$$

erhalten würde.

Man kann diesem Eliminationsprocesse aber eine einfache übersichtliche Gestalt geben; denn setzt man die Gleichung (2) in die Form

$$z^{(m)p} + f_1(x, z, z', \dots, z^{(m-1)}) z^{(m)p-1} + \dots \\ + f_p(x, z, z', \dots, z^{(m-1)}) = 0,$$

so folgt durch Differentiation

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \dots + f_{p-1}] z^{(m+1)} \\ + F_1(x, z, z', \dots, z^{(m)}) = 0,$$

durch nochmalige Differentiation mit Benutzung der zuletzt erhaltenen Gleichung

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \dots + f_{p-1}] z^{(m+2)} \\ + F_2(x, z, z', \dots, z^{(m)}) = 0,$$

u. s. w. bis

$$[p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \dots + f_{p-1}] z^{(\mu)} \\ + F_{\mu-m}(x, z, z', \dots, z^{(m)}) = 0$$

oder

$$z^{(\mu)} - \psi(x, z, z', \dots, z^{(m)}) = 0,$$

in welcher Gleichung ψ eine rationale Function bedeutet, und welche ebenfalls durch das Integral z_1 befriedigt wird. Beachtet man, dass der Ausdruck

$$p z^{(m)p-1} + (p-1) f_1 z^{(m)p-2} + \dots + f_{p-1}$$

wegen der für die Gleichung (2) gemachten Voraussetzung für $z = z_1$ auf Grund der oben gemachten Auseinandersetzungen nicht verschwinden kann, und denken wir uns jetzt die aus den durch Differentiation abgeleiteten Gleichungen sich ergebenden Werthe von

$$z_1^{(m+1)}, z_1^{(m+2)}, \dots, z_1^{(\mu)}$$

in die Gleichung (1) eingesetzt, so ergibt sich eine Gleichung

$$\Phi(x, z_1, z_1', \dots, z_1^{(m)}) = 0,$$

welche mit (2) zusammengestellt, gegen die Voraussetzung eine algebraische Differentialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung (3) liefern würde, welche z_1 zum Integral hat; es muss daher, da auch eine Gleichung m^{ter} Ordnung in z_1 und von niedrigerem Grade in $z_1^{(m)}$ als dem p^{ten} nicht existiren soll,

$$\Phi(x, z, z', \dots, z^{(m)}) = f(x, z, z', \dots, z^{(m)}) \cdot \Psi(x, z, z', \dots, z^{(m)})$$

sein. Ist somit z_2 irgend ein anderes Integral von (2), welches also auch die durch Differentiation aus (2) hergeleitete Gleichung befriedigt, so wird dasselbe, von singulären Integralen abgesehen, der zuletzt erhaltenen Gleichung zufolge auch der Gleichung

$$\Phi(x, z_2, z_2', \dots, z_2^{(m)}) = 0$$

identisch genügen, d. h. auch im angegebenen Sinne ein Integral von (1) sein. Da dies nun von jedem Integral der Gleichung (2) gilt, so wird (2) ein algebraisches Integral der Gleichung (1) sein.

So hat die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(\alpha) \dots \frac{dz}{dx} - z + x - 1 = 0$$

das transcendente Integral

$$z = e^x + x$$

mit der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(\beta) \dots \left(\frac{d^2z}{dx^2} \right)^2 - \frac{dz}{dx} (z - x) + z - x = 0$$

gemein; in der That geht aus (α) durch Differentiation mit Benutzung des Werthes von $\frac{dz}{dx}$

$$(\gamma) \dots \frac{d^2z}{dx^2} - z + x = 0$$

hervor, und setzt man aus (α) und (γ) die Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$ in (β) ein, so erhält man einen Ausdruck, der identisch gleich Null ist; es ist somit (α) ein algebraisches Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (β).

Als specieller Fall dieses Satzes folgt, dass, wenn eine Differentialgleichung erster Ordnung, welche in Bezug auf den ersten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, mit einer anderen Differentialgleichung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, jedes Integral der ersteren auch ein Integral der letzteren ist.

Da eine irreductible Differentialgleichung in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist, und keines ihrer Integrale einer Differentialgleichung niederer Ordnung angehören darf, so folgt der Satz:

Hat eine irreductible Differentialgleichung mit einer anderen Differentialgleichung ein Integral gemein, so muss sie alle Integrale mit derselben gemein haben oder ein algebraisches Integral der letzteren sein.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes wird sich nun aber die Definition der Irreductibilität einer Differentialgleichung am einfachsten folgendermassen gestalten:

Eine Differentialgleichung ist irreductibel, wenn sie in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten algebraisch irreductibel ist und kein algebraisches Integral irgend welcher Ordnung besitzt; denn vermöge der ersten Bedingung könnte sie nach der früher gegebenen Irreductibilitätsdefinition nur dann reductibel sein, wenn sie ein Integral mit einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung gemein

hat; dann ist aber dieses Integral entweder selbst ein algebraisches, oder, wenn man gleich die Differentialgleichung niedrigster Ordnung nimmt, mit der sie jenes Integral gemein hat, es ist ein algebraisch irreductibler Factor dieser Differentialgleichung ein algebraisches Integral derselben, wie eben gezeigt worden, und dies sollte nicht der Fall sein.

§ 2.

**Algebraische Beziehung zwischen Transcendenten
und deren Integralen.**

Um die Irreductibilitätsbedingungen von Differentialgleichungen aufzufinden, wird man sich verschiedener Methoden bedienen können, die wir an einzelnen Klassen von Differentialgleichungen erläutern wollen.

