was wiederum genügen wird, die allgemeinen Formeln deutlich hervortreten zu lassen. Diese Hülfsformeln führen dann von selbst zur Betrachtung der invarianten (Apolaritäts-) Eigenschaften der binären Formen vierten und sechsten Grades.

Abschnitt II.

Die binäre biquadratische Form und ihre Apolaritätsverhältnisse auf den Normcurven zweiter, dritter und vierter Ordnung.

§. 17
Der Normkegelschnitt.

45. Nach Reye [30] heissen zwei Kegelschnitte (1)

$$\begin{cases} a_x^2 \equiv \Sigma\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k \equiv a_{00}\, x_0^2 + a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + 2a_{01}\, x_0 x_1 + \ldots = 0 \\ u_\alpha^2 \equiv \Sigma\Sigma\, \alpha_{ik}\, u_i\, u_k \equiv \alpha_{00}\, u_0^2 + \alpha_{11}\, u_1^2 + \alpha_{22}\, u_2^2 + 2\alpha_{01}\, u_0 u_1 + \ldots = 0 \end{cases}$$

(zu einander) apolar, wenn ihre bilineare Invariante verschwindet d. h. wenn

$$(2)\ (a\alpha)^2 \equiv \Sigma\Sigma a_{ik}\, \alpha_{ik} \equiv a_{00}\, \alpha_{00} + a_{11}\, \alpha_{11} + a_{22}\, \alpha_{22} + 2a_{01}\, \alpha_{01} + 2a_{02}\, \alpha_{02} + 2a_{12}\, \alpha_{12} = 0,$$

und zur genaueren Unterscheidung führt er weiter die Benennung ein:

„Der (Ordnungs-)Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ stützt (trägt) in diesem Falle den (Klassen-) Kegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$: umgekehrt stützt sich dann (ruht) der letztere auf den (dem) ersteren.“

Dann giebt es bekanntlich, wie zuerst Hesse [31] gefunden, ein und damit (einfach) unendlich viele Polardreiecke von $a_x^2 = 0$, die $u_\alpha^2 = 0$ *um*-, und (dualistisch) zugleich unendlich viele Polardreiecke von $u_\alpha^2 = 0$, die $a_x^2 = 0$ einbeschrieben sind.

Machen wir (durch Coordinatentransformation) den Klassenkegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ zum Normkegelschnitt N_2 (§. 12)

$$(3) \quad u_0 u_2 - u_1^2 = 0,$$

so geht die Bedingung (2) in die einfachere über:

$$(4) \quad a_{02} = a_{11}.$$

Desgleichen ergiebt sich in dem entsprechenden Falle, dass der Ordnungskegelschnitt $a_x^2 = 0$ zum Normkegelschnitt N_2 (cf. ebenda)

$$(5) \quad 4x_0 x_2 - x_1^2 = 0$$

gewählt wird, die Bedingung (2) in der Form

$$(6) \quad 4\alpha_{02} = \alpha_{11}.$$

Wir fassen dies in dem Satze zusammen:

„Unter der Bedingung $a_{02} = a_{11}$ trägt der Ordnungskegelschnitt $a_x^2 = 0$ den Normkegelschnitt N_2 und unter der Bedingung $4\alpha_{02} = \alpha_{11}$ ruht der Klassenkegelschnitt $u_\alpha^2 = 0$ auf dem Normkegelschnitt N_2."

In der Regel machen wir nur vom ersten Theile dieses Satzes Gebrauch.

46. Sehen wir jetzt, wie sich die Bedingung für ein in Bezug auf den Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar modificirt, falls derselbe die Forderung erfüllt, den Normkegelschnitt N_2 zu tragen.

Irgend ein in Bezug auf $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar (x) (y) ist dargestellt durch

$$(7) \quad a_x a_y \equiv x_0 (a_{00} y_0 + a_{01} y_1 + a_{02} y_2) + x_1 (a_{10} y_0 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + x_2 (a_{20} y_0 + a_{21} y_1 + a_{22} y_2) = 0.$$

Mit Anwendung des letzten Satzes und unter dementsprechender Einführung der Bezeichnungen:

$$(8) \quad a_{00} = a_0, \ a_{01} = a_1, \ a_{02} = a_{11} = a_2, \ a_{12} = a_3, \ a_{22} = a_4$$

(sodass allgemein $a_{ik} = a_{i+k}$ wird)
gewinnt die Bedingung (3) die übersichtlichere Form:

(9) $a_x\, a_y \equiv x_0\, (a_0\, y_0 + a_1\, y_1 + a_2\, y_2) + x_1\, (a_1\, y_0 + a_2\, y_1 + a_3\, y_2) + x_2\, (a_2\, y_0 + a_3\, y_1 + a_4\, y_2) = 0.$

Mit Rücksicht auf den Fundamentalsatz des §. 12 setzen wir:

$$(10) \quad \frac{x_2}{x_0} = \alpha\beta, \ \frac{x_1}{x_0} = \alpha + \beta; \ \frac{y_2}{y_0} = \gamma\delta, \ \frac{y_1}{y_0} = \gamma + \delta$$

wo α, β resp. γ, δ die Argumente der vom Punkte x resp. y an N_2 gehenden Tangenten seien. Wir bezeichnen daher die Punkte auch durch (α, β) resp. (γ, δ).

Führen wir endlich noch die homogenen symmetrischen Funktionen s_i $(i = 0, \ldots 4)$ der vier Werthe α, β, γ, δ ein, so dass

$$(11) \quad \frac{s_1}{s_0} = \alpha + \beta + \gamma + \delta, \ \frac{s_2}{s_0} = \alpha\beta + \alpha\gamma \ldots,$$
$$\frac{s_3}{s_0} = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \ldots, \ \frac{s_4}{s_0} = \alpha\beta\gamma\delta$$

so nimmt die Gleichung (7) (cf. Nr. 21) unter der festgesetzten Apolaritätsbedingung die endgiltige Gestalt an:

$$(12) \quad a_x\, a_y \equiv a_s \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + a_2\, s_2 + a_3\, s_3 + a_4\, s_4 = 0$$

was wir durch den Satz hervorheben wollen:

„Trägt der Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ den Normkegelschnitt N_2, so ist irgend ein in Bezug auf den ersteren conjugirtes Punctepaar (α, β) (γ, δ) durch die Gleichung (12) dargestellt" und umgekehrt „Ist die Gleichung (12) durch ein Werthsystem α, β, γ, δ befriedigt, so sind (α, β) (γ, δ); (α, γ) (β, δ); (α, δ) (β, γ) drei solche conjugirte Punktepaare" oder kürzer: „die Gleichung (12) stellt die (dreifach) unendliche Schaar von N_2 umschriebenen

Polvierseiten des zu N_2 apolaren Kegelschnitts $a_x^2 = 0$ dar."

47. Dieser letzte Satz möge zunächst durch einige Zusätze des Näheren illustrirt werden. Er steht nemlich in engster Beziehung zu dem Hesse'schen Satze [32]):

„Zu zwei in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt conjugirten Punktepaaren gehört stets ein drittes, das mit jenen die Gegenecken eines vollständigen Vierseits bildet."

Man wird auf die Existenz eines derartigen Satzes und ähnlicher durch eine Überlegung geführt, die uns noch öfters von Nutzen sein wird.

Bezeichnet, wie oben, $a_x a_y = 0$ die Bedingung für ein in Bezug auf irgend einen Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ conjugirtes Punktepaar, so wird durch zwei solche beliebig angenommene Paare mindestens noch ein weiteres bestimmt, wenn eine Relation von der Form

$$(13)\quad k_1 a_{x_1} a_{y_1} + k_2 a_{x_2} a_{y_2} + k_3 a_{x_3 y_3} = 0$$

statt hat, wo die k Constante und $(x_1\, y_1)$ $(x_2\, y_2)$ die beiden gegebenen Paare sind, und zwar muss dieselbe, wenn ein drittes Punktepaar durch die beiden ersten allein, unabhängig von dem gewählten Kegelschnitt, bestimmt sein soll, in Bezug auf die a_{ik} identisch erfüllt sein.

In der That verschwindet ja das dritte Glied der Relation (13), sobald dies die beiden ersten thun, und zur Bestimmung der 6 Unbekannten (der Coordinaten der Punkte (x_3) (y_3) nebst den Verhältnissen der k) sind die erforderlichen sechs Gleichungen vorhanden.

Zu dem Satze selbst und seinem Beweise gelangt man sogleich durch Einführung des Apolaritätsbegriffes mit Benützung der einfachen Entwicklungen der beiden vorigen Nummern.

Denn die beiden beliebig angenommenen Punktepaare bestimmen ein Vierseit, dem man eine Schaar von Klassenkegelschnitten einbeschreiben kann. Unter ihnen befindet sich immer einer und nur einer, der gemäss der Bedingung (2) auf irgend einem beliebig, aber fest angenommenen (Ordnungs-) Kegelschnitte ruht, woraus, wenn man diesen Klassenkegelschnitt zum Normkegelschnitt N_2 macht, der letzte Satz der vorigen Nummer und damit der Hesse'sche Satz folgt, da ja die Lage des letzteren Kegelschnitts von der des Vierseits ganz unabhängig ist.

Umgekehrt führt aber wieder der (auf irgend eine andere Art jetzt als bewiesen anzunehmende) Hesse'sche Satz auf den letzten Satz der vorigen Nummer.

Denn sollen schon durch ein irgendwie gegebenes conjugirtes Punktepaar weitere bestimmt sein, sodass sich die Identität (13) auf die Form

$$(14) \quad a_{x_1} a_{y_1} + k\, a_{x_2} a_{y_2} = 0$$

reducirt, so muss zwischen den Coefficienten a_{ik} irgend eine lineare Relation herrschen. Denn nur dann reduciren sich die sechs in dieser Identität enthaltenen Gleichungen auf fünf, die erforderlich sind, um die fünf jetzt vorhandenen Unbekannten (die Coordinaten der Punkte (x_2) (y_2) nebst k) zu berechnen.

Eine solche lineare Relation (2) sagt aber aus, dass der Kegelschnitt $a_x^2 = 0$ zu einem andern $u_\alpha^2 = 0$ apolar ist, woraus, wenn man den letzteren zum Normkegelschnitt N_2 macht, der gewünschte Satz folgt.

48. An den Satz der Nummer 46 knüpft sich nun eine ganze Reihe von Beziehungen, die in einzelnen Sätzen festgelegt werden sollen.

Zunächst spricht er sich, da der Normkegelschnitt N_2, abgesehen von der ihm auferlegten Apolaritätsbedingung ganz beliebig ist, auch so aus:

α) „Wenn ein Kegelschnitt f einen andern φ trägt, so giebt es (dreifach) unendlich viele dem letzteren umschriebene Polvierseite des ersteren (und reciprok (dreifach) unendlich viele dem ersteren einbeschriebene Polvierecke des letzteren)."

β) „Unter diesen Vierseiten (Vierecken) giebt es speciell eine (einfach) unendliche Schaar von solchen, für die eine Seite (Ecke) unbestimmt wird. Dies sind (cf. No. 45, 50) die Hesse'schen Poldreiseite (Poldreiecke)."

γ) „Ist irgend ein Punktepaar (x, y) conjugirt in Bezug auf den Kegelschnitt f *), so sind es auch die beiden andern Paare $(x_1\ y_1)$ $(x_2\ y_2)$ die mit dem ersten die drei Paare Gegenecken eines Tangentenvierseits des Kegelschnitts φ bilden."

Setzt man in der Gleichung des Kegelschnitts (1) $a_x^2 = 0$ mit Benützung der Bezeichnungen (8) (10) $\alpha = \beta = \lambda$, so gelangt man zur Gleichung für die Schnittpunkte desselben mit dem Normkegelschnitt ($N_2 = \mathrm{N}_2$) (d. h. genauer zur Gleichung der Argumente derselben auf N_2):

$$(15)\quad a_\lambda^4 \equiv a_\lambda \equiv a_0 + 4a_1\lambda + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 = 0$$

Dies geht aus

$$(12)\quad a_s = 0$$

durch Gleichsetzen aller vier Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta: = \lambda$ hervor.

Dann ist aber nach Früherem jedes der Gleichung (12) genügende Quadrupel (s_i) zum Quadrupel (15) apolar und umgekehrt stellt (12) alle zu (15) apolaren Quadrupel dar. Man hat daher:

---

*) Von jetzt ab möge, falls es nicht besonders wünschenswerth erscheint, die dualistische Hälfte der Sätze unterdrückt werden.

δ) „Die den φ umschriebenen Polvierseiten von f (auf φ) zugehörigen (Argumenten-) Quadrupel sind sämmtlich apolar zum Schnittpunktquadrupel beider Kegelschnitte (d. h. zum Quadrupel ihrer Argumente auf φ). Umgekehrt sind *alle* zu dem letzteren Quadrupel apolaren die (Argumenten-) Quadrupel jener Tangentenvierseite von φ" oder mit der früher eingeführten (Rosanes'schen) Bezeichnung:

„Die zum Schnittpunktquadrupel ($f\varphi$) (auf φ betrachtet) *conjugirte Gruppe* bildet (vermöge der ihr zugehörigen Tangenten von φ) die sämmtlichen φ umschriebenen Polvierseite von f".

Um auszudrücken, dass auch umgekehrt die Gleichung (12) durch (15) eindeutig bestimmt ist, sprechen wir den einfachen, aber öfters als Hilfssatz dienenden Satz aus:

ε) „Unter dem Kegelschnittbüschel, das seine Grundpunkte (15) auf φ liegen hat, befindet sich ein und nur ein Kegelschnitt, der φ trägt. Von diesem gelten dann die Sätze (α)(β)(γ)(δ)".

