PREFAZIONE

Nel presente volume sono esposte le applicazioni fondamentali del Calcolo infinitesimale alla geometria, che da alcuni anni sviluppo nel mio corso all'Università.

Si è fatto uso in questo trattato di alcune operazioni sui segmenti, spiegate nell'Introduzione. Queste operazioni, sviluppate nel corrente secolo sotto diverse forme da varii illustri matematici, fra cui meritano menzione speciale BELLAVITIS [1]), MÖBIUS [2]) e principalmente HAMILTON [3]) e GRASSMANN [4]), compaiono già, più o meno ampiamente, in opere aventi scopo didattico, come nei corsi di Meccanica di SCHELL [5]) e SOMOFF [6]), nel corso di calcolo di HOÜEL [7]), e altrove. Nel presente libro però non si fa uso che delle operazioni più semplici; i concetti introdotti si possono ridurre essenzialmente ai seguenti:

1° L'equipollenza di due segmenti (pag. 1). Si è assunto, per

---

1) Annali delle Scienze del Regno Lombardo-Veneto, vol. 2° (1832) e vol. 5° (1835). Sposizione del metodo delle equipollenze — Memorie della società delle Scienze residente a Modena. Tomo XXV, parte 2ª (1854). Sulle origini del metodo delle equipollenze. — Memorie dell'Istituto Veneto: vol. XIX (1876).

2) Der Barycentrische Calcul (Leipzig 1827) — Ueber die Zusammensetzung gerader Linien ecc. (1844); Ges. Werke Bd. 1, pag. 601.

3) Lectures on Quaternions (Dublin 1853). — Elemente der Quaternionen, Deutsch von Glan (Leipzig 1882).

4) Ausdehnungslehre (1844) (2ª edizione 1878). — V. anche Hankel, Vorl. ü. die Complexen Zahlen (1867).

5) Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2ª edizione (1879).

6) Theoretische Mechanik, übersetzt von Ziwet (1878).

7) Cours de Calcul infinitésimal (Paris, 1878).

indicare l'equipollenza, il segno $\equiv$, il quale è tipograficamente più comodo di quello ($\triangleq$) usato dal Bellavitis, o di quello ($\stackrel{*}{=}$) proposto dal Schell, e che, almeno in un primo studio, evita gli equivoci cui potrebbe dar luogo il segno $=$ adottato da Möbius, Grassmann, Hamilton, ed altri.

2° La somma geometrica, o composizione dei segmenti (pag. 4), analoga alla composizione delle traslazioni, velocità, ecc.

3° Il prodotto di due segmenti (pag. 6), indicato colla scrittura $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, cioè il prodotto delle lunghezze dei due segmenti pel coseno dell'angolo compreso. Questo prodotto è funzione simmetrica (o commutativa) dei due segmenti, e distributiva rispetto ad ogni fattore. Esso fu introdotto da Resal[1]) col nome di *prodotto geometrico*, e corrisponde a $-\mathrm{S}.\mathbf{a}\mathbf{b}$ di Hamilton. Se il primo segmento rappresenta una forza, il secondo lo spostamento del punto materiale cui è applicata la forza, il prodotto dei due segmenti misura il lavoro della forza.

4° L'area $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ (pag. 17) cioè l'area del parallelogrammo costrutto sui due segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; e il volume $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ del parallelepipedo compreso fra questi segmenti (pag. 24). L'area ed il volume sono funzioni alternate dei segmenti, e distributive rispetto ad ogni segmento. Queste notazioni sono dovute a Grassmann.

I segmenti così definiti possono essere funzioni di variabili numeriche, e ad essi si applicano i concetti di limite, derivate ordinarie, successive e parziali, la formula di Taylor, le funzioni interpolari, e così via, analogamente a quanto si fa per le funzioni numeriche. Gli stessi concetti si applicano alle aree e volumi variabili, e specialmente ai punti variabili. Se un punto è funzione d'una variabile t, e questa misura il tempo, la derivata prima del punto non è altro che la velocità, e la derivata seconda l'accelerazione del punto.

---

[1]) Traité de Cinématique pure (Paris 1862) pag. 64.

Lo studio delle curve e superficie resta agevolato da queste notazioni; le formule assumono forma più concisa; infine parecchi risultati, come quelli del Cap. IV, mal si saprebbero enunciare senza queste notazioni. La semplicità delle formule sarebbe aumentata, e il calcolo geometrico reso più potente, se si fossero fatte nuove convenzioni, le quali però ci avrebbero condotti al di là dei limiti prefissi in questa pubblicazione.