Werde zuerst die Frage aufgeworfen, wann die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y),$$

worin y eine irreductible algebraische Function von x , und f eine rationale Function von x und y bedeutet, reductibel ist, so fällt diese Frage nach der oben gegebenen Definition der Irreductibilität offenbar mit der Untersuchung der Bedingungen dafür zusammen, dass

$$\int f(x, y) dx$$

eine algebraische Function von x ist. Haben wir es also z. B. mit einer Differentialgleichung von der Form

$$\frac{dz}{dx} = \frac{F(x)}{y}$$

zu thun, worin $F(x)$ eine rationale Function von x bedeutet, welche in den Punkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ unendlich wird, und

$$y^2 = Ax^{2p+1} + B_0x^{2p} + B_1x^{2p-1} + \dots + B_{2p-1}x + B_{2p} = R(x)$$

ist, so werden sich die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reductibilität dieser Differentialgleichung in der Form ausdrücken*):

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-x_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-x_2)^{-1}} = 0, \quad \dots \dots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-x_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n \left\{ \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{x_\alpha} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} \right]_{t^{-1}} \right\} = 0,$$

*) Siehe die achte Vorlesung meiner Theorie der hyperelliptischen Integrale.

§ 2. Algebraische Beziehung zwischen Transcendenten und deren Integralen. 9

wenn $[f(t)]_{(t-x_\alpha)^{-1}}$ und $[f(t)]_{t^{-1}}$ die Coefficienten von $(t-x_\alpha)^{-1}$ resp. t^{-1} in der Entwicklung der Function $f(t)$ in der Umgebung von x_α und ∞ bedeuten, ferner

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \dots \\ + \frac{2p-r-3}{2} B_{r-3} t^2 + \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1},$$

und $r = 0, 1, 2, \dots, 2p-1$ gesetzt wird.

Sind x und y rationale Functionen eines Parameters t

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t),$$

so dass die zu untersuchende Differentialgleichung in

$$\frac{dz}{dt} = f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t)$$

übergeht, dann werden jene Bedingungen bekanntlich in der Form gegeben sein,

$$\left[f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) \right]_{(t-\tau_1)^{-1}} = 0, \dots, \left[f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) \right]_{(t-\tau_r)^{-1}} = 0,$$

wenn $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ die Unstetigkeitspunkte der in der Klammer befindlichen Function bedeuten.

Handelt es sich um die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} + f(x, y)z = 0,$$

so wird, da

$$z = ce^{-\int f(x, y) dx}$$

ist, die Frage nach den Bedingungen für die Reductibilität dieser Differentialgleichung oder für die Existenz eines algebraischen Integralen derselben mit der Untersuchung der Bedingungen zusammenfallen, unter denen sich $\int f(x, y) dx$ als der Logarithmus einer algebraischen Function darstellen lässt, und wir würden wieder für den Fall, dass $y = \sqrt{R(x)}$ ist, nach den oben angeführten Untersuchungen*) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen in expliciter Gestalt hinschreiben können, was wir jedoch, da wir dieselben für das Folgende nicht brauchen, hier unterlassen.

Was endlich die allgemeine lineare Differentialgleichung erster Ordnung betrifft

$$\frac{dz}{dx} + zf(x, y) = \varphi(x, y_1),$$

worin y_1 auch eine irreductible algebraische Function, und φ eine rationale Zusammensetzung von x und y_1 bedeutet, so unterliegt

*) Siehe die hyperelliptischen Integrale S. 145 ff.

offenbar $f(x, y)$ gar keiner Bedingung, wenn nur $\varphi(x, y_1)$ durch die linke Seite der Differentialgleichung bestimmt wird, in der für z irgend eine algebraische Function von x gesetzt werden darf; über die Form dieser algebraischen Integrale werden wir weiter unten in einem besonderen Kapitel handeln, das sich mit den allgemeinen linearen Differentialgleichungen beschäftigt wird.*)

Sei nunmehr die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(5) \dots \frac{d^2 z}{dx^2} = f(x, y)$$

vorgelegt, in welcher y eine gegebene algebraische irreductible Function, und f eine rationale Function bedeutet, und werde wiederum die Frage nach der Reductibilität dieser Gleichung aufgeworfen; schliessen wir von vornherein den Fall aus, dass diese Differentialgleichung ein algebraisches Integral hat, oder dass $\int dx \int f(x, y) dx$ sich algebraisch durch x ausdrücken lässt — für welchen Fall die Bedingungen, denen $f(x, y)$ unterworfen ist, nach den oben berührten Methoden aufzustellen sind — so wird nach den früheren Untersuchungen nur zu ermitteln sein, wann die Differentialgleichung (5) ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(6) \dots F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

besitzt. Setzt man nunmehr

$$\int f(x, y) dx = J, \quad \int dx \int f(x, y) dx = E,$$

so haben sämtliche Integrale der Differentialgleichung (5) die Form

$$z = E + cx + c_1,$$

worin c und c_1 willkürliche Constanten bedeuten, und da nach den früheren Ausführungen alle Integrale von (6) in denen von (5) enthalten sind, so wird das allgemeine Integral von (6) die Form haben müssen

$$z = E + \varphi(x) \cdot x + \varphi_1(x),$$

worin x eine willkürliche Constante, und $\varphi(x)$, sowie $\varphi_1(x)$ fest bestimmte Functionen dieser Constanten vorstellen**). Setzt man nun

*) Es mag hier bemerkt werden, dass eine eindeutige doppelt periodische Function n^{ter} Ordnung nie das Integral einer irreductibeln Differentialgleichung von höherer Ordnung als der ersten sein kann, da eine solche bekanntlich stets einer Differentialgleichung erster Ordnung genügt, deren Coefficienten rational aus dieser Function zusammengesetzt sind.