Die Form (15) kann auch nach Nr. 26 ersetzt werden durch die ganze ihr conjugirte Gruppe, die von der Form ist

$$(16)\ \varkappa_1\, \varphi_1(\lambda) + \varkappa_2\, \varphi_2(\lambda) + \varkappa_3\, \varphi_3(\lambda) + \varkappa_4\, \varphi_4(\lambda) = 0$$

Diese ist sehr leicht vermöge der Wurzeln von (15) darzustellen.

Denn da, wenn $(\lambda - \lambda_1)$ ein Faktor von a_λ, die Form $(\lambda - \lambda_1)^4$ zu a_λ apolar ist (nach dem Rosanes'schen Fundamentalsatz), so geht (16), wenn die Wurzeln von (15) mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ bezeichnet werden, sofort über in die andere Form

$$(17)\ \nu_1\, (\lambda - \lambda_1)^4 + \nu_2\, (\lambda - \lambda_2)^4 + \nu_3\, (\lambda - \lambda_3)^4 + \nu_4 (\lambda - \lambda_4)^4 = 0.$$

Umgekehrt kann man stets von vier ganz beliebigen biquadratischen Formen $\varphi_1(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda)$, $\varphi_3(\lambda)$, $\varphi_4(\lambda)$ ausgehen, dann ist immer eine Form (12) a_s resp. (15) a_λ bestimmt und zwar ergiebt sich aus dem Verfahren des §. 3 ohne Weiteres, dass die Coefficienten a den respectiven vierreihigen Determinanten des Coefficientensystems der $\varphi_i(\lambda)$ proportional sind. Geometrisch heisst dies für uns jetzt:

ζ) „Irgend vier einem Kegelschnitt φ umschriebene Vierseite bestimmen einen zu φ apolaren Kegelschnitt f (der dann aus φ das zu jenen vier Quadrupeln apolare ausschneidet und), dessen Polvierseite sie sind."

Da nach Satz (ε) durch eine biquadratische Form (15) a_λ auf φ ein einziger zu φ apolarer Kegelschnitt f bestimmt ist, mithin ein einziges Quadrupel auf φ, dessen Tangenten zugleich Tangenten von f sind, dessen Lage also von der Parametervertheilung auf φ ganz unabhängig ist, so ist dies eine Covariante vierten Grades von a_λ d. h. da es nur eine solche giebt, deren Hesse'sche Form H.

Man überzeugt sich auch direkt durch leichte Rechnung davon. Denn man erhält das gesuchte gemeinsame Tangentenquadrupel ($f\varphi$) d. h. seine Argumente auf φ, wenn man φ als Normkegelschnitt N_2 wählt, durch Combination der Parametergleichung für N_2 (§. 12):

$$(18)\ \tau u_2 = 1,\ \ \tau u_1 = -\lambda,\ \ \tau u_0 = \lambda^2$$

mit der Klassengleichung von f, die bekanntlich lautet (mit Rücksicht auf (8)):

$$(19)\ u_A^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & u_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & u_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & u_2 \\ u_0 & u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

also durch die Gleichung:

$$(20)\; 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \lambda^2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -\lambda \\ a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{aligned} &\equiv \lambda^4 (a_2 a_4 - a_3^2) + 2\lambda^3 (a_1 a_4 - a_2 a_3) \\ &+ \lambda^2 \left\{ (a_0 a_4 - a_2^2) + 2 (a_1 a_2 - a_2^2) \right\} \\ &+ 2\lambda (a_0 a_3 - a_1 a_2) + (a_0 a_2 - a_1^2) \end{aligned}$$

deren rechte Seite bekanntlich H ist [33].

η) „Das gemeinsame Tangentenquadrupel zweier apolaren Kegelschnitte f, φ ist auf φ durch die Hesse'sche Form des gemeinsamen Punktquadrupels derselben (auf φ betrachtet) dargestellt (und reciprok das gemeinsame Punktquadrupel auf f durch die Hesse'sche Form des gemeinsamen Tangentenquadrupels (auf f gerechnet))."

Daraus ist umgekehrt sofort ersichtlich (Nr. 40) wie es stets zwei binäre biquadratische Formen giebt, die eine andere gegebene solche Form zur Hesse'schen Covariante haben, denn unter der Schaar von Kegelschnitten, die mit φ vier feste Tangenten gemein haben, giebt es zwei, die φ tragen, und die man vermöge Einsetzung der Bedingung (2) resp. (4) in die Gleichung der Schaar (in Punktcoordinaten) erhält.

49. Wir kommen jetzt zum wichtigsten Satze, der zeigt, wie die Bedingung der Apolarität zweier binärer biquadratischer Formen (von der Gestalt (15)):

$$(21)\; a_\lambda^4,\; b_\lambda^4$$

$$\text{d. i. } (22)\; (ab)^4 = 0$$

sich unmittelbar in die ternäre Apolaritätsbedingung zweier den Formen (21) entsprechender Kegelschnitte verwandelt.

Wir gelangen dazu, wenn wir ausser dem bisher betrachteten Kegelschnitt f (unter der Bedingung (8))

$$(23)\; a_x^2 = 0$$

der den Normkegelschnitt N_2 trägt und aus ihm als N_2 das Punktquadrupel

$$(23)\ a_\lambda^4 = 0$$

ausschneidet, noch den Klassenkegelschnitt Φ:

$$(24)\ u_\beta{}^2 = 0$$

ins Auge fassen, der auf dem Normkegelschnitt N_2 ruht und mit ihm (als N_2) das Tangentenquadrupel

$$(24)'\ b_\lambda^4 = 0$$

gemein hat.

Die erste dem Kegelschnitt Φ auferlegte Bedingung lautet nach (6):

$$(25)\ 4\ \beta_{02} = \beta_{11}$$

d. h. es hat Φ die Form:

$$(24) u_{\beta 2} \equiv \beta_{00} u_0^2 + 2\beta_1 u_0 u_1 + 2\beta_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) + 2\beta_{12} u_1 u_2 + \beta_{22} u_2^2 = 0$$

oder, wenn wir analog den Gleichungen (8)

$$(25)\ \beta_{\mathrm{ik}} = \beta_{\mathrm{i+k}}$$

setzen, die andere:

$$(26) u_\beta^2 \equiv \beta_0 u_0^2 + 2\beta_1 u_0 u_1 + 2\beta_2 (u_0 u_2 + 2u_1^2) + 2\beta_3 u_1 u_2 + \beta_4 u_2^2.$$

Um das mit N_2 gemeinsame Tangentenquadrupel zu erhalten, combiniren wir (26) mit

$$(27)\ \tau u_2 = 1,\ \ \tau u_1 = -\lambda,\ \ \tau u_0 = \lambda^2,$$

und finden für das gesuchte Quadrupel (auf N_2):

$$(28)\ \beta_\lambda^4 \equiv \beta_0 \lambda^4 - 2\beta_1 \lambda^3 + 6\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_3 \lambda + \beta_4 = 0$$

Soll nun nach der zweiten Bedingung für Φ β_λ^4 identisch mit (24) b_λ^4 sein, so bestimmen sich die Coefficienten β aus den b in folgender Art:

$$(29)\ \tau\beta_0 = b_4,\ \tau\beta_1 = -2\,b_3,\ \tau\beta_2 = b_2,\ \tau\beta_3 = -2\,b_1,\ \tau\beta_4 = b_0,$$

so dass sich die Originalbedingung für die beiden binären Formen a_λ^4, b_λ^4 jetzt so schreibt:

(22) $(ab)^4 = a_0\,\beta_0 + 2\,a_1\,\beta_1 + 6\,a_2\,\beta_2 + 2\,a_3\,\beta_3 + a_4\,\beta_4 = 0.$

Andrerseits ist dies aber die Apolaritätsbedingung für die beiden Kegelschnitte f, Φ wegen der Bedingungen

$$(8)\ (25)\quad a_{ik} = a_{i+k},\quad \beta_{ik} = \beta_{i+k}.$$

Damit ist der oben angedeutete Satz in folgender Weise gewonnen:

ι_1) „Wenn ein Kegelschnitt K einen Kegelschnitt Φ stützt und zugleich auf einem andern Kegelschnitt f ruht, und sind ausserdem f und Φ apolar zu einander, so sind auch die beiden Quadrupel auf K, die den Schnittpunkten mit f resp. den Tangenten mit Φ zugehören, apolar und umgekehrt," oder in anderer Fassung:

ι_2) „Sind auf K irgend zwei Quadrupel gegeben, so geht (cf. „ε") durch das eine Quadrupel ein einziger Kegelschnitt f, der K stützt, und die Tangenten des andern Quadrupels sind zugleich Tangenten eines einzigen Kegelschnitts Φ, der auf K ruht."

„Sind dann die beiden Quadrupel apolar, so auch die Kegelschnitte f, Φ und umgekehrt."

(Ebenso gehört reciprok zum ersten Quadrupel ein Kegelschnitt Φ_1, und zum zweiten ein anderer f_1, für die dann dasselbe gilt.)

Was aber von irgend einem zu a_λ^4 apolaren Quadrupel b_λ^4 gilt, gilt dann auch von der ganzen zu a_λ^4 conjugirten Gruppe. Machen wir Gebrauch von der einfachen Abkürzung:

„Zu einem Quadrupel auf einem Kegelschnitt *gehört* irgend ein Kegelschnitt f, wenn er durch die *Punkte* des Quadrupels geht, und *gehört* irgend ein Kegelschnitt Φ wenn er die Tangenten des Quadrupels zu Tangenten hat," so können wir der gemeinten Erweiterung folgende, für uns wichtige, Gestalt geben (in der der Satz, wie überhaupt alles, was dieser Abschnitt bis jetzt behandelt hat, worunter auch insbesondere der Satz η, einer Verallgemeinerung auf Räume beliebig hoher Dimension fähig ist, die später zur Sprache kommen soll):

$\varkappa$) „Wenn ein Kegelschnitt f einen andern φ trägt, so *gehört* zur ganzen (dreifach unendlichen) Schaar von Tangentenvierseiten von φ, die Polvierseite von f sind, eine (dreifach unendliche) Schaar von Kegelschnitten, die alle auf f und φ ruhen.

Jedem Vierseit gehört *ein* solcher Kegelschnitt zu und umgekehrt. Andrerseits ist diese Kegelschnittschaar auch die *vollständige* auf f und φ ruhende Schaar.

Reciprok gehört zur ganzen (dreifach unendlichen) Schaar von Punktvierecken von f, die Polvierecke von φ sind, die (dreifach unendliche) Schaar von Kegelschnitten, die f und φ stützen."

Eine weitere Verwerthung dieser Sätze (ι) ($\varkappa$) wird bei der Theorie der Involution vierten Grades ihre Stelle finden.

50. Wir gehen jetzt über zur näheren Erklärung des Satzes (β), der den Zusammenhang der Hesse'schen Poldreiseite mit unsern Polvierseiten betrifft. Die Hauptgleichung (12) $a_s = 0$ für die N_2 umschriebenen Polvierseite von f kann man auch, gemäss der allgemeinen Zerlegung (Nr. 21) in der Form schreiben:

$$(30)\quad \begin{aligned}&(a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3)\\ &+ \lambda_4\,(a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3) = 0\end{aligned}$$

wie die σ die homogenen symmetrischen Funktionen der drei Argumente $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ seien. (Wir schreiben jetzt bequemer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ anstatt der früheren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.)

Im allgemeinen kann man von einem Tangentenvierseit von N_2 resp. (φ), das Polvierseit von f ist, drei Tangenten beliebig annehmen, dann ist die vierte eindeutig bestimmt, wie (30) zeigt.

Bilden aber die drei Geraden ($\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$) mit jeder andern Tangente von N_2 ein Polvierseit von f, so bilden sie bekanntlich ein Poldreieck von f.

Da dann λ_4 unbestimmt werden muss, so sind die (Hesse'schen) N_2 umschriebenen Poldreiecke von f dargestellt durch:

$$(31) \quad \begin{cases} a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3 = 0 \equiv A_1 \\ a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3 = 0 \equiv A_2 \end{cases}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind nach §. 5 die dritten Ueberschiebungen der ersten Differentialquotienten von a_λ^4 mit der variabeln cubischen Form (die das Poldreieck d. h. seine Seiten als Tangenten von N_2 darstellt). Daher können wir mit Rücksicht auf die Darstellung conjugirter Gruppen (§. 4, 5) die Formel (31) so in Worte fassen:

(β') „Die (einfach) unendlich vielen φ umschriebenen Poldreiseite von f, die in Folge der Apolarität von f und φ nach Hesse existiren, sind hinsichtlich ihrer Argumente *auf* φ dargestellt durch die Involution dritten Grades, die conjugirt ist zur Involution der ersten Polaren derjenigen biquadratischen Form, die die Schnittpunkte ($f\,\varphi$) auf φ darstellt."

Diese Tangententripel auf φ sind dann selbst wieder die Polaren einer andern biquadratischen Form a_λ', deren Punktquadrupel (nach Nr. 40 und (η)) ein Kegelschnitt f' zugehört, der φ trägt und dieselben vier Tangenten wie f mit ihm gemein hat.

Umgekehrt kann man (§. 17) anstatt von der Form a_λ

resp. a'_λ von einer ganz beliebigen Involution dritten Grades auf φ ausgehen. Denn zu ihr gehört eine ganz bestimmte biquadratische Form a_λ, deren Polareninvolution die gegebene ist (und deren Funktionaldeterminante die Hesse'sche Form von a_λ ist).

