Capitel III.

Verallgemeinerungen.

§. 33.

Der Satz über die linearen Identitäten zwischen den gleich hohen Potenzen binärer Formen.

203. Dieses Capitel möge als ein Anhang betrachtet werden, der sich zur Aufgabe setzt, einige Ausdehnungen von im zweiten Capitel gegebenen Entwicklungen darzulegen und damit zugleich die Ziele zu bezeichnen, wie sie in einer „allgemeinen Apolaritätstheorie der Normcurven", die ich später herauszugeben gedenke, verwirklicht werden sollen. Es stellt sich dabei immer mehr als leitendes Princip heraus, eine oder mehrere algebraische Formen in vorgeschriebene canonische Formen (Potenzensummen etc.) zu bringen.

Die geometrischen Ausdrücke aus der Theorie der Räume von d Dimensionen (spec. Apolaritätsausdrücke) sind nach den früheren Definitionen so einfach zu verstehen, dass sie kaum erläutert zu werden brauchen. So z. B. trägt (stützt) in einem solchen Raume eine Fläche n^{ter} Ordnung F_n $(a_x^n = 0)$ eine (Norm-)Curve d^{ter} Ordnung (und Classe) $(\rho x_i = m_i \lambda^i, i=0,1,\ldots d)$ wenn sie alle der Curve umschriebenen Flächen zweiter Classe $(u_\alpha^2 = 0)$ stützt, und dies ist wieder der Fall, wenn die letzteren auf allen Polarflächen zweiter Ordnung der Fläche F_n (d. h. den Flächen $a_x^2{}_{x_1}{}_{x_2}\ldots{}_{x_{n-2}} = 0$) ruhen (d. h. ihre bilinearen Invarianten verschwinden). etc. etc.

Die erste Erweiterung erfahre der Potenzen-Satz der pg. 330. Sie lautet zunächst:

α) „Durch „$d+1$" binäre Formen d^{ter} Ordnung sind stets (im Allgemeinen) $2^d - (d+1) = \delta$ weitere solche Formen in eindeutiger Weise bestimmt von der Art, dass nicht nur zwischen den sämmtlichen 2^d Formen (wie bekannt), sondern auch zwischen ihren *Quadraten* δ lineare Identitäten stattfinden."

Oder in geometrischer Redeweise:

α_1) „Durch „$d+1$" Punkte im Raume von d Dimensionen sind stets (im Allgemeinen) $2^d - (d+1) = \delta$ weitere (in eindeutiger Weise) bestimmt, die mit den ersteren die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar von Flächen zweiter Ordnung F_2 bilden, die alle eine gegebene Curve d^{ter} Ordnung (von nicht specieller Natur) stützen."

„Bezieht man die Punkte auf diese Curve als Normcurve (des bezüglichen Raumes), so ist jeder durch eine binäre Form d^{ter} Ordnung dargestellt. Dann sind die Darstellungsformen der „$d+1$" resp. der δ weiteren Punkte gerade die Formen des Satzes α)."

Der Beweis führt sich genau wie dort.

Dass nicht etwa schon zwischen den Quadraten der beliebig gegebenen „$d+1$" Formen lineare Identitäten stattfinden, sieht man am besten aus der geometrischen Auffassung, da sonst durch die gegebenen $d+1$ Punkte eine höhere als ∞^{d-1} Schaar von F_2 der verlangten Art gehen müsste, was unmöglich ist.

204. Frägt man in analoger Weise nach dem entsprechenden noch allgemeineren Satze für die Identitäten zwischen den p^{ten} Potenzen binärer Formen, so ergiebt sich als Antwort *):

*) Dies sind dann auch offenbar alle linearen Identitäten zwischen

β) „Durch beliebig gegebene „$pd-(d-1)$“ binäre Formen d^{ter} Ordnung sind stets (im Allgemeinen) $p^d - \{pd - (d-1)\} =$

$(p-1)^2 \{1\, p^{d-2} + 2\, p^{d-3} + 3\, p^{d-4} + \ldots (d-1)\, p^0\} = \delta$ weitere solche Formen in eindeutiger Weise und der Art bestimmt, dass zwischen den p^{ten} Potenzen der sämmtlichen p^d Formen δ lineare Identitäten herrschen.“

Oder geometrisch:

β_1) „Durch beliebig gegebene „$pd-(d-1)$“ Punkte im Raume von d Dimensionen sind stets (im Allgemeinen) δ weitere (in eindeutiger Weise) bestimmt, die mit den ersteren die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar von Flächen p^{ter} Ordnung F_p bilden, die alle eine gegebene Curve d^{ter} Ordnung (die nur nicht von spezieller Natur sein darf) stützen. Die Darstellungsformen der „$pd-(d-1)$“ resp. der δ weiteren Punkte sind gerade die des Satzes β).“

Auch hier ist die Beweismethode eine der damals entwickelten ganz analoge: sie möge jedoch an einem einfachen Beispiel recapitulirt werden. Es sei $d = 2$, $p = 3$, also $pd - (d-1) = 5$, $\delta = p^d - 5 = 9 - 5 = 4$.

Demnach seien gegeben irgend fünf quadratische binäre Formen:

$$(1) \quad \varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4,$$

dann bilden ihre Cuben eine fünfgliedrige Gruppe sechsten Grades. Statt dieser substituiren wir vorerst eine ganz all-

---

n^{ten} Potenzen binärer Formen, die es im Allgemeinen überhaupt giebt, d. h. solange den Formen keine speciellen Bedingungen auferlegt werden.

gemeine solche Gruppe (einer R_6^4), die aus den Formen sechsten Grades

$$(2)\quad \chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3,\ \chi_4$$

linear constituirt sei. Eine Form sechsten Grades gehört dann der Gruppe (2) an, wenn ihre Wurzeln $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_6)$ dem Schnittpunkttheorem der R_6^4 (2):

$$(3)\quad a_s = 0,\ b_s = 0$$

genügen. Nun erhält man die in der Gruppe (2) enthaltenen vollständigen Cuben *), wenn man in (3) je drei und drei der λ gleichsetzt:

$$(4)\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu_1;\ \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \mu_2.$$

Dadurch gehen die Formen (3) über in:

$$(5)\quad a_\sigma^3 = 0,\ b_\sigma^3 = 0,\ \text{oder}\ a_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0,\ b_{\mu_1^3\,\mu_2^3} = 0,\ \text{wo}$$

$$(6)\quad \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \mu_1 + \mu_2,\ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} = \mu_1\,\mu_2$$

und die Gleichungen (5) ein Büschel von Curven dritter Ordnung (in irgend einer Ebene) darstellen, die alle einen Normkegelschnitt der Ebene stützen.

Die Grundpunkte des Büschels (5), auf den Normkegelschnitt bezogen, stellen die neun quadratischen Formen dar, deren Cuben der Gruppe (2) angehören. Diese ist aus irgend fünf der neun Cuben zusammensetzbar, dann besteht zwischen ihnen und jedem der vier weiteren Cuben eine lineare Identität, mithin zwischen den neun Cuben vier solche Identitäten.

Umgekehrt nehme man als die ersteren fünf Cuben diejenigen der fünf beliebigen Formen (1): dann sind durch sie die vier weiteren eindeutig bestimmt.

Würde aber schon zwischen den Cuben der Formen (1) eine (resp. mehrere) lineare Identitäten herrschen, so erhielte

---

*) D. h. also diejenigen Lineargebilde $a_x = 0$, die die R_6^4 an zwei Stellen osculiren.

man in diesem Falle statt der zwei Schnittpunktgleichungen (3) drei resp. mehrere, sodass die bez. Curven dritter Ordnung (5) mindestens ein Netz bilden würden. Da es aber nur ein Büschel von solchen geben kann, die durch fünf beliebige Punkte der Ebene gehen und einen Kegelschnitt stützen, so ist die gemachte Annahme unmöglich, und der Beweis vollständig erbracht*).

Irgend ein gemeinsames Poldreieck des Curvenbüschels dritter Ordnung (5) stellt (auf den Normkegelschnitt bezogen)

---

*) Die linearen Identitäten zwischen den neun quadratischen Darstellungsformen der Grundpunkte des Curvenbüschels dritter Ordnung (5) sagen unmittelbar noch eine andere Eigenschaft dieser Punkte aus.

Greift man nemlich irgend sechs derselben heraus (deren Gleichungen $U_i = 0$ seien), so ist die ∞^5 Schaar von Curven dritter Klasse K_3, für die die Punkte ein Polsechseck bilden, dargestellt durch:

$$\Sigma\, k_i\, U_i^3 = 0$$

und die ihr mit dem Normkegelschnitt N_2 gemeinsame Tangentenschaar durch:

$$\Sigma\, k_i\, \varphi_i^3 = 0$$

wo die φ die bezüglichen Darstellungsformen der sechs Punkte sind. Da aber zwischen je sechs unserer neun Darstellungsformen eine bestimmte lineare Identität stattfindet, so gilt:

„Wenn ein Kegelschnitt auf einem Curvenbüschel dritter Ordnung ruht, so gehört zu je sechs der neun Büschelgrundpunkte immer ein bestimmter Punkt der Ebene, der mit dem Kegelschnitt eine solche Curve dritter Klasse bildet, dass die sechs Punkte ein *Polsechseck* derselben bilden."

Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass für ein beliebig gegebenes Curvenbüschel dritter Ordnung kein auf ihm ruhender Kegelschnitt existirt, sondern dass eine bestimmte Combinante (dritten Grades) des Büschels verschwinden muss, wenn dies eintreten soll.

Der eben angegebene Satz ist ohne Weiteres auch für den allgemeinsten Fall des Satzes β (β_1) auszusprechen, was dem Leser überlassen bleibe.

eine Form sechsten Grades dar, die der Gruppe der fünf Cuben von (1) und damit der neun Cuben der Darstellungsformen der Grundpunkte des Büschels angehört. Vier Wurzeln einer solchen Form $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4)$ kann man beliebig annehmen: dann sind die beiden andern eindeutig bestimmt. Man hat nur die linearen Polaren des Punktepaares $(\lambda_1\lambda_2)\,(\lambda_3\lambda_4)$ in Bezug auf irgend zwei Curven des Büschels zu construiren: ihr Schnittpunkt $(\lambda_5\, \lambda_6)$ liefert die beiden Restwurzeln.

Zum Beweise des allgemeinen Satzes genügt es, noch anzugeben, erstens, dass die Zahl der Constanten einer F_p, die (in einem Raume von d Dimensionen) eine Curve d^{ter} Ordnung (N_d) stützt, gleich pd ist, denn durch irgend welche pd Punkte auf solcher Curve

$$(7)\quad f \equiv a_\lambda^{pd} = 0$$

geht nur eine einzige die Curve stützende F_p: (cf. Nr. 112)

$$(8)\quad F \equiv a_{\lambda_1^p\, \lambda_2^p \cdots \lambda_d^p} = 0;$$

zweitens, dass sich im Raume von d Dimensionen d Flächen p^{ter} Ordnung F_p in p^d Punkten treffen, die dann die Grundpunkte einer ∞^{d-1} linearen Schaar bilden.

Daher kann man gerade „$pd - (d-1)$“ Formen d^{ter} Ordnung ganz beliebig wählen: dann ist alles Übrige dadurch bestimmt.

Das Produkt der Darstellungsformen von p Punkten bildet dann und nur dann eine Form der durch die p^d Formen des Satzes β) gebildeten Gruppe, wenn sie ein Pol-p-eck der ∞^{d-1} Flächenschaar p^{ter} Ordnung bilden.

Weitere Eigenschaften dieser Configuration erhält man, wenn man den allgemeinen „Stützsatz“, der bald zur Sprache kommen wird, auf sie anwendet.

Bezeichnet man die Zahl der gegebenen binären Formen des Satzes β) mit g, so ist:

$$(9)\ p = \frac{g-1}{d} + 1,\ d = \frac{g-1}{p-1}.$$

Demnach kann man ausser der Zahl g noch die Zahl p resp. d ganz beliebig annehmen, vorausgesetzt, dass $g-1$ den Faktor $p-1$ resp. d enthält. Ist das eine der Fall, so auch das andere und umg. Die Zahlen p und d kann man selbstverständlich vertauschen.

§. 34.
Der Satz über die canonische Form der „Untergruppen" von Gruppen binärer Formen.

205. Vorangeschickt werden zwei Definitionen:

a) Ist irgend eine g-gliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung (von binären Formen n^{ter} Ordnung) gegeben, und seien irgend welche k ($k \leqq g$) linear unabhängige Formen derselben:

$$(1)\quad \chi_1, \chi_2, \ldots \chi_k,$$

so heisse die aus diesen zusammengesetzte Gruppe „eine k-gliedrige Untergruppe" der gegebenen.

b) Die bekannte Bezeichnung „∞^m Schaar" für eine Schaar (von Elementen), deren Mannigfaltigkeit eine m-fach ausgedehnte ist (so dass ∞^0 eine endliche ganze positive Zahl bedeutet), soll auch auf den Fall eines negativen ganzen m ($m = -m'$) ausgedehnt werden. Dann bedeutet eine ($\infty^{-m'}$ Schaar) Schaar von Grössen (Formen, Bedingungen, Eigenschaften etc.), dass m' Bedingungen erforderlich sind, damit solche Grössen (und dann in endlicher Anzahl) existiren. So z. B. hat das Gleichungssystem:

$$(2)\ \sum_r a_{ir}\, x_r = 0\ (r = 1, \ldots 4,\ i = 0, 1, 2)$$

im Allgemeinen ein Lösungssystem (d. h. eine ∞^0 Schaar) der (homogenen) Unbekannten x: dagegen das dazu reciproke:

$$(3)\quad \sum_i a_{ir}\, y_i = 0$$

eine (∞^{-2} Schaar) Schaar von Werthsystemen y, da das Verschwinden der vollständigen Determinanten des Systems (3) (was zwei Bedingungen aequivalent ist), erforderlich ist, wenn eine Lösung der Gleichungen (3) vorhanden sein soll.