***) Die Function $\varphi(x)$ kann nicht eine von x unabhängige Constante darstellen, da sonst die Differentialgleichung erster Ordnung die Form haben müsste $\frac{dz}{dx} = \psi(x, y)$, also J eine algebraische Function wäre, welcher Fall gleich nachher ausgeschlossen wird.

in die auf die Form

$$z = F\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

gebrachte Differentialgleichung (6), worin F eine irreductible Function sein soll, in die auch x und y eintreten, den eben aufgestellten Werth für z ein, so folgt die für jedes x identische Gleichung

$$E + \varphi(x) \cdot x + \varphi_1(x) = F(J + \varphi(x)),$$

oder, wenn x_1 ein Werth von x ist, für den $\varphi(x)$ verschwindet, also

$$E + \varphi_1(x_1) = F(J)$$

ist, die Functionalgleichung

$$(7) \dots F(J + \varphi(x)) = F(J) + \varphi(x) \cdot x + \varphi_1(x) - \varphi_1(x_1).$$

Nehmen wir nun an, dass J selbst nicht eine algebraische Function ist — denn dieser Fall erledigt sich wieder nach dem Früheren, da es sich dann nur darum handelt, zu untersuchen, wann $\int f(x, y) dx$ sich algebraisch ausdrücken lässt, und dann $\frac{dE}{dx} = J$ die Differentialgleichung erster Ordnung definirt, welche das algebraische Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (5) darstellt — so muss die Gleichung (7) eine in J und x identische sein, aus der man durch Differentiiren nach J die Beziehung erhält

$$F'(J + \varphi(x)) = F'(J), \text{ d. h. } F(J) = AJ + B,$$

worin A und B von J unabhängig sind; setzt man diesen Werth in (7) ein, so folgt

$$A(J + \varphi(x)) + B = AJ + B + \varphi(x)x + \varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)$$

oder

$$A = x + \alpha,$$

worin α eine von x abhängige Constante bedeutet, und somit

$$(8) \dots E = (x + \alpha)J + \beta,$$

wenn β eine algebraische Function von x vorstellt. Differentiirt man nun die Gleichung (8), so erhält man

$$J = J + (x + \alpha)f(x, y) + \frac{d\beta}{dx} \text{ oder } \beta = - \int (x + \alpha)f(x, y) dx,$$

und da β eine algebraische Function sein sollte, so folgt, dass die Reductibilität der Differentialgleichung (5) erfordert, dass eine Constante α existirt, für welche $\int (x + \alpha)f(x, y) dx$ eine algebraische Function von x ist. Aber auch umgekehrt, wenn dies stattfindet, wird (5) reductibel sein; denn durch partielle Integration folgt

$$E = \int Jd(x + \alpha) = (x + \alpha)J - \int (x + \alpha)f(x, y) dx = (x + \alpha)J + \beta,$$

oder es ist E , d. h. ein Integral der Differentialgleichung (5), ein Integral der Differentialgleichung erster Ordnung

$$(9) \dots (x + \alpha) \frac{dz}{dx} - z + \beta = 0,$$

worin β der Voraussetzung gemäss eine algebraische Function bedeutet.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reducibilität der Differentialgleichung (5) sind somit die, dass entweder

$$\int dx \int f(x, y) dx \quad \text{oder} \quad \int f(x, y) dx$$

selbst algebraische Functionen sind, oder dass eine Constante α existirt, für welche das Integral

$$\int (x + \alpha) f(x, y) dx$$

sich als algebraische Function von x darstellen lässt.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{x - \varepsilon}$$

eine reducible sein, weil $\int (x - \varepsilon) \frac{dx}{x - \varepsilon} = x$ ist, und z wird nach Gleichung (9) der Differentialgleichung erster Ordnung genügen

$$(x - \varepsilon) \frac{dz}{dx} - z - x = 0,$$

was in der That für

$$z = (x - \varepsilon) \log (x - \varepsilon) - x$$

der Fall ist; ebenso wird

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{y},$$

worin $y = \sqrt{1 - x^2}$ ist, wegen $\int \frac{x dx}{y} = -y$ reductibel sein und als algebraisches Integral erster Ordnung die Differentialgleichung haben

$$x \frac{dz}{dx} - z + y = 0,$$

welcher das Integral

$$z = x \arcsin x + y$$

genügt.

Man kann die eben angestellte Irreducibilitätsuntersuchung auch noch von einem anderen Gesichtspunkte aus auffassen. Da J ein Abel'sches Integral ist, so ist die Existenz einer algebraischen Relation zwischen J und E identisch damit, dass das Integral derjenigen Transcendenten, welche durch ein Abel'sches Integral definiert ist, algebraisch durch dieselbe Transcendente ausdrückbar ist, und wir haben die Bedingung für die Existenz dieser Relation, und diese selbst nach Gleichung (9) stets als eine lineare gefunden; so wird nach den

• obigen Auseinandersetzungen die Existenz einer algebraischen Beziehung zwischen dem hyperelliptischen Integral und dem Integrale dieser Transcendenten an die nothwendige und hinreichende Bedingung gebunden sein, dass eine Constante ε existire, für welche mit Beibehaltung der oben definirten Bezeichnungen

$$\left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}} \right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n \left\{ \left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}} \int_{x_\alpha} F_r(t) dt \right]_{(t-x_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)(t+\varepsilon)}{\sqrt{R(t)}} \int_\infty F_r(t) dt \right]_{t^{-1}} \right\} = 0,$$

worin $r = 0, 1, 2, \dots, 2p-1$ zu setzen ist.

Allgemein würde nunmehr die Frage zu stellen sein, wann ist das Integral einer Transcendenten algebraisch durch eben diese Transcendente ausdrückbar, und bildet also nicht selbst eine neue selbständige Transcendente. Da nun, wenn ξ diese Transcendente bedeutet, und

$$\int \xi dx = z = F(x, \xi)$$

sein soll, worin F eine algebraische Function bezeichnet, durch Differentiation

$$\xi = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{dx}$$

folgt, so ergibt sich, dass ξ das Integral einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein muss, und man kann entweder durch Zusammenstellung dieser Differentialgleichung mit der die Transcendente ξ etwa definirenden Differentialgleichung die Bestimmung der Function F — häufig mit Hülfe einfacher partieller Differentialgleichungen, wofür sich später noch Beispiele finden werden — ausführen, oder auch von der Ueberlegung ausgehend, dass die die Transcendente ξ definirende Differentialgleichung vermöge der oben für ξ aufgestellten Differentialgleichung erster Ordnung eine reductible sein muss, die Frage auf eine Irreductibilitätsuntersuchung zurückführen, was im Folgenden geschehen soll*).