Dies liefert den (bekannten)[34] Satz, der hier als Spezialfall von (ζ) auftritt:

ζ') „Irgend zwei einem Kegelschnitt φ umschriebene Dreiseite sind Poldreiseite eines bestimmten zweiten φ stützenden Kegelschnitts f. Dann giebt es eine ganze (einfach unendliche) Schaar (Involution) von solchen φ umschriebenen Poldreiseiten von f."

51. Die Vergleichung dieses Satzes mit dem andern gleichfalls bekannten:

λ) „Durch die Ecken zweier einem Kegelschnitt φ umschriebenen Dreiseite geht ein ganz bestimmter zweiter Kegelschnitt H. Dann giebt es eine ganze (einfach unendliche) Schaar (Involution) von φ umschriebenen Dreiseiten, deren Ecken auf H liegen."

wird den Ausgangspunkt einer ausgedehnten Theorie bilden, deren erste Elemente hier bei der Theorie der biquadratischen binären Form auftreten.

Sehen wir zunächst, wie dieser Satz (λ) aus der Betrachtung der Form

$$(12)\quad a_s = 0$$

fliesst. Diese konnte durch die beiden Gleichungen

$$(31)\ A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

ersetzt werden, denn umgekehrt lässt sich aus diesen wieder a_s zusammensetzen. Die Gleichungen (31) lassen sich, wenn man auf sie den Prozess, durch den $a_s = 0$ in die Form

$$(30)\ A_1 + \lambda_4 A_2 = 0$$

überging, noch einmal anwendet, auch so schreiben:

$$(32)\ \begin{cases} A_1 \equiv (a_0 \tau_0 + a_1 \tau_1 + a_2 \tau_2) + \lambda_3 (a_1 \tau_0 + a_2 \tau_1 + a_3 \tau_2) \equiv \\ A_2 \equiv (a_1 \tau_0 + a_2 \tau_1 + a_3 \tau_2) + \lambda_3 (a_2 \tau_0 + a_3 \tau_1 + a_4 \tau_2) \equiv \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11} + \lambda_3 A_{12} \\ A_{21} + \lambda_3 A_{22} \end{cases}$$

(wo die τ aus den zwei Argumenten $\lambda_1\ \lambda_2$ gebildet sind), die durch Elimination von λ_3 in die eine Gleichung übergehen:

$$(33)\ \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \equiv \mathrm{H}_\tau^2 = 0.$$

Dann stellt jedes Werthsystem $\lambda_1\ \lambda_2$ (d. h. τ_i), das dieser Gleichung $\mathrm{H} = 0$ genügt, zugleich ein solches dar, das auch die Gleichungen (31) befriedigt.

Damit ist mit Rücksicht auf die Bemerkung, die dem Satze (ζ') voranging, der Satz (λ) bewiesen und zugleich in Beziehung zum Satze (ζ') gesetzt, die sich so formulirt:

λ') „Der Kegelschnitt H, der nach Satz (λ) durch die Ecken der nach Satz (ζ') φ umschriebenen Poldreiseite von f geht (wo f und φ apolar sind) ist durch (33) dargestellt."

Und da für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ die linke Seite von (33) in die Hesse'sche Form H von (15) a_λ^4 übergeht, andrerseits aber dieser Process das Quadrupel der Schnittpunkte des Kegelschnitts H mit dem Normkegelschnitt liefert, so resultirt daraus mit Benützung des Satzes η der weitere Satz:

μ) „Trägt ein Kegelschnitt f einen andern φ, so geht durch die auf φ liegenden Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten von f und φ derjenige Kegelschnitt H, dem alle φ umschriebenen Poldreiseite von f einbeschrieben sind."

Gehen wir, um die Natur der Gleichung (33) besser zu erkennen, von einer beliebigen Involution dritten Grades $x_\lambda + ky_\lambda$ (was nach dem Früheren erlaubt ist) aus; wo

$$(34)\quad \begin{cases} x_\lambda \equiv x_0\,\lambda^3 - x_1\,\lambda^2 + x_2\,\lambda - x_3 = 0 \\ y_\lambda \equiv y_0\,\lambda^3 - y_1\,\lambda^2 + y_2\,\lambda - y_3 = 0 \end{cases}$$

deren Wurzelsysteme dargestellt sind durch (cf. §. 3)

$$(35)\quad \begin{cases} u_s \equiv u_0\,s_0 + u_1\,s_1 + u_2\,s_2 + u_3\,s_3 = 0 \\ v_s \equiv v_0\,s_0 + v_1\,s_1 + v_2\,s_2 + v_3\,s_3 = 0 \end{cases}$$

wo die x, y mit den u, v durch die Relationen verknüpft sind:

(36) $(xy)_{ik} = (uv)_{lm}$ $(i, k, l, m = 0, 1, 2, 3)$ oder $p_{ik} = q_{lm}$,

so erscheint H_τ jetzt in der Form (in der wir es als H'_τ bezeichnen):

$$(37)\quad H'_\tau \equiv \begin{vmatrix} u_0\,s_0 + u_1\,s_1 + u_2\,s_2, & u_1\,s_0 + u_2\,s_1 + u_3\,s_2 \\ v_0\,s_0 + v_1\,s_1 + v_2\,s_2, & v_1\,s_0 + v_2\,s_1 + v_3\,s_2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv s_0^2\,q_{01} + s_0\,s_1\,q_{02} + s_0\,s_2\,(q_{03} - q_{12}) + s_1^2\,q_{12} + s_1\,s_2\,q_{13} + s_2^2\,q_{23}.$$

Soll daher irgend ein Kegelschnitt

$$(38)\quad k_\sigma^2 \equiv k_{00}\,\sigma_0^2 + 2\,k_{01}\,\sigma_0\,\sigma_1 + \ldots$$

in die Form (37) gebracht werden können, so ergiebt sich durch Proportionalsetzen der Coefficienten und Anwendung der zwischen den q geltenden Relation

$$(39)\quad q_{01}\,q_{23} + q_{02}\,q_{31} + q_{03}\,q_{12} = 0$$

für die k die Bedingung[35]:

$$(40)\quad k_{00}\,k_{22} - 4\,k_{01}\,k_{12} + k_{11}\,(2\,k_{02} + k_{11}) = 0.$$

Man kann daher auch so sagen:

ν) „Kann man die Coefficienten eines Kegelschnitts (38) als Liniencoordinaten auffassen, in der Weise, dass man setzen darf:

$$(41)\quad \begin{cases} \rho\,k_{00} = p_{01}, & 2\rho\,k_{01} = p_{02}, & \rho k_{11} = p_{03}, \\ \rho\,k_{22} = p_{23}, & 2\rho\,k_{12} = p_{13}, & \rho\,(2k_{02} + k_{11}) = p_{12}, \end{cases}$$

so giebt es ein (und damit unendlich viele) Dreiecke, die dem Normkegelschnitt N_2 um- und dem Kegelschnitt (38) einbeschrieben sind."

Daher gehen durch ein gegebenes Punktquadrupel H auf N_2 zwei solcher Kegelschnitte; die respectiven Dreiecke sind Poldreiecke von zwei andern Kegelschnitten, die N_2 stützen und N_2 in den resp. Quadrupeln a_λ, a'_λ treffen, deren Hesse'sche Form beidemal H ist (cf. (μ)).

Wir kommen auf die Relation (40) noch einmal zurück bei der Betrachtung der biquadratischen Form auf den cubischen Raum- (Norm-)Curven, und werden dort sehen, dass unter der Schaar linearer Complexe (cf. Nr. 43), die dieselben vier Tangenten (H) der Curve gemein haben, die beiden Complexe (40) die der Schaar angehörigen speziellen sind.

In der That ist der Kegelschnitt H'_τ durch die Involution (34) auf N_2 gerade so bestimmt, wie die Gerade (die Axe des speziellen linearen Complexes) durch dieselbe Involution auf N_3 (cf. Nr. 36).

§. 18.

Die canonische Form der Kegelschnitte F und H.

52. Wir gelangen jetzt zur Theorie der canonischen Formen der beiden mit einem Grundkegelschnitt φ in der angegebenen Weise verknüpften Kegelschnitte f und H und werden dabei erkennen, was wieder als Ausgangspunkt viel ausgedehnterer Untersuchungen erscheinen wird, dass die gewöhnliche auf unsere Sätze der vorigen Nummern bezügliche canonische Form jener Kegelschnitte geradezu identisch ist mit der gewöhnlichen canonischen Form einer biquadratischen binären Form (und zwar unserer Grundform a_λ) resp. ihrer dadurch bestimmten Hesse'schen.

Zu diesem Zwecke leiten wir vorerst zwei Hauptformeln ab, die für das Folgende (dieses Abschnitts) genügen werden. Diese entspringen der Frage:

„Welche Form nimmt die Gleichung der Kegelschnitte $f(a_\sigma^2)$ und H (H_σ^2) an, wenn die Grundform a_λ^4 als Summe von vierten Potenzen auftritt?"

I. Die Gleichung des ersten Kegelschnitts war:

$$(41)\quad a_\sigma^2 = \sigma_0 (a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2) + \sigma_1 (a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2) + \sigma_2 (a_2 \sigma_0 + a_3 \sigma_1 + a_4 \sigma_2) = 0$$

wo die Klammerfaktoren aus den zweiten Differentialquotienten von a_λ durch Polarisation nach λ_1, λ_2 entstehen.

Ist nun

$$(42)\quad a_\lambda \equiv \sum_i \nu_i (\lambda + \alpha_i)^4 \equiv f$$

so werden die zweiten Differentialquotienten (durch die Zahl 12 dividirt gedacht):

$$(43)\ f_{11} \equiv \sum_i \nu_i (\lambda + \alpha_i)^2 \quad f_{12} \equiv \sum_i \nu_i \alpha_i (\lambda + \alpha_i)^2$$
$$f_{22} \equiv \sum_i \nu_i \alpha_i^2 (\lambda + \alpha_i)^2,$$

mithin wird, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$(44)\ \mathrm{A}_i \equiv \sigma_2 + \sigma_1 \alpha_i + \sigma_0 \alpha_i^2$$

die Form a_σ^2 (41) jetzt nacheinander folgende:

$$(45)\ a_\sigma^2 \equiv \sigma_2 \sum_i (\nu_i \mathrm{A}_i) + \sigma_1 \sum_i (\nu_i \alpha_i \mathrm{A}_i) + \sigma_0 \sum_i (\nu_i \alpha_i^2 \mathrm{A}_i)$$
$$\equiv \sum_i \nu_i \mathrm{A}_i (\sigma_2 + \sigma_1 \alpha_i + \sigma_0 \alpha_i^2) \equiv \sum_i \nu_i \mathrm{A}_i^2.$$

II. Die Gleichung des zweiten Kegelschnitts war:

$$(46)\quad \mathrm{H}_\sigma^2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2, & a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2, \\ a_1 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_3 \sigma_2, & a_2 \sigma_0 + a_3 \sigma_1 + a_4 \sigma_2, \end{vmatrix}$$

also nach der Entwicklung von I:

$$(47)\quad \mathrm{H}_\sigma^2 \equiv \begin{vmatrix} \sum_i (\nu_i \mathrm{A}_i), & \sum_i (\nu_i \alpha_i \mathrm{A}_i) \\ \sum_i (\nu_i \alpha_i \mathrm{A}_i), & \sum_i (\nu_i \alpha_i^2 \mathrm{A}_i) \end{vmatrix}$$

oder nach leichter Rechnung:

$$(48)\ H_\sigma^2 = \sum_i \sum_k (\nu_i \nu_k A_i A_k (\alpha_i - \alpha_k)^2.$$

53. Wenden wir diese Ergebnisse auf die N_2 (φ) umschriebenen Polvierseite und Poldreiseite von f an.

Benützen wir den schon öfters herangezogenen Hülfssatz:

„Sind die Formen a_λ^4 und b_λ^4 apolar, und seien ihre Wurzeln resp. α_i, β_i ($i = 1, . . 4$), so ist sowohl (und nur dann)

$$a_\lambda^4 \text{ in der Form } \sum_{i=1}^{i=4} a_i (\lambda - \alpha_i)^4 \text{ als}$$

$$b_\lambda^4 \text{ in der Form } \sum_{i=1}^{i=4} b_i (\lambda - \beta_i)^4$$

darstellbar" oder in anderer Fassung:

„Soll a_λ^4 in der Form $\sum_{i=1}^{i=4} a_i (\lambda - \alpha_i)^4$ darstellbar sein, so müssen die a_i der Gleichung $a_s = 0$ genügen und umg."

so können wir sagen:

0_1) „Der den Normkegelschnitt stützende und aus ihm das Quadrupel a_λ^4 ausschneidende Kegelschnitt f ist immer in der Form

$$(45)'\ a_\sigma^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=4} \nu_i A_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{i=4} \nu_i (\sigma_2 + \sigma_1 \alpha_i + \sigma_0 \alpha_i^2)^2$$

darstellbar, wo die α_i irgend ein Werthquadrupel der N_2 umschriebenen Polvierseite von f darstellen."

Oder, da die $A_i = 0$ gesetzt, die Geraden dieses Polvierseits selber vorstellen:

0_2) „Der einen Kegelschnitt φ stützende Kegelschnitt f nimmt, auf irgend eines seiner φ umschriebenen Polvierseite bezogen, die Form (45)' an."