Dann lautet unser allgemeinster (umkehrbarer) Satz über solche k-gliedrige Untergruppen einer $(d+1)$-gliedrigen Gruppe von binären Formen n^{ter} Ordnung, die sämmtlich μ lineare Faktoren $(\lambda-\delta_1)(\lambda-\delta_2)\ldots(\lambda-\delta_\mu)$ $(\mu=1, 2, .. n-1)$, wo die δ als verschieden von einander vorausgesetzt werden, gemein haben, der also als Ausdehnung der Sätze Nr. 177, 198 zu betrachten ist (cf. auch pg. 21), folgendermassen (wobei die vier Zahlen n, d, k, μ, abgesehen von den evidenten Ungleichheiten unter ihnen, ganz willkürlich sind):

γ_1) „Die Mannigfaltigkeit einer solchen Untergruppe ist

$$(4)\quad m = k\,(d+1-k) - \mu\,(k-1) = k\,d - (k+\mu)\,(k-1).$$

γ_2) Dann gehört zu jeder solchen k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen in ein-eindeutiger umkehrbarer Weise eine Gruppe von

$$(5)\quad p = \mu - d - 1 + k$$

Formen, die eine p-gliedrige Untergruppe der $(n-d)$-gliedrigen zur gegebenen $(d+1)$-gliedrigen conjugirten Gruppe darstellt und folgende Eigenthümlichkeit besitzt.

Jede Form dieser p-gliedrigen Untergruppe lässt sich in der canonischen Gestalt schreiben

$$(6)\quad \sum_1^{\mu}{}_i\; x_i\,(\lambda-\delta_i)^n$$

wo die δ die obigen, die x wechselnde Coefficienten sind.“

Damit ist das Problem der Auffindung solcher gemeinsamen Faktoren auf ein Problem der Canonizirung binärer Formen spec. ihrer Darstellung als Summen von n^{ten} Potenzen zurückgeführt.

Ist m negativ, so involvirt die Darstellung (6) die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass die k-gliedrige Untergruppe der gegebenen einen festen Faktor μ^{ter} Ordnung besitzt.

Ist die zur gegebenen conjugirte Gruppe dargestellt durch

$$(7) \quad a_\lambda, b_\lambda, \ldots (n-d)_\lambda$$

so wissen wir, dass eine Form f dann der gegebenen Gruppe angehört, wenn ihre Wurzeln den Gleichungen

$$(8) \; a_s = 0, \;\; b_s = 0, \ldots (n-d)_s = 0$$

genügen.

γ_3) „Dann zieht jede p-gliedrige Untergruppe (der zur gegebenen conjugirten) der Gestalt (6) eine p-gliedrige Untergruppe der Gruppe (8) nach sich (und umg.), deren sämmtliche Individuen die Gestalt besitzen:

$$(9) \quad \sum_1^\mu {}_i \, x_i \, \psi(\delta_i) = 0, \text{ wo}$$

$$(10) \quad \psi(\lambda) \equiv (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \ldots (\lambda-\lambda_n)$$

und die x und die δ die obigen sind.“

Um den Inhalt der Sätze auch geometrisch auszudrücken, sagen wir: „Die Punkte x unseres Raumes von d Dimensionen, die eine Gleichung $a_x = 0$ befriedigen, erfüllen ein Lineargebilde $(d-1)^{\text{ter}}$ Dimension (Stufe)“: solche, die k Gleichungen $a_x = 0$, $b_x = 0 \ldots k_x = 0$ befriedigen, erfüllen ein „Lineargebilde $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension“. Dann haben wir:

γ_4) „Es giebt immer eine ∞^m Schaar von Lineargebilden $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension, die mit der rationalen Curve R_n^d

$$(11) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) \quad (i = 0, 1, \ldots d)$$

(wo die φ die gegebene Gruppe bilden) μ Punkte gemein haben. Deren Argumente (auf der Curve) bestimmen sich durch die Gleichungen (9)."

206. Zum Beweise haben wir vorerst die Formeln (4) (5) nachzuweisen: dazu dient der schon von Grassmann[65] erkannte Hülfssatz: „Ein Lineargebilde $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension (im Raume von d Dimensionen) hängt von $k\,(d+1-k)$ Constanten ab."

In der That hängen k Gleichungen der Form

$$(12)\quad a_x = 0,\ b_x = 0, \ldots k_x = 0$$

von kd Constanten ab: da das Lineargebilde aber nur von der „Gruppe" dieser Gleichungen abhängt, so kann man statt jeder eine beliebige lineare Combination aller einführen, was $k\,(k-1)$ willkürliche (nicht homogene) Constanten involvirt, durch die ebenso viele der ursprünglichen zum Verschwinden gebracht werden können. q. e. d.

Diese Constantenanzahl des Lineargebildes (12) ist offenbar zugleich die Mannigfaltigkeit einer k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen $(d+1)$-gliedrigen (11) überhaupt d. h. also wenn $\mu = 0$ ist.

Soll diese Untergruppe einen gemeinsamen Faktor μ^{ter} Ordnung haben d. h. soll das Lineargebilde mit der Curve R_n^d (11) μ Punkte gemein haben, so zählt dies für jeden solchen Punkt $(k-1)$ Bedingungen, mithin für alle μ „$\mu\,(k-1)$". Damit ist aber Formel (4) erhärtet.

Die Formel (5) beweisen wir zunächst für den Fall $k=1$.

Da ein Gebilde $u_x = 0$ die Curve R_n^d immer in $n = \mu + (n-\mu)$ Punkten trifft, so kann man aus den $n-d$ Schnittpunktgleichungen (8) immer $n-d-(n-\mu) = \mu - d$ linear unabhängige so auswählen, dass sie durch Einsetzen der μ Argumente δ_μ für irgend μ der n Elemente λ identisch erfüllt werden: dann verbleiben noch $n-\mu$ Restgleichungen, die gerade ausreichen, um die fehlenden $n-\mu$ Restargumente zu berechnen.

q. e. d.

Gehen wir zum nächsten Fall $k = 2$ über, so geht jetzt durch die μ Punkte δ_μ (der R_n^d) noch eine ∞^1 (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$: daher kann man von den $n-\mu$ Restpunkten (Restargumenten) noch einen willkürlich annehmen: erst dann sind die übrigen eindeutig bestimmt. Diese Willkürlichkeit des einen Argumentes hat zur Folge, dass ausser den $\mu - d$ ausgewählten Gleichungen noch eine weitere (linear von jenen unabhängige) identisch verschwindet.

Endlich, wenn k allgemein, giebt es noch eine ∞^{k-1} (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$, die die μ Punkte δ_μ aus der Curve ausschneiden: von den $n-\mu$ Restargumenten sind noch $k-1$ ganz willkürlich und es lassen sich somit aus den $n-d$ Schnittpunktgleichungen $(\mu-d) + (k-1)$ identisch verschwindende (und linear unabhängige) auswählen. Damit ist die Formel (5) abgeleitet.

Es ist besonders erwähnenswerth, dass „b e i d e F o r m e l n (4) (5) v o n n d. i. d e r O r d n u n g d e r b i n ä r e n F o r m e n φ (11) g a n z u n a b h ä n g i g s i n d“.

Dass aber in der That die so ausgezeichnete p-gliedrige Untergruppe der zur gegebenen conjugirten (7) sich in der Gestalt (6) schreiben lässt, beweist man genau wie damals beim „zweiten“ Beweise (pg. 335).

207. Da (cf. pg. 334) aber der „erste“ Beweis instruktiver erscheint, so mögen hier die beiden Hauptmomente desselben in allgemeiner Form betont werden. Mit Hülfe ihrer erledigt sich der Beweis selbst sehr rasch.

Erstes Hauptmoment. Wir gingen damals von den Lösungssystemen h linearer Gleichungen mit v homogenen Unbekannten $(v > h)$ über zu denjenigen v linearer Gleichungen mit h homogenen Unbekannten, deren Coefficientenmatrix sich von der der h Gleichungen n u r durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen unterschied. Und zwar sind dabei der Reihe nach die Fälle zu unterscheiden, wo nicht a l l e vollständigen

Determinanten (Kerne) der Matrix, zweitens, wo zwar diese, aber nicht alle ersten Unterdeterminanten (Unterkerne) verschwinden etc.

Dies ist jetzt genauer zu untersuchen.

Im ersten Falle haben bekanntlich die h Gleichungen noch eine $\infty^{v-h-1=m}$ (lineare) Schaar von Lösungssystemen und umgekehrt die v Gleichungen eine $\infty^{h-v-1=-m'}$ Schaar solcher d. h. es müssen alle Kerne der Matrix verschwinden (was m' Bedingungen aequivalent ist), damit eine $(=\infty^0)$ Lösung existirt. Es gilt also die Relation:

$$(13^a)\quad m-m' = -2 \quad \text{oder } m' = m+2.$$

Verschwinden alle Kerne der Matrix (aber nicht alle Unterkerne erster Ordnung), so reduciren *) sich die h Gleichungen auf $h-1$, und somit steigt m auf $m+1$.

Umgekehrt, wie eben gezeigt, wird jetzt $m'=0$, also in Zeichen:

$$(13^b)\quad m_0 = m+1:\ m'_0 = 0.$$

Verschwinden weiter alle ersten Unterkerne (aber nicht alle zweiten), so reduciren sich die $h-1$ Gleichungen wieder um eine: andrerseits steigt $m+1$ um Eins, also

$$(13^c)\quad m_1 = m+2,\ m'_1 = 1.$$

Denn die v Gleichungen haben jetzt eine ∞^1 (lineare) Schaar von Lösungen, da auch sie sich um eine d. h. auf $v-1$ reduciren. Geht man so weiter, so folgt:

Erster Hülfssatz. „Verschwinden alle ν^{ten} Unterkerne einer Matrix mit h Zeilen und $v\ (>h)$ Colonnen {aber nicht alle $(\nu+1)^{\text{ten}}$}, so haben die h linearen Gleichungen mit v homogenen Unbekannten (und den Elementen der Matrix als Coef-

*) Oder was dasselbe ist, es herrscht zwischen den h Gleichungen eine lineare Identität.

ficienten) eine lineare Schaar von Lösungssystemen, deren Mannigfaltigkeit ist:

$$(14) \quad m_\nu = m + \nu + 1 = v - h + \nu,$$

andrerseits die reciproken v Gleichungen mit h homogenen Unbekannten (und derselben Coefficientenmatrix) eine solche lineare Schaar von Lösungssystemen, deren Mannigfaltigkeit ist:

$$(15) \quad m'_\nu = \nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Nur für den Fall, wo nicht alle Kerne der Matrix verschwinden, wird m'_ν negativ $= -m$ und zugleich von m abhängig: dann ist (15) zu ersetzen durch:

$$(13^a) \quad m' = m + 2 = v - h + 1.$$

Zweites Hauptmoment. Dieses beruht auf dem oft gebrauchten Satze:

Zweiter Hülfssatz. „Soll eine binäre Form n^{ter} Ordnung f als Summe von $(n-k)$ n^{ten} Potenzen $(\lambda - \delta_r)^n$ darstellbar sein, so sind die δ die Lösungssysteme der $= 0$ gesetzten, nach $(n-k)$ Elementen polarisirten k^{ten} Differentialquotienten von f und umg."

Jetzt kann der Beweis unserer Sätze γ) kurz so geführt werden:

Die Formel (4), die die Mannigfaltigkeit der k-gliedrigen Untergruppe der gegebenen mit festem Faktor μ^{ter} Ordnung darstellt, wird wie oben abgeleitet. Dann fährt man so fort:

Nach Voraussetzung existirt ein Lineargebilde $(d-k)^{\text{ter}}$ Dimension, welches die Curve R_n^d in μ Punkten $(\delta_1 \ldots \delta_\mu)$ trifft; mithin geht durch diese noch eine ∞^{k-1} (lineare) Schaar von Gebilden $u_x = 0$, deren jedes $(n-\mu)$ variable Restpunkte $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-\mu}$ aus der Curve ausschneidet.

Man entwickle die $(n-d)$ Schnittpunktgleichungen (8) nach den aus den $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-\mu}$ gebildeten s_i ($i = 0, 1, \ldots n-\mu$): dann sind, wie wir wissen, die Coefficienten der s_i in jeder Gleichung die nach den μ Argumenten δ polarisirten $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten der bez. Schnittpunktform (7) a_λ resp. b_λ, etc.

Diese $n-d$ in $n-\mu+1$ homogenen Unbekannten (s_i) linearen Gleichungen sollen nach Voraussetzung eine ∞^{k-1} Schaar von sie erfüllenden Werthsystemen besitzen, mithin ist nach (14):

(16) $m_\nu = k-1 = (n-\mu+1)-(n-d)+\nu$ demnach:

$$(17)\ \nu = \mu - d + k - 2 = m_\nu' \quad \text{(nach 15).}$$

Die Formel (17) liefert nach dem ersten Hülfssatz *) die Lösungsschaar der $n-\mu+1$ reciproken Gleichungen (mit $n-d$ homogenen Unbekannten). Diese sind aber nichts anderes, als die $= 0$ gesetzten $(n-\mu)^{\text{ten}}$, nach den μ Argumenten δ polarisirten Differentialquotienten einer Form der Schnittpunktformengruppe:

$$(18)\ k_a\, a_\lambda + k_b\, b_\lambda + \ldots k_{(n-d)}\, (n-d)_\lambda$$

wo die k ein Lösungssystem der ∞^ν (17) Schaar darstellen.