*) Die Frage, wann das Integral einer durch eine algebraische Differentialgleichung definirten Transcendenten wieder durch eben diese Transcendente algebraisch ausdrückbar ist, kann auch als Frage nach den Bedingungen aufgefasst werden, unter denen die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = \xi,$$

in welcher ξ die Lösung einer algebraischen Differentialgleichung ist, ein durch ihre Coefficienten — also von x abgesehen nur durch ξ — algebraisch ausdrückbares Integral besitzt, so dass die allgemeinere Frage sich mit den Bedingungen

14 § 2. Algebraische Beziehung zwischen Transcendenten und deren Integralen.

Sei zuerst die in Rede stehende Transcendente als das Integral einer linearen homogenen Differentialgleichung

$$(10) \dots \frac{d\xi}{dx} - f(x, y) \xi = 0$$

definiert, und die Frage aufgeworfen, wann zwischen ξ und $\int \xi dx = z$ eine algebraische Beziehung stattfindet, so wird z als Integral der Differentialgleichung

$$(11) \dots \frac{d^2 z}{dx^2} - f(x, y) \frac{dz}{dx} = 0$$

aufgefasst werden können, während die algebraische Beziehung zwischen z und ξ in die Form gesetzt werden soll

$$(12) \dots F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad z = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

wenn φ eine irreductible algebraische Function bedeutet; es muss dann also die Differentialgleichung (11) eine reductible sein. Setzen wir wieder voraus, dass z selbst nicht algebraisch ist, so wird nach dem Früheren die Gleichung (12) ein algebraisches Integral erster Ordnung von (11) sein müssen, und da alle Integrale der letzteren in der Form enthalten sind

$$z = c \int e^{\int f(x, y) dx} dx + c_1,$$

so wird, wenn

$$e^{\int f(x, y) dx} = G, \quad \int e^{\int f(x, y) dx} dx = H$$

gesetzt wird, das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung (12) lauten

$$(13) \dots z = \psi(x) \cdot H + \psi_1(x),$$

somit nach Gleichung (12)

$$\psi(x) \cdot H + \psi_1(x) = \varphi(\psi(x) \cdot G)$$

sein, und daher, da diese Gleichung für willkürliche x gültig ist, wenn für $x = x_1$ $\psi(x)$ der Einheit gleich wird,

$$H = \varphi(G) - \psi_1(x_1);$$

zu beschäftigen haben wird, unter denen eine Differentialgleichung

$$f\left(x, \xi, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

deren Coefficienten algebraische Functionen von x und ξ , und worin ξ die Lösung einer anderen algebraischen Differentialgleichung

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}, \dots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0$$

ist, ein in x und ξ algebraisch ausdrückbares Integral besitzt.

die obige Gleichung liefert somit die Functionalgleichung

$$(14) \dots \varphi(\psi(x) \cdot G) = \psi(x) \cdot \varphi(G) - \psi(x) \psi_1(x_1) + \psi_1(x).$$

Schliesst man wiederum den Fall aus, dass G eine algebraische Function oder dass $\int f(x, y) dx$ der Logarithmus einer algebraischen Function ist — welcher Fall wieder wie früher zu behandeln ist — so wird (14) wieder eine in G identische Gleichung sein, aus welcher durch Differentiation nach dieser Grösse folgt

$$\varphi'(\psi(x) \cdot G) = \varphi'(G), \quad \text{d. h. } \varphi(G) = AG + B,$$

worin A und B von G unabhängig sind. Setzt man diesen Werth in (14) ein, so ergibt sich

$$A\psi(x) \cdot G + B = A\psi(x) \cdot G + B\psi(x) - \psi(x) \psi_1(x_1) + \psi_1(x),$$

d. h. B ist eine Constante, während A algebraisch von x abhängt; setzt man die eben erhaltene Relation zwischen $\varphi(G)$ und G in die Form um

$$(15) \dots \int e^{f(x, y) dx} dx = A e^{f(x, y) dx} + B,$$

so sieht man unmittelbar, dass eine nothwendige Bedingung dafür, dass die beiden in Betracht kommenden Transcendenten in algebraischem Zusammenhange stehen, oder dass das Integral der Lösung der Differentialgleichung (10) eine algebraische Function dieser Lösung selbst ist, derart ausgedrückt werden kann, dass die lineare Differentialgleichung

$$(16) \dots \frac{dZ}{dx} + f(x, y) Z = 1$$

ein algebraisches Integral besitzt, da das allgemeine Integral derselben

$$Z = C e^{-\int f(x, y) dx} + e^{-\int f(x, y) dx} \int e^{\int f(x, y) dx} dx$$

vermöge der Gleichung (15), wenn $C = -B$ gesetzt wird, in A übergeht. Es ist aber auch umgekehrt unmittelbar zu sehen, dass, wenn die Gleichung (16) ein algebraisches Integral besitzt, eine Beziehung von der Form (15) sich ergibt, und wir finden somit: *die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Transcendenten*

$$\int e^{\int f(x, y) dx} dx \quad \text{und} \quad e^{\int f(x, y) dx}$$

in einer algebraischen Beziehung zu einander stehen, oder dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - f(x, y) \frac{dz}{dx} = 0$$

eine reductible sei, ist die, dass die lineare Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + f(x, y)z = 1$$

ein algebraisches Integral habe, oder dass diese selbst wieder reductibel sei; das algebraische Integral erster Ordnung jener Differentialgleichung zweiter Ordnung hat dann stets die Form

$$z = A \frac{dz}{dx} + B,$$

worin B eine Constante, A eine algebraische Function von x ist.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1+x}{x} \frac{dz}{dx} = 0,$$

eine reductible sein, da die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1+x}{x}z = 1$$

das algebraische Integral $z = \frac{x-1}{x}$ hat, und zwar hat jene das algebraische Integral erster Ordnung

$$z = \frac{x-1}{x} \frac{dz}{dx};$$

in der That stehen die beiden Integrale

$$\int e^{\int \frac{1+x}{x} dx} dx = e^x(x-1) \quad \text{und} \quad e^{\int \frac{1+x}{x} dx} = xe^x$$

in der algebraischen Beziehung

$$\int e^{\int \frac{1+x}{x} dx} dx = \frac{x-1}{x} e^{\int \frac{1+x}{x} dx}$$

§ 3.