Si ebbe cura in questo trattato di ben definire il limite d'un punto, d'una retta, d'un piano (pag. 30) e d'una figura variabile (pag. 302); a proposito di questi limiti sono dimostrati alcuni teoremi. Queste definizioni e dimostrazioni mancano nei trattati comuni; pure, se esse si possono tralasciare in un primo studio, sono necessarie per una rigorosa trattazione delle questioni della geometria infinitesimale; poichè, come si dimostra p. e. che il limite d'un prodotto è eguale al prodotto dei limiti, si deve pure esaminare sotto quali condizioni p. e. l'intersezione di due superficie variabili abbia per limite l'intersezione dei limiti delle superficie. Inoltre queste definizioni permettono uno studio più accurato degli inviluppi di curve e superficie.

Nel Cap. IV sono studiate le funzioni numeriche della posizione d'un punto. La derivata d'una tale funzione è un segmento il cui valore assoluto fu chiamato dal LAMÈ[1]) *parametro differenziale di primo ordine.* Le proposizioni di questo capitolo permettono di risolvere in modo assai elegante i principali problemi riferentisi alle normali a curve e superficie, e ai massimi e minimi geometrici.

---

[1]) Leçons sur les coordonnées curvilignes (Paris 1859), pag. 6. In quest'opera non comparisce ancora il segmento, che qui si chiamò derivata, e che fu introdotto da Somoff o. c. I risultati di questo capitolo, già intravvisti da Leibniz (Math. Schriften, Berlin 1849, tomo VI, pag. 233), furono enunciati da Poinsot (Statique, Bruxelles, 1836, pag. 291).

Il Cap. V contiene le definizioni di lunghezze, aree, volumi, e le relative formule. Sonvi pure trattate alcune questioni generali sui campi di punti, sulle funzioni distributive di campi, e sugli integrali estesi a campi. Le formule d'approssimazione delle aree sono accompagnate dai rispettivi resti; questi furono recentemente ottenuti dal Mansion[1]).

Il concetto di polare d'una retta o d'un piano variabile in un punto, e le proposizioni relative a pag. 318-333 permettono di risolvere le seguenti questioni, e altre analoghe: Date le derivate (velocità) d'un sistema di punti variabili, trovare: 1°) il punto in cui una retta che unisce due punti del sistema tocca il proprio inviluppo, supposto che questa retta muovasi in un piano fisso; 2°) il piano tangente in un punto qualunque della superficie generata da una retta del sistema; 3°) le caratteristiche dei piani che uniscono a tre a tre i punti dati; 4°) le derivate dei punti d'incontro di queste rette e piani variabili, ecc.

In questo libro citai più volte il volume di Calcolo già da me pubblicato nel 1884. In quel volume io intrapresi a pubblicare, col permesso dell'illustre prof. sen. A. Genocchi, la prima parte del corso da questi dato nell'Università. Vi aggiunsi alcune proposizioni in parte estratte da varie opere, in parte mie ricerche originali. Parecchie di queste aggiunte sono contrassegnate o col mio nome, o col carattere di stampa più minuto, o dalla parola *esercizii;* non portano alcun segno quelle aventi i numeri 76-78, 91-96, 110, 112, 114, 116, 126, 152-155, 157-160, 162, 192, 206, 208. Queste aggiunte mi obbligarono ad alcune lievi modificazioni; quindi il libro pubblicato non rappresenta fedelmente le lezioni del prof. Genocchi, ma è un mio lavoro di compilazione. A questo proposito il prof. Genocchi pubblicò negli Annali di Ma-

[1]) Bulletin de l'Académie R. de Belgique 1886, pag. 293-307.

tematica (Serie 2ª, tomo XII) la seguente dichiarazione: « In « questi giorni i librai fratelli BOCCA hanno pubblicato un volume « intitolato *Calcolo differenziale e principii di Calcolo inte-* « *grale*... Perchè non mi si attribuisca ciò che non è mio, debbo « dichiarare che non ho avuto alcuna parte nella compilazione « dell'accennato volume, e che tutto è dovuto a quel giovine « egregio che è il Dottor GIUSEPPE PEANO, sottoscritto alla Prefa- « zione ed alle Annotazioni ». Quindi, benchè io abbia fatto largo uso delle lezioni del chiar.mo professore, mi assumo l'intera responsabilità di quanto sta scritto in quel libro, come se sul frontispizio del medesimo non comparisse altro nome che il mio.

Mi è grato infine esprimere i più vivi ringraziamenti al mio amico Gino Loria, professore di Geometria superiore nella R. Università di Genova, per la cura ch'egli ebbe nella correzione di questo libro.