Demnach existirt nach dem zweiten Hülfssatz eine $\infty^\nu = \infty^{\mu-d+k-2}$ lineare Schaar d. h. eine $p = \nu + 1 = \mu - d + k - 1$-gliedrige Untergruppe der Gruppe der Schnittpunktformen (7), deren sämmtliche Individuen als Summen der μ n^{ten} Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$ darstellbar sind.“

Dieser Beweis ist, wie evident, sofort Glied für Glied umkehrbar. Polarisirt man wieder rückwärts die ∞^ν Schaar der

---

*) In dem Ausnahmefalle, wo die Formel (15) durch (13a) ersetzt werden müsste, wird $\nu = -1$ also $p = 0$, was inhaltslos ist.

Potenzsummen (18) nach den μ Argumenten δ, so resultirt die Formel des Satzes γ_3).

208. Wir richten nunmehr unser Augenmerk auf den besondern Fall, wo die Mannigfaltigkeit unserer k-gliedrigen Untergruppe (1) (und damit auch der entsprechenden p-gliedrigen) $= 0$ ist d. h. wir suchen *alle endlichen* Untergruppen (einer gegebenen n^{ter} Ordnung), deren Individuen sich sämmtlich aus denselben μ n^{ten} Potenzen $(\lambda - \delta_\mu)^n$ linear zusammensetzen.

Setzt man den Werth von $d + 1 - k$ aus Formel (5) in (4) ein, so ergiebt sich

$$(19) \quad m = \mu - kp$$

d. i. die Beziehung zwischen k und p. Unsere Bedingung, $m = 0$, liefert somit zunächst:

$$(20) \quad \mu = kp$$

und setzt man dies in (5) ein:

$$(21) \quad d = (p + 1)(k - 1).$$

Wir behandeln vorerst einzelne Fälle, indem wir p und k spezielle Werthe ertheilen.

Für $p = 1$, $k = 2$, hat man $\mu = 2$, $d = 2$.

Dies ist der Fall der Doppelpunkte der R_n^2, deren Zahl bekanntlich $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ist, während die Zahl der Schnittpunktgleichungen sich auf $n - 2$ beläuft. Daher hat man:

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 2$ giebt es $\sigma = \frac{\nu(\nu + 1)}{2}$ Formen f der Gestalt:

$$(22) \; f \equiv a_1 (\lambda - \delta_{\sigma 1})^n + a_2 (\lambda - \delta_{\sigma 2})^n.\text{“}$$

Zweitens sei $p = 2$, $k = 2$; dann wird $\mu = 4$, $d = 3$. Dies tritt für die vierfachen Sekanten einer R_n^3 ein. Wendet man die bekannte[66] Formel für die vierfachen Sekanten irgend einer algebraischen Raumcurve auf die rationalen an, so berechnet sich ihre Anzahl als

$$(23)\ s = \frac{(n-2)(n-3)}{1.\ 2} \cdot \frac{(n-3)(n-4)}{2.\ 3.}.$$

Dies liefert

„In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + 3$ giebt es

$$(23)\ s = \frac{(\nu+1)\nu}{1.2} \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{2.3}$$

Involutionen $f + k\varphi$, wo

$$(24) \begin{cases} f \equiv \Sigma\, a_i\, (\lambda - \delta_{si})^n \\ \varphi \equiv \Sigma\, b_i\, (\lambda - \delta_{si})^n \end{cases} (i = 1, 2, 3, 4).“$$

Die Zahlen σ, s habe ich durch Induktion auf den allgemeinen Fall ausgedehnt, wo eine R_n^d eine endliche Zahl von Lineargebilden $(d-k)^{ter}$ Dimension besitzt, die sie in μ Punkten treffen und dann an einer Reihe einzelner Fälle, wo die direkte Berechnung möglich war, verificirt. Es wurden der Reihe nach bei variirendem k die Fälle $p = 1, 2$, etc. durchgeführt. Dann ergab sich als allgemeines Resultat:

δ) I. „Nimmt man die ganzen positiven Zahlen ν, p, k *ganz beliebig* an (nur so dass $\nu > p-1$), woraus sich die Zahlen d, $n = \nu + d$, μ gemäss (20), (21) in bestimmter Weise ergeben, so besitzt eine R_n^d eine endliche Anzahl von Lineargebilden $(d-k)^{ter}$ Dimension, die mit der Curve μ Punkte gemein haben, von folgendem Werthe:

$$(25)\ \frac{(\nu+k-1)(\nu+k-2)\ldots.\nu}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots.k} \cdot \frac{(\nu+k-2)(\nu+k-3)\ldots(\nu-1)}{2.\qquad 3.\ \ldots.\ (k+1)} \cdot$$
$$\ldots\ldots.\frac{(\nu+k-p)\ \ldots.\ (\nu-p+1)}{p\ \ldots.\ (k+p-1)} = s_{p,k}^{(\nu)}.“$$

II. „In einer allgemeinen Gruppe von ν binären Formen der Ordnung $n = \nu + d$ giebt es eine *end-*

liche Anzahl $s^{(\nu)}_{p,k}$ von p-gliedrigen Untergruppen, deren Individuen sich sämmtlich aus den μ n^{ten} Potenzen $(\lambda - \delta_\mu)^n$ linear zusammensetzen, wo für jede dieser Untergruppen die δ_μ je *dieselben* sind."

Damit ist das angegebene Problem in allgemeinster Weise gelöst (indem alle nur möglichen endlichen Untergruppen der verlangten Art sich im Satze δ II vorfinden).

Der angegebene Werth für $s^{(\nu)}_{pk}$ steht natürlich unter der Verantwortlichkeit des Autors.

209. Von der weiteren unabsehbaren Reihe von Fällen ($m \lesseqgtr 0$) mögen etwa noch zwei herausgehoben werden, wo namentlich der zweite auf eine wichtige Eigenschaft einer speciellen Klasse von Gruppen binärer Formen führt.

Der erste handelt von den δ-fachen Punkten einer R^d_n. Bekanntlich existiren solche (abgerechnet den selbstverständlichen Fall $\delta = 1$) nur für $d = 2$, $\delta = 2$; diese sind schon oben in Betracht gezogen. Im Allgemeinen dagegen ist (nach (4) (5))

(26) $-m = d\delta - \{d + \delta\}$, $p = \delta - 1$ und demnach:

„Damit eine R^d_n einen δ-fachen Punkt besitze d. h. ihre Gruppe eine d-gliedrige Untergruppe mit einem festen Faktor δ^{ter} Ordnung, sind die m Bedingungen nothwendig und ausreichend, dass die zur Gruppe der R^d_n conjugirte eine $p=\delta-1$-gliedrige Untergruppe enthält, deren Formen sämmtlich sich aus denselben δ n^{ten} Potenzen linear zusammensetzen."

210. Zweitens untersuchen wir solche Gruppen, die das System der d^{ten} Polaren einer Form ρ^{ter} Ordnung bilden. Zunächst fragen wir, welche Gruppen dieser Art giebt es, die allgemeiner Natur sind d. h. keinen besondern Bedingungen unterliegen?

Nehmen wir an, die Gruppe einer R_n^d sei als d^{tes} Polarsystem einer Form f_ρ darstellbar. Dann ist einmal

$$(27)\quad \rho = n + d.$$

Andrerseits ist die Constantenzahl der R_n^d (gleich der eines Lineargebildes $(n-d)^{\text{ter}}$ Stufe im Raume von n Dimensionen nach Hülfssatz pg. 357) $= (d+1)(n-d)$. Da diese beiden Constantenanzahlen (der R_n^d und der f_ρ) jedenfalls übereinstimmen müssen, so folgt

$$(28)\quad (d+1)(n-d) = n + d \quad \text{oder} \quad n-d = 2.$$

Mithin bilden die Schnittpunktformen der R_n^d in diesem Fall eine Involution. Es lässt sich aber jetzt umgekehrt nachweisen, dass die zu irgend einer Involution n^{ter} Ordnung conjugirte Gruppe aus den $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form der Ordnung $2(n-1)$ zusammengesetzt ist.

In der That, sollen irgend $d+1$ (linear unabhängige) Formen einer $d+1$-gliedrigen Gruppe $\{\varphi_i(\lambda)\}$ der Ordnung $d+2$ identisch sein mit den d^{ten} Differentialquotienten einer Form $f_{2(d+1)}$, so ergeben sich für die $(d+1)^2$ homogenen Unbekannten (Coefficienten der φ) durch Vergleichung

$$(29)\quad 2\{1+2+3+\ldots d-1\}+3d = d(d-1)+3d = (d+1)^2-1$$

lineare Gleichungen, die also im Allgemeinen eine bestimmte Lösung haben werden.

Dass diese in der That immer bestimmt ist, folgt aus unserem Hauptsatze γ).

Denn lehnen wir uns im Augenblick an das schon früher behandelte Beispiel $n = 4$ an, dann wird für die biquadratische Involution $k = 1$, $\mu = 4$, $d = 1$ und somit nach Formel (4) (5) $p = 3$, $m = 1$.

Demnach sind (auf noch ∞^1 Arten) alle zur Involution conjugirten Formen (einer R_4^2) aus vier vierten Potenzen linear zusammensetzbar:

$$(30)\ \varphi_i(\lambda) = a_i(\lambda-\delta_a)^4 + b_i(\lambda-\delta_b)^4 + c_i(\lambda-\delta_c)^4 + d_i(\lambda-\delta_d)^4$$
$$(i = 0, 1, 2).$$

Dann aber giebt es, wie Nr. 132 gezeigt, eine bestimmte Form f_6

$$(31)\ f_6 \equiv \Sigma\, k_r(\lambda-d_r)^6 \quad (r = a, b, c, d)$$

deren zweite Polaren die Gruppe (30) bilden und zwar sind die dreireihigen Determinanten der letzteren den k umgekehrt proportional.

Also giebt es jedenfalls eine solche Form f_6: andrerseits nach Obigem auch nicht mehr wie eine. Die ∞^1 Werthsysteme der δ, mittelst deren f_6 dann als Summe von vier sechsten Potenzen auftritt, sind dann genau die bekannten, die nach Früherem die zur Gruppe ihrer zweiten Polaren conjugirte Involution bilden.

Und genau analog für irgend ein n: p wird dann $= n-1$, $m = 1$.

Dies liefert also den Satz: (cf. Nr. 214)

ε) „Die *einzigen allgemeinen* Gruppen binärer Formen n^{ter} Ordnung, die das volle System der d^{ten} Polaren einer Form $(n+d)^{\text{ter}}$ Ordnung f bilden, sind die zu einer allgemeinen Involution (n^{ter} Ordnung) conjugirten. Dabei ist $d = n-2$ und es giebt für jede Involution nur eine solche Form f *)."

*) Dann ist, wie wir wissen, die Funktionaldeterminante der Involution zugleich die der conjugirten Gruppe, was das Corollar des Satzes ε) liefert:

ε_1) Die Frage nach der Anzahl und Natur der Involutionen $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit denselben ($2m$) Doppelelementen ist identisch mit der Frage nach der Anzahl und Natur der Grundformen $2m^{\text{ter}}$ Ordnung, die zu einer bestimmten Covariante, der Determinante der $2(m-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten

211. Fassen wir jetzt noch einige andere vollständige Polarensysteme einer Form in's Auge, deren Gruppen demnach nur specielle sein können.

Gehen wir von den Gruppen des Satzes ε) zu den nächst höheren über, den zu den dreigliedrigen Gruppen conjugirten.

Nehmen wir an, die $(n-2)$-gliedrige Gruppe einer R_n^2 sei in der That die der $(n-3)^{\text{ten}}$ Polaren einer Form f (der Ordnung $2n-3$), so lässt sich, wie man weiss, die Form f (auf eine einzige Weise) als Summe von $n-1$ $(2n-3)^{\text{ten}}$ Potenzen $\{(\lambda-\delta_\mu)^{2n-3}\}$ darstellen, mithin auch ihre $(n-3)^{\text{ten}}$ Polaren als Summe der $(n-1)$ n^{ten} Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$. (Und zwar sind die δ die Wurzeln der einen zu den $(n-2)^{\text{ten}}$ Polaren von f conjugirten Form.)

Dann aber besitzt die R_n^2 nach Satz γ) einen $(n-1)$fachen Punkt (mit den Argumenten δ), d. h. die Gruppe der R_n^2 enthält eine Involution mit festem Faktor ($(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung).

Aber auch die Umkehrung ist leicht zu zeigen. Besitzt die R_n^2 einen $(n-1)$fachen Punkt (δ_μ) (wozu $n-3$ Bedingungen erforderlich sind, so dass sie nur noch von $3(n-2)-(n-3)$ $=2n-3$ Constanten abhängt), so sind nach Satz γ), da in diesem Falle $p=n-2$ wird, alle Formen der Schnittpunktgruppe als Summen der $(n-1)$ Potenzen $(\lambda-\delta_\mu)^n$ darstellbar.

Dann erkennt man ohne Weiteres, wie in Nr. 200, durch Vergleichung der Coefficientenkerne K_μ dieser Gruppe und denen der Gruppe der $(n-3)^{\text{ten}}$ Polaren einer Form

$$(32)\quad f \equiv \sum_1^{n-1} k_\mu\,(\lambda-\delta_\mu)^{2n-3}$$

(wenn man von der letzteren als gegebener Form ausgeht) gehören.

Wir kommen auf diese Frage gleich nachher (Nr. 218) wieder zurück.

$$\text{dass (33)} \quad \sigma k_\mu = \frac{D_\mu}{K_\mu}$$

wo D_μ das Differenzenprodukt der δ (excl. δ_μ) ist. Dadurch ist also die Form f eindeutig bestimmt:

„Enthält eine dreigliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung eine Involution mit festem Faktor $(n-1)^{ter}$ Ordnung (d. h. besitzt die bez. R_n^2 einen $(n-1)$fachen Punkt), so lassen sich (und *nur* dann) die Formen der conjugirten Gruppe linear componiren aus den $(n-3)^{ten}$ Differentialquotienten einer Form f der Ordnung $2n-3$: d. h. diese Gruppe ist dargestellt durch:

$$(32) \quad a_{\lambda^n \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-3}}.\text{“}$$

Und ebenso leitet man für die nächst höhere Gruppenstufe das Resultat ab:

„Enthält eine viergliedrige Gruppe n^{ter} Ordnung ∞^1 Involutionen (mit festem Faktor $(n-1)^{ter}$ Ordnung) (d. h. besitzt die bez. R_n^3 ∞^1 $(n-1)$fache Sekanten), so lassen sich (und *nur* dann) die Formen der conjugirten Gruppe linear componiren aus den $(n-4)^{ten}$ Differentialquotienten einer Form f der Ordnung $2n-4$, und ihr Ausdruck ist also

$$(34) \quad a_{\lambda^n \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{n-4}}.\text{“}$$

Sind für eine R_n^3 die dazu erforderlichen $2(n-4)$ Bedingungen erfüllt *), so kann man analog wie oben, die Coefficienten der gesuchten Form f in eindeutiger Weise berechnen.

---

*) Es giebt z. B., wie man weiss[67], zwei Arten von R_5^3, eine allgemeine mit einer einzigen Quadrisekante (der Schnitt von zwei cubischen Regelflächen mit gemeinsamer Doppelgeraden) und eine besondere mit ∞^1 solchen, die dann stets auf einer Fläche zweiter Ordnung liegt.

Und so lassen sich auch im Allgemeinen die Eigenschaften einer Gruppe, deren conjugirte das volle r^{te} Polarensystem einer Form f bildet, zufolge der verschiedenen Darstellungen von f als Potenzsumme und mit Hülfe unseres Hauptsatzes γ) ohne Weiteres angeben. Welche Eigenschaften aber umgekehrt für eine Gruppe nothwendig und hinreichend sind, damit ihre conjugirte ein solches Polarensystem bildet, und wie man die zugehörige Form f dann am einfachsten aufstellt — diese Frage bleibe noch unerledigt.

Die weiteren Anwendungen unseres Hauptsatzes γ) (der somit eine besonders wichtige Illustration des allgemeinen Combinantenprincips der Nr. 26 darbietet) auf das ternäre, quaternäre etc. Gebiet treten erst nach der jetzt folgenden Darlegung einiger fundamentalen Eigenschaften der eine Normcurve stützenden Flächen in das erforderliche Licht.

§. 35.

Ein neues Übertragungsprincip*) der invarianten Eigenschaften binärer Formen vom Grade mp auf Gebiete m^{ter} resp. p^{ter} Ausdehnung.

212. Hülfsdefinition. Im Raume von d Dimensionen treffe eine Fläche F_r (r^{ter} Ordnung) die Normcurve (d^{ter} Ordnung) N_d $\{\rho x_i = d_i \lambda^i$, $i = 0, 1, \ldots d$, wo die d_i die zur Zahl d gehörigen Binomialcoefficienten sind$\}$ in dem Punkt-(rd)-tupel:

Die Schnittpunktformen der R_5^3 (d. h. die Formen einer Involution fünfter Ordnung) sind also im Allgemeinen stets als Summen von vier bestimmten, festen Potenzen darstellbar cf. pg. 193: dagegen in dem besondern Falle noch auf ∞^1 Weisen (cf. auch Wiederhold in Clebsch Ann. 8).

Man erkennt übrigens leicht, dass alle zur Darstellung (33) gehörigen R_n^3 auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen müssen (aber nicht umg.).

*) Besondere Fälle desselben sind schon pg. 94, 200, 225 betrachtet. Das Gleiche gilt von dem Hülfssatz η): pg. 90, 198, 224.

$a_\lambda^{rd} = 0$ und desgleichen habe eine Fläche Φ_ρ (ρ^{ter} Klasse) mit derselben Normcurve N_d $\{\sigma u_i = (-1)^i \lambda^{d-i}\}$ das (ρd)-tupel von Lineargebilden $\beta_\lambda^{\rho d} = 0$ gemein. Dann heisse es kürzer: „Die F_r hat mit der (Normcurve) N_d das (rd)-tupel a_λ^{rd} und die Φ_ρ mit der (Normcurve) N_d das (ρd)-tupel $\beta_\lambda^{\rho d}$ gemein“.

Dann lautet das gemeinte Princip so:

ζ) „Ist n keine Primzahl, also $= mp$, so ist die bilineare Invariante (n^{te} Überschiebung) zweier binärer Formen der Ordnung n $(a_\lambda^n, b_\lambda^n)$ zugleich die bilineare Invariante zweier $(p+1)$-närer Formen der Ordnung, resp. Klasse m, die $= 0$ gesetzt, im Raume von p Dimensionen zwei Flächen F_m, Φ_m (m^{ter} Ordnung, resp. Klasse) darstellen, die mit einer (sonst beliebigen) Normcurve (p^{ter} Ordnung und Klasse, die auf F ruht und Φ stützt) resp. die n-tupel a_λ^n, b_λ^n gemein haben.

Sind also die binären Formen apolar, so auch die $(p+1)$-nären und umg.“

Dabei sind natürlich die Zahlen m, p vertauschbar, sodass man ebenso mit zwei $(m+1)$-nären Formen operiren kann. Desgleichen die beiden binären Formen.

Dem Beweise gehe der Hülfssatz voran:

η) „Ist auf einer Normcurve d^{ter} Ordnung ein (rd)-tupel $a_\lambda^{rd} = 0$ gegeben, so giebt es nur eine *einzige* F_r (resp. Φ_r), die mit ihr dasselbe gemein hat und die Curve stützt (auf ihr ruht).“

Diesen Satz beweisen wir zunächst für den Fall $r = 2$.

Dann stützt eine F_2 die Curve N_d, wenn sie alle, N_d umbeschriebenen Φ_2 stützt. Die letzteren sind aber dargestellt durch die verschwindende Matrix:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_d \end{vmatrix} = 0.$$

Demnach müssen für die F_2:

$$(2)\quad a_x^2 = 0$$

die Bedingungen

$$(3)\quad a_{ik} = a_{lm}$$

erfüllt sein, so oft

$$(4)\quad i + k = l + m.$$

„Demnach sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine F_2 die N_d stützt, dadurch ausgedrückt, dass man die Coefficienten von F_2 a_{ik} ($i, k = 0, 1, \dots d$) ersetzt durch die $2d + 1$ (homogenen) Grössen a_{i+k} ($i + k = 0, 1 \dots 2\, d$)."

Soll des Weiteren die F_2 mit N_d die Punktgruppe

$$(5)\quad f \equiv a_\lambda^{2d} = 0$$

gemein haben, so werden die Coefficienten a_{i+k} der Fläche den entsprechenden Coefficienten von f (zunächst abgesehen von Zahlenfaktoren) proportional. q. e. d.

Die Gleichung unserer Normcurve N_d ist aber gerade so gewählt, dass die Gleichung der F_2 wird:

$$(6)\quad a_x^2 \equiv a_\sigma^2 = 0$$

wo diese Form aus der andern

$$(7)\quad a_s = 0$$

(die ihrerseits wieder durch Polarisation von f nach $2d$ Elementen $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_{2d}$ entsteht), durch Gleichsetzen je zweier Elemente $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ etc. hervorgeht.

Die σ sind dann die homogenen symmetrischen Funktionen der so restirenden d Elemente λ und mit den Coordinaten x eines Punktes identisch.

In der That sind ja evidenter Weise für die Form (6) a_σ^2 die Bedingungen $a_{ik} = a_{i+k}$ erfüllt und durch Gleichsetzen aller d Elemente λ geht sie (vermöge ihrer Entstehung) wieder in die Form (5) über d. h. die F_2 (6), die die N_d stützt, hat mit ihr die Punktgruppe (5) gemein.

Wir gehen jetzt über zum nächsten Fall, $r = 3$. Soll eine F_3

$$(8)\quad a_x^3\ {}^{*)} = 0$$

die N_d stützen, d. h. soll die letztere auf allen ersten Polarflächen der F_3 ruhen, so muss

$$(9)\quad a_{sik} = a_{slm} \quad (s = 0, 1, 2, 3)$$

sein, so oft

$$(10)\quad i + k = l + m$$

ist. Dann aber werden *alle* a_{sik}, für die $s + i + k$ denselben Werth ($= N$) hat, einander gleich.

Zu dem Zwecke hat man nur nachzuweisen, dass man alle möglichen Zerlegungen der Zahl N in drei Theilzahlen (deren jede von den Grenzen 0 und d eingeschlossen ist) erhält, wenn man von irgend einer Zerlegung (s, i, k) ausgeht: sodann andere dadurch ableitet, dass man die eine Zahl, etwa s constant lässt, während die beiden andern sich bewegen, doch so, dass ihre Summe sich nicht ändert; mit diesen neuen Zerlegungen gleichfalls so verfährt etc.

Wir wollen weiterhin drei Klassen von Zahlen N unterscheiden; die erste umfasse die Zahlen 0 bis d, die zweite $d + 1$ bis $2\,d$, die dritte $2\,d + 1$ bis $3\,d$. (Grösser kann N nicht werden.)

---

*) Wir denken uns, wie üblich, eine solche Form a_x^n immer mit den bez. Polynomialcoefficienten geschrieben.

Dann ist in den drei Klassen jedenfalls immer eine Zerlegung folgender Art vorhanden:

(10) I. $0, N, 0$. II. $0, d, N-d$. III. $d, N-2\,d, d$.

Lassen wir hier immer die dritte Zahl fest, während die beiden andern alle Werthe annehmen, deren Summe resp. $N, d, N-d$ ist, so erhalten wir aus (10) ebensoviel weitere resp. Zerlegungen, die mit (10) ein derartiges System bilden, dass jede überhaupt mögliche Theilzahl in mindestens einer dieser Zerlegungen vorkommt. Lässt man sie dann jedesmal constant, während die beiden andern Theilzahlen gemäss (4) variiren, so kommt man offenbar zu allen Zerlegungen. q. e. d.

Den ganz allgemeinen Beweis endlich für $n = n$ führt man mittelst des Princips „n auf $n + 1$“. Angenommen, der Satz gelte für eine F_n, dann gilt er auch für eine F_{n+1}. Denn es müssen dann je zwei Coefficienten der letzteren:

(11) $a_{s\,i_1\,i_2\,\ldots\,i_n} = a_{s\,k_1\,k_2\,\ldots\,k_n}$ $(s = 0, 1, \ldots n + 1)$

gleich sein sobald

(12) $(\Sigma i = \Sigma k)$.

η_1) Dann aber werden *alle* $a_{s_0\,s_1\,\ldots\,s_n}$, für die $s_0 + s_1 + \ldots s_n$ denselben Werth (N) hat, einander gleich. In der That ist wieder nur zu zeigen, dass man immer ein solches System von Zerlegungen der Zahl N in $n + 1$ Theilzahlen (innerhalb der Grenzen 0 und d) aufstellen kann, so dass jede nur mögliche Theilzahl jedenfalls einmal vorkommt. Denn lässt man diese wieder jedesmal fest, während die andern so variiren, dass ihre Summe sich nicht ändert, so kommt man jedenfalls zu allen überhaupt möglichen Zerlegungen.

Wir unterscheiden jetzt $n + 1$ Klassen in der Weise wie oben: $(0 \ldots d)$ $(d + 1, \ldots 2\,d)$ etc. bis $\{nd + 1, \ldots (n + 1)\,d\}$. Von diesen brauchen aber nur $\frac{n+1}{2}$ resp. $\frac{n}{2} + 1$ (je nachdem

n gerade oder ungerade ist) berücksichtigt zu werden, da für die restirenden Klassen nur überall 0 mit d zu vertauschen ist, um das gleiche Ergebniss zu erhalten.

In der ersten Klasse existirt sicher die Zerlegung $0\,N\,000\ldots$: in der p^{ten} Klasse desgleichen die folgende: „0, d nebst noch $(p-2)$ andern d, dann der Zahl $N-(p-1)\,d$ und endlich noch $n-p$ Nullen "(so dass selbst in der letzten der betrachteten Klassen noch $\frac{n-1}{2}$ resp. $\frac{n}{2}-1$ Nullen auftreten). Lässt man hier überall die beiden ersten Ziffern bei constanter Summe variiren, während alle übrigen etwa constant bleiben, so gelangt man immer zu dem gewünschten System. Damit ist die aufgestellte Behauptung bei der gemachten Annahme erwiesen: und da sie für $n+1=2, 3$ oben erhärtet ist, so gilt sie allgemein.

η_2) Somit sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen*), dass eine F_{n+1} eine N_d

*) Die Zahl dieser Bedingungen ist leicht anzugeben. (Wir schreiben wieder n statt $n+1$.) Denn da bekanntlich eine F_n von $D_n=\binom{n+d}{d}-1$ Constanten abhängt, andrerseits eine Form a_λ^{nd} von nd, so ist die gewünschte Zahl $x=D_n-nd$. Es lässt sich nun zeigen, dass:

η_3) „die Bedingungen η_1) des Satzes η_2) auch aussagen, dass eine F_n die *ganze* (∞^{x-1}) Schaar von N_d umschriebenen Φ_n stützt und umg."