Die Irreductibilitätsuntersuchung für die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Nachdem die Irreductibilitätsuntersuchung für eine specielle Differentialgleichung zweiter Ordnung durchgeführt worden, wollen wir die Bedingungen zu ermitteln suchen, unter denen die allgemeine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung irreductibel ist, eine Frage, deren Beantwortung wir zu den später folgenden Untersuchungen nöthig haben.

Sei die gegebene Differentialgleichung

$$(17) \dots \frac{d^2z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} + Qz = 0,$$

so ist vor allem leicht einzusehen, dass, wenn zwischen zwei Fundamentalintegralen z_1 und z_2 derselben eine algebraische Beziehung

$$(18) \dots z_2 = f(x, z_1)$$

stattfindet, diese Gleichung nothwendig reductibel ist; denn aus

$$\frac{dz_2}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1}{dx},$$

$$\frac{d^2 z_2}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{d^2 z_1}{dx^2}$$

folgt durch Einsetzen in (17), da auch z_1 dieser Gleichung genügt, $\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} \left(\frac{dz_1}{dx}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} \frac{dz_1}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Qz_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P \frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0$, und es würde somit z_1 die Lösung einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung sein, wenn nicht

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} = 0,$$

d. h. $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ eine Constante und somit $z_2 = Az_1 + B$ wäre, worin A eine Constante, B eine algebraische Function von x sein wird; in diesem Falle wäre aber auch B ein Integral der Differentialgleichung (17), die dann also ein algebraisches Integral hätte und ebenfalls reductibel wäre — da $B = 0$ der Voraussetzung widerspräche, dass z_1 und z_2 Fundamentalintegrale sind — *es wird somit die Differentialgleichung jedenfalls reductibel sein, wenn zwei Fundamentalintegrale in einer algebraischen Beziehung zu einander stehen.** Dass aber eine homogene

*) Wir wollen im Hinblick auf die Untersuchungen des dritten Kapitels noch die Frage erörtern, ob für eine irreductible, nicht lineare algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(1) \dots \frac{d^2 z}{dx^2} = F(x, z, \frac{dz}{dx})$$

zwei particuläre Integrale z_1 und z_2 in einem algebraischen Zusammenhange

$$(2) \dots z_2 = f(z_1)$$

stehen können, in welchem die Variable x nicht explicite vorkommen soll. Da nach (2)

$$z_2' = f'(z_1) z_1', \quad z_2'' = f'(z_1) z_1'' + f''(z_1) z_1'^2$$

ist, so folgt aus (1)

$$(3) \dots \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} F(x, z_1, z_1') + \frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2} z_1'^2 = F(x, f(z_1), \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} z_1'),$$

und diese Gleichung muss, da z_1 der vorausgesetzten Irreducibilität der Gleichung (1) wegen nicht einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen darf, eine in z_1 und z_1' identische sein. Setzen wir für z_1 in (3) eine Lösung ξ_1 der in z_1 algebraischen Gleichung $\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} = 0$, so wird noch für willkürliche z_1' die Beziehung bestehen müssen:

$$\left(\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2}\right)_{\xi_1} z_1'^2 = F(x, f(z_1)_{\xi_1}, 0),$$

und da die rechte Seite von z_1' frei ist, so muss $\left(\frac{\partial^2 f(z_1)}{\partial z_1^2}\right)_{\xi_1} = 0$ sein. Differenziert man die Gleichung (3) nach z_1 , wobei man z_1' als von z_1 unabhängig be-

lineare Differentialgleichung auch reductibel sein kann, ohne dass ihre Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, sieht man z. B. aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + (x - 1) \frac{dz}{dx} - xz = 0,$$

deren Fundamentalintegrale

$$z_1 = e^x, \quad z_2 = e^x \int e^{-\frac{x^2}{2} - x} dx,$$

wie man leicht erkennt, nicht in algebraischem Zusammenhange stehen, und die trotzdem wegen des Integrales e^x eine reductible ist.

Schliessen wir also den Fall aus, dass zwei Fundamentalintegrale in einem algebraischen Zusammenhange stehen und suchen die Bedingungen, unter denen die Gleichung (17) reductibel ist, so wird sie jedenfalls — den Fall ausgenommen, in dem sie ein algebraisches Integral besitzt — ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(19) \dots \frac{dz}{dx} = \varphi(x, z)$$

haben müssen, worin φ eine algebraische irreductible Function bedeuten soll; da nun das allgemeine Integral von (17), wenn z_1 und z_2

trachten darf, da die Gleichung eine in z_1 und z_1' identische war, so erhält man, wenn zugleich $z_1 = \xi_1$ gesetzt wird, weil der erste und zweite Differentialquotient der Function $f(z_1)$ für $z_1 = \xi_1$ Null waren, wie leicht zu sehen, auch $\left(\frac{\partial^3 f(z_1)}{\partial z_1^3}\right)_{\xi_1} = 0$, u. s. w., so dass $f(z_1)$, weil alle seine Differentialquotienten für $z_1 = \xi_1$ verschwinden, nothwendig eine Constante sein müsste. Dieser Schluss wäre unrichtig, wenn die Gleichung $\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} = 0$ gar keine Lösung hätte, also $\frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1}$ von z_1 unabhängig eine Constante a wäre; in diesem Falle würde aber die Beziehung (2) zwischen den Integralen in $z_2 = az_1 + b$ übergehen, und die Functionalgleichung (3)

$$aF(x, z_1, z_1') = F(x, az_1 + b, az_1')$$

werden, welche als eine in z_1 und z_1' identische algebraische Gleichung

$$F(x, z_1, z_1') = Qz_1 + Pz_1'$$

liefert, worin P und Q algebraische Functionen von x bedeuten; die Gleichung (1) würde somit die Form annehmen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = P \frac{dz}{dx} + Qz$$

und wäre daher eine homogene lineare; findet also für die irreductible Differentialgleichung (1), in welcher F eine algebraische Function ist, eine Beziehung von der Form (2) zwischen zwei Integralen derselben statt, so muss jene Gleichung eine lineare sein, und die Integrale sind nicht von einander unabhängig.

