II. — FORMULES RELATIVES AUX TRIANGLES SPHÉRIQUES QUELCONQUES.

27. Parmi les relations qui existent entre les six éléments, côtés et angles d'un triangle sphérique quelconque, les plus simples et en même temps les plus utiles sont celles qui contiennent quatre éléments.

Il y a autant de ces formules que l'on peut faire de choix de quatre objets sur six, c'est-à-dire $\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$, mais elles se résument en quatre types : le type des formules qui contiennent les trois côtés et un angle dont le nombre est celui des angles ou 3. Le type des formules qui contiennent deux des trois couples d'éléments opposés, ou ce qui revient au même, deux éléments consécutifs et leurs opposés respectifs, dont le nombre est aussi de 3. Le type des formules qui contiennent deux éléments opposés et l'un quelconque des couples d'éléments intermédiaires, ou ce qui revient au même, quatre éléments consécutifs quelconques, dont le nombre est de 6. Enfin le type des formules qui contiennent les trois angles et un côté dont le nombre est de 3, ce qui fait bien 15 en tout.

Si maintenant on observe que toutes les formules d'un même type se déduisent de l'une d'entr'elles par un simple échange de lettres, on voit qu'il suffira d'établir une formule pour chaque type. Or, c'est ce à quoi on parvient d'une manière uniforme et simple, en décomposant en deux triangles rectangles ACH, BCH (*fig.* 6). le triangle quelconque considéré

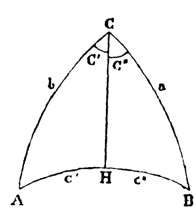

Fig. 6.

ABC par une de ses hauteurs CH, et combinant convenablement les relations connues relatives à certains éléments de ces deux triangles rectangles.

28. *Premier type des formules à quatre éléments. — Démonstration de la relation qui existe entre a, b, c et A.*

Posons (*fig.*6) $CH = h$, $ACH = C'$, $BCH = C''$, $AH = c'$, $BH = c''$.

Les deux triangles rectangles CAH, CBH donnent les trois relations

$$\cos b = \cos h \cos c', \qquad \cos a = \cos h \cos c'',$$

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang} c'}{\operatorname{tang} b}.$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\cos c''}{\cos a} = \frac{\cos c'}{\cos b} = \frac{\sin c'}{\sin b \cos A};$$

mais on a

$$c = c' + c'',$$

d'où

$$c'' = c - c',$$

donc

$$\cos c'' = \cos c \cos c' + \sin c \sin c'$$

et en remplaçant $\cos c''$, $\cos c'$, $\sin c'$ par les quantités, $\cos a$, $\cos b$, $\sin b \cos A$, qui leur sont respectivement proportionnelles,

on trouve :

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

29. Telle est la formule cherchée; les deux autres du même type s'en déduisent en faisant des permutations tournantes simultanées sur a, b, c et sur A, B, C et l'on a

$$1^{\text{er}}\ \text{type}\ \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{cases}$$

30. Ces résultats s'énoncent, en langage ordinaire, de la manière suivante : les formules du premier type, c'est-à-dire celles qui contiennent les trois côtés et un angle s'obtiennent en écrivant que le cosinus du côté opposé à l'angle est égal au développement du cosinus de la différence des deux autres côtés dont on a multiplié le second terme par le cosinus de l'angle.

31. Indiquons encore comment on retrouve les formules au moyen de quelques données sur leur composition.

Nous supposerons que l'on ait retenu relativement à ces formules, les circonstances suivantes : elles sont à trois termes (monomes), sans coefficients numériques. Chaque terme est composé de 1, 2 ou 3 facteurs sans exposants et choisis parmi les sinus et les cosinus des quatre éléments qui doivent figurer dans la formule, enfin le sinus et le cosinus d'un même élément n'entrent jamais à la fois dans un même terme. Ceci posé, et nous bornant à considérer la relation entre a, b, c et A, je dis d'abord qu'elle ne contient pas sin A ; en effet, s'il en était autrement, les termes où ce sinus entrerait en facteur, disparaîtraient pour $A = 180°$ et la relation deviendrait une relation à deux termes au plus, composés de facteurs fonctions de a, b, c qui d'ailleurs devrait équivaloir à $a = b + c$, comme on le voit *à priori*. Égalant alors à zéro l'un des facteurs qui resteront dans cette relation à un où deux termes, ce qui déterminera l'un des éléments a, b ou c; on obtiendra une identité ou une relation à un terme faisant connaître un second élément, tandis que la même hypothèse, introduite dans la relation équivalente $a = b + c$ ne déterminera que la somme ou la différence de deux des éléments a, b, c, d'où résulte une incompatibilité qui prouve l'absurdité de l'hypothèse relative à A.