Zunächst lehrt eine einfache Abzählung, dass eine Φ_n, sofern sie einer N_d umbeschrieben sein soll, $nd+1$ Bedingungen genügen muss, da die Gleichung für das beiden gemeinsame (nd)-tupel $\beta_\lambda^{nd}=0$ identisch verschwinden muss. (Deren Coefficienten sind im allgemeinen unabhängig von einander, da man ja umgekehrt von einem ganz beliebigen (nd)-tupel auf N_d ausgehen kann, somit auch jene $nd+1$ Bedingungen.) Demnach ist die Mannigfaltigkeit dieser Schaar („Φ") gleich $D_n-(nd+1)$ $=x-1$. Um jetzt den Satz η_3) zu erhärten, wählen wir als Typus stützt, dadurch ausgedrückt, dass man ihre Coefficienten in der Form schreibt:

---

die Schaar der einer N_3 umschriebenen Φ_3. In diesem Falle sagen die Bedingungen η_1) aus, dass eine F_3 die folgenden zwölf, N_3 umschriebenen Φ_3 (und somit auch die aus ihnen linear componirte Schaar) stützt:

$u_i\,(u_0\,u_2 - u_1^2) = 0,\; u_i\,(u_0\,u_3 - u_1\,u_2) = 0,\; u_i\,(u_1\,u_3 - u_2^2) = 0\; (i = 0, \ldots 3)$.

Offenbar ist aber die Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen, dass F_3 diese Schaar stützt genau dieselbe wie die Zahl der linear unabhängigen Φ_3, aus denen die Schaar linear zusammensetzbar ist und umgekehrt, also in unserem Falle $= 19 - 9 = 10$.

In der That gelten zwischen jenen Bedingungen, deren man zunächst zwölf erhält, die zwei Identitäten (und nur diese):

$$(a_{013} - a_{022}) + (a_{112} - a_{103}) + (a_{202} - a_{211}) \equiv 0$$
$$(a_{113} - a_{122}) + (a_{212} - a_{203}) + (a_{302} - a_{311}) \equiv 0$$

und dem entsprechend zwischen den zwölf Φ_3 die andern beiden:

$$u_0\,(u_1\,u_3 - u_2^2) + u_1\,(u_1\,u_2 - u_0\,u_3) + u_2\,(u_0\,u_2 - u_1^2) \equiv 0$$
$$u_1\,(u_1\,u_3 - u_2^2) + u_2\,(u_1\,u_2 - u_0\,u_3) + u_3\,(u_0\,u_2 - u_1^2) \equiv 0.$$

Somit bildet unsere auf F_3 ruhende, N_d umschriebene Schaar „Φ“ gerade eine ∞^9 lineare Schaar, ist also identisch mit der ganzen N_d umschriebenen Schaar von Φ_3.

Und ganz so im Allgemeinen. Die linearen Identitäten zwischen den Bedingungen η_1) lassen sich immer sofort hinschreiben, und demnach auch die correspondirenden zwischen den Φ_n, und die Anzahlen beider Bedingungen müssen sich auf x reduciren.

Man hat daher als unmittelbare Folge von Satz η_2):

η_4) „Die vollständige ∞^{x-1} Schaar der einer N_d umschriebenen Φ_n wird jedenfalls dargestellt, wenn man die $d\,\frac{(d-1)}{2}$, N_d umschriebenen Φ_2 mit (den linken Seiten von) ebensoviel ganz beliebigen Flächen Φ_{n-2} multiplicirt und addirt.“

η_5) „Eine F_n stützt eine N_d dann (und nur dann), wenn sie die ganze, der N_d umschriebene Schaar von Φ_n stützt.“

Die dualistischen Sätze verstehen sich dadurch von selbst.

$$(13) \quad a_{s_0\, s_1 \ldots s_n} = a_{s_0\,.\, s_1 + \ldots s_n}.$$

Denn wo die Zerlegung einer Zahl N in $(n+1)$ Theilzahlen $(0 \ldots d)$ nur auf eine Art möglich ist, ist die Schreibweise (13) selbstverständlich gestattet.

Schneidet man jetzt die F_{n+1} mit der Curve N_d, so gelangt man zu einer Gleichung der Ordnung $d\,(n+1)$:

$$(14) \quad f \equiv a_\lambda^{d(n+1)} = 0$$

deren Coefficienten einzeln den Coefficienten $a_{s_0 + s_1 + \ldots s_n}$ der F_{n+1} proportional sind (abgesehen etwa von Zahlenfaktoren). Geht man somit umgekehrt von einer beliebigen Gleichung (14) d. h. von einem beliebigen $d(n+1)$-tupel der N_d aus, so kann es nur eine F_{n+1} geben, die die N_d stützt und mit ihr diese Schnittpunktgruppe gemein hat.

q. e. d.

Dann aber ist wieder die gesuchte F_{n+1} keine andere als

$$(15) \quad a_\sigma^{n+1} \equiv a_x^{n+1} = 0$$

wo diese Form aus a_s (die ihrerseits aus (14) durch Polarisation nach $d\,(n+1)$ Elementen entsteht) hervorgeht, wenn man immer $n+1$ dieser Elemente gleichsetzt.

Denn diese Form (15) erfüllt nach Nr. 21 die Bedingungen (13).

Demnach ist sowohl (15) durch (14), als umgekehrt, eindeutig bestimmt. Dasselbe gilt dann dualistisch für eine Φ_{n+1}, die auf der N_d ruht. Dann aber muss (cf. den Schluss des Werkes) die bilineare Invariante zweier solcher Flächen F_{n+1}, Φ_{n+1} zugleich eine solche der beiden binären Formen (14) sein und umgekehrt und da es beiderseitig nur eine solche giebt, so ist unser Prinzip *) ζ) vollständig abgeleitet.

Man sieht, dass die frühere Definition des Stützens auch durch die letztere Erklärung ersetzt werden kann.

*) Da bekanntlich nach Cayley[68] jede In- und Covariante binärer

Die Anwendung dieses Prinzips auf conjugirte Gruppen binärer Formen fliesst daraus von selbst, man vgl. pg. 95, 205. Sie bleibe noch verschoben, bis wir die beiden weiteren Hülfssätze (den F- und H-Satz) erledigt haben, die nunmehr folgen. So wird man dann im Verein mit dem allgemeinen Satze des §. 34 zu sehr allgemeinen Apolaritätssätzen für die Normcurven geführt.

§. 36.

Der allgemeine Stütz- (F) und Vielflach- (H) Satz der Normcurven.

213. Der erstere dieser Sätze fliesst ohne Weiteres aus dem Prinzip ζ), der Form (15) einer die Normcurve N_d stützenden F_n und endlich aus der uns geläufigen Darstellung einer binären Form ν^{ter} Ordnung als Summe von ν, $\nu - 1$ . . . etc. Potenzen, — ganz wie die besondern Fälle pg. 94, 102, 202, 206, 213, 215, 226, 229, 234, 328.

Hülfsbezeichnung. Wir sagen:

„n Punkte $\{(x_i^{(k)})\ (i = 1, 2, \ldots n,\ k = 0, 1, \ldots d)\}$, deren Coordinaten der Gleichung genügen

$$(1)\quad a_{x_1 x_2 \ldots x_n} = 0$$

bilden ein Pol-n-tupel[69] der Fläche $a_x^n = 0$.“ Ferner:

„nd Lineargebilde „u_i“ ($u_{ix} = 0$, $i = 1, 2, \ldots nd$) bilden ein Pol-nd-flach[69] der Fläche $a_x^n = 0$, wenn jede der Gruppen von n Punkten, durch deren jeden je d der Gebilde u gehen, ein Pol-n-tupel der Fläche bilden.“

Formen als bilineare Invariante zweier solcher Formen gleicher Ordnung aufgefasst werden kann, so lässt sich daraus die Fruchtbarkeit unseres Principes ermessen. Die Formen von einer primen Ordnungszahl lassen sich vor der Hand erst soweit hereinziehen, dass man sich auf die Invarianten derjenigen ihrer Covarianten beschränkt, deren Ordnungszahl nicht prim ist. Diese In- und Covarianten (von Covarianten der Grundform(en)) sind ja bekanntlich wieder solche der Grundform(en).

Dann geht aus der Form $a_\sigma^n = 0$ einer eine N_d stützenden F_n sofort der Hülfssatz hervor: „Stützt eine F_n eine N_d (d. h. eine beliebige Curve d^{ter} Ordnung und Classe in einem Raume von d Dimensionen), so bilden die von den n Punkten eines Pol-n-tupels der Fläche an die N_d gehenden nd Lineargebilde (u) ein Pol-nd-flach der Fläche und umgekehrt."

Dies führt zum Hauptsatze:

Stütz-(F)Satz ι)

I. „Ist ν eine ganze, positive Nichtprimzahl, $= nd$ und

Erstens gerade $= 2l$. Seien ferner $m_{2l}, m_{2l-1} \dots m_1$ ganze positive Zahlen (incl. 0), die nur der einen Bedingung zu genügen haben:

$$(2)\quad 1 . m_{2l} + 2 . m_{2l-1} + \dots l_{ml+1} = nd = 2l,$$

so sind irgend welche

m_{2l}, m_{2l-1}, ... m_{l+1} einer N_d umschriebene resp. $(2l)$-, $(2l-1)$-,...$(l+1)$-flache

im allgemeinen immer die bez. Pol-flache einer bestimmten die N_d stützenden F_n."

„Ist nd zweitens ungerade $= 2l - 1$, und besteht zwischen eben solchen Zahlen $m_{2l-1}, m_{2l-2} \dots m_1$ die eine Relation

$$(2')\quad 1 . m_{2l-1} + 2 . m_{2l-2} + \dots, lm_1 = nd = 2l - 1$$

so sind irgend welche

m_{2l-1}, m_{2l-2}, ... m_1 einer N_d umschriebene resp. $(2l-1)$-, $(2l-2)$-, ... l-flache

die bez. Pol-flache einer bestimmten die N_d stützenden F_n."

II. „Diese F_n erhält man beidemal so. (Man setze statt $2l$ resp. $2l - 1$ wieder nd).

Es giebt eine ∞^0, ∞^1, ... ∞^{l-1} lineare Schaar von Φ_n, die jedem der bez.

m_{nd}, m_{nd-1}, ... $m_{\frac{nd}{2}}$ (resp. $m_{\frac{nd+1}{2}}$) N_d umschriebenen

(nd)-, $(nd-1)$-, ... $\frac{nd}{2}$-(resp. $\frac{(nd+1)}{2}$-)flache

einbeschrieben sind und auf N_d *ruhen.*

Dann ist die gesuchte F_n diejenige, die diese sämmtlichen Schaaren von Φ_n (nebst N_d) stützt."

III. „Dann giebt es (für jede die N_d stützende F_n) eine

∞^{nd-1}, ∞^{nd-3}, ... ∞^1 (resp. ∞^0) von, N_d umschriebenen Pol-

(nd)-, $(nd-1)$-, ... $\frac{nd}{2}$-(resp. $\frac{nd+1}{2}$-) flachen der F_n.

Diese (d. h. ihre Lineargebilde (u)) sind dargestellt durch die zu den

0^{ten}, 1^{ten}, ... $\frac{nd}{2}^{\text{ten}}$ (resp. $\frac{nd+1}{2}^{\text{ten}}$) Polaren der Form

$f = a_\lambda^{nd}$ (die F_n mit der N_d gemein hat) *conjugirten Gruppen.*

Mittelst irgend eines dieser Pol-flache stellt sich F_n als resp. Summe von

(nd), $(nd-1)$, ... $\frac{nd}{2}$ (resp. $\frac{nd+1}{2}$) n^{ten} Potenzen dar."

Da ein solches Pol- $(nd-i)$-flach der F_n aus einem Pol-nd-flach derselben dadurch entsteht, dass i Lineargebilde (u) (d. h. ein Faktor i^{ter} Ordnung einer Form A_λ^{nd}) unbestimmt werden, so drückt sich die dem Satze II zur Seite gehende algebraische Construktion der F_n einfach so aus:

IV. „Sind die m_{nd}, m_{nd-1}, ... $m_{\frac{nd}{2}}$ $(m_{\frac{nd+1}{2}})$ gegebenen

(N_d umschriebenen) Vielflache dargestellt durch ebensoviele binäre Formen (von der Ordnung des bezüglichen Index), so multiplicire man immer die

$$m_{nd-k} \left(k = 0, 1, \ldots \frac{nd}{2} \text{ resp. } \frac{nd-1)}{2}\right.$$

Formen succ. mit

$$\mu^k, \ \mu^{k-1}\lambda, \ \ldots \lambda^{k-1}\mu, \lambda^k.$$

Die zu diesen so entstehenden nd Formen (der Ordnung nd) conjugirte ist die Form $f = a_\lambda^{nd}$, aus der in der gewohnten Weise die Gleichung

$$(3) \quad a_\sigma^n = 0$$

unserer gesuchten F_n hervorgeht."

214. Besonders bemerkenswerth ist der specielle Fall, wo die Gleichung (2) die einfache Form annimmt:

$$(4) \quad nm_{nd-(n-1)} = nd.$$

Er löst nemlich eine (an Nr. 210 sich anschliessende) fundamentale Frage:

Wann besitzt eine Gruppe binärer Formen eine solche *Untergruppe*, die mit dem vollständigen Polarsystem (einer gewissen Ordnung) einer bestimmten binären Form identisch ist?

Zunächst sagt nemlich Satz ι) für die Gleichung (4) aus:

„Irgend d einer N_d umschriebene $(nd - n + 1)$-flache sind Pol-flache einer bestimmten F_n $a_\sigma^n = 0$."

Diese hat mit N_d die Punktgruppe $f = a_\lambda^{nd}$ gemein, die man erhält, wenn man die entsprechenden d gegebenen Formen (der Ordnung $nd-n+1$) succ. mit $\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}\mu, \ldots, \mu^{n-1}$ multiplicirt und die zu diesen nd Formen conjugirte bestimmt.

Andrerseits ist die ganze Gruppe der N_d umschriebenen Pol-$(nd-n+1)$-flache der F_n dargestellt (nach ι, III) durch die zur Gruppe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren der Form f conjugirte

Gruppe (mit der Gliederzahl $nd-2n+2$). Diese ist also jedenfalls zusammensetzbar aus den d gegebenen Formen nebst noch $nd-2n-d+2$ weiteren (linear unabhängigen).

Und da endlich die zu den d gegebenen Formen conjugirte Gruppe eine $(nd-n-d+2)$-gliedrige ist und diese die n-gliedrige Gruppe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren von f unbedingt enthalten muss (und nach Satz ι) nur diese eine), so gilt zunächst:

„Eine $t = nd-n-d+2$-gliedrige Gruppe von binären Formen der Ordnung $\mu = nd-n+1$ enthält (im Allgemeinen) eine (einzige) n-gliedrige Untergruppe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form f (der Ordnung nd)."

U gekehrt ergiebt sich aber sofort, wenn man jetzt t und μ als beliebig gegeben annimmt:
(5) $(d-1)(d+t-2-\mu+1) = 0$ also, da der Fall $d = 1$ bedeutungslos ist: (6) $d = \mu - t + 1$ und weiter

$$(7)\quad n = \frac{\mu-1}{d-1} = \frac{\mu-1}{\mu-t} = 1 + \frac{t-1}{\mu-t}.$$

So oft also $\mu-1$ (oder auch $t-1$) durch $\mu-t$ theilbar ist (und nur dann), giebt es ein Werthsystem d, n, das der Aufgabe genügt. Dies liefert also das Resultat:

ϰ) „Sind μ, t zwei, sonst beliebige, ganze positive Zahlen, die nur der einen Ungleichheit zu genügen haben, dass $\mu-1$ (und damit auch $t-1$) durch $\mu-t$ theilbar ist, so besitzt (aber auch nur dann) eine t-gliedrige binäre Gruppe der Ordnung μ im Allgemeinen stets eine einzige $n = \frac{\mu-1}{\mu-t}$-gliedrige Untergruppe, die sich aus allen $(n-1)^{\text{ten}}$ Polaren einer bestimmten Form f der Ordnung

$$(8)\quad nd = \frac{\mu-1}{\mu-t}(\mu-t+1) = n + \mu - 1$$

zusammensetzt."

Aus der Construktion von f, wie sie oben angegeben wurde, folgt sofort, dass f eine Combinante der d gegebenen Formen, also auch ihrer conjugirten Gruppe; mithin in Satz $\varkappa$) eine Combinante der gegebenen t-gliedrigen Gruppe ist, wie ja auch direkt evident ist.

Der Satz $\varkappa$) fasst den Satz ε) (pg. 366) als speciellen Fall in sich; in der That, wenn wir t gleich n setzen, so folgt

$$(9)\quad t = \frac{\mu - 1}{\mu - t} \text{ oder } \mu = t + 1$$

und umg.

Ein anderer wichtiger Specialfall wird durch die Annahme $n = 2$ erhalten. Dann wird

$$(10)\quad \mu = 2\,t - 1 \text{ oder } \mu - t + 1 = t$$

und umg.: dann aber ist die zur gegebenen Gruppe conjugirte von der gleichen Gliederzahl wie diese. In diesem Falle geht also der Form f immer eine zweite solche gleicher Ordnung zur Seite, die die bez. Combinantenbildung der conjugirten Gruppe ist.

215. Um den Hauptsatz des §. 34 für unsern Stützsatz verwerthen zu können, wird es, wenigstens behufs der grössten Einfachheit im Ausdrucke des Resultates, nöthig sein, die dort aufgestellten Formeln nach einer Richtung hin zu ergänzen. Will man nemlich jenen Satz nur als Potenzsummensatz für eine gegebene Gruppe (ohne Rücksicht auf die bez. Eigenschaften ihrer conjugirten) formuliren, so wird man aus den beiden Gleichungen ((4) (5) pg. 355) k eliminiren. Dies liefert zunächst nach leichter Rechnung:

$$(11)\quad m = (\mu - p)\,(p + 1) - dp$$

oder da bei gegebener t-gliedriger Gruppe n^{ter} Ordnung

$$(12)\quad n - d = t \text{ also } d = n - t \text{ ist,}$$

$$(11)\quad m = (\mu - p)\,(p + 1) - p\,(n - t).$$

Dabei bedeutet m die Mannigfaltigkeit derjenigen p-gliedrigen Untergruppe (der gegebenen), deren Formen sich als Summen von (denselben) μ (n^{ten}) Potenzen schreiben lassen.

Im Besondern giebt es demnach eine endliche Zahl solcher Untergruppen, wenn $m = 0$. Dann aber kommt:

$$(13)\quad \mu = p \, . \, \frac{p + 1 + n - t}{p + 1} = p \left\{1 + \frac{n-t}{p+1}\right\}:$$

λ) „Dies ist somit dann und nur dann möglich, wenn $(n-t)$ durch $(p+1)$ theilbar ist. Dann aber giebt es auch immer solche Untergruppen.“

Specialisirt man andrerseits den Hauptsatz in der Weise, dass man nach der Darstellbarkeit der gegebenen Gruppe selbst fragt, so wird $t = p$ und (11) zu:

$$(14)\quad m = t\,(\mu - n - 1) + \mu$$

und sucht man hier wieder die endlichen Anzahlen von Potenzsummendarstellungen, so kommt

$$(15)\quad \mu = t \, . \, \frac{n+1}{t+1} \text{ d. h.}$$

μ) „Die Formen einer gegebenen t-gliedrigen binären Gruppe n^{ter} Ordnung sind immer (und nur dann) auf eine endliche Art als Summen (je derselben) μ (n^{ten}) Potenzen darstellbar (u. umg.), so oft $(n + 1)$ durch $(t + 1)$ theilbar ist.“

In der That geht dieser Satz auch aus dem vorigen (λ) für $t = p$ hervor.

Desgleichen ist zu unserem Zwecke die Erweiterung unseres Stützsatzes mittelst des vorher gewonnenen Übertragungsprincipes auf conjugirte Gruppen von mehreren Formen unentbehrlich.

Was die Bezeichnung angeht, so werden die Begriffe „Gruppe, Untergruppe“ auch bei ternären etc. Formen beibehalten.

Ist die Form einer F_n irgendwie als Summe von μ (n^{ten}) Potenzen dargestellt, so bilden bekanntlich[69] die bezüglichen μ Lineargebilde (u) ein Pol-μ-flach der Fläche und umg.: das Analoge gilt von einem gemeinsamen Pol-μ-flach mehrerer F_n.

Dann spricht sich der allgemeine Stützsatz für Gruppen von Formen ohne Weiteres so aus:

ν) „Gegeben sei eine N_d (N_d) und eine ∞^m $\{m = 0, 1, 2, \ldots (nd-1)\}$ lineare Schaar (Gruppe) von F_n, die alle die Curve N_d stützen.

Dann existirt eine ∞^μ ($\mu = nd-1-m$) lineare Schaar (Gruppe) von Φ_n, die alle auf dieser „F"-Gruppe und auf N_d ruhen.

Die dieser „Φ"-Gruppe mit N_d gemeinsamen nd-tupel (von Gebilden u) bilden dabei die *vollständige* zur Gruppe der der „F"-Gruppe und N_d gemeinsamen (Schnittpunkt-) nd-tupel conjugirte Gruppe.

Dem entspricht dann, dass die *vollständige* zur „F"-Gruppe conjugirte Φ_n-Gruppe sich linear aus den Flächen der „Φ"-Gruppe und den der Curve N_d umschriebenen Flächen zusammensetzt und umgekehrt die *vollständige* zur „Φ"-Gruppe conjugirte aus den Flächen der „F"-Gruppe und den der Curve N_d einbeschriebenen Flächen.

Geht man umgekehrt von zwei auf der Curve N_d (N_d) dargestellten conjugirten binären Gruppen (der Ordnung nd) aus, so gelangt man wieder eindeutig zu den beiden Gruppen der „F" und „Φ" zurück, die mit N_d (N_d) jene gegebenen binären Gruppen resp. gemein haben."

Dann spicht sich der Hauptsatz des §. 34 nunmehr so aus (wenn die Begriffe Pol-μ-flach und Pol-μ-Eck sich dualistisch gegenüberstehen):

π) I. „Gegeben sei eine $(d+1)$-gliedrige Gruppe von F_n, die alle eine N_d (d. h. eine Raumcurve d^{ter}

Ordnung (Klasse) in einem Raume von d Dimensionen) stützen.

In dieser Gruppe befinde sich eine k-gliedrige Untergruppe von F_n, die alle aus der N_d (abgesehen von je *) μ festen Punkten noch) eine k-gliedrige Gruppe der Ordnung $(nd—\mu)$ ausschneiden. Dann ist die Mannigfaltigkeit dieser Untergruppe

$$(16)\quad m = k\,(d+1—k) - \mu\,(k—1) = \mu—kp \quad \text{wo}$$
$$(17)\quad p = \mu - (d+1—k).$$

Dann besitzt die zur N_d **) und zur F_n-Gruppe *vollständige* conjugirte Φ-Gruppe eine p-gliedrige Untergruppe von gleicher Mannigfaltigkeit, deren Flächen sämmtlich das μ-Eck der bez. μ festen Punkte der Curve zum Pol-μ-Eck besitzen.“

π) II. Gegeben sei eine t-gliedrige Gruppe von F_n, die alle eine N_d stützen.

Dann giebt es solcher p-gliedrigen Untergruppen ($p = 1, 2, \ldots t$), deren Individuen ein der N_d umschriebenes μ-flach zum gemeinsamen Pol-μ-flach haben, eine ∞^m Schaar, wo

$$(18)\quad m = (\mu—p)\,(p+1) - p\,(n—t).$$

Speciell ist diese Schaar eine endliche (∞^0), wenn (und dann immer)

$$(19)\quad \frac{n—t}{p+1} = \text{einer ganzen Zahl ist.}$$

*) Denn zu jeder solchen Untergruppe gehört wieder ein anderes solches μ-tupel.

**) Zur Abbürzung anstatt: zu allen der N_d einbeschriebenen Flächen n^{ter} Ordnung cf. pg. 374. Anm.

D a n n w i r d μ

$$(20) \quad \mu = p\,\{1 + \frac{n-t}{p+1}\}.$$

F ü r $p = t$ e r g e b e n s i c h d i e b e z. P o l - E i g e n s c h a f t e n d e r g e g e b e n e n G r u p p e s e l b s t."

„I n d i e s e n S ä t z e n π (I, II) i s t d i e v o l l s t ä n d i g e I d e n t i t ä t d e r D a r s t e l l b a r k e i t d e r b i n ä r e n F o r m e n a l s S u m m e n v o n g l e i c h h o h e n P o t e n z e n u n d d e r a n a l o g e n d e r $(d+1)$ - n ä r e n F o r m e n, d i e e i n e N_d s t ü t z e n u n d m i t i h r (a l s N_d) d i e g e g e b e n e n b i n ä r e n F o r m e n g e m e i n h a b e n, a u s g e s p r o c h e n."

216. Diesen Stützsätzen steht eine Reihe anderer gegenüber, von denen besondere Fälle schon pg. 97, 210, 221 behandelt sind. Es möge hier nur der Hauptsatz mitgetheilt werden, an den sich alle weiteren, n a m e n t l i c h d u r c h V e r s c h m e l z u n g m i t d e n S t ü t z s ä t z e n (nach Analogie der Entwicklungen pg. 98, 105, 138, 201 f., 230, 234, 237) entstehenden als Corollare anschliessen. Die Ableitungsmethode ist identisch mit der auf pg. 133 gegebenen, so dass auf ihre allgemeine Formulirung hier verzichtet werden mag.

Wir bezeichnen jetzt genauer mit $F_{\mathrm{n}}{}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{d}}$ ein solches (algebraisches) Gebilde im Raume von d Dimensionen, das selbst r-fach ausgedehnt ist und von jedem Lineargebilde (cf. pg. 356) auf der Stufe $(d-r)$ in n Punkten getroffen wird. Demnach würden die bis jetzt mit F_n bezeichneten Flächen jetzt als „$F_{\mathrm{n}}{}^{\mathrm{d}-1}_{\mathrm{d}}$" anzugeben sein, unsere Normcurve mit $F_{\mathrm{d}}{}^{1}_{\mathrm{d}}$ etc.

Dann lautet unser a l l g e m e i n s t e r V i e l f l a c h (H-) Satz folgendermassen *):

*) Wir substituiren im Satze selbst statt des Buchstabens F den anperen H, in Analogie mit den früheren Bezeichnungen.

ρ) H-Satz. „Durch die Ecken von q ($d \geqq q \geqq 2$) einer N_d (d. h. irgend einer Curve d^{ter} Klasse (und Ordnung, im Raume von d Dimensionen) umschriebenen k-flachen geht eine $H_{\substack{d\\n}}^{q-1}$, wo

$$(21)\quad n = \frac{(k-q+1)\,(k-q)\,\ldots\,(k-d+1)}{1\;.\quad 2\;.\;\ldots\;(d-q+1)}.$$

Sie ist dann zugleich der Ort der Ecken einer ∞^{q-1} linearen Schaar von N_d umschriebenen k-flachen. Diese letzteren sind, wenn die q gegebenen k-flache durch q binäre Formen k^{ter} Ordnung dargestellt sind, repräsentirt durch die ganze Gruppe derselben.

Von jedem Punkte der $H_{\substack{d\\n}}^{q-1}$ geht ein und nur ein solches, N_d umschriebenes k-flach aus.“

Besondere Fälle dieses Satzes sind schon vielfach[70)] behandelt: ich nenne hier z. B. Hurwitz, Weyr, Pasch, Cremona. (Des Letzteren Arbeit war mir nicht zugänglich.)

Die analytische Darstellung dieser H-Gebilde ergiebt sich nach Früherem ohne Mühe aus der zu der gegebenen binären Formengruppe conjugirten „Schnittpunktgruppe“. Mittelst der fundamentalen Zerlegung der Nr. 21 ist es leicht, jedesmal die Flächen F_d^{d-1} anzugeben, deren vollständiger Durchschnitt unser H-Gebilde ist.

Endlich erhält man in Analogie mit Nr. 52, 138, 146 die canonische Darstellung dieser H-Gebilde (mittelst Produktensummen) ohne Weiteres aus der canonischen Potenzsummendarstellung der binären Formen.

Die sämmtlichen Entwicklungen und Sätze dieses § mögen in einer späteren Darstellung ausführlicher begründet werden.

§. 37.

Der Satz über die Covarianten der H-Reihe. Der Involutionensatz.

217. Beide Sätze eröffnen ein weites und schwieriges Gebiet unserer Apolaritätsforschungen: der erstere erledigt einen besonders wichtigen Fall der allgemeinen Frage nach der Bedeutung der Covarianten einer binären Form von zusammengesetzter Ordnung; der zweite lehnt sich wieder an einen Specialfall dieses Satzes an und führt in ein Gebiet ein, in dem überhaupt die gegenseitigen Verhältnisse der Lineargebilde in den höheren linearen Räumen, insbesondere insofern sie auf anzahlgeometrische Probleme führen, erforscht werden.

Wir nennen „H Covarianten" einer binären Form f gerader Ordnung ($2d$) die zwei-, drei- . . . d reihigen Determinanten der

2.1, 2.2, . . . $2\,(d-1)^{\text{ten}}$ Differentialquotienten von f (nach den homogenen Variabeln) aus dem Grunde, weil die erste Form dieser Reihe, die Hesse'sche Form von f, gewöhnlich mit H bezeichnet wird. Wir schreiben unsere Formen succ.

(1) $H_1, H_2, \ldots H_{(d-1)}$. Die Elemente der Determinante H_k sind (in der Variabeln) von der Ordnung $2d-2k$, mithin H_k von der Ordnung $2\,(k+1)\,(d-k)$.

Dann lautet unser Satz (unter H_0 sei f selbst verstanden):

σ) H-Satz. „Die Formen H_k ($=0$ gesetzt, $k=0, 1, \ldots d-1$) stellen, wenn F_2 diejenige Fläche (zweiter Ordnung) ist, die eine N_d stützt und sie in den Punkten $f\,(=0)$ trifft, diejenigen Lineargebilde k^{ter} Stufe der Curve dar, die die Fläche *berühren*" oder kürzer: „die, Fläche und Curve gemeinsamen, Lineargebilde k^{ter} Stufe."

Wir benützen zum Beweise folgende Hülfssätze, deren

Beweis für ein beliebiges d gerade so geführt wird, wie für die Fälle $d = 2, 3$, wo er bekannt ist.

1) Die einer allgemeinen $F_2 = F_{\frac{d}{2}}^{d-1}$ „angehörigen" (d. h. sie berührenden) Lineargebilde irgend einer Stufe bilden einen „Complex" zweiten Grades d. h. sie sind durch eine Gleichung 2ten Grades in den Coordinaten*) eines solchen Gebildes bestimmt.

2) Ist eine N_d in allgemeinster Weise dargestellt durch:

$$(2) \quad \rho x_i = \overset{(d)}{\varphi_i}(\lambda) \; (i = 0, 1, \ldots d) = a_{i0} \lambda^d + \ldots a_{id},$$

so sind die (homogenen) Coordinaten eines der N_d angehörigen Lineargebildes k^{ter} Stufe die Kerne der aus den k^{ten} Differentialquotienten der φ gebildeten Matrix, somit ganze Funktionen von λ der Ordnung $(k+1)(d-k)$.

Aus (1) und (2) folgt

3) Es giebt $2(k+1)(d-k)$ einer N_d und einer $F_2 = F_{\frac{d}{2}}^{d-1}$ gemeinsame Lineargebilde k^{ter} Stufe, also gerade so viel, als die Ordnung von H_k beträgt.

4) Wenn ein Lineargebilde irgend einer Stufe eine F_2 berührt, so ist es in Bezug auf die F_2 zum Berührungspunkte c o n j u g i r t d. h. das zu i r g e n d einem Punkte des gegebenen Gebildes conjugirte**) Lineargebilde $(d-1)^{ter}$ Stufe (Gebilde u) geht immer durch den Berührungspunkt.

Dann geht unser Beweis für den H-Satz so vor:

Die der N_d umschriebenen Pol-$(2d-k)$-flache der (die N_d stützenden) F_2 sind, wie wir wissen, dargestellt durch die zur Gruppe der k^{ten} Polaren von f conjugirte Gruppe d. h. die „Elemente" ***) des $(2d-k)$flachs genügen den nach ebenso

*) cf. z. B. §. 1.

**) Kürzer: die Polare (u) des Punktes (in Bezug auf die F_2).

***) d. h. die Argumente der $(2d-k)$ Gebilde (u) (der Curve), die es bilden.

viel Werthen polarisirten und $= 0$ gesetzten k^{ten} Differentialquotienten von f.

Demnach stellt $H_k = 0$ diejenigen (und nur diese) der N_d umschriebenen Pol- $(2d-k)$-flache der F_2 dar, für die $2(d-k)$ ihrer Elemente (u-Gebilde) coincidirt sind (etwa in ε).

Aus dem Begriffe des Polvielflachs folgt dann sofort, dass in diesem Falle das Lineargebilde ε der Curve von der k^{ten} Stufe in Bezug auf die F_2 zu einem Punkte conjugirt ist, von dessen d an die Curve N_d gehenden Lineargebilden (u) gerade $(d-k)$ als Schnitt das Lineargebilde ε bestimmen.

Daraus folgt aber mit Heranziehung des dritten und vierten Hülfssatzes sofort unser Satz *) (cf. die spec. Fälle pg. 92, 201).

Der diesem entsprechende Satz für die ebenen Curven d^{ter} Ordnung, die einen Kegelschnitt stützen, ist daraus sofort angebbar, was aber unterbleibe, da seine Formulirung der geometrischen Prägnanz des H-Satzes entbehren würde (cf. pg. 235).

218. Man überzeugt sich sofort, dass (excl. $d = 1$, wo der Satz bedeutungslos ist) die Ordnung von H_k immer grösser ist als die von f und gleich (abges. von $k = 0$) nur für $k = d-1$.

Man kann daher die Frage aufwerfen: Ist umgekehrt eine Form der Ordnung $2(k+1)(d-k)$ gegeben, die zugleich den Bedingungen genügt, eine Form H_k zu sein, wieviel Formen f giebt es dann, deren Covariante H_k mit der gegebenen Form identisch ist?

Es soll hier nur der einfachste Fall $k = d-1$ in Betracht gezogen werden.

Dann lautet die Frage auch so:

Gegeben sei eine N_d und auf ihr ein $2d$-tupel g_λ:

---

*) Eine andere charakteristische Eigenschaft der binären Formen gerader Ordnung $(2d)$ und der zugehörigen F_2 ist pg. 382 mitgetheilt.

wieviele Φ_2 giebt es, die dieses $2d$-tupel g_λ $(=0)$ (von u-Gebilden) mit der N_d gemein haben und die N_d stützen?

Diese Frage ist aber (nach Satz ε_1) pg. 366) identisch mit der andern:

Wieviel Involutionen $(d+1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt es mit gemeinsamen $2d = \delta$ Doppelelementen?

die selbst wieder in der allgemeineren enthalten ist:

τ) Wieviel Involutionen $(d+1)^{\text{ter}}$ Ordnung giebt es mit gemeinsamen $2d=\delta$ Elementenpaaren (spec. Doppelelementen)?

Die Lösung lautet:

„Die Anzahl x_δ dieser Involutionen bestimmt sich durch die Relation

$$(3)\ \frac{x_\delta}{2} = \frac{(\delta-1)!}{(\frac{\delta}{2}+1)!\,(\frac{\delta}{2}-1)!}$$

die alle Fälle umfasst (nur dass man für $\delta=2$ für 0! die Eins zu setzen hat)".

Demnach ergeben sich z. B. für die Involutionen

3^{ter}, 4^{ter}, 5^{ter}, 6^{ter}, 7^{ter}, 8^{ter}, Ordnung

2, 5, 14, 42, 132, 425

Involutionen mit bez.

4, 6, 8, 10, 12, 14

gemeinsamen Elementenpaaren.

Für den Beweis dieses „Involutionensatzes" habe ich bis zur Zeit keine so einfache Form finden können, dass er hier vollständig abgeleitet werden könnte, es mögen einige Andeutungen über den Gang desselben hinreichen.

Das Verfahren ist dem früher (Nr. 155) bei Involutionen vierter Ordnung angewandten ganz analog. Man bemüht sich, die gewünschten Involutionen in der That durch geeignete (u)-Büschel auszuschneiden.

Gehen wir etwa zu den nächst höheren (fünfter Ordnung) über, so denken wir uns zunächst eine R_9^3 mit 8 eigentlichen Doppelpunkten, deren Argumente, wie man sich (ähnlich wie auf pg. 321) unschwer überzeugt, ganz willkürlich gewählt werden können. (cf. die Anmerkung.)

Dann geht durch jede (eigentliche) vierfache Sekante der Curve ein Ebenenbüschel, das eine Involution fünfter Ordnung mit vorgegebenen acht Elementenpaaren aus der Curve ausschneidet.

Man bestimme daher zunächst die (bekannte) (cf. pg. 363) Anzahl der vierfachen Sekanten, die eine R_9^3 überhaupt besitzt: ziehe in unserem Falle davon ab erstens die Verbindungsgeraden je zweier der (8) Doppelpunkte, zweitens die Sekanten, die von je einem Doppelpunkt ausgehen und die Curve noch zweimal treffen. (Da durch Projektion von solchem Doppelpunkt aus auf eine Ebene eine R_7^2 entsteht, so giebt es solcher Sekanten so viele, als eine R_7^2 ausser 7 bestimmten Doppelpunkten noch weitere besitzt. Und analog in den höheren Fällen.) Demnach erhält man als Anzahl der eigentlichen vierfachen Sekanten unserer R_9^3:

$$(4)\quad \frac{7.\ 6.\ 6.\ 5}{1.\ 2.\ 2.\ 3} - \frac{8.\ 7}{1.\ 2} - 8\left(\frac{6.\ 5}{1.\ 2} - 7\right) = 13.$$

Also existiren jedenfalls (mindestens) 13 Involutionen fünfter Ordnung mit 8 *) gemeinsamen Elementenpaaren.

Sehen wir zu, ob wir nicht einen noch genaueren Werth ermitteln, wenn wir unsere Involutionen aus einer R_{11}^4 (also im nächst höheren Raume) mit 8 (eigentlichen)

*) Diese sind auch als Argumente der 8 Doppelpunkte der R_9^3 willkürlich annehmbar. Denn acht eigentliche Doppelpunkte zu besitzen mit beliebigen Argumentenpaaren zählt 24 Bedingungen, die eine R_9^3 gerade erfüllen kann.

Doppelpunkten*) durch Büschel von (u)-Gebilden ausschneiden, die durch je ein die Curve sechsmal treffendes Lineargebilde zweiter Stufe (Ebene) gehen.

Wir bilden erst wieder die Anzahl dieser Ebenen für eine R_{11}^4 überhaupt (nach Formel (25) pg. 363): ziehen für unsern Fall davon ab 1) die Verbindungsebenen je dreier

*) Die Existenz dieser Curve ist leicht direkt nachweisbar. Denkt man sich eine R_8^2 mit 21 getrennten Doppelpunkten (eine Curve, die man durch einen continuirlichen Process analog dem pg. 346 anmerkung mitgetheilten aus einer R_7^2 mit 15, diese wieder aus einer R_6^2 mit 10 Doppelpunkten, die nach Nr. 192 existirt, ableiten kann) „und legt durch 13 derselben und irgend drei einfache Punkte der Curve eine ∞^3-Schaar von Curven fünfter Ordnung, so schneidet diese gerade die viergliedrige Gruppe unserer betrachteten R_{11}^4 aus“.

Die Argumente der acht Restdoppelpunkte der R_8^2 sind ganz willkürlich (wie die der drei einfachen Punkte) und in der That hängt eine R_{11}^4 mit acht Doppelpunkten (von beliebigen Argumenten) noch ausserdem von drei Willkürlichkeiten ab.

„Daher giebt es also auf unserer R_8^2 immer 14 Sextupel von Punkten, deren jedes nebst den 13 ausgewählten Doppelpunkten und drei willkürlich gewählten einfachen Punkten die Grundpunkte eines Büschels von Curven fünfter Ordnung bilden (und diese 14 Büschel schneiden dann 14 Involutionen fünfter Ordnung mit 8 gemeinsamen Elementenpaaren aus der Curve aus).“

Das einfachste Bild unserer 14 Involutionen erhält man in dem Fall der R_7^2 (mit 15 Doppelpunkten). Betrachtet man hier die Argumentenpaare von 8 derselben als die gegebenen Elementenpaare (die dann allerdings durch eine bestimmte Relation verbunden sind), so werden die gewünschten 14 Involutionen aus der Curve ausgeschnitten

1) durch die 7 Strahlbüschel der 7 weiteren Doppelpunkte,

2) durch 7 Büschel von Curven dritter Ordnung, deren Grundpunkte aus den 7 weiteren Doppelpunkten und je einem Paar von einfachen Punkten der Curve bestehen.

(Denn das Netz von Curven dritter Ordnung durch diese 7 Doppelpunkte schneidet aus der Curve die dreigliedrige Gruppe einer R_7^2 aus.)

der (8) Doppelpunkte, 2) die Verbindungsebenen je zweier von ihnen, die die Curve ausserdem noch zweimal treffen, 3) die durch je einen Doppelpunkt gehenden, die die Curve noch viermal treffen. Dies liefert für die gewünschte Zahl von eigentlichen sechsfachen Sekanten-Ebenen:

$$(5)\quad \frac{8.\,7}{1.\,2}\cdot\frac{7.\,6}{2.\,3}\cdot\frac{6.\,5}{3.\,4} -$$

$$\left\{\frac{8.7.6}{1.2.3}+\frac{8.\,7}{1.\,2}(15-6)+8\left\{\frac{7.\,6}{1.\,2}\cdot\frac{6.\,5}{2.\,3}-\frac{7.\,6}{1.\,2}-7(15-6)\right\}\right\}=14.$$

Durch jede derselben geht ein (u)-Büschel, das eine der verlangten Involutionen aus der Curve ausschneidet, sodass mindestens 14 solcher existiren müssen.

Geht man jetzt aber wieder weiter, zu R_{13}^5, R_{15}^6 etc. mit je acht eigentlichen Doppelpunkten und verfährt analog, so überzeugt man sich, dass diese Zahl 14 immer wiederkehrt, also eine obere Grenze für die gewünschte Anzahl darstellt.

Dies bestätigt sich vollkommen durch die allgemeine Untersuchung. Schneidet man, ganz wie oben, auch die Involutionen n^{ter} Ordnung, durch (u)-Büschel aus Curven aus, die immer $(2n-1)$ eigentliche Doppelpunkte besitzen, so ergiebt sich für die jedesmal so nachweisbare Zahl von gesuchten Involutionen (mit denselben $2(n-1)$ Elementenpaaren) eine Recursionsformel. Diese lässt sich in eine einzige Reihe zusammenziehen, deren Summe von einem bestimmten Gliede an einen festen Grenzwerth nie mehr überschreitet (weder nach oben noch nach unten). Darin liegt der (wenn auch nicht vollkommen strenge) Beweis, dass dieser Grenzwerth die gewünschte Anzahl genau darstellt. Dieser Grenzwerth nun ist kein anderer als der oben unter (3) angegebene, nachdem man für den ursprünglich gefundenen noch Zähler und Nenner mit gewissen ganzen Zahlen multiplicirt hat, um ihm diese elegante Gestalt zu verleihen.

219. Unser Involutionensatz lässt sich aber auch leicht in die Sprache der höheren Räume übersetzen und bildet da wieder den Ausgangspunkt einer vollständigen anzahlgeometrischen Theorie der Lineargebilde dieser Räume.

Wählen wir als Beispiel die Involution vierter Ordnung. Eine solche ist auf einer N_4 durch zwei ihr umschriebene Vierflache (Quadrupel) gegeben und bestimmt dann vermöge aller ihr angehörigen Quadrupel die Punkte einer Geraden g. Jedem Doppelelemente der Involution entspricht dann eine „Ebene" der Curve, die die Gerade g trifft und umgekehrt. Daher giebt es so viele Involutionen vierter Ordnung mit denselben (6) Doppelelementen, als Gerade, die sechs Ebenen einer Curve N_4 (und somit nach einem bekannten[71]) Lagenprincip überhaupt sechs Ebenen) treffen.

Und so spricht sich der Involutionensatz τ) auch so aus:

Satz τ_1). „Es giebt $x_{\delta=2d}$ Lineargebilde erster Stufe (Geraden), die in einem Raume von $d+1$ Dimensionen δ Lineargebilde d^{ter} Stufe treffen (u. dual.)."

Und analog beweist sich folgender Ausspruch:

Prinzip v) „Es giebt in einem Raume von n Dimensionen gerade so viel Lineargebilde r^{ter} Stufe, die $(r+1)(n-r)$ Lineargebilde $(n-1-r)^{\text{ter}}$ (d. i. der conjugirten) Stufe treffen (u. dual.), als $(r+1)$-gliedrige binäre Gruppen n^{ter} Ordnung mit gemeinsamer Funktionaldeterminante."

Man erkennt daraus, dass die vollständige algebraische Erweiterung unseres Involutionensatzes τ) (auf höhere Gruppen) zugleich alle anzahlgeometrischen Probleme lösen würde, die man in den höheren (linearen) Räumen, sofern es sich um Lineargebilde allein handelt, überhaupt stellen kann.

Es ist hier aber zugleich der Ort, allgemein darauf hinzuweisen, wie wir durch unsere Apolaritätsbetrachtungen, die uns mit Nothwendigkeit auf die H-(cf. Satz ρ) und die ihnen je eindeutig zugeordneten (eine N_d stützenden) F-Gebilde und ihre invarianten Eigenschaften führten, thatsächlich implicite die Theorie der entsprechenden Lineargebilde höherer Räume mitbehandelt haben. Denn die Coefficienten in den Gleichungen der H-Gebilde sind ja nur lineare Combinationen der Coordinaten der bez. Lineargebilde (und umgekehrt) und es gelten zwischen ihnen die analogen Relationen, wie zwischen den letzteren (Coordinaten).

So waren die H-Kegelschnitte thatsächlich die Bilder der Raumgeraden und in diesem Sinne behandelte ja der §. 21 die Abbildung der linearen Complexe auf die Ebene.

So rechtfertigt sich die dem Titel dieses Werkes beigegebene Erklärung. Das schon zu Anfang dieses Kapitels in Aussicht gestellte Werk wird gerade diese Beziehung zwischen Linear- und H-Gebilden, nebst den bez. Coefficientenrelationen mit zu Grunde legen. So wird es möglich sein, eine schon von Manchen[72] (z. B. Grassmann, Veronese, Jordan, Halphén, Spottiswoode) angebahnte projektivische Theorie der höheren linearen Räume, wenigstens in den Elementen, systematisch durchzuführen.

§. 38.

Die lineare Transformation auf den rationalen Curven und die allgemeine Collineation.

220. Zum Schlusse soll noch die wichtige, am Ende von Kap. I aufgeworfene Frage nach der Beziehung zwischen den linearen Transformationen auf Curven R_n^d und den Collineationen des bez. Raumes erledigt werden. Dies geschehe in gedrängter Weise mittelst einiger Sätze, deren (einfache) Beweise hier unterdrückt sind.

Es genügt, statt der Curven R_n^d die (Norm)curven R_n^n zu Grunde zu legen. Dazu dient der

Hülfssatz I. „Gegeben sei eine R_n^n:

$$(1) \quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) \; (i = 0, 1, \ldots n).$$

Streicht man $(n - d)$ dieser Gleichungen (etwa für $i=d+1, d+2, \ldots n$), so resultirt eine R_n^d, die aus der R_n^n durch „Projection" entsteht, und zwar mittelst aller (∞^d) u-Gebilde*), die durch das Lineargebilde $(n-d-1)^{\text{ter}}$ Stufe:

$$(2) \quad x_0 = 0, \; x_1 = 0, \ldots x_d = 0$$

gehen, auf dasjenige d^{ter} Stufe:

$$(3) \quad x_{d+1} = 0, \; x_{d+2} = 0, \ldots x_n = 0.$$

Ist daher umgekehrt eine R_n^d ($\rho x_i = \varphi_i(\lambda)$, $i = 0, 1, \ldots d$) gegeben, so lässt sie sich durch Hinzufügung von beliebigen $n-d$ weiteren Gleichungen ($\rho x_k = \varphi_k(\lambda)$, $k = d + 1, \ldots n$) in der angegebenen Art als Projektion einer R_n^n auffassen. Eine lineare Transformation auf der R_n^d ist dann genau dieselbe, wie die auf der bez. R_n^n."

Fragen wir, in was für eine lineare Transformation des Raumes von n Dimensionen durch diesen Process irgend eine solche des gegebenen Raumes (von d Dimensionen) übergeht, so löst dies der

Hülfssatz II. „Ist die Transformation im höheren Raume (von n Dimensionen) gegeben durch:

(4) $\rho y_i = a_{ix} \equiv a_{i0}\, x_0 + a_{i1}\, x_1 + \ldots a_{in}\, x_n \; (i = 0, 1, \ldots n)$

und verschwinden alle ν^{ten} Unterdeterminanten der Transformationsdeterminante (aber nicht alle $(\nu + 1)^{\text{ten}}$), so stellt diese specielle Transformation eine „Projection" dar von dem Lineargebilde ν^{ter} Stufe

(7) $a_{ix} = 0 \; (i = 0, 1, \ldots n)$ (mit den Horizontalcoefficienten a)

*) d. i. immer ein Gebilde $u_x = 0$.

auf das (dualistisch conjugirte) Lineargebilde $(n-\nu-1)^{\text{ter}}$ Stufe:

(8) $a_{k u} = 0$ ($k = 0, 1, \ldots n$) (mit den Vertikalcoefficienten a), verbunden mit einer (allgemeinen) Collineation in dem letzteren Gebilde.

Umg. gehe man von einer beliebigen Collineation im letzteren Gebilde aus, so gelangt man rückwärts zur (uneigentlichen) Collineation (4) im höheren Raume."

221. Fragen wir nunmehr, welche (specielle) Collineation im bez. Raume (von n Dimensionen) eine lineare Transformation auf einer R_n^n nach sich zieht, so lautet die Antwort:

Satz φ) „Durch eine (allgemeine) lineare Transformation auf einer R_n^n ist die (allgemeinste) Collineation des bez. Raumes *von der Art* bestimmt, dass sie die Curve in sich überführt und umgekehrt. Eine solche besondere Collineation hängt (bei ganz willkürlicher Annahme der R_n^n und der projectivischen Beziehung auf ihr) von $(n-1)$ Constanten weniger ab, als die allgemeine Collineation (des bez. Raumes). Dies rührt daher, dass, *wenn* es eine R_n^n giebt, die bei einer Collineation in sich übergeht, so auch noch eine ∞^{n-1} Schaar."

In der That, seien 0, ∞ die Doppelelemente der projectivischen Beziehung auf der R_n^n, und das Coordinatenpolyeder das Normpolyeder (cf. Nr. 30) der Curve, so ist diese dargestellt durch:

$$(9) \quad \rho x_i = k_i \lambda^i \; (i = 0, 1, \ldots n)$$

und die projektivische Beziehung nebst der durch sie bestimmten Collineation durch

$$(10) \quad \lambda' = \alpha\lambda, \quad \sigma y_i = \alpha^i x_i.$$

Dann aber geht auch jede Curve der ∞^{n-1} (pg. 44, 300)

Schaar, die durch (9) bei variabeln k dargestellt ist, in sich über.

222. Nun ist aber der strengere (allgemeinere) Begriff einer binären linearen Transformation

$$(11) \quad \mu = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$$

bekanntlich der, dass λ und μ nicht auf derselben, sondern zwei verschiedenen (ganz beliebigen) R_n^n interpretirt werden, die dann vermöge (11) projektivisch auf einander bezogen werden.

Von diesem Gesichtspunkt aus gelangen wir zu dem

Collineations-Fundamentalsatz ψ). „Durch eine allgemeine Collineation (im Raume von n Dimensionen) geht offenbar *irgend* eine R_n^n (mit ihren sämmtlichen Lineargebilden) über in eine S_n^n (mit allen ihren Lineargebilden) und zwar sind dann vermöge der Collineation die Elemente beider Curven projectivisch auf einander bezogen.

Aber auch umgekehrt ist durch eine projektivische Beziehung zwischen irgend zwei Curven R_n^n, S_n^n *) (in allgemeiner Lage) eine Collineation

*) Nehmen wir die eine Curve zur Normcurve

$$\rho x_i = n_i \lambda^i \; (n_0 = 1,\, n_1 = n, \text{ etc.})$$

so ist die zweite in allgemeinster Weise dargestellt durch

$$\sigma x_i = \varphi_i(\mu) \equiv n_0 a_{i0} \mu^n + n_1 a_{i1} \mu^{n-1} + \ldots n_n a_{in} \mu^0.$$

Vermöge der projectivischen Beziehung (11) gehen die $\varphi_i(\mu)$ über in {abges. von dem in σ eingehenden Faktor $(c\lambda + d)^n$}:

$$\Phi_i(\lambda) \equiv n_0 A_{i0} \lambda^n + n_1 A_{i1} \lambda^{n-1} + \ldots n_n A_{in} \lambda^0.$$

Dann ist die durch (11) bestimmte Collineation unseres Raumes keine andere als

$$\tau y_i = A_{i0} x_0 + A_{i1} x_1 + \ldots A_{in} x_n.$$

Waren die a_{ik} allgemeiner Natur, so auch die A_{ik}.

(des bez. Raumes) und zwar die allgemeinste ihrer Art bestimmt.

In diesem Sinne stellt demnach die binäre Collineation (11) zugleich die $(n+1)$-näre dar und umgekehrt und die Invarianten des einen Gebiets zugleich die des andern.“

Daher ist die oft von uns benützte Operation: „Man wähle irgend eine vorliegende R_n^n zur Normcurve (statt der ursprünglich vorhanden gedachten, auf die der bez. Raum bezogen gewesen war) und nehme auf ihr eine beliebige Parameterverteilung an“ identisch mit der kürzeren:

„Man übe auf den Raum eine allgemeine Collineation aus (durch die die ursprüngliche Normcurve in die R_n^n übergeht).“