zwei Fundamentalintegrale sind, durch

$$z = Mz_1 + Nz_2$$

dargestellt ist, worin M und N willkürliche Constanten bedeuten, so wird auch das allgemeine Integral von (19) diese Form haben, wenn nur M und N bestimmte Functionen einer willkürlichen Integrationsconstanten c bedeuten. Bezeichnen wir nun zwei Integrale von (19) mit Z_1 und Z_2 , so dass

$$Z_1 = M_1 z_1 + N_1 z_2 \quad \text{und} \quad Z_2 = M_2 z_1 + N_2 z_2$$

ist, so darf vorausgesetzt werden, dass $M_1 N_2 - M_2 N_1$ im Allgemeinen von Null verschieden ist, da, wenn dieser Ausdruck stets Null wäre, zwischen je zwei particulären Integralen von (19) die Beziehung existirte $Z_2 = \kappa Z_1$, in der Z_1 ein bestimmtes, Z_2 jedes andere particuläre Integral, und κ eine willkürliche Constante wäre, dann müsste aber (19) eine lineare Differentialgleichung sein, und gerade dies wollen wir in allen Fällen nachweisen. Wir können somit z_1 und z_2 homogen linear durch Z_1 und Z_2 ausdrücken und erhalten somit das allgemeine Integral der Differentialgleichung (19) in der Form

$$z = RZ_1 + SZ_2,$$

wenn R und S bestimmte Functionen einer willkürlichen Integrationsconstanten sind. Setzen wir diesen Werth für z in (19) ein, so folgt

$$(20) \dots \varphi(x, RZ_1 + SZ_2) = R\varphi(x, Z_1) + S\varphi(x, Z_2),$$

und da diese Gleichung vermöge der Annahme, dass zwischen z_1 und z_2 , also auch zwischen Z_1 und Z_2 keine algebraische Beziehung stattfinden soll*), eine in Z_1 und Z_2 identische sein muss, so folgt durch Differentiation nach Z_1 und Z_2

$$\frac{\partial \varphi(x, RZ_1 + SZ_2)}{\partial (RZ_1 + SZ_2)} = \frac{\partial \varphi(x, Z_1)}{\partial Z_1} = \frac{\partial \varphi(x, Z_2)}{\partial Z_2},$$

und daher

$$\varphi(x, Z) = \psi(x) Z + \chi(x),$$

worin $\psi(x)$ und $\chi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten, für welche, wie durch Einsetzen dieses Werthes der φ -Function in (20)

*) Denn eine algebraische Beziehung $F(Z_1, Z_2) = 0$ würde $F(M_1 z_1 + N_1 z_2, M_2 z_1 + N_2 z_2) = 0$ hervorrufen, und diese Gleichung kann keine in z_1 und z_2 identische sein, da sonst durch Differentiation nach z_1 und z_2 , wenn $M_1 z_1 + N_1 z_2 = I$, $M_2 z_1 + N_2 z_2 = II$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial F}{\partial I} M_1 + \frac{\partial F}{\partial II} M_2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial I} N_1 + \frac{\partial F}{\partial II} N_2 = 0,$$

also $\frac{\partial F}{\partial I} = 0$ $\frac{\partial F}{\partial II} = 0$ oder $M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0$ folgen würde, was unmöglich ist.

hervorgeht,

$$R + S = 1 \quad \text{oder} \quad \chi(x) = 0$$

folgt. Es wird somit die Differentialgleichung erster Ordnung, welche ein algebraisches Integral der Gleichung (17) ist, jedenfalls die Form haben

$$(21) \dots \frac{dz}{dx} = \psi(x)z + \chi(x),$$

und wir erhalten den Satz:

Ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Fundamentalintegrale nicht selbst algebraisch sind und auch nicht in algebraischer Beziehung zu einander stehen, nicht irreducibel, so muss sie als algebraisches Integral erster Ordnung eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung besitzen, oder anders ausgedrückt, alle jene linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die nicht ein algebraisches Integral erster Ordnung von der Form

$$(A) \dots ce^{\int \psi(x) dx} + e^{\int \psi(x) dx} \int e^{-\int \psi(x) dx} \chi(x) dx$$

besitzen, worin $\psi(x)$ und $\chi(x)$ algebraische Functionen von x sind), sind irreducibel.*

So wird z. B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Perioden der elliptischen Integrale erster Gattung

$$x(1-x^2) \frac{d^2 \Omega}{dx^2} + (1-3x^2) \frac{d\Omega}{dx} - x\Omega = 0,$$

weil

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{x}{x_1^2} \Omega - \frac{x}{x_1^2} E = \psi(x)\Omega + \chi(x)$$

sein müsste, und E bekanntlich nicht durch Ω mit in x algebraischen Coefficienten linear ausdrückbar ist, irreducibel sein.

Zur Charakteristik jener Functionen $\psi(x)$ und $\chi(x)$ werde bemerkt, dass, wenn das allgemeine Integral (A) jener Differentialgleichung erster Ordnung

$$z = ce^{\int \psi(x) dx} + \Psi(x)$$

in die Gleichung (17) eingesetzt wird, wegen

$$\frac{dz}{dx} = c\psi(x)e^{\int \psi(x) dx} + \Psi'(x),$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = c\psi(x)^2 e^{\int \psi(x) dx} + c\psi'(x)e^{\int \psi(x) dx} + \Psi''(x)$$

*) Ueber die rationale Ausdrückbarkeit dieser Functionen, sowie der in den früheren Untersuchungen vorkommenden algebraischen Functionen wird später in der Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen ausführlich gehandelt.

sich

$$ce^{\int \psi(x) dx} \left\{ \psi'(x) + \psi(x)^2 + P\psi(x) + Q \right\} + \Psi''(x) + P\Psi'(x) + Q\Psi(x) = 0$$

ergiebt, welche Gleichung für willkürliche c identisch erfüllt sein muss, so dass

$$\psi'(x) + \psi(x)^2 + P\psi(x) + Q = 0 \quad \Psi''(x) + P\Psi'(x) + Q\Psi(x) = 0,$$

d. h. $e^{\int \psi(x) dx}$ und $\Psi(x)$

selbst Integrale der Gleichung (17) sind; da nun aber das erstere dieser Integrale der linearen homogenen Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = z\psi(x)$$

genügt, so folgt, dass die nicht irreductible lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung jedenfalls auch eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung zum algebraischen Integrale erster Ordnung haben muss*).

Es mag bemerkt werden — und es ist dies aus der Natur der vorher gemachten Schlüsse leicht einzusehen —, dass, wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung auch ein algebraisches Integral besitzt und mit einer Differentialgleichung erster Ordnung ein nicht algebraisches Integral gemein hat, so dass diese Differentialgleichung nach früheren Sätzen ein algebraisches Integral erster Ordnung jener Differentialgleichung ist, diese Differentialgleichung erster Ordnung ebenfalls eine lineare sein wird; so hat z. B. die Differentialgleichung

$$(a) \dots \left(\frac{2}{3}x - \frac{4}{15}x^2 \right) \frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{4}{15}x^2 - 1 \right) \frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{2}{3}x \right) z = 0$$

das algebraische Integral $z_1 = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}$, und es genügt ein zweites

Fundamentalintegral $z_2 = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} + e^x$ der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} - z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2}{5}x \right),$$

welche ein algebraisches Integral erster Ordnung von (a) ist, während das particuläre Integral $z = e^x$ der homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dz}{dx} = z$$

genügt, die ebenfalls ein Integral erster Ordnung von (a) darstellt.

*) Vergl. die Arbeit des Herrn Frobenius im 76. Bande des Crelle'schen Journals.

Wir werden den oben für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung erwiesenen Satz gleich nachher auf solche beliebiger Ordnung ausdehnen, an dieser Stelle werde nur noch erwähnt, dass für den Fall, dass $Q = 0$ ist, das nothwendige Bestehen der oben hergeleiteten Gleichung

$$\psi'(x) + \psi(x)^2 + P\psi(x) + Q = 0$$

auch so aufgefasst werden kann, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + Pz = 0$$

ein algebraisches Integral hat, d. h. wenn $z = \xi^{-1}$ gesetzt wird, dass

$$\frac{d\xi}{dx} - P\xi = 1$$

algebraisch integrirbar ist, was in der That im § 2 als Bedingung für die Reducibilität der Differentialgleichung $\frac{d^2z}{dx^2} - f(x, y) \frac{dz}{dx} = 0$ gefunden war.

Die obige Untersuchung war für den Fall durchgeführt worden dass die beiden Fundamentalintegrale der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht in algebraischem Zusammenhange stehen; fassen wir jetzt den Fall auf, dass eine solche algebraische Beziehung zwischen den Fundamentalintegralen existirt, wobei natürlich der Fall, dass eines derselben algebraisch ist, ausgeschlossen werden muss, da es dann das andere auch sein würde. Betrachten wir zuerst als Beispiel die Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3 \frac{dz}{dx} + 2z = 0,$$

zwischen deren beiden Fundamentalintegralen $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{2x}$ die algebraische Beziehung

$$z_2 = z_1^2$$

besteht; fassen wir das particuläre Integral $z = e^x + e^{2x}$ auf, so sieht man sogleich, dass dieses nicht einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen kann, sondern das Integral der Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 - (4z + 1) \frac{dz}{dx} + z(4z + 1) = 0$$

ist, welche wiederum ein algebraisches Integral erster Ordnung der gegebenen Differentialgleichung sein wird mit dem allgemeinen Integrale $ce^x + c^2e^{2x}$; dagegen genügen die particulären Integrale z_1 und z_2 linearen homogenen Differentialgleichungen.

Wenn also für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (17) zwei Fundamentalintegrale z_1 und z_2 in der algebraischen Beziehung

$$(22) \dots z_2 = f(x, z_1)$$

stehen, unter welchen Bedingungen wird dann ein particuläres Integral existiren, welches einer *linearen* Differentialgleichung erster Ordnung Genüge leistet? Oben ist bereits gezeigt worden, dass, wenn ein particuläres Integral dieser Art existirt, jedenfalls auch ein anderes vorhanden sein muss, das eine lineare *homogene* Differentialgleichung erster Ordnung

$$(23) \dots \frac{dz}{dx} = pz,$$

befriedigt, in welcher p eine algebraische Function von x bedeutet. Die unter Voraussetzung der Gleichung (18) oben erhaltene Gleichung wird, wenn wir unter z_1 grade das Integral der Gleichung (23) verstehen — und das dürfen wir, weil, wenn unter zwei Fundamentalintegralen eine algebraische Beziehung besteht, dies für je zwei solcher Integrale der Fall ist — also die Beziehung $\frac{dz_1}{dx} = pz_1$ benutzen, die Form annehmen:

$$p^2 z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} + 2p z_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - Q z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + P \frac{\partial f}{\partial x} + Qf = 0,$$

und machen wir nunmehr die Annahme, dass in der algebraischen Relation (22) zwischen z_1 und z_2 die Variable x nicht explicite vorkommt, so wird wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z_1} = 0$ die letzte Gleichung in

$$p^2 z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} - Q z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Qf = 0$$

übergehen, woraus

$$(24) \dots \frac{Q}{p^2} = \frac{z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2}}{z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - f}$$

folgt. Da nun Q und p algebraische Functionen von x sind, die rechte Seite dieser Gleichung aber nur von z_1 algebraisch abhängt, welche Grösse aber selbst nicht eine algebraische Function von x sein sollte, so müssen die beiden Seiten der Gleichung (24) constante Grössen sein, also

$$(25) \dots \frac{Q}{p^2} = \kappa \quad \text{und} \quad z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = \kappa \left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} - f \right).$$

Aus der zweiten Gleichung (25) folgt

$$z_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z_1^2} = \kappa \cdot z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{f}{z_1} \right) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\kappa}{z_1} f + \kappa_1,$$

worin κ_1 , da f von x frei sein sollte, wiederum eine Constante sein wird, somit durch nochmalige Integration:

$$z_2 = f(z_1) = c z_1^\kappa - \frac{\kappa_1}{\kappa - 1} \cdot z_1, \quad p = \sqrt{\frac{Q}{\kappa}},$$

wenn c eine willkürliche Constante und κ , da $f(z_1)$ eine algebraische Function von z_1 sein sollte, eine rationale Zahl ist; ausserdem kann $z_2 + \frac{\kappa_1}{\kappa-1} z_1$ als ein zweites Fundamentalintegral zu z_1 aufgefasst werden.

Wenn also für eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung (17), deren Fundamentalintegrale in einem algebraischen, von der unabhängigen Variablen freien Zusammenhange stehen, eines derselben z_1 einer homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung genügen soll, so muss die algebraische Beziehung zwischen z_1 und einem anderen Fundamentalintegrale z_2 lauten

$$(a) \dots z_2 = c z_1^\kappa,$$

und jene Differentialgleichung erster Ordnung

$$(b) \dots \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{Q}{\kappa}} \cdot z$$

sein, welche wieder ein algebraisches Integral erster Ordnung der Differentialgleichung (17) ist, und wie man leicht sieht, wird auch umgekehrt, wenn zwischen z_1 und z_2 eine algebraische Beziehung von der angegebenen Art existirt, z_1 die Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung (b) sein.

So wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \left(\frac{1 + 3\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}}{2x} \right) \frac{dz}{dx} + xz = 0$$

die beiden Integrale

$$z_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}} \quad \text{und} \quad z_2 = e^{\frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}}}$$

besitzen, welche in der algebraischen Beziehung $z_2 = z_1^2$ zu einander stehen, und von denen z. B. z_1 der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung genügt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} x^{\frac{1}{2}} z.$$

Es mag noch hinzugefügt werden, dass, wenn der Quotient zweier particulären Fundamentalintegrale eine algebraische Function von x , also

$$\frac{z_2}{z_1} = F(x)$$

ist, dann aus der bekannten Beziehung

$$z_1^2 \frac{d\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{dx} = c e^{-\int P dx}$$

sich

$$z_1 = \varphi(x) e^{-\frac{1}{2} \int P dx}$$

identisch bestehen, und wir erhalten somit einerseits $M = 0$, andererseits, wenn wir

$$A_1 Z_1 + \dots + A_m Z_m = I, \quad A_1 Z_1' + \dots + A_m Z_m' = II, \dots \\ \dots A_1 Z_1^{(q-1)} + \dots + A_m Z_m^{(q-1)} = P$$

setzen, durch Differentiation nach den einzelnen Grössen (a)

$$\frac{\partial \varphi(x, I, II, \dots, P)}{\partial I} = \frac{\partial \varphi(x, Z_1, Z_1', \dots, Z_1^{(q-1)})}{\partial Z_1} = \\ = \frac{\partial \varphi(x, Z_2, Z_2', \dots, Z_2^{(q-1)})}{\partial Z_2} = \dots = \frac{\partial \varphi(x, Z_m, Z_m', \dots, Z_m^{(q-1)})}{\partial Z_m} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \varphi(x, I, II, \dots, P)}{\partial P} = \frac{\partial \varphi(x, Z_1, Z_1', \dots, Z_1^{(q-1)})}{\partial Z_1^{(q-1)}} = \\ = \frac{\partial \varphi(x, Z_2, Z_2', \dots, Z_2^{(q-1)})}{\partial Z_2^{(q-1)}} = \dots = \frac{\partial \varphi(x, Z_m, Z_m', \dots, Z_m^{(q-1)})}{\partial Z_m^{(q-1)}},$$

d. h. es ist für $\varepsilon = 1, 2, \dots, m$

$$(33) \dots \varphi(x, Z_\varepsilon, Z_\varepsilon', \dots, Z_\varepsilon^{(q-1)}) = L_0 Z_\varepsilon + L_1 Z_\varepsilon' + \dots + L_{q-1} Z_\varepsilon^{(q-1)} + L,$$

worin $L_0, L_1, \dots, L_{q-1}, L$ Functionen von x bedeuten, oder nach

(31) die Form der Differentialgleichung (27)

$$(34) \dots N_0 \frac{d^q z}{dx^q} + N_1 \frac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}} + \dots + N_q z = Q,$$

somit eine lineare, deren Coefficienten $N_0, N_1, \dots, N_q, Q$ algebraische Functionen von x sind.

Unter den gemachten Voraussetzungen muss also ein algebraisches Integral q^{ter} Ordnung einer linearen Differentialgleichung eine lineare Differentialgleichung q^{ter} Ordnung sein.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn die q particulären Fundamentalintegrale der reducirten Gleichung von (34)

$$(35) \dots N_0 \frac{d^q z}{dx^q} + N_1 \frac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}} + \dots + N_q z = 0$$

mit $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ bezeichnet werden, wieder das allgemeine Integral von (34) die Form haben wird

$$(36) \dots z = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_q \xi_q + \xi_0,$$

worin $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ willkürliche Constanten und ξ_0 eine bestimmte Function von x bedeutet; da aber das allgemeine Integral von (34) jedenfalls ein Integral der vorgelegten linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung (26) sein muss, so folgt, dass auch ξ_0 ein Integral von (26) sein wird, und dass daher auch die Differentialgleichung (35) ein algebraisches Integral der reducirten Gleichung von (26) sein