Sin A n'entrant pas dans la relation cherchée, cos A doit y figurer et si on fait $A = 90°$, cette relation se réduira à celle $\cos a = \cos b \cos c$ qui lie l'hypoténuse a aux deux côtés b et c de l'angle droit dans un triangle rectangle. De ces deux remarques, il résulte que la relation générale est de la forme

$$m \cos a + n \cos b \cos c + p \cos A = 0$$

m, n et p étant indépendants de A et ayant par conséquent toujours les mêmes valeurs quelle que soit la valeur de A; mais pour $A = 180°$, on a $a = b + c$, d'où,

$$\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c = 0\ ;$$

donc, $m = 1$, $n = -1$, $p = \sin b \sin c$ et la formule générale devient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \qquad \text{C. Q. F. T.}$$

32. *Deuxième type des formules à quatre éléments. — Démonstration de la relation entre a, B, A, b.*

Conservant la figure et les notations qui ont déjà servi pour le type premier, les triangles rectangles CAH, CBH, donnent :

$$\sin h = \sin b \sin A \qquad \sin h = \sin a \sin B,$$

d'où

$$\sin b \sin \mathrm{A} = \sin a \sin \mathrm{B}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin \mathrm{A}}{\sin a} = \frac{\sin \mathrm{B}}{\sin b}.$$

33. Telle est la formule cherchée. Les deux autres appartenant au même type s'en déduisent, en faisant simultanément des permutations tournantes sur a, b, c et sur A, B, C et l'on a

$$2^{\mathrm{e}} \text{ type} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin a \sin \mathrm{B} = \sin b \sin \mathrm{A} \\ \sin b \sin \mathrm{C} = \sin c \sin \mathrm{C} \\ \sin c \sin \mathrm{A} = \sin \mathrm{C} \sin a \end{array} \right.$$

ou

$$2^{\mathrm{e}} \text{ type} \qquad \frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}$$

34. Ces résultats s'énoncent en langage ordinaire de la manière suivante : Les formules du second type, c'est-à-dire celles qui contiennent deux éléments consécutifs et leurs opposés respectifs, ou bien encore deux des trois couples d'éléments opposés, s'obtiennent en écrivant que le produit des sinus de deux éléments consécutifs est égal au produit des sinus des éléments respectivement opposés, ou bien encore que les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

35. Indiquons encore comment on retrouve les formules quand on n'a que quelques données sur leur composition. La simplicité de ces formules et leur extrême analogie avec celles entre les mêmes éléments, qui se rapportent aux triangles rectilignes, rendent à cet égard toute règle superflue. Il ne sera cependant pas inutile de remarquer que l'on peut atteindre immédiatement le but, lorsqu'on sait que les formules contiennent deux termes dont les facteurs sont deux sinus; il suffira, en effet, d'exiger leur vérification pour $A = 90°$.

36. *Troisième type des formules à quatre éléments. — Démonstration de la relation entre a, B, c, A.*

Les deux triangles rectangles CAH, CBH (*fig.* 6), donnent les trois relations

$$\operatorname{tang} h = \operatorname{tang} A \sin c', \qquad \operatorname{tang} h = \operatorname{tang} B \sin c'',$$

$$\operatorname{tang} c'' = \operatorname{tang} a \cos B,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\sin c'}{\sin B \sin a \cos A} = \frac{\sin c''}{\sin A \sin a \cos B} = \frac{\cos c''}{\sin A \cos a};$$

mais on a

$$c = c' + c'' \qquad \text{d'où} \qquad c' = c - c''$$

donc

$$\sin c' = \sin c \cos c'' - \sin c'' \cos c$$

et, en remplaçant, $\sin c'$, $\cos c''$, $\sin c''$, par les quantités

$$\sin B \sin a \cos A, \qquad \sin A \cos a, \qquad \sin A \cos a \cos B.$$

qui leur sont respectivement proportionnelles, on trouve :

$$\sin a \sin B \cos A = \sin c \sin A \cos a - \cos c \sin A \cos a \cos B$$

ou

$$\cos a \sin c \sin A - \cos A \sin B \sin a = \sin a \sin A \cos c \cos B$$

37. Telle est la formule cherchée ; les autres du même type s'en déduisent aisément : d'abord, si on garde les éléments extrêmes a et A et qu'on substitue aux éléments moyens c, B, leur second système de valeurs b et C, on a pour le couple de formules correspondant aux mêmes éléments extrêmes, a et A

$$\cos a \sin c \sin A - \cos A \sin B \sin a = \sin a \sin A \cos c \cos B$$

$$\cos a \sin b \sin A - \cos A \sin C \sin a = \sin a \sin A \cos b \cos C$$

faisant ensuite dans ce couple des permutations tournantes simultanées sur a, b, c et A, B, C on trouve

$$\cos a \sin c \sin A - \cos A \sin B \sin a = \sin a \sin A \cos c \cos B$$

$$\cos a \sin b \sin A - \cos A \sin C \sin a = \sin a \sin A \cos b \cos C$$

$$\cos b \sin a \sin B - \cos B \sin C \sin b = \sin b \sin B \cos a \cos C$$

$$\cos b \sin c \sin C - \cos B \sin A \sin b = \sin b \sin B \cos c \cos A$$

$$\cos c \sin b \sin C - \cos C \sin A \sin c = \sin c \sin C \cos b \cos A$$

$$\cos c \sin a \sin A - \cos C \sin B \sin c = \sin c \sin C \cos a \cos B$$

38. Ces résultats s'énoncent, en langage ordinaire de la façon suivante : les formules du troisième type, c'est-à-dire celles qui contiennent quatre éléments consécutifs, s'obtiennent en écrivant que le produit du cosinus du premier élément et des sinus des deux derniers diminué du produit du cosinus du dernier élément et des sinus des deux premiers, est égal au produit des sinus des éléments extrêmes et des cosinus des éléments moyens. Ce produit étant précédé du signe + ou du signe —, suivant que le premier élément est un côté ou un angle.

39. Indiquons encore comment on retrouve ces formules sans passer par leur démonstration. Nous regarderons seulement comme acquis qu'elles sont à trois termes. Ceci posé, et nous bornant à considérer la relation qui concerne a, B, c, A, cherchons d'abord ce que celle-ci devient lorsque les deux côtés a et c sont supposés infiniment petits et que A et B restent invariables afin que le triangle tende vers zéro suivant une loi bien déterminée. Pour cela, il suffira d'appliquer le théorème qui a été démontré au nº **25**; soit donc en même temps que le triangle sphérique donné, le triangle rectiligne que nous avons appelé le triangle des cordes dont A', B', C' sont les angles et α, β, γ les côtés ; écrivons la relation,

$$\alpha \sin (A' + B') - \gamma \sin A' = 0$$

ou

$$\sin A' \cos B' + \sin B' \cos A' = \frac{\gamma}{\alpha} \sin A'$$

qui lie les quatre éléments consécutifs α, B', γ, A' correspondants à a, B, c, A, dans le triangle des cordes. Si nous y faisons $\frac{\gamma}{\alpha} = \lim \frac{c}{a}$, $A' = A$, $B' = B$, nous aurons la relation limite cherchée qui dès lors sera :

$$\sin A \cos B + \sin B \cos A = \lim \frac{c}{a} \sin A$$

40. Voyons maintenant comment on passe de la formule limite que nous venons d'obtenir à la formule générale correspondante.

Les angles A et B conservant les mêmes valeurs quand a et c

tendent vers zéro, un terme quelconque de la relation cherchée, en tant que fonction d'angles ne peut changer de forme qu'en disparaissant, ce qui n'a jamais lieu puisque la relation contient toujours trois termes. J'en conclus que la relation générale correspondante à la relation limite,

$$\lim \frac{c}{a} \sin A = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

précédemment obtenue, est nécessairement de la forme

$$m \sin A = n \sin A \cos B + p \cos A \sin B$$

où m, n et p ne sont fonctions que des côtés a, c et par conséquent restent toujours les mêmes quelles que soient les valeurs des angles A et B. Or, si on fait $B = 90°$, la relation devient :

$$m \sin A = p \cos A$$

mais le triangle ABC étant alors rectangle en B, on a aussi $\sin c \cos a \sin A = \sin a \cos A$, donc :

$$\frac{m}{\sin c \cos a} = \frac{p}{\sin a}.$$

Si, en second lieu, on fait $A = 90°$, B étant redevenu quelconque, on aura $m = n \cos B$, et en même temps,

$$\sin c \cos a = \sin a \cos c \cos B,$$

donc,

$$\frac{\sin c \cos a}{m} = \frac{\sin a \cos c}{n};$$

ainsi :

$$\frac{m}{\sin c \cos a} = \frac{n}{\sin a \cos c} = \frac{p}{\sin a}.$$

Remplaçant dans la relation (1), m, n et p par $\sin c \cos a$, $\sin a \cos c$, $\sin a$, qui leur sont respectivement proportionnels, il vient finalement :

$$\cos a \sin c \sin A - \cos A \sin B \sin a = \sin a \sin A \cos B \cos c \quad \text{C.Q.F.D}$$

41. *Quatrième type des formules à quatre éléments. — Démonstration de la relation qui existe entre* A, B, C *et* a.

Les deux triangles rectangles CAH, CBH donnent sur-le-champ les trois relations

$$\cos A = \sin C' \cos h, \qquad \cos B = \sin C'' \cos h,$$

$$\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C'' = \frac{1}{\cos a}$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\sin C'}{\cos A} = \frac{\sin C''}{\cos B} = \frac{\cos C''}{\sin B \cos a}$$

mais on a

$$C = C' + C''$$

d'où

$$C' = C - C''$$

donc

$$\sin C' = \sin C \cos C'' - \cos C \sin C''.$$

Remplaçant maintenant $\sin C'$, $\cos C''$, $\sin C''$, par les quantités

$$\cos A, \qquad \sin B \cos a, \qquad \cos B,$$

qui leur sont respectivement proportionnelles, il vient :

$$\cos A = \sin A \sin B \cos a - \cos B \cos C$$

ou

$$\cos A = - \cos B \cos C + \sin B \cos C \sin a.$$

42. Telle est la formule cherchée ; les deux autres du même type s'en déduisent en faisant des permutations tournantes simultanées sur a, b, c et sur A, B, C et l'on trouve

$$4^{e}\text{ type}\quad \left\{\begin{aligned} \cos A &= - \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= - \cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= - \cos A \cos B + \sin A \sin A \sin C, \end{aligned}\right.$$

43. Ces résultats s'énoncent en langage ordinaire de la manière suivante :

Les formules du quatrième type, c'est-à-dire celles qui contiennent les trois angles et un côté, s'obtiennent en écrivant que le cosinus du supplément de l'angle opposé au côté est égal au développement du cosinus de la somme des deux autres angles dont on a multiplié le second terme par le cosinus du côté.

44. Indiquons encore comment on retrouve les formules quand on a conservé relativement à leur composition le souvenir des propriétés suivantes : elles contiennent trois termes sans coefficients numériques. Chaque terme est composé de un, deux, ou trois facteurs sans exposants, et choisis parmi les sinus et les cosinus des 4 éléments qui doivent figurer dans la formule ; enfin le sinus et le cosinus d'un même élément n'entrent jamais à la fois comme facteurs dans un même terme. Ceci posé et nous bornant à considérer la relation qui se rapporte à A, B, C, a, je dis d'abord que celle-ci ne contient pas sin a. En effet, s'il en était autrement, les termes où ce sinus entrerait, disparaîtraient en posant $a = o$ et la relation deviendrait une relation à un ou deux termes fonctions de A, B, C et qui équivaudrait d'ailleurs à $B + C = 180° \pm A$. comme on le reconnaît *a priori*, en observant que la surface du triangle doit en même temps être nulle ou égale au fuseau A. Mais alors en égalant à o l'un des facteurs qui entrent dans la relation à un ou deux termes, obtenue, ce qui détermine la valeur de l'un des éléments A, B, C de l'élément C par exemple, cette relation devient une identité ou une relation à un terme faisant connaître un second élément A ou B, tandis que la relation équivalente $B + C = 180 \pm A$, donne quand C est connu, la somme $A \pm B$ et cette somme seulement; d'où il résulte une incompatibilité qui prouve l'absurdité de l'hypothèse.

Sin a n'entrant pas dans la relation générale considérée cos a doit nécessairement y figurer et si on fait $a = 90°$, la relation deviendra celle à deux termes

$$\cos A = - \cos B \cos C \ (*),$$

qui lie les trois angles d'un triangle dont le côté a est égal à 90°. De ces deux remarques, on peut conclure que la relation générale cherchée est de la forme

$$m \cos A + n \cos B \cos C + p \cos a = o$$

m, n p étant indépendants de a et ayant par suite toujours les mêmes valeurs quelle que soit la valeur de a ; mais pour

(*) Cette relation n'est autre que celle qui lie les trois côtés du triangle polaire du triangle proposé, lequel triangle polaire est ici rectangle.

$a = 0$, on a

$$180 \pm A = B + C$$

d'où

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$

donc

$$m = -1, \qquad n = -1, \qquad p = \sin B \sin C$$

et la formule devient

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \qquad \text{C.Q.F.T.}$$

45. *Remarque.* Quand on compare les formules du quatrième type à celles du premier, on reconnaît aisément que l'on passe des unes aux autres, en changeant les grandes lettres en petites et *vice versa*, en changeant les signes des cosinus et conservant les signes des sinus. Ce qui revient à dire que les formules de l'un des types sont celles de l'autre type appliquées au triangle polaire, de sorte que après avoir démontré les unes il devient superflu de démontrer les autres.

46. Indépendamment des formules à quatre éléments, dont nous nous sommes exclusivement occupés jusqu'ici, il en existe une infinité d'autres parmi lesquelles nous distinguerons quelques-unes de celles qui contiennent cinq éléments nécessairement consécutifs.

Ces nouvelles formules n'ont chacune que trois termes comme les formules à quatre éléments, et le premier de ces termes est pour toutes le produit du sinus du premier élément par le cosinus du second ; enfin elles rentrent dans deux types qui se distinguent en ce que, dans le premier, les éléments extrêmes sont des côtés et dans le second les éléments extrêmes sont des angles.

47. *Premier type des formules à cinq éléments consécutifs.* — *Démonstration de la relation entre* a, B, c, A, b.

Laissant de côté le premier élément, écrivons la relation connue qui existe entre les quatre éléments consécutifs restants ; nous aurons

$$\cos B \sin A \sin b - \cos b \sin B \sin c = -\sin B \sin b \cos c \cos A$$

remplaçant $\sin A \sin b$ par $\sin a \sin B$ et divisant par $\sin B$, il viendra

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A$$

48. Telle est la relation cherchée. Les autres du même type s'en déduisent aisément. D'abord, si conservant le premier élément a on substitue au second B sa seconde valeur C, ce qui donne b pour le troisième élément, A pour le quatrième, c pour le cinquième, on a pour le couple de formules correspondantes au même élément initial a :

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A,$$
$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A,$$

faisant ensuite dans ce couple des permutations tournantes simultanées sur a, b, c, et sur A, B, C, on trouve :

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A,$$

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \sin c \cos b \cos A,$$

$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \sin c \cos a \cos B,$$

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \sin a \cos c \cos B,$$

$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \sin a \cos b \cos C,$$

$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \sin b \cos a \cos C.$$

49. Ces résultats s'énoncent en langage ordinaire, de la façon suivante : les relations à 5 éléments du premier type, c'est-à-dire celles qui contiennent 5 éléments consécutifs dont le premier est un côté, s'obtiennent en écrivant que le produit du sinus du premier élément par le cosinus du second est égal à ce que devient le développement du sinus de la différence du troisième et du cinquième élément lorsqu'on multiplie son deuxième terme par le cosinus du quatrième élément.

50. Il n'est pas possible de retrouver directement les formules précédentes, du moins sous les mêmes conditions que dans le cas des relations à 4 éléments ; en effet, les relations à 5 éléments n'ayant pas, comme celles à 4 éléments, une forme déterminée et étant en nombre illimité, il devient absolument nécessaire d'avoir sur leur composition des indications plus complètes et plus précises. Nous regarderons comme connu le premier membre qui sera toujours le produit du sinus du premier élément par le cosinus du second ; quant au second membre nous admettrons qu'il contient deux termes sans coefficients ni exposants, et que chacun de ces termes est composé de trois facteurs au plus, choisis parmi les sinus et les cosinus des trois derniers éléments, de telle sorte que le sinus et le cosinus d'un même élément n'entrent jamais à la fois dans un même terme. Ceci posé, et nous bornant à considérer la relation qui existe entre a, B, c, A, b, je dis d'abord que sin A n'entre pas dans le second membre. En effet, s'il en était autrement, les termes où ce sinus entrerait disparaîtraient en posant $A = 180°$ et comme B serait alors o, la relation se réduirait à $\sin a = o$, ou à $\sin a =$ un monome, ce qui est impossible puisque d'autre part cette relation devrait équivaloir à $a = b + c$.

Sin A n'entrant pas dans la relation cherchée, cos A doit y figurer, et si on fait $A = 90°$, cette relation deviendra celle $\sin a \cos B = \sin c \cos b$ indiquée au numéro (26) qui a $\sin a \cos B$ pour premier membre et qui lie l'hypoténuse a et les trois éléments B, c, b dans un triangle rectangle ; de ces deux remarques, il résulte que la relation générale est de la forme

$$\sin a \cos B = n \sin c \cos b + p \cos A,$$

n et p étant indépendants de A et ayant par conséquent toujours les mêmes valeurs quelle que soit la valeur de A ; mais pour $A = 180°$ on a $B = o$ et $a = b + c$ ou

$$\sin a = \sin c \cos b + \sin b \cos c,$$

donc, $n = 1, p = - \sin b \cos c$, et la formule générale devient

$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A.$$

51. *Deuxième type des formules à 5 éléments consécutifs. — Démonstration de la relation entre* A, b, C, a, B

Laissant de côté le premier élément, écrivons la relation connue qui existe entre les quatre éléments consécutifs restants, nous aurons

$$\cos b \sin a \sin B - \cos B \sin b \sin C = \sin b \sin B \cos a \cos C;$$

remplaçant dans le premier terme du premier membre $\sin a \sin B$, par $\sin A \sin b$ et supprimant partout $\sin b$, il viendra

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a.$$

52. Telle est la relation cherchée ; les autres du même type s'en déduisent aisément. D'abord, si tout en conservant le premier élément A, on suppose que le second prenne sa seconde valeur c, en sorte que le troisième devienne B, le quatrième reste égal à a, le cinquième devienne C, on a pour le couple de formules correspondantes au même élément initial A,

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a,$$
$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \sin C \cos B \cos a.$$

Faisant ensuite dans ce couple, des permutations tournantes simultanées sur a, b, c et sur A, B, C, on trouve

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a,$$
$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \sin C \cos B \cos a,$$
$$\sin B \cos c = \sin A \cos C + \sin C \cos A \cos b,$$
$$\sin B \cos a = \sin C \cos A + \sin A \cos C \cos b,$$
$$\sin C \cos a = \sin B \cos A + \sin A \cos B \cos c,$$
$$\sin C \cos b = \sin A \cos B + \sin B \cos A \cos c.$$

53. Ces formules s'énoncent en langage ordinaire de la manière suivante. Les relations à cinq éléments du deuxième type, c'est-à-dire celles dans lesquelles l'élément initial est un angle, s'expriment en écrivant que le produit du sinus du premier élément par le cosinus du second est égal à ce que devient le développement du sinus de la somme du troisième et du cinquième élément lorsqu'on multiplie son deuxième terme par le cosinus du quatrième élément.

54. Pour retrouver les formules sans passer par leur démonstration, nous regarderons comme connu le premier membre qui sera toujours le produit du sinus du premier élément par le cosinus du deuxième ; quant au second membre, nous admettrons qu'il contient deux termes sans coefficients, ni exposants, et que chacun de ces termes est composé de trois facteurs au plus, choisis parmi les sinus et les cosinus des trois derniers éléments, de telle sorte que le sinus et le cosinus d'un même élément n'entrent jamais à la fois dans un même terme. Ceci posé et nous bornant à considérer la relation qui existe entre A, b, C, a, B, je dis d'abord que sin a n'entre pas dans le second membre. En effet, s'il en était autrement, les termes où ce sinus entrerait, disparaîtraient pour $a = 0$ et comme alors b serait nul ou égal à 180°, la relation se réduirait à sin A $=$ o ou à sin A $=$ un monome ; ce qui est impossible, puisque d'autre part le triangle devenant nul ou égal au fuseau dont l'angle est A, aurait o ou 2A, pour excès sphérique, ce qui entraînerait

$$A = \pm (B + C - 180^0).$$

Sin a n'entrant pas dans la relation cherchée, cos a doit y figurer et si on fait $a = 90°$, cette relation se réduira à celle $\sin A \cos b = \sin C \cos B$ que l'on obtient en appliquant la première formule du n° (26), au triangle polaire, qui ici devient rectangle. De ces deux remarques, il résulte que la relation générale est de la forme

$$\sin A \cos b = n \sin C \cos B + p \cos a\ ;$$

n et p étant indépendants de a et par conséquent toujours les mêmes quelle que soit la valeur de a; mais pour $a = 0$, avec $b = 180°$, on a

$$A = B + C - 180°,$$

ou $$-\sin A = \sin C \cos B + \sin B \cos C\ ;$$

donc $$n = 1, \qquad p = \sin B \cos C,$$

et la formule générale devient

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a.$$

55. Les formules à 5 éléments que nous venons de faire connaître ont été signalées pour la première fois par Gauss. Quoique superflues au point de vue théorique, elles ont une véritable utilité dans les applications. En effet, leur emploi simultané avec les relations à 4 éléments, fournit de précieuses vérifications et fait disparaître certaines ambiguités dont les résultats sont souvent entachés.

Associons à la relation à 5 éléments du premier type qui se rapporte à a, B, c, A, b, la relation à 4 éléments du premier type qui se rapporte à a, b, c, A et la relation à 4 éléments du deuxième type qui se rapporte à a, B, A, b ; nous aurons les trois formules

$$\text{Premier groupe de Gauss}\quad \left\{\begin{array}{l} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \sin a \sin B = \sin b \sin A \\ \sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A \end{array}\right.$$

formant ce qu'on appelle le premier groupe de Gauss, et qui sont constamment employées en astronomie, pour la solution du problème particulièrement important où connaissant deux côtés b et c et l'angle compris A dans un triangle sphérique, on se propose de trouver le troisième côté a et l'un des angles adjacents B. Voici d'ailleurs comment on opère. Le côte a est d'abord déterminé et cela sans ambiguité par la première formule qui en fait connaître le cosinus; a étant obtenu, on a l'angle B par la deuxième formule, mais cet angle n'est ainsi défini que par son sinus et par conséquent admet deux valeurs dont une seule doit être acceptée; pour fixer enfin le choix de la bonne valeur, on exigera que la troisième relation soit satisfaite, ce qui suffira, à cause de la présence dans celle-ci, de cos B. Ajoutons que l'on peut encore résoudre le problème en n'employant que la première et la troisième formule. Pour cela on posera

$$\cos b = m \cos \varphi, \qquad \sin b \cos A = m \sin \varphi;$$

m ayant un signe déterminé et φ étant compris entre o et 360°; les deux formules considérées qui deviendront

$$\cos a = m \cos (c - \varphi), \qquad \sin a \cos B = m \sin (c - \varphi)$$

seront simultanément rendues calculables par logarithmes et donneront immédiatement cos a, par suite a, puis cos B, par suite B.

56. Au premier groupe de Gauss que nous venons d'indiquer en correspond un autre qui s'obtient en intervertissant le rôle des angles et des côtés.

Associons à la relation à 5 éléments du deuxième type, qui se rapporte à A, b, C, a, B, la relation à 4 éléments du quatrième type qui se rapporte à A, B, C, a et la re ation à 4 éléments du deuxième type qui se rapporte à A, b, a, B ; nous aurons les trois formules :

Deuxième groupe de Gauss
$$\begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \sin A \sin b = \sin B \sin a \\ \sin A \cos b = \sin C \cos B + \sin B \cos C \cos a \end{cases}$$

formant ce qu'on appelle le deuxième groupe de Gauss et servant à résoudre le problème important où connaissant deux angles B, C et le côté adjacent a dans un triangle sphérique, on cherche le troisième angle A et l'un des côtés adjacents b. En effet, la première formule donne d'abord l'angle A et cela sans ambiguité puisqu'elle en fait connaître le cosinus ; A étant obtenu, la seconde formule donne b, mais ce côté n'étant défini que par son sinus aura deux valeurs dont une seule devra être acceptée ; pour connaître enfin celle-ci, il suffira d'exiger qu'elle vérifie la troisième formule, laquelle contient cos b. Ajoutons que si l'on veut se borner à tenir compte de la première et de la troisième équation il suffira de poser

$$\cos B = m \cos \varphi, \qquad \sin B \cos a = m \sin \varphi,$$

m ayant un signe déterminé et φ étant compris entre o et 360° ; les formules subiront simultanément la préparation logarithmique, et l'on sera ainsi conduit aux résultats suivants

$$\cos A = -m \cos (C + \varphi), \qquad \sin A \cos b = m \sin (C + \varphi)$$

qui donnent immédiatement cos A, par suite A, puis cos b, par suite b.