Umgekehrt kann man von irgend einem der sechsfach unendlich vielen Polvierseite eines beliebigen Kegelschnitts f ausgehen; durch dieses ist φ eindeutig bestimmt und damit die Gleichung (45)'.

Nun ist aber bekanntlich irgend ein Kegelschnitt f, auf eines seiner Polvierseite $y_1 = 0, \ldots y_4 = 0$ bezogen, stets in die Form zu bringen:

$$(49) \quad \Sigma \mu_i \, y_i^2 = 0.$$

Man gelangt daher, von dieser Form rückwärts ausgehend, falls man φ zum Normkegelschnitt macht, wieder zur Form a_λ^4.

Entsprechend geht der zweite Kegelschnitt H, bezogen auf die Polvierseite von f, in die Form über:

$$(48)' \quad \sum_{i=1}^{i=4} \sum_{k=1}^{k=4} (\nu_i \, \nu_k \, A_i \, A_k \, (\alpha_i - \alpha_k)^2)$$

Diese Form wird erst von Interesse, wenn wir, wie gleich geschehen wird, als specielle Polvierseite von f die Poldreiseite in's Auge fassen.

54. Bleiben von den Grössen α_i, aus deren vierten Potenzen sich a_λ^4 linear zusammensetzt, drei fest, während die vierte unbestimmt wird, so kann man die letztere gleich der Variabeln λ nehmen und erhält dann:

$$(50) \quad a_\lambda^4 \equiv \sum_{i=1}^{i=3} a_i (\lambda - \alpha_i)^4.$$

Diese Tripel α_i erfüllen dann nach Nr. 50 die Relationen

$$(31) \quad A_1 = 0, \; A_2 = 0$$

d. h. sie sind die Tripel der N_2 umschriebenen Poldreiseite von f.

Dann nehmen, auf ein solches Dreiseit bezogen, die Kegelschnitte f, H die Formen an:

$$(51)\begin{cases} f \equiv a_\sigma^2 \equiv \sum\limits_{i=1}^{i=3} \nu_i\, A_i^2 \equiv \sum\limits_{i=1}^{i=3} \nu_i\,(\sigma_2 + \sigma_1\,\alpha_i + \sigma_2\,\alpha_i^2)^2 = 0 \\ H \equiv H_\sigma^2 \equiv \nu_1\nu_2\nu_3 A_1 A_2 A_3 \left\{ \dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{\nu_3\,A_3} + \dfrac{(\alpha_2-\alpha_3)^2}{\nu_1\,A_1} + \dfrac{(\alpha_3-\alpha_1)^2}{\nu_2\,A_2} \right\} = 0 \end{cases}$$

woraus die geometrische Eigenschaft des zweiten Kegelschnitts, den N_2 umschriebenen Poldreiseiten von f umschrieben zu sein, in die Augen springt.

Damit ist aber wieder die Umkehrung des ganzen Verfahrens in folgender Weise ermöglicht.

π) I. Zwei Kegelschnitte φ und f mögen in der Beziehung stehen, dass es ein φ umschriebenes Poldreiseit von f giebt. Dann ist die Gleichung von f, wenn $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ die Seiten des Dreiseits sind, immer in die Form zu bringen:

$$(52)\ f \equiv \mu_1\, y_1^2 + \mu_2\, y_2^2 + \mu_3\, y_3^2 = 0.$$

(Ist φ mit dem Dreiseit gegeben, so stellt (52) bei variabeln μ die ganze Schaar der zugehörigen Kegelschnitte f dar.)

Ist dann auf φ ein Parameter ausgebreitet und seien α_1, α_2, α_3 die Argumente der Seiten des Dreiseits (oder, wenn man will, ihrer Berührungspunkte auf φ), so trifft f den Kegelschnitt φ in den Punkten

$$(53)\ a_\lambda^4 \equiv \mu_1\,(\lambda - \alpha_1)^4 + \mu_2\,(\lambda - \alpha_2)^4 + \mu_3\,(\lambda - \alpha_3)^4.$$

Des Weiteren stützt f den Kegelschnitt φ, und zwar ergiebt $a_s = 0$ *) die Argumente der Quadrupel der φ umschriebenen Polvierseite von f; $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die der Tripel der φ umschriebenen Poldreiseite von f etc. etc.

---

*) Und zwar nimmt a_s dann, wenn wir mit $A_i(\sigma)$ (51) bezeichnen, dass A_i in den σ geschrieben ist, die einfache Eorm an:

$$a_s \equiv \sum_1^3 \nu_i\ A_i(\sigma)\ A_i(\tau) = 0$$

wo die σ aus $\lambda_1\ \lambda_2$, die τ aus $\lambda_3\ \lambda_4$, und die (links stehenden) s aus $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ gebildet sind.

π) II. Zwei Kegelschnitte φ und H mögen in der Beziehung stehen, dass es ein φ um- und f einbeschriebenes Dreieck giebt. Dann lässt sich, wenn $z_1 = 0$, $z_2 = 0$, $z_3 = 0$ die Seiten des Dreiecks sind, f immer in die Form bringen:

$$(54) \quad \frac{\mu_1'}{z_1} + \frac{\mu_2'}{z_2} + \frac{\mu_3'}{z_3} = 0.$$

(Ist φ mit dem Dreiseit gegeben, so stellt (54) bei variabeln μ' die ganze Schaar der zugehörigen Kegelschnitte H dar.)

Sind β_2 die Argumente der drei Seiten z_i (als Tangenten von φ) so trifft H den Kegelschnitt φ in den Punkten:

$$(55) \quad H_\lambda^4 \equiv \frac{\mu_1'}{(\lambda - \beta_1)^2} + \frac{\mu_2'}{(\lambda - \beta_2)^2} + \frac{\mu_3'}{(\lambda - \beta_3)^2} = 0.$$

Das Dreiseit ist dann zugleich Poldreiseit eines zweiten Kegelschnitts f:

$$(56) \quad M_1 z_1^2 + M_2 z_2^2 + M_3 z_3^3 = 0$$

wo die M mit den μ' durch die Relationen verknüpft sind:

$$(57) \quad \rho\mu_i' = \frac{(\beta_k - \beta_l)^2}{M_i}.$$

Dann lässt sich wieder der Satz I. anwenden, und zwar sind dann alle Poldreiseite von f, die φ umschrieben sind, zugleich H einbeschrieben etc. etc.

Damit ist denn in der That die gegenseitige Zurückführbarkeit der canonischen Formen der Kegelschnitte (52) (54) auf die bezüglichen der biquadratischen Form (50) und ihrer Hesse'schen (55) und umg. dargethan.

55. Daran schliesst sich nun unmittelbar die Bedeutung der Invariante j der biquadratischen Form a_λ^4. Denn diese In-

variante verschwindet bekanntlich, wenn es möglich sein soll, a_λ^4 als Summe von zwei vierten Potenzen darzustellen.

Dies geht in der That aus der Zusammensetzung der Form a_s sofort hervor. Denn soll es ein Werthepaar $\alpha_1, \alpha_2 (\tau_i)$ geben, das mit j e d e m Werthepaar $\lambda_1, \lambda_2 (\sigma_i)$ ein $a_s = 0$ befriedigendes Quadrupel ergiebt, so müssen in der Gleichung

$$a_s \equiv \tau_0 (a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2) + \tau_1 (a_1 s_0 + a_2 s_1 + a_3 s_2) \\ + \tau_2 (a_2 s_0 + a_3 s_1 + a_4 s_2) = 0$$

die drei Klammerfaktoren verschwinden, was (für ein bestimmtes Werthepaar) unter der Bedingung

$$(58)\ j = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0 \text{ stattfindet.}$$

Dann bilden α_1, α_2 auch mit jedem Werthe λ ein den Gleichungen

$$(31)\ A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

genügendes Tripel, so dass es erlaubt ist, in der Form (50)

$$(50)\ a_\lambda^4 \equiv \sum_1^3 a_i (\lambda - a_i)^4$$

α_3 gleich λ zu nehmen, wodurch sich die erste Seite reducirt auf:

$$(59)\ a_1 (\lambda - \alpha_1)^4 + a_2 (\lambda - a_2)^4 \equiv a_\lambda$$

ρ) „Dann zerfällt, wie aus (51) ersichtlich, der Kegelschnitt f in die beiden Geraden

$$(60)\ \sqrt{a_1}\, A_1 + \sqrt{a_2}\, A_2 = 0,\ \sqrt{a_1}\, A_1 - \sqrt{a_2}\, A_2 = 0$$

sowie der Kegelschnitt H in die beiden andern

$$(61)\ \mathrm{A}_1 = 0,\ \mathrm{A}_2 = 0\text{“}$$

Das erstere geht auch daraus sofort hervor, dass j mit der Determinante des Kegelschnitts a_σ^2 identisch ist.

Andrerseits sind dann die vier Wurzelwerthe von α_λ^4 harmonisch zu einander, etwa $(\lambda_1 \lambda_2)$ zu $(\lambda_3 \lambda_4)$. Dies geht auch aus (60) mit Hülfe des Fundamentalsatzes der Nro. 31 hervor. Denn aus ihm leuchtet ein, dass die Geraden (60) in Bezug auf den Kegelschnitt N_2 (φ) conjugirt sind, d. h. dass ihre Schnittpunktepaare mit demselben zu einander harmonisch liegen, zugleich aber auch, dass das zu den beiden Geraden harmonische Tangentenpaar (61) den zwei Argumenten $(\alpha_1 \alpha_2)$ zugehört, das sowohl zu $\lambda_1 \lambda_2$ als zu $\lambda_3 \lambda_4$ harmonisch ist.

Aus (61) ist auch das bekannte Resultat abzulesen, dass wenn die Invariante j der Form a_λ^4 verschwindet, die Hesse-sche Form H von a_λ^4 zwei doppeltzählende Wurzeln besitzt.

Die angegebene Bedeutung des Verschwindens von j für den Kegelschnitt f wird auch weiterhin vielfache Verwendung finden.

56. Die Bedeutung der Hesse'schen Form H von a_λ^4 ist im Obigen schon nach mehreren Seiten hin untersucht worden. Wir heben noch eine hervor, die unmittelbar aus (33) folgt und im Satze (μ) schon implicite steckt:

σ_1) „Unter den sämmtlichen einem Kegelschnitt φ umschriebenen Poldreiseiten eines andern φ stützenden Kegelschnitts f befinden sich vier specielle von der Art, dass zwei der drei Seiten coincidirt sind.

Diese doppelt zählenden Geraden sind die gemeinsamen Tangenten von f und φ.“

Da aber der Process, durch den H aus H_τ^2 (33) entsteht, auch so aufzufassen ist, dass man aus den beiden Gleichungen

$$(62)\quad \begin{cases} \lambda^2 (a_0 \mu + a_1) + 2 \lambda (a_1 \mu + a_2) + (a_2 \mu + a_3) = 0 \\ \lambda^2 (a_1 \mu + a_2) + 2 \lambda (a_2 \mu + a_3) + (a_3 \mu + a_4) = 0 \end{cases}$$

μ eliminirt, so ergeben sich andrerseits die vier Geraden (Tangenten von N_2 (φ)), die mit den (doppelt zählenden) Geraden H die vier ausgezeichneten Poldreiseite von f liefern, durch Elimination von λ aus (62).

Dies liefert daher eine andere Covariante vierten Grades, die dann bekanntlich immer von der Form $f + k\,H$ sein muss.

Durch Ausrechnung ergiebt sich leicht, dass diese neue Covariante folgende ist

$$(63)\ \mathrm{P} \equiv 2\,jf - 3\,i\,H = 0.$$

Aus der Eigenschaft der Kegelschnitte f, H folgt dann sofort:

σ_2) „Die Berührungspunkte der den apolaren Kegelschnitten f, φ gemeinsamen Tangenten auf φ sind die einzigen Punkte auf φ, deren Polaren in Bezug auf f wieder Tangenten von φ sind. Die letzteren sind durch die Gleichung (63) $\mathrm{P} = 0$ gegeben. Der Kegelschnitt H (der durch die Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten f, φ auf φ geht) berührt die vier Tangenten $\mathrm{P} = 0$ in ihren Schnittpunkten mit jenen gemeinsamen Tangenten von f und φ."

57. Die Bedeutung der Covariante sechsten Grades

$$(64)\ \Theta \doteq \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ H_1 & H_2 \end{vmatrix}$$

wird sich in ihrem vollen Umfange erst in der Theorie der Involutionen vierter Ordnung übersehen lassen, indem ja alle Eigenschaften der Funktionaldeterminante einer solchen Involution sich für Θ specialisiren lassen.

Hier mögen nur die beiden zunächst liegenden Eigenschaften von Θ Platz finden.

Theilt man die Wurzeln von a_λ^4 (und dies ist auf dreifache Weise möglich) in zwei Paare, so giebt es drei Werthepaare, von denen jedes zu zwei solchen Paaren zugleich harmonisch ist: dies sind bekanntlich die drei Wurzelpaare von $\Theta = 0$ d. h. hier (mit Hülfe des Satzes der pg. 106)

τ_1) „Die Ecken des den Kegelschnitten des Büschels, die auf einem gegebenen (φ) das Quadrupel a_λ^4 ausschneiden, gemeinsamen Polardreiecks sind durch $\Theta = 0$ dargestellt."

Legt man einem dieser drei Wurzelpaare die Argumente $0, \infty$ bei, so verschwinden in a_λ^4 die Coefficienten a_1, a_3, und die Gleichung $a_s = 0$ (30) wird daher für diese canonische Form von a_λ^4:

$$(65)\ a_s \equiv (a_0\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_2) + \lambda_4\,(a_2\,\sigma_1 + a_4\,\sigma_3) = 0.$$

Daraus folgt aber sofort, dass sowohl der Werth 0, dreifach gezählt, mit dem Werthe ∞, als umgekehrt der Werth ∞, dreifach gezählt, mit dem Werthe 0, je ein der Gleichung $a = 0$ genügendes Quadrupel bilden. Daher können wir auch so sagen:

τ_2) „Die drei den Wurzelpaaren von Θ zugehörigen Tangentenpaare auf φ haben die Eigenschaft, dass jedes von ihnen (indem man je eine der Tangenten des Paares dreifach rechnet) ein Paar von *Polvierseiten* des zu φ apolaren Kegelschnitts f darstellt."

Diese Eigenschaft kommt aber thatsächlich, wie leicht zu sehen, wieder auf die des vorigen Satzes zurück, dass das Dreieck der drei Punkte (Wurzelpaare) $\Theta = 0$ sowohl Polardreieck von φ als von f ist.

58. Das Verschwinden der Invariante i, da dann a_λ^4 zu sich selbst apolar ist, hat wegen der sonst bekannten Eigenschaft den Satz zur Folge (cf. pg. 70, 80 und Nro. 83):

φ) „Trägt ein Kegelschnitt f einen andern φ, so bilden die Tangenten an φ in den Schnittpunkten beider nur dann ein Polvierseit von f, wenn das Schnittpunktquadrupel ein aequianharmonisches ist und umgekehrt." „Ausserdem sind alle φ umschriebenen Poldreiseite von f apolar zu einander."

Dies seien die Sätze über die Darstellung der biquadratischen Form auf einem Kegelschnitt, deren manche schon bekannt sind und die wir nur einer gewissen Vollständigkeit wegen zusammengestellt haben, um auf sie bei den späteren schwierigeren Untersuchungen als auf den einfachsten Typus zurückgreifen zu können.

§. 19.

Die Darstellung der biquadratischen binären Form auf der cubischen Normcurve.

59. Das Folgende bildet eine erste Ergänzung und Weiterführung der Theorie der cubischen Normcurven (§. 12 ff.), speciell der Theorie des linearen Complexes $a_s = 0$, soweit es mit Benützung der Methoden des §. 17 möglich ist.

Die damals (pg. 79) abgeleitete Fundamentaleigenschaft dieses Complexes möge hier kurz recapitulirt werden.

α) „Der lineare Complex $a_s = 0$ wird gebildet von den Treffgeradenpaaren der Tangentenquadrupel der cubischen Curve, deren Argumente die Gleichung $a_s = 0$ befriedigen oder, was dasselbe ist, die zu a_λ conjugirte Gruppe bilden."

„Speciell enthält er die Congruenz, deren Directricen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels a_λ sind."

Das letztere Quadrupel bildet gerade die vier Tangenten, die der Complex mit der Curve gemein hat. Umgekehrt aber gab es ein ganzes Complexbüschel, dessen Individuen alle diese vier Tangenten nebst der Congruenz ihres Treffgeradenpaares enthalten. Unter ihnen befand sich auch der Nullcomplex der Curve, so dass das Complexbüschel dargestellt war durch:

$$(1)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

Wie nun diesem Büschel in der Ebene (cf. §. 17) ein Kegelschnittbüschel entsprach, und zwar dem Nullcomplex der Normkegelschnitt und dem andern ($a_s = 0$) der den Normkegelschnitt stützende und das Quadrupel a_λ ausschneidende Kegelschnitt, so kann man auch hier fragen:

Wodurch ist der Complex $a_s = 0$ unter den Complexen des Büschels (1) ausgezeichnet?

Dies ergiebt sich leicht so. Die Sehnen (σ_i) der Normcurve, die einem beliebig gegebenen linearen Complex

$$(2)\ \Sigma p_{ik}\, q_{lm} = 0$$

(wo die q beliebige Coefficienten sind) angehören, waren dargestellt durch die Gleichung (pag. 75):

$$(3)\,(q_{23}\sigma_0^2 + q_{31}\sigma_0\sigma_1 + q_{20}\sigma_1\sigma_2 + q_{01}\sigma_2^2) + \frac{q_{12}}{3}\sigma_{\cancel{2}}^2 + (3q_{03} - \frac{q_{12}}{3})\sigma_0\sigma_2 = 0.$$

Die Gleichung für die dem Complexe (2) angehörigen Axen der Curve ging aus der letzten durch Umtauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} oder auch von $3\,q_{03}$ mit q_{12} hervor. Soll aber der Kegelschnitt (3) den Normkegelschnitt stützen, so müssen die Coefficienten von σ_1^2 und $2\,\sigma_0\,\sigma_2$ einander gleich sein d. h.

$$(4)\ \frac{2\,q_{12}}{3} = 3\,q_{03} - \frac{q_{12}}{3} \text{ oder } 3\,q_{03} = q_{12}.$$

Für die Gleichung des Complexes $a_s = 0$ ist:

$$(5)\ \rho q_{12} = 3\,a_2,\quad \rho q_{03} = a_2, \text{ also } 3\,q_{03} = q_{12}.$$

Dies liefert aber den Satz:

β_1) „Unter allen linearen Complexen, die vier feste Tangenten (a_λ) einer cubischen Raumcurve enthalten, ist

$$a_s = 0$$

dadurch ausgezeichnet, dass die ihm angehörigen Axen der Curve die den ihm angehörigen Sehnen *zugehörigen* sind d. h. wo die beiden Ebenen einer solchen Axe (an die Curve) zugleich die Ebenen der Punkte der entsprechenden Sehne sind." „Oder kürzer: der Complex $a_s = 0$ ist sich selber conjugirt" *).

Oder, da ja (pg. 75) diese Sehnen und Axen eines linearen Complexes immer auf derselben Fläche liegen:

β_2) „Die Fläche der Sehnen und Axen der Curve, die dem Complexe

$$a_s = 0$$

angehören, ist in Bezug auf die Curve vollständig *zu sich selbst dualistisch.*"

Nun war der dem Complexe $a_s = 0$ entsprechende Kegelschnitt (§. 17) einfach gegeben durch:

$$(6)\ a_\sigma^2 = 0$$

wo (6) aus $a_s = 0$ hervorging, indem man von den vier in den s_i steckenden Argumenten je zwei (etwa $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda'$) gleichsetzte.

In der That ist ja dann (cf. (α)) das Treffgeradenpaar dieses Quadrupels ($\lambda, \lambda, \lambda', \lambda'$) aus Sehne und Axe ($\lambda\lambda'$) gebildet und umgekehrt wird eine Sehne oder Axe immer nur von einem solchen Tangentenquadrupel ($\lambda, \lambda, \lambda', \lambda'$) getroffen.

60. Greift man aus der Schaar der zu a_λ conjugirten Qua-

---

*) D. h. in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve. In der That ist ja irgend ein Geradenpaar in Bezug auf ihn (cf. pg. 75) ein conjugirtes, wenn die beiden Geraden durch Vertauschung von 3 p_{03} und p_{12} in einander übergehen. Mithin besteht der Complex $a_s = 0$ nur aus conjugirten Geradenpaaren.

drupel irgend zwei heraus, so bilden diese eine Involution vierten Grades, deren es also eine vierfach unendliche Schaar giebt.

Nach Nro. 44 (pg. 80 f.) liegen die Treffgeradenpaare aller Tangentenquadrupel einer Involution vierter Ordnung auf einer Fläche zweiter Ordnung, deren mit der Curve gemeinsame Ebenen die (Schmiegungs-) Ebenen in den ihr mit der Curve gemeinsamen Punkten sind und zwar bilden sie die eine Regelschaar dieser Fläche.

„Solcher Regelschaaren, die nach dem Hauptsatz (α) *alle dem Complexe* $a_s = 0$ *angehören*, giebt es also eine vierfach unendliche Schaar."

Unter diesen Regelschaaren giebt es gewisse ausgezeichnete, die mit den Covarianten von a_λ in der engsten Beziehung stehen.

Vor allem verdienen diejenigen unsere Aufmerksamkeit, die drei Tangenten der Curve enthalten und die uns auch später von ganz anderer Seite her wieder begegnen werden *).

Haben nemlich alle Quadrupel einer in der zu a_λ conjugirten Gruppe enthaltenen Involution einen festen cubischen Faktor (mit den Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$), so wird das vierte Argument λ_4, das mit den drei ersten ein Quadrupel liefert, das der Gleichung $a_s = 0$ genügt, unbestimmt und es sind somit (cf. pg. 96) zur Bestimmung eines solchen Tripels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Gleichungen vorhanden:

$$\begin{cases} A_1 \equiv a_0\, s_0 + a_1\, s_1 + a_2\, s_2 + a_3\, s_3 = 0 \\ A_2 \equiv a_1\, s_0 + a_2\, s_1 + a_3\, s_2 + a_4\, s_3 = 0 \end{cases}$$

---

*) Nemlich als Specialfall der Regelschaaren, die drei Axen (Sehnen) der cubischen Curve enthalten, die in der Theorie der biquadratischen Involution eine hervorragende Rolle spielen.

Unter Regelschaar ist übrigens immer nur eine solche zweiter Ordnung verstanden.

Dann aber sind die Treffgeraden der einem solchen Tripel zugehörigen Involution vierter Ordnung offenbar die Geradenschaar des durch die drei Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ bestimmten Hyperboloids, der diese Tangenten nicht angehören.

Soll umgekehrt eine drei Tangenten der Curve treffende Regelschaar dem Complex $a_s = 0$ angehören, so gäbe es noch unendlich viele vierte Tangenten, die mit jenen drei ein Quadrupel $a_s = 0$ bildeten, d. h. λ_4 würde unbestimmt und wir sehen daher:

(γ_1) „Das Gleichungspaar (7)

$$A_1 = 0, \ A_2 = 0$$

stellt alle (einfach unendlich vielen) Tangententripel der Curve dar, deren (sie treffende) Regelschaaren (zweiter Ordnung) dem Complexe

$$a_s = 0 \equiv A_1 + \lambda_4 A_2$$

angehören.“

Über solche Regelschaaren vgl. auch Sturm pg. 143.

Rücken von einem solchen Tangententripel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zwei Tangenten zusammen ($\lambda_1 = \lambda_2 = \eta$) so zerfällt die zugehörige Regelschaar in zwei Strahlbüschel, einmal in das von allen Geraden gebildete, die den Berührungspunkt der Tangente η auf der Curve mit allen Punkten der Tangente λ_3 verbinden, und dann in das von allen Geraden erzeugte, die in der Ebene η der Curve liegen und dessen Centrum der Schnittpunkt dieser Ebene mit der Tangente λ_3 ist. Diese beiden Strahlbüschel liegen also in zwei Ebenen des Complexes $a_s = 0$, die den bezüglichen beiden Centren in ihm angehören. Da man ausserdem sogleich erkennt, dass in keinem andern Falle eine der durch (7) bestimmten Regelschaaren zerfallen kann, so ergiebt sich zunächst:

(γ_2) Es giebt unter den (Tangententripel-) Regelschaaren (7) des Complexes $a_s = 0$ vier zerfallende und zwar bestehen diese dann jedesmal aus zwei Strahlbüscheln des Complexes, deren Centrum für den ersten Büschel ein Curvenpunkt, deren Ebene für den zweiten Büschel eine Curvenebene ist.

61. Nun sahen wir (pg. 107), dass die Hesse'sche Form H von a_λ diese vier Werthe η repräsentirt, während die vier Restargumente λ_3 durch die Covariante $\mathrm{P} = 2\,jf - 3i\,H$ gegeben wurden. Dies liefert den Satz, dessen ersten Theil man bei Sturm pg. 145 findet:

(γ_3) „Die Hesse'sche Form H von a_λ ergiebt ein solches Quadrupel von Curvenpunkten, dass die ihnen im Complexe $a_s = 0$ zugeordneten Ebenen die Curve noch ausserdem (im Punkte λ_3) *berühren.*

Diese vier Berührungspunkte sind durch

$$(8)\ \mathrm{P} \equiv 2\,jf - 3i\,H = 0$$

dargestellt.“

Oder in der vollkommen dualistischen Fassung:

(γ_4) „Es giebt vier ausgezeichnete Ebenen der Curve, so dass der Punkt, der einer jeden durch den Compiex $a_s = 0$ zugeordnet ist, auf einer Tangente der Curve liegt.“

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Das Ebenenquadrupel ist durch} & \mathrm{P} \equiv 2jf - 3iH, \\ \text{das Tangentenquadrupel durch} & H\end{array}\right\}\text{gegeben.}$$

Wendet man den Satz über die durch eine Tangenteninvolution vierter Ordnung auf der Curve bestimmte Regelfläche noch einmal auf f und H an (deren Funktionaldeterminante ja die Covariante Θ ist) so ergiebt sich:

(δ) Das Geradenpaar, welches das Tangentenquadrupel des Satzes (γ_4) trifft, liegt mit demjenigen, welches das Tangentenquadrupel a_λ

trifft, auf einer Fläche zweiter Ordnung, auf der alle Treffgeradenpaare der Quadrupel

$$f + k H$$

liegen, und die die Curve in den sechs Punkten $\Theta = 0$ schneidet, deren Schmiegungsebenen zugleich Tangentialebenen der Fläche sind."

Auf andere Bedeutungen von Θ kommen wir weiter unten.

62. Verschwand die Invariante j (pg. 106), so gab es ein Dupel (δ_1, δ_2), das mit jedem Dupel $(\lambda_3 \lambda_4)$ ein zu a_λ apolares Quadrupel bildete. d. h.

(ε) „Verschwindet die Invariante j von a_λ, so giebt es (und nur dann) eine dem Complexe $a_s = 0$ angehörige Congruenz, deren Directricen zwei Tangenten (δ_1, δ_2) der Curve sind."

Dann wird bekanntlich die Hesse'sche Form von a_λ ein Quadrat (der quadratischen Form mit den Wurzeln δ_1, δ_2) und ist zugleich ein zu a_λ apolares Quadrupel, und identisch mit P.

In der That ist dann nach dem letzten Satze evident, dass alle Regelschaaren (7) der Congruenz der beiden Tangenten δ_1, δ_2 angehören, also die Tangentenebenen der Curve, die zugleich die Complexebenen ihres Restpunktes sind, nur noch die Tangentenebenen δ_1, δ_2 sein können, die noch durch δ_2 resp. δ_1 gehen. Die Sehne und Axe (δ_1, δ_2) gehören der Congruenz des letzten Satzes an, mithin ist H zu a_λ apolar etc.

Verschwindet j mit i (cf. auch §. 21), so fallen δ_1, δ_2 (in δ) zusammen; a_λ erhält eine dreifache Potenz als Faktor, H wird eine vierfache Potenz. Geometrisch ist dann bemerkenswerth:

(ζ) „Verschwinden i und j, so wird der Complex $a_s = 0$ derart ein specieller, dass seine Axe eine Gerade wird, die sowohl durch den Punkt δ

der Curve geht, als in der Ebene δ derselben liegt. Die Congruenz des letzten Satzes zerfällt dann in das Strahlenbündel des Punktes δ und das Geradenfeld der Ebene δ."

Was dagegen vom Verschwinden der Invariante i gilt, mag kurz aus Nro. 39 wiederholt werden.

(η) „Verschwindet i, so wird der Complex $a_s = 0$ ein specieller und seine Axe ist eine im Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirte Gerade."

63. Um jetzt auf die Covariante Θ von a_λ zurückzukommen, so wissen wir aus Nro. 57, dass ihre Wurzeln drei Paare ε_i, η_i, ($i = 1, 2, 3$) bilden der Art, dass sowohl $(\lambda - \varepsilon_i)^3 (\lambda - \eta_i)$ als $(\lambda - \eta_i)^3 (\lambda - \varepsilon_i)$ zu a_λ apolare Quadrupel sind. Dies können wir in Bezug auf den Complex zunächst so ausdrücken:

(ι_1) „Es giebt drei Punktepaare (ε_i, η_i) (die Wurzeln von Θ) derart, dass sowohl die Gerade, die durch den Punkt ε_i geht, in der Ebene ε_i liegt und die Tangente η_i trifft, als die aus ihr durch Vertauschung von ε_i mit η_i hervorgehende, dem Complexe $a_s = 0$ angehören."

Da weiter die aus den beiden Quadrupeln gebildete Involution vierter Ordnung

$$(9)\ (\lambda - \varepsilon_i)(\lambda - \eta_i)\left\{(\lambda - \varepsilon_i)^2 + k(\lambda - \eta_i)^2\right\}$$

sich aus dem festen Paare (ε_i, η_i) und der gewöhnlicheu Involution, deren Doppelelemente $\varepsilon_i\ \eta_i$ sind, zusammensetzt, so haben wir mit Rücksicht auf Nr. 44 den Satz:

(ι_2) „Es giebt drei dem Complexe $a_s = 0$ angehörige Regelschaaren zweiter Ordnung von der Eigenschaft, dass ihre Geraden ausser von zwei festen Tangenten ε_i, η_i noch von den Tangenten-paaren getroffen werden, deren Elementenpaare die gewöhnliche Involution mit den Doppelelementen $\varepsilon_i\ \eta_i$ bilden."

Fassen wir eine solche Regelschaar, die durch irgend ein Tangentenpaar der Curve eindeutig bestimmt ist, und zur Curve in invarianter Beziehung steht, noch näher in's Auge.

Um ihre Gleichung in canonischer Form aufzustellen, machen wir die vorgelegte Curve zur Normcurve und nehmen das Tangentenpaar 0, ∞ zum Ausgangspunkt. Dann ist jedes Tangentenquadrupel der vorgelegten Involution

$$(10)\quad \lambda\mu\,(\lambda^2+\varkappa\mu^2)$$

von der Art, dass die Coefficienten von λ^4, $\lambda^2\mu^2$, μ^4 verschwinden. Andrerseits war die Darstellungsform irgend eines Tangentenquadrupels (resp. ihres Treffgeradenpaares) (pg. 68)

$$(11)\quad p_{01}\lambda^4+2p_{02}\lambda^3\mu+(3p_{03}+p_{12})\,\lambda^2\mu^2+2p_{13}\lambda\mu^3+p_{23}\,\mu^4$$

mithin ist die gesuchte Regelschaar die den drei linearen Complexen

$$(12)\quad p_{01}=0,\ \ p_{23}=0,\ \ 3p_{03}+p_{12}=0$$

gemeinsame (gehört also der Congruenz des Tangentenpaares 0, ∞ an, wie es sein muss).

Nun ist die eine Regelschaar der Fläche zweiter Ordnung

$$(13)\quad m\,x_0\,x_3-x_1\,x_2=0$$

(wo m ein noch unbestimmter Coefficient) gegeben durch:

$$(14)\quad \begin{cases} m\,x_0+k\,x_1=0\\ \quad x_2+k\,x_3=0, \end{cases}$$

mithin sind die Axencoordinaten einer Geraden der Schaar:

$$(15)\quad q_{01}=q_{23}=0,\ \rho q_{02}=m,\ \rho q_{03}=mk,\ \rho q_{12}=k,\ \rho q_{13}=k^2.$$

Auch diese Schaar gehört der Congruenz des Tangentenpaares 0, ∞ ($p_{01}=p_{23}=0$) an: soll sie auch noch dem Complex

$$(16)\quad 3p_{03}+p_{12}=0\equiv 3q_{12}+q_{03}$$

angehören, so erfordert dies die Bedingung:

$$(17) \quad m + 3 = 0 \quad \text{d. h.}$$

($\varkappa_1$) „Die einem Tangentenpaare 0, ∞ der Normcurve in obiger Weise zugehörige Regelschaar zweiter Ordnung ist die eine Schaar der Fläche zweiter Ordnung:

$$(18) \quad 3x_0 x_3 + x_1 x_2 = 0\text{“}$$

Die Schnittpunkte einer jeden Fläche des Büschels (13) mit der Curve, sowie auch ihre mit der Curve gemeinsamen Ebenen sind durch

$$(19) \quad \lambda^3 \mu^3 = 0$$

gegeben.

Für unsere spezielle Fläche des Büschels folgt dies aus dem Satze Nr. 44; man sieht aber, dass sie in diesem besonderen Falle durch die Forderung, die Schmiegungsebenen der Curve in ihren Schnittpunkten mit der Fläche seien zugleich Tangentialebenen der Fläche, noch nicht bestimmt ist.

Inwiefern kann man nun unsere spezielle Fläche des Büschels noch auf andere *) Weise, namentlich in Bezug auf den Nullcomplex der Curve, als invariante charakterisiren?

Aus den Gleichungen (15) ist sofort ersichtlich, dass unter allen Regelschaaren (14) diejenige, die einem linearen Complex

---

*) Da das Flächenbüschel [cf. (27)] (13) dem Complexbüschel $mp_{03} + p_{12} = 0$ eindeutig zugeordnet ist, dieses aber wieder dem Kegelschnittbüschel der Ebene, das den Normkegelschnitt in den beiden Punkten 0, ∞ berührt, und ferner $3\,p_{03} + p_{12}$ der symmetrischen Funktion s_2 proportional ist, so erkennt man sofort (cf. übrigens §. 20), dass der Fläche $3x_0\,x_3 + x_1\,x_2 = 0$ resp. dem Complex $3p_{03} + p_{12} = 0$ derjenige Kegelschnitt des Büschels in der Ebene entspricht, der den Normkegelschnitt trägt. Daraus folgt aber nach Nr. 59 für den Complex $3p_{03} + p_{12} = 0$ die Eigenschaft, dass, wenn irgend eine Sehne der Curve ihm angehört, dies für die zugehörige Axe der Curve gleichfalls gilt.

$$(20)\quad \eta\, p_{03} + p_{12} = 0$$

(wo η beliebig) angehört, durch

$$(21)\quad m + \eta = 0$$

bestimmt ist und umgekehrt.

Mithin ist diejenige Fläche des Büschels (13), deren Regelschaar (14) dem Nullcomplex der Curve

$$(22)\quad 3p_{03} - p_{12} = 0$$

angehört (d. h. für die jede Gerade dieser Schaar in Bezug auf den Nullcomplex sich selber conjugirt ist), gegeben durch die Gleichung:

$$(23)\quad 3x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0.$$

Zunächst springt daher in die Augen der Satz:

($\varkappa_2$) „Die durch die Bedingung (22) characterisirte Fläche zweiter Ordnung (23) (des Büschels (13)) liegt zu der durch die Bedingung (16) bestimmten harmonisch in Bezug auf die beiden Ebenenpaare

$$(24)\quad x_0 = 0,\ \ x_3 = 0;\ \ x_1 = 0,\ \ x_2 = 0.\text{“}$$

Schreibt man ferner die Fläche (13) in Ebenencoordinaten, so ergiebt sich leicht:

$$(13')\quad u_0\, u_3 - m u_1\, u_2 = 0.$$

Mithin ist diejenige Fläche des Büschels (13), die diese letztere (bei fest gedachtem m) trägt, keine andere als

$$(25)\quad m x_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0.$$

Daher sind im Büschel (13) immer zwei zu den Ebenenpaaren (24) harmonische Flächen

$$(26)\quad m x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0;\quad m x_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0$$

solche, die sich gegenseitig stützen (oder auch: aufeinander ruhen).

Speziell also hat man:

($\varkappa_3$) „Die beiden ausgezeichneten Flächen des

Büschels (13), nemlich (18) und (23) tragen sich gegenseitig."

64. Den Zusammenhang zwischen den beiden Flächen (26) {resp. speziell (18) und (23)} kann man noch weiter verfolgen, wenn man das dem Gleichungssystem (15) analoge aufstellt, das der anderen Regelschaar einer Fläche (13) zugehört.

Dies ist zunächst gegeben durch:

$$(14') \quad \begin{cases} mx_0 + k' x_1 = 0 \\ x_2 + k' x_3 = 0 \end{cases}$$

mithin die Axencoordinaten einer Geraden der Schaar:

$$(15') \; q_{02} = q_{31} = 0, \; q_{01} = m, \; q_{23} = k'^2, \; q_{03} = mk', \; q_{12} = -k'.$$

Daher gehört diese Regelschaar einer Fläche (13) auch dem linearen Complexe an (ausser den beiden $q_{02} = q_{31} = 0$):

$$(27) \quad p_{12} + mp_{03} = 0$$

während die andere Schaar (15) dem anderen Complexe: (ausser den beiden $p_{01} = p_{23} = 0$):

$$(28) \quad p_{12} - mp_{03} = 0.$$

$p_{12} = 0$ resp. $p_{03} = 0$ selbst stellen die beiden speziellen Complexe des ganzen Büschels (27) oder (28) (bei variablem m) dar, deren Axen die Curven-Sehne resp. Curven-Axe mit den Argumenten $0, \infty$ sind; ebenso $p_{02} = 0$ resp. $p_{13} = 0$ die beiden speziellen Complexe, deren Axen die Geraden sind, die durch den Punkt 0 (∞) der Curve gehen, in der Ebene 0 (∞) der Curve liegen und die Tangente ∞ (0) treffen.

Endlich sind $p_{01} = 0$, $p_{23} = 0$ die speziellen Complexe der beiden Tangenten $0, \infty$ selbst. Demnach gelten von der durch irgend ein Tangentenpaar einer cubischen Raumcurve durch die Bedingung des Satzes (ι_2) bestimmten zur Curve invarianten Regelschaar zweiter Ordnung folgende Eigenschaften, zu deren Darlegung wir etwas weiter ausholen müssen:

„Die zu einem Tangentenpaare α, β der Curve gehörige Sehne und Axe (s, σ) bilden ein zweites Geradenpaar, sowie die beiden Geraden, die durch den Punkt α resp. β der Curve gehen, in der Ebene α resp. β der Curve liegen und die Tangente β resp. α treffen ein drittes Paar (a, b).

Diese drei Geradenpaare α, β; s, σ; a, b sind die drei Gegenkantenpaare eines Tetraeders, dessen Ebenen einmal die beiden Ebenen α, β der Curve, sodann die beiden Ebenen durch die Tangenten α, β sind, die bezüglich durch die Punkte β, α gehen (desselben Tetraeders, das als Coordinatentetraeder (Nr. 30) diente, um die cubische Curve zur Normcurve zu machen).

Jedes der drei Gegenkantenpaare bildet die Direktricen einer Congruenz, die allen linearen Complexen eines Büschels gemeinsam ist (dessen zwei spezielle Complexe eben die beiden Geraden des bezüglichen Paares zu Axen haben). Diese Complexbüschel bezeichnen wir einfach mit

$$(29)\quad [\alpha, \beta]; \quad [s, \sigma]; \quad [a, b].$$

Insbesondere gehört dem Büschel $[s, \sigma]$ (d. i. dem Büschel von linearen Complexen, die alle mit der Curve dieselben zwei zusammenfallenden Tangentenpaare (α, β) gemein haben) der Nullcomplex N der Curve an.

Dann giebt es im Büschel einen weiteren zum Nullcomplexe in Bezug auf das Paar der speziellen Complexe harmonischen Complex N'.

Die Regelschaar (zweiter Ordnung), die irgend drei linearen Complexen c_1, c_2, c_3 gemeinsam ist, sei als Regelschaar (c_1, c_2, c_3) bezeichnet.

(λ_1) „Dann gehören sowohl die beiden Regelschaaren

$$(30)\quad \begin{cases} (a, b, N), \ (\alpha, \beta\ N') & \textit{demselben}\ \text{Hyperboloid}\ (H), \text{ als} \\ (a, b, N'), \ (\alpha, \beta, N) & \textit{demselben}\ \text{Hyperboloid}\ (H')\ \text{an.} \end{cases}$$

Beide Hyperboloide gehören dem Büschel

von Flächen zweiter Ordnung an, deren Durchschnittscurve aus den Geradenpaaren $(a,\ b)\ (\alpha,\ \beta)$ besteht, und sind harmonisch zum Paar der Ebenenpaare des Büschels (Satz $\varkappa_2$) und tragen sich (ruhen aufeinander) gegenseitig (Satz $\varkappa_3$).

Die Regelschaar $(\alpha,\ \beta,\ N')$ des Hyperboloides (H) ist der Ort der Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel der Involution (cf. ι_2).

$$(31)\quad (\lambda-\alpha)\,(\lambda-\beta)\,\{(\lambda-\alpha)^2+\varkappa\,(\lambda-\beta)^2\}“$$

65. Dieser Satz bedarf noch verschiedener Ergänzungen.

Zunächst ist leicht zu zeigen, dass auch die Regelschaar $(a,\ b,\ N')$ des zweiten Hyperboloid's (H') der Ort der Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung ist und zwar der Involution:

$$(32)\quad (\lambda-\alpha)^4+\varkappa'\,(\lambda-\beta)^4.$$

In der That sind ja in der canonischen Form (cf. (15') (28)) die Complexe a, b, N' dargestellt durch:

$$(33)\quad p_{02}=0,\ p_{31}=0,\ 3p_{03}+p_{12}=0,$$

mithin ist die Darstellungsform (11) einer Geraden der gemeinsamen Regelschaar dieser drei Complexe in der That die Form (32), deren Funktionaldeterminante $(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\beta)^3$ **identisch** mit der der Involution (31) ist, was auch schon daraus erhellt, dass **alle** Flächen des Büschels $(H)\ (H')$ (13) mit der Curve die Punkte und Ebenen α, β je dreimal gerechnet, gemein haben. Also hat man als erste Ergänzung zum letzten Satze:

(λ_2) „**Die Regelschaar $(a,\ b,\ N')$ des Hyperboloides (H') ist der Ort der Treffgeradenpaare der Tangentenquadrupel der Involution**

$$(32)\ (\lambda-\alpha)^4+k'\,(\lambda-\beta)^4$$

d. h. aller Quadrupel, die aus zwei ***zu einander***

harmonischen Paaren der gewöhnlichen Involution

$$(34)\ (\lambda - \alpha)^2 + k\,(\lambda - \beta)^2$$

bestehen.

Beide Involutionen (31) (32) haben dieselben Doppelelemente

$$\alpha,\ \alpha,\ \alpha.\ \beta,\ \beta,\ \beta.\text{“}$$

66. Nun kann man aber auch umgekehrt zeigen, dass diese beiden Involutionen (31) (32) die einzigen sind, die gerade diese Doppelelemente besitzen (während es doch, wie sich später ergeben wird, im Allgemeinen fünf Involutionen vierter Ordnung mit denselben sechs Doppelelementen giebt).

Den Beweis führt man, wie folgt. Wir legen wieder das canonische Argumentenpaar 0, ∞ der Normcurve zu Grunde. Einer jeden Involution vierter Ordnung mit den Doppelelementen 0, 0, 0, ∞, ∞, ∞ auf der Normcurve entspräche nach dem Satze Nro. 44 eine Fläche zweiter Ordnung, die eben diese sechs Punkte und Ebenen mit der Curve gemein hätte, so dass die beiden Tangenten 0, ∞ der Curve ganz auf ihr liegen müssten. Solcher Flächen zweiter Ordnung aber, die durch die sechs Punkte 0, 0, 0, ∞, ∞, ∞ so gehen, dass sie zugleich die beiden Tangenten ganz enthalten, giebt es ein Büschel *)

$$(13)\ m\,x_0\,x_3 + x_1\,x_2 = 0.$$

*) Man sieht dies auch schrittweise so ein. Die ganze (dreifach unendliche) Schaar der Flächen durch die angegebenen sechs Punkte ist folgende:

$$k_1 x_0 x_3 + k_2 x_1 x_2 + k_3 (9 x_0 x_3 - x_1 x_2) + k_4 (3 x_0 x_2 - x_1^2) + k_5 (3 x_1 x_3 - x_2^2) = 0$$

oder etwas anders geschrieben:

$$k\ x_0\ x_3 + \lambda\ x_1\ x_2 + \mu\ (3\ x_0\ x_2 - x_1^2) + \nu\ (3\ x_1\ x_3 - x_2^2) = 0.$$

Soll nun eine solche Fläche auch noch die Tangenten 0. ∞ ganz enthalten, so müssen die Coefficienten von x_1^2, x_2^2, d. h. μ, ν verschwinden, was zu (13) führt.

Dies erfüllt dann aber auch die übrigen verlangten Eigenschaften. Greifen wir irgend eine der Flächen (13) heraus, so gehört ihre eine Regelschaar, sagen wir R_{I} den Complexen (cf. (15)) an:

$$(35)\; p_{01}=0,\; p_{23}=0$$

Dagegen die andere, R_{II}, den beiden Complexen (cf. (15'))

$$(36)\; p_{02}=0\quad p_{31}=0.$$

Soll daher R_{I} der Ort der Treffgeradenpaare einer Tangenteninvolution vierter Ordnung sein, so muss diese die Gestalt haben (wegen der Darstellungsform (11))

$$(37)\; (a_1\lambda^3\mu+a_2\lambda^2\mu^2+a_2\lambda\mu^3)+k(b_1\lambda^3\mu+b_2\lambda^2\mu^2+b_3\lambda\mu^3)=0;$$

n gleicher Weise die zu einer R_{II} (irgend einer Fläche des Büschels (13)) gehörige Involution:

$$(38)\; (\alpha_0\lambda^4+\alpha_2\lambda^2\mu^2+\alpha_4\mu^4)+k'(\beta_0\lambda^4+\beta_2\lambda^2\mu^2+\beta_4\mu^4).$$

Bezeichnen wir für den Augenblick mit p_{ik}, q_{lm} die Grössen

$$\begin{vmatrix} a_i & a_k \\ b_i & b_k \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_l & \alpha_m \\ \beta_l & \beta_m \end{vmatrix}$$

und mit m_{ik}, μ_{lm} gewisse Zahlenfaktoren, so ist die Funktionaldeterminante der ersten Involution (37) von der Form (wie man unmittelbar durch Ausrechnung ersieht):

$$(37')\quad W_1\equiv\lambda^4\mu^2 m_{12}p_{12}+\lambda^3\mu^3 m_{13}p_{13}+\lambda^2\mu^4 m_{23}p_{23}$$

und die der zweiten Involution (38)

$$(38')\quad W_2\equiv\lambda^5\mu\,\mu_{02}\,q_{02}+\lambda^3\mu^3\mu_{04}\,q_{04}+\lambda\mu^5\mu_{24}\,q_{24}.$$

Da sich beide Formen W_1, W_2 aber nach Voraussetzung auf $\lambda^3\mu^3$ reduciren müssen, so sind dazu die Relationen erforderlich:

$$(39)\; p_{12}=0,\quad p_{23}=0,$$
$$(40)\; q_{02}=0,\quad q_{24}=0.$$

Nun können aber die Gleichungen (39) nur so bestehen, dass entweder auch $p_{02}=0$ oder $a_2=b_2=0$; und analog die Gleichungen (40), dass entweder auch $q_{02} = 0$ oder $a_2 = \beta_2 = 0$ wird.

Im ersten Fall, wenn auch noch p_{02} resp. q_{02} verschwinden, hat die bezügliche Involution unendlich viele Doppelelemente, hat also mit unserer Aufgabe nichts zu thun: die andere Bedingung liefert aber die beiden Involutionen (31) (32).

q. e. d. *)

---

*) Einen zweiten noch direkteren, wenn auch umständlicheren Beweis kann man so geben.

Die Geraden der Regelschaar R_I irgend einer Fläche des Büschels (13), das wir jetzt lieber in der Form schreiben wollen

$$(41)\quad 3\,n\,x_0\,x_3 - x_1\,x_2 = 0$$

gehören nach (15) ausser den Complexen (35) $p_{01} = 0$, $p_{23} = 0$ noch dem dritten:

$$(42)\quad 3\,n\,p_{03} - p_{12} = 0$$

an. Für welchen Werth von n bilden die zugehörigen Darstellungsformen (11) eine Involution?

Nun ist nach pg. 69 (wenn man den hier unwesentlichen Proportionalitätsfaktor $= 1$ setzt)

$$(43)\quad \begin{cases} 3\,p_{03} = \dfrac{s_2 \pm \sqrt{6i}}{2} \\[2ex] p_{12} = \dfrac{s_2 \pm \sqrt{6i}}{2} \end{cases}$$

also $3\,n\,p_{03} - p_{12} \equiv s_2\,(n-1) \pm \sqrt{6i}\,(n+1) = 0$ oder

$(44)\quad s_2^2 \left\{\dfrac{n-1}{n+1}\right\}^2 - 6i = 0$ oder wegen (35), wenn man die Darstellungsform (11) jetzt so schreibt

$$(45)\quad 4a_1\lambda^3\mu + 6a_2\lambda^2\mu^2 + 4a_3\lambda\mu^3$$

$$(46)\quad 3\,a_2^2\,n - (n+1)^2\,a_1\,a_3 = 0$$

Somit kann man setzen

$$(47)\quad a_1 = 1,\quad a_2 = r\,k,\quad a_3 = k^2$$

wo k variabel, r aber in bestimmter Weise von n abhängt. Daher wird die Darstellungsform:

$$(48)\quad \lambda\,\mu\,(\lambda^2 + r\,k\,\lambda\,\mu + k^2\,\mu^2)$$

nur dann eine Involution bilden, wenn $r = 0$ d. h. $a_2 = 0$ ist. Dann

Wie vielfach die beiden Involutionen (31) (32) gerechnet werden müssen, um die fünf Lösungen, die dieselbe Frage im allgemeinen zulässt, zu ergeben, mag hier unerörtert bleiben.

Wir können also jetzt auch so sagen:

(λ_3) „Die beiden einzigen Involutionen vierter Ordnung, deren Funktionaldeterminante der Cubus einer quadratischen Form $(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$ ist, erzeugen, als Tangenteninvolutionen aufgefasst, mittelst ihrer Treffgeradenpaare, gerade die eine Regelschaar (R_I resp. R_{II}) der beiden Hyperboloide (H) resp. (H') der Sätze (λ_1) (λ_2)."

67. Wir nennen daher, der Unterscheidung halber, die zu irgend einem Tangentenpaare α, β einer cubischen Curve gehörigen Flächen (H) (H') „die *Doppelflächen* (α, β) (zweiter Ordnung) *erster, resp. zweiter Art*".

Dann können wir den Satz ι_2 jetzt so fassen:

(ι_3) „Es giebt drei (und nur drei) Dupelflächen erster Art, deren eine Regelschaar dem Complexe $a_s = 0$ angehört.

---

muss $(n+1)^2$ verschwinden d. h. es ist $n = -1$ und wir gelangen so zu unserer Fläche

$$(18)\quad 3\, x_0\, x_3 + x_1\, x_2 = 0.$$

Genau in derselben Weise gelangen wir, wenn die Geraden der Regelschaar R_{II} (15') einer Involution zugehören sollen, zur Gleichung:

$$(49)\quad 3\, a_2^2 . 4\, n - (n-1)^2\, a_0\, a_4 = 0$$

die sich auf $a_2 = 0$ reduciren muss, was nur für $n = 1$ geschieht, d. h. wir erhalten die Fläche

$$(23)\quad 3\, x_0\, x_3 - x_1\, x_2 = 0.$$

Die Regelschaaren R_{II} resp. R_I der Flächen (18) (23) bilden, wie man sich leicht überzeugt, die Treffgeraden von zwei Quadrupelschaaren der Form

$$(50)\; f + k\, f_1 + k^2\, f_2$$

die uns hier nicht weiter interessiren.

Sind diese die Flächen $(\varepsilon_i \eta_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, so sind die drei Paare $\varepsilon_i \eta_i$ die Wurzeln der Covariante Θ der Form a_λ."

Da wir andererseits aus Früherem (pg. 102) wissen, dass unter den zu a_λ apolaren Quadrupeln sich nur vier vierfache Potenzen $(\lambda - \alpha_i)^4$ befinden (wo die α_i die Wurzeln von a_λ sind), und diese sich zu sechs Involutionen combiniren, so haben wir als Seitenstück zum letzten Satze:

(ι_4) „Es giebt sechs (und nur sechs) Dupelflächen zweiter Art, deren eine Regelschaar dem Complexe $a_s = 0$ angehört. Sind diese die Flächen $(\alpha_i\ \alpha_k)$ so sind α_i, α_k, α_l, α_m die vier Wurzeln der Form a_λ."

Wir verlassen damit die Betrachtung der Covarianten einer biquadratischen binären Form auf der cubischen Raumcurve und wenden uns der allgemeineren Aufgabe zu, die beiden Theorien des Normkegelschnitts und der cubischen Normcurve gegenseitig in einander überzuführen, wie es schon pg. 62 in Aussicht gestellt war.

§. 20.

Das Verbindungsgebiet zwischen Normkegelschnitt und cubischer Normcurve.

68. Schon in Nro. 43 war der Satz abgeleitet, dass die Gleichung eines Kegelschnitts in der Ebene, in homogenen Coordinaten x_0, x_1, x_2 geschrieben (wobei von irgend einem Punkt x der Ebene das Tangentenpaar α, β an den Normkegelschnitt geht, dessen Argumente durch

$$\frac{x_1}{x_0} = \alpha + \beta, \quad \frac{x_2}{x_0} = \alpha\beta$$

bestimmt sind) zugleich alle Sehnen α, β der cubischen Normcurve darstellt, die einem ganz bestimmten (allgemeinen) linearen Complex angehören, und damit auch den Complex selbst; und umgekehrt.

Dadurch wird es ohne Mühe ermöglicht, eine vollständige Abbildung der Complextheorie auf die Kegelschnittstheorie durchzuführen.

Da eine solche Durchführung aus dem Rahmen unserer Untersuchung zu sehr heraustreten würde, so mag es genügen, auf einige Hauptpunkte aufmerksam zu machen.

69. Wir knüpfen der Einfachheit wegen an die letzten Erörterungen des letzten Paragraphen an, die sich auf die Eigenschaften des Complexbüschels

$$(1)\ 3\,n\,p_{03} + p_{12} = 0$$

stützten, dessen gemeinsame Congruenz zu Directricen die Sehne und Axe $(0, \infty)$ der Normcurve besass und dessen Individuen alle mit der Curve die vier Tangenten $0, 0, \infty, \infty$ gemein hatten.

Wir suchen die einem Complexe (1) angehörigen Sehnen (Axen) der Curve d. h. den ihm entsprechenden Kegelschnitt der Ebene.

Aus der Darstellungsform einer Raumgeraden (mittelst der sie treffenden Tangenten der Curve) (11)

$$(2)\ p_{01}\,\lambda^4 - 2\,p_{02}\,\lambda^3 + (3\,p_{03} + p_{12})\,\lambda^2 - 2\,p_{13}\,\lambda + p_{23} = 0$$

folgte (pg. 69):

$$(3)\ \rho \cdot 3\,p_{03} = \frac{s_2 \pm \sqrt{6i}}{2}, \quad \rho p_{12} = \frac{s_2 \mp \sqrt{6i}}{2}.$$

Dies hat zunächst zur Folge:

$$(4)\ p_{03}\,p_{12} = 0 \equiv s_2^2 - 6i = s_2^2 - (12\,s_0\,s_4 - 3\,s_1\,s_3 + s_2^2)$$
$$= 3(-4\,s_0\,s_4 + s_1\,s_3).$$

Seien die vier Argumente (Wurzeln von (2)), aus denen sich die s_i zusammensetzen: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so stellt (2) eine Sehne resp. Axe der Curve dar, wenn $\alpha = \beta = \lambda_1$; $\gamma = \delta = \lambda_2$.

Wird dann

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_0}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_0}$$

gesetzt, so geht Gleichung (4) über in *):

$$(5) \quad \sigma_2 \sigma_0 (\sigma_2 \sigma_0 - \sigma_1^2) = 0.$$

Da die Sehnen in die Axen durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} übergehen, so stellt das Kegelschnittpaar (5) die Sehnen und Axen der beiden (speciellen) Complexe

$$(6) \quad p_{03} = 0, \; p_{12} = 0$$

dar. Es ist aber leicht, beide Kegelschnitte in der Weise zu trennen, dass jeder nur einem der Complexe (6) entspricht und umgekehrt; man braucht nur zu bemerken, dass die Sehne $(0, \infty)$ nur dem Complexe $p_{12} = 0$ allein, und ebenso, dass die Axe $(0, \infty)$ nur dem Complexe $p_{03} = 0$ allein angehört.

Andrerseits haben wir damals (Nro. 32) festgesetzt, dass die Punkte der Ebene (also die Tangentenpaare des Normkegelschnitts) den Sehnen der cubischen Normcurve entsprechend gesetzt werden sollen.

Mithin kann das Tangentenpaar $\sigma_2 \sigma_0 = 0$, da sein Schnittpunkt der Sehne $0, \infty$ entspricht, vermöge seiner Punkte nur den Sehnen des Complexes $p_{12} = 0$ entsprechen. Daraus folgt sofort:

α) „Die Punkte des Kegelschnitts „$\sigma_0 = 0, \sigma_2 = 0$“ entsprechen sowohl den Sehnen des Complexes $p_{12} = 0$, als den Axen des Complexes $p_{03} = 0$; reciprok die Punkte des Kegelschnitts $\sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2 = 0$ sowohl den Axen des ersten, als den Sehnen des zweiten Complexes.“

---

*) Die beiden Kegelschnitte (5) $\sigma_2 \sigma_0 = 0$ und $\sigma_2 \sigma_0 - \sigma_1^2 = 0$ sind dann zugleich die beiden den Normkegelschnitt in zwei Punkten $(0, \infty)$ berührenden Kegelschnitte, denen unendlich viel Dreiecke ein- und N_2 umbeschrieben sind.

70. Wir wissen ferner von früher (pg. 119), dass der Nullcomplex $3\,p_{03} - p_{12} = 0$ (vermöge seiner Sehnen) dem Normkegelschnitt $4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 = 0$ entspricht, sowie der zu ihm (in Bezug auf das Paar (6)) harmonische Complex $3\,p_{03} + p_{12} = 0$ dem den Normkegelschnitt tragenden Kegelschnitt des Büschels $\sigma_0\,\sigma_2 - k\,\sigma_1^2 = 0$ d. h. dem Kegelschnitt $2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0$.

In der That folgt dies auch sogleich aus den Formeln (2). Denn es ergiebt sich

(7) $3p_{03} + p_{12} = 0 \equiv s_2, \quad 3p_{03} - p_{12} = 0 \equiv i \equiv 12 s_0 s_4 - 3 s_1 s_3 + s_2^2$

mithin für die zugehörigen Sehnen:

$$(8)\ 2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0, \qquad (4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2)^2 = 0$$

Versteht man daher unter den p_{ik} die Liniencoordinaten einer Sehne (der cubischen Curve) so kann man setzen:

$$(9)\ \begin{cases} \rho\,p_{12} = \lambda\,\sigma_0\,\sigma_2 \\ 3\,\rho\,p_{03} = \sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 \end{cases}$$

wo λ dadurch zu bestimmen ist, dass

$$(10)\ \begin{cases} 3\,p_{03} - p_{12} = 0 \text{ übergeht in } 4\,\sigma_2\,\sigma_0 - \sigma_1^2 = 0 \text{ und} \\ 3\,p_{03} + p_{12} = 0 \quad \text{„} \qquad \text{„}\ 2\,\sigma_2\,\sigma_0 + \sigma_1^2 = 0. \end{cases}$$

Dies leistet aber nur der Werth $\lambda = -3$, so dass wir haben:

$$(11)\ \rho\,p_{12} = -3\,\sigma_0\,\sigma_2, \qquad 3\,\rho\,p_{03} = \sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2.$$

Es hätte dies auch unmittelbar aus der Gleichung (32) Nro. 42, in Vergleichung mit der Gleichung eines allgemeinen linearen Complexes (33) gefolgert werden können.

Daraus ergiebt sich denn sofort wieder, dass irgend ein Complex

$$(1)\ 3\,n\,p_{03} + p_{12} = 0$$

übergeht in:

$$(12)\ \sigma_0\,\sigma_2\,(n-3) - n\,\sigma_1^2 = 0$$

und (bei Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} oder, was dasselbe ist, von n mit $\frac{1}{n}$) der Complex

$(1)' \; 3\,p_{03} + n\,p_{12} = 0$ über in

$(12)' \; \sigma_0\,\sigma_2\,(1 - 3\,n) - \sigma_1^2 = 0.$

Diese Resultate mögen in dem Satze niedergelegt werden:

β) „Die Punkte des Kegelschnitts H

$$(12) \; \sigma_0\,\sigma_2\,(n - 3) - n\,\sigma_1^2$$

des Büschels $\sigma_0\,\sigma_2 - k\,\sigma_1^2 = 0$ repräsentiren sowohl die Sehnen des Complexes

$$(1) \; 3\,n\,p_{03} + p_{12} = 0$$

des Büschels $p_{03} - k'\,p_{12} = 0$, als die Axen des Complexes

$$(1)' \; 3\,p_{03} + n\,p_{12} = 0$$

desselben Büschels und reciprok die Punkte des Kegelschnitts

$$(12)' \; \sigma_0\,\sigma_2\,(1 - 3\,n) - \sigma_1^2 = 0$$

den Sehnen des Complexes (1)' und den Axen des andern (1).

Die einander so zugehörigen Complexe (1) (1)' resp. Kegelschnitte (12) (12)' bilden eine (gewöhnliche) Involution, deren Doppelelemente ($n = \pm 1$) die Complexe

$$(7) \; 3\,p_{03} \pm p_{12} = 0$$

resp. die Kegelschnitte sind

$$(10) \; N \equiv 4\,\sigma_2\,\sigma_0 - \sigma_1^2 = 0, \quad f \equiv 2\,\sigma_2\,\sigma_0 + \sigma_1^2 = 0$$

(wo f den Normkegelschnitt N trägt)."

In der That sind ja die Complexe (7) unseres Büschels die einzigen, die bei Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} in sich übergehen.

71. Der Beweis dieses Satzes möge nach rechnerischer Seite hin durch die direkte Umformung der Complexgleichung (1) in (12) mit Hülfe der Beziehungen (3) ergänzt werden.

Wir erhalten:

$$(13)\ 3\,n\,p_{03} + p_{12} \equiv s_2\,(n+1) \pm \sqrt{6i}\,(n-1) = 0 \text{ oder:}$$

$$s_2^2\,(n+1)^2 - (n-1)^2\,\{12\,s_0\,s_4 - 3\,s_1\,s_3 + s_2^2) \text{ oder:}$$

$$4\,n\,s_2^2 - 12\,(n-1)^2\,s_0\,s_4 + 3\,(n-1)^2\,s_1\,s_3 = 0,$$

mithin durch Uebergang der s in die σ

$$(14)\ \sigma_2^2\sigma_0^2\{4n - 3(n-1)^2\} + \sigma_1^2\sigma_2\sigma_0\{4n + 3(n-1)^2\} + n\sigma_1^4 = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als:

$$(15)\ [\sigma_2\,\sigma_0\,(1-3\,n) - \sigma_1^2]\,[\sigma_0\,\sigma_2\,(n-3) - n\,\sigma_1^2] = 0$$

d. h. das Produkt der Gleichungen (12)' (12). In der That ändert sich ja (13) bei Vertauschung von n mit $\frac{1}{n}$ nicht.

In welcher Weise aber dann die beiden Faktoren der Gleichung (15) den beiden zugehörigen Complexen einzeln entsprechen, erhellt aus irgend einem speciellen Werth von n, z. B. $n = 0$ (cf. Satz α).

Für $n = 3$ erhalten wir den ausgezeichneten Kegelschnitt

$$(16)\ \sigma_1^2 = 0$$

dem also der Complex

$$(17)\ 9p_{03} + p_{12} = 0$$

entspricht. Dessen Sehnen waren aber gerade die Geraden der einen Regelschaar der Fläche

$$(18)\ 9x_0\,x_3 - x_1\,x_2 = 0$$

die bekanntlich ganz durch die cubische Curve hindurchgeht.

In der That stimmt dies überein mit dem Ergebnisse der pg. 56, wonach die Punkte einer Geraden ($\sigma_1 = 0$) die Sehnen einer durch die Curve gehenden Fläche zweiter Ordnung repräsentiren.

Der zu (1~~9~~) in Bezug auf das Paar (6) harmonische Complex entspricht dem Kegelschnitt /7

$$(19)\ 2\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 = 0.$$

Dies ergiebt aber in Verbindung mit dem Kegelschnitt (8)

$$(20)\ 2\,\sigma_0\,\sigma_2 + \sigma_1^2 = 0;$$

γ) „Die beiden Complexe $9p_{03} \pm p_{12} = 0$ sind dadurch ausgezeichnet, dass sie einmal harmonisch sind zum Paar (6)

$$(6)\ p_{03} = 0,\ p_{12} = 0;$$

andererseits ist aber auch das Paar

$$(21)\ p_{12} = 0,\ 9p_{03} + p_{12} = 0$$

harmonisch zu dem andern:

$$(22)\ 3\,p_{03} + p_{12} = 0,\ 9p_{03} - p_{12} = 0;$$

und ebenso (durch Vertauschung von p_{12} mit $-p_{12}$): das Paar

$$(23)\ p_{12} = 0,\ \ 9p_{03} - p_{12} = 0$$

ist harmonisch zum Paare:

$$(24)\ 3\,p_{03} - p_{12} = 0,\ 9p_{03} + p_{12} = 0.\text{“}$$

72. Kehren wir jetzt zurück zum Hauptsatze β, so können wir ihn sofort für irgend ein Complexbüschel, dessen gemