INTRODUCTION

TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

PRÉLIMINAIRES

4. Dans les recherches relatives à la position des étoiles et même de tous les astres, on fait un usage continuel des formules de la trigonométrie sphérique. Nous allons consacrer quelques leçons à la démonstration de ces formules qui ne trouvent actuellement place dans aucun cours élémentaire en France.

Indiquons d'abord quelques notions générales sur lesquelles il est important d'être bien fixé.

5. Considérons sur une sphère de centre O (*fig.* 1) qui, dans les applications à l'astronomie, sera la sphère céleste, trois points A, B, C, non situés sur une même circonférence de grand cercle ; joignons ces points deux à deux par des arcs de grand cercle BC, CA, AB, inférieurs chacun à une demi-circonférence, nous formerons un contour fermé

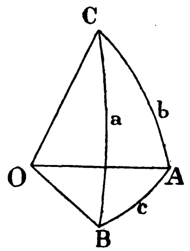

Fig. 1.

qui partagera la sphère en deux parties, l'une plus petite, l'autre plus grande qu'un hémisphère; l'une et l'autre de ces deux portions de sphère sont ce qu'on appelle un triangle sphérique (1). Les sommets de ces deux triangles sont les points A,B,C; les cotés sont, conformément à une convention dont nous avons déjà parlé, non pas les longueurs des arcs de grand cercle BC, CA, AB, qui représentent les distances sphériques des sommets considérés deux à deux, mais les distances angulaires correspondantes, c'est-à-dire l'angle au centre BOC opposé au sommet A que nous appellerons a, l'angle au centre COA opposé au sommet B que nous appellerons b et l'angle au centre AOB opposé au sommet C que nous appellerons c; les angles des triangles sphériques sont les angles dièdres que forment autour du rayon commun à leurs plans respectifs les côtés considérés deux à deux. Les trois angles dièdres inférieurs à deux droits se rapportent au triangle inférieur à un hémisphère, et les trois angles supérieurs à deux droits au triangle supérieur à un hémisphère. Les côtés et les angles d'un triangle sphérique constituent ce qu'on appelle les éléments du triangle. On voit que ces éléments, qui sont tous des angles et au nombre de six, ne sont liés que par trois relations distinctes, parce que trois d'entre eux étant donnés, les trois autres s'en suivent nécessairement. On peut ajouter que, parmi toutes les relations en nombre illimité que l'on peut déduire de trois distinctes, il n'en existe aucune contenant moins de quatre éléments, parce que trois éléments ont toujours des valeurs complètement indépendantes.

6. La plupart des relations qui existent entre les éléments

(1) A moins d'avertissement contraire nous ne considérerons que des triangles inférieurs à un hémisphère.

d'un triangle ne contiennent pas les éléments eux-mêmes, mais ces fonctions des éléments, qui ont reçu en trigonométrie rectiligne la dénomination générale de fonctions trigonométriques, et qui comprennent le sinus, la tangente, la sécante, etc. Nous ne nous arrêterons pas à définir ces fonctions qui sont bien connues, mais nous ferons, *une fois pour toutes*, une remarque que nous signalons comme d'une extrême importance. Les fonctions trigonométriques des éléments d'un triangle devront TOUJOURS être considérées comme des nombres abstraits exprimant des rapports de deux longueurs et par conséquent indépendants de toute unité de longueur et d'angle. Cela résulte de ce que ces fonctions se rapportent à des angles et non à des arcs.

7. Unités d'angle.— Certaines relations contiennent à la fois des éléments d'un triangle, c'est-à-dire des angles et leurs fonctions trigonométriques ; les angles y sont alors naturellement évalués en nombres, et, à moins que la relation ne soit homogène par rapport aux différentes lettres qui représentent des angles, elle a une forme qui varie avec l'unité adoptée. Nous allons définir les différentes unités dont on a été conduit à faire usage et indiquer les différentes circonstances de leur emploi.

Quand la relation considérée ne contient que des angles sans fonctions trigonométriques, on adopte l'une des trois unités suivantes :

1° L'angle droit, qui est l'angle dont un côté est perpendiculaire à l'autre et dont les sous-multiples sont des fractions de forme quelconque d'angle droit ;

2° L'angle d'un degré, qui est la 90e partie d'un droit et dont les sous-multiples sont la minute égale à la 60e partie d'un degré, la seconde égale à la 60e partie de la minute et les dixièmes et centièmes de la seconde.

Un angle composé de n degrés, p minutes, q secondes, n étant un entier quelconque, p un entier plus petit que 60, q un nombre composé d'unités, de dixièmes et de centièmes et plus petit que 60, s'écrit ainsi

$$n^\circ,\ p',\ q''.$$

3° L'angle d'une heure, qui est égal à 15° et dont les sous-multiples sont l'angle d'une minute en temps qui est la 60e partie de l'angle d'une heure, l'angle d'une seconde en temps qui est la 60e partie de l'angle d'une minute en temps, enfin les dixièmes de l'angle d'une seconde en temps.

Un angle composé de n heures, p minutes en temps, q secondes en temps, n étant un entier quelconque, p un entier moindre que 60, q un nombre composé d'unités et de dixièmes et plus petit que 60, s'écrit ainsi

$$n^{\mathrm{H}},\ p^{\mathrm{M}},\ q^{\mathrm{S}}.$$

Cette troisième unité et ses sous-multiples ne sont employés qu'en astronomie et pour l'évaluation en nombres de certains angles ou de certaines distances angulaires que nous indiquerons plus tard.

8. Indépendamment des unités d'angle dont nous venons de parler, il en existe une autre entièrement différente et que l'on emploie lorsqu'on considère des relations contenant à la fois des angles et des fonctions trigonométriques. Cette unité est l'angle bien déterminé pour lequel l'arc compris entre ses côtés est toujours égal au rayon avec lequel il a été décrit de son sommet comme centre. Observons d'ailleurs que les conditions en nombre infini qu'exige la définition sont compatibles, car si, pour un rayon particulier AB (*fig.* 2), l'arc BC correspondant à un certain angle au centre BAC est égal au rayon, la même chose aura lieu pour un autre rayon AB′. Cela résulte de ce que les arcs BC et B′C′ qui sont semblables ont un rapport égal à celui des rayons, de sorte que le rapport de BC à AB est toujours égal à celui de B′C′ à A′B′.

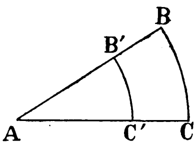

Fig. 2.

L'unité d'angle dont il s'agit se nomme unité trigonométrique et un angle quelconque évalué en nombre avec cette unité est dit évalué trigonométriquement. Le plus souvent la mesure d'un angle A par rapport à une unité quelconque se représente par la même lettre que l'angle considéré comme grandeur; mais, s'il s'agit d'une mesure trigonométrique, on place un petit trait au-dessus et on écrit $\overline{A}$.

9. Voici maintenant deux théorèmes importants.

THÉORÈME.— *La mesure trigonométrique* $\overline{A}$ *d'un angle* A *est égale au rapport de l'arc BC compris entre ses côtés au rayon AB avec lequel il a été décrit de son sommet comme centre.*

En effet, si l'on associe à l'angle BAC (*fig.* 3) l'angle BAD égal à l'unité trigonométrique et par conséquent tel que l'arc BD soit égal au rayon AB, nous aurons

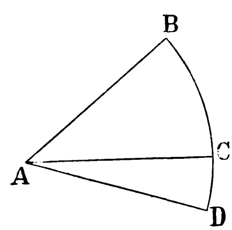

Fig. 3.

$$\overline{A} = \frac{BAC}{BAD} = \frac{BC}{BD} = \frac{BC}{AB}.$$

Comme conséquence, on peut dire qu'un angle droit a $\frac{\pi}{2}$ pour mesure trigonométrique.

THÉORÈME. — *Le rapport de la mesure trigonométrique* $\overline{A}$ *d'un angle* A *au sinus de cet angle a pour limite* 1, *lorsque l'angle décroît indéfiniment.*

Soient (*fig.* 4) BP et CT ce qu'on appelle le sinus et la tangente de l'arc BC en sorte que $\frac{BP}{AB}$ et $\frac{CT}{AB}$ soient le sinus et la tangente de l'angle au centre A. On aura

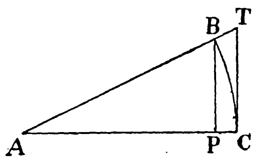

Fig. 4.

$$BP < \text{arc } BC < CT$$

d'où, en divisant par AB,

$$\sin A < \frac{\text{arc } BC}{AB} < \text{tang } A\ ;$$

mais $\frac{\text{arc } BC}{AB} = \overline{A}$ d'après le théorème précédent; donc

$$\sin A < \overline{A} < \text{tang } A,$$

d'où

$$1 < \frac{\overline{A}}{\sin A} < \frac{1}{\cos A}.$$

Faisant décroître A indéfiniment, cos A, et par suite $\frac{1}{\cos A}$ tendront vers 1, donc $\frac{\overline{A}}{\sin A}$, compris entre 1 et $\frac{1}{\cos A}$, tendra aussi vers 1.

10. Remarques. — La relation précédente, $\lim \frac{\overline{A}}{\sin A} = 1$, est la plus simple de toutes celles qui contiennent à la fois des angles et des fonctions trigonométriques ; la démonstration que nous en avons donnée repose sur ce que l'angle qui y entre est évalué en nombre trigonométriquement, et du reste il est aisé de voir qu'elle n'est plus vraie quand on considère une autre unité. En effet, si on prend une unité m fois plus petite que l'unité trigonométrique, la mesure de l'angle deviendra m fois plus grande, le sinus ne changera pas, donc le rapport de l'angle au sinus sera multiplié par m et la limite de ce rapport sera m au lieu de 1.

La relation

$$(1) \qquad \lim \frac{\overline{A}}{\sin A} = 1$$

est tout à fait fondamentale : on en déduit d'abord l'expression connue des dérivées des fonctions trigonométriques :

$$\frac{d.\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d.\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d.\operatorname{tang} x}{dx} = \sec^2 x, \text{ etc.}$$

et ces résultats ne sont exacts, comme la relation (1), que si x se réduit à $\overline{x}$, c'est-à-dire est une mesure trigonométrique.

Les développements en série, tels que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - ,\ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - ,\ldots$$

et un grand nombre d'autres que nous aurons occasion d'employer, s'établissent, comme on sait, par la considération des dérivées des fonctions trigonométriques; donc ces développements ne sont vrais aussi qu'autant que la mesure x se réduit à $\bar{x}$, c'est-à-dire qu'autant qu'elle est une mesure trigonométrique.

Ces différentes remarques motivent le choix qui a été fait de l'unité trigonométrique d'angle.

11. Changements d'unités. — Il arrive souvent qu'après avoir évalué un angle en nombre avec une certaine unité, on veuille trouver sa mesure par rapport à une autre unité. Indiquons la solution des principaux cas que présente ce problème important.

PREMIER PROBLÈME. — *Un angle exprimé en temps, étant de*

$$n^{\mathrm{H}},\ p^{\mathrm{M}},\ q^{\mathrm{S}},$$

quelle est sa valeur en degrés, minutes et secondes ordinaires?

Une première réponse est

$$(15n)^{\circ},\ (15p)',\ (15q)'',$$

mais ce résultat n'a pas la forme exigée pour les nombres complexes, car le nombre $15\,p$ des minutes et celui $15\,q$ des secondes ne sont pas nécessairement inférieurs à 60.

Appelons p_1 et q_1 les parties entières de $\frac{p}{4}$ et de $\frac{q}{4}$, et posons

$$p = 4p_1 + p_2, \qquad q = 4q_1 + q_2;$$

nous aurons

$$(15p)' = (60p_1)' + (15p_2)' = p_1{}^{\circ} + (15p_2)'.$$

$$(15q)'' = (60q_1)'' + (15\,q_2)'' = q_1{}' + (15q_2)'',$$

et le nombre ci-dessus pourra être mis sous la forme

$$(15n + p_1)^{\circ},\ (15p_2 + q_1)',\ (15q_2)''$$

qui maintenant remplit toutes les conditions relatives à l'expression des nombres complexes. En effet, q étant moindre que $4\ (q_1 + 1)$, q_2 est moindre que 4 ; donc $15\,q_2$ est moindre que 60 ; en second lieu p_2, qui est entier puisque p et p_1 le sont, et moindre que 4 comme q_2, est au plus égal à $4 - 1$; q_1, qui est entier et moindre que 15, puisque q est moindre que 60, est au plus égal à $15 - 1$; donc la plus grande valeur de $15\,p_2 + q_1$ est $15\,(4 - 1) + 15 - 1 = 60 - 1$, c'est-à-dire moindre aussi que 60 ; ajoutons que $15n + p_1$ et $15p_2 + q_1$ sont entiers.

12. Deuxième problème. — *Un angle étant égal à*

$$n\,,\ p',\ q'',$$

trouver sa valeur en heures, minutes en temps, secondes en temps.

Une première solution est

$$\left(\frac{n}{15}\right)^{\mathrm{H}},\ \left(\frac{p}{15}\right)^{\mathrm{M}},\ \left(\frac{q}{15}\right)^{\mathrm{S}},$$

mais ce résultat n'a pas la forme voulue, parce que les nombres d'heures et de minutes en temps ne sont pas nécessairement entiers.

Appelons n_1 et p_1 les parties entières de $\frac{n}{15}, \frac{p}{15}$, et posons

$$n = 15\, n_1 + n_2, \qquad p = 15 p_1 + p_2 ;$$

nous aurons

$$\left(\frac{n}{15}\right)^{\mathrm{H}} = \left(n_1 + \frac{n_2}{15}\right)^{\mathrm{H}} = n_1^{\mathrm{H}} + \left(\frac{4n_2}{60}\right) = n_1^{\mathrm{H}} + \left(4n_2\right)^{\mathrm{M}}$$

$$\left(\frac{p}{15}\right)^{\mathrm{M}} = \left(p_1 + \frac{p_2}{15}\right)^{\mathrm{M}} = p_1^{\mathrm{M}} + \left(\frac{4p_2}{60}\right)^{\mathrm{S}} = p_1^{\mathrm{M}} + \left(4p_2\right)^{\mathrm{S}}$$

et le nombre ci-dessus pourra se mettre sous la forme

$$n_1^{\mathrm{H}} + \left(4n_2 + p_1\right)^{\mathrm{M}} + \left(4p_2 + \frac{q}{15}\right)^{\mathrm{S}}$$

qui remplit maintenant toutes les conditions relatives à l'expression des nombres complexes. Il suffit pour le voir d'observer que n_1 et $4\, n_2 + p_1$ sont entiers et que de plus $4\, n_2 + p_1$ et $4p_2 + \frac{q}{15}$, dont on obtient une limite supérieure en faisant

$$n_2 = 15 - 1, \qquad p_1 = 4 - 1, \qquad p_2 = 15 - 1, \qquad q = 60,$$

sont moindres que 60.

13. Les deux problèmes précédents ne se rapportent qu'à certains angles particuliers appelés angles horaires. Nous allons en résoudre deux autres relatifs à des angles quelconques et dont nous signalerons d'abord l'utilité toute spéciale.

Les angles se présentent en astronomie sous deux points de vue différents, comme données et résultats définitifs, ou bien comme inconnues auxiliaires figurant dans les formules algébriques empruntées à l'analyse. Dans le premier cas ils seront exprimés en degrés, minutes et secondes ou simplement en secondes, c'est-à-dire rapportés à ce que nous appellerons l'unité géométrique ; dans le second cas ils seront, dans un but de simplification des formules, évalués en nombre avec l'unité trigonométrique. Cet emploi simultané des mesures trigonométriques et des mesures géométriques rend indispensable la solution des deux questions suivantes :

Un angle étant donné par sa mesure trigonométrique, trouver sa valeur en secondes, c'est-à-dire sa mesure géométrique.

Un angle étant donné en secondes, c'est-à-dire par sa mesure géométrique, trouver sa mesure trigonométrique.

On sait que le rapport de deux grandeurs A et B de même nature est égal au quotient des mesures de ces grandeurs par rapport à une même unité quelconque. Cela posé, soient A et B deux angles quelconques, appelons $\overline{a}$ et a les mesures trigonométrique et géométrique de A, $\overline{b}$ et b les mesures trigonométrique et géométrique de B, nous aurons

$$\frac{A}{B} = \overline{a} : \overline{b} = a : b = \ldots$$

par suite,

$$\overline{a} : a = \overline{b} : b$$

Or prenons B égal à deux droits, $\overline{b}$ sera égal à π que nous remplacerons par sa valeur approchée 3,1415, b sera égal à 180.60.60 = 648000 ; donc on aura $\overline{a} = a \dfrac{\pi}{648000} = \dfrac{a}{206264{,}8}$ et par suite $a = \overline{a} \times 206264{,}8$.

Ainsi, pour avoir la mesure trigonométrique d'un angle, connaissant la mesure géométrique de cet angle, il suffit de multiplier celle-ci par $\dfrac{1}{206264{,}8}$, et pour avoir la mesure géométrique d'un angle, connaissant la mesure trigonométrique du même angle, il suffit de multiplier cette dernière par 206264,8 ou de la diviser par $\dfrac{1}{206264{,}8}$. Le facteur $\dfrac{1}{206264{,}8}$ admet une interprétation simple qui en facilite l'écriture. On voit d'abord que ce facteur est la mesure trigonométrique d'un angle égal à $1''$, mais l'angle de $1''$ étant très petit se mesure trigonométriquement avec une très grande approximation par son sinus, car le rapport de la mesure trigonométrique d'un angle au sinus tend vers 1, lorsque l'angle tend vers zéro ; on a donc sensiblement $\dfrac{1}{206264{,}8} = \sin 1''$ et par conséquent

$$\overline{a} = a \sin 1'', \qquad a = \frac{\overline{a}}{\sin 1''}.$$

Ces deux relations nous seront fort utiles plus tard. — Il faut cependant remarquer qu'elles ne sont qu'approchées ; les véritables relations sont :

$$\overline{a} = a \frac{\pi}{648000} \qquad a = \overline{a} \frac{648000}{\pi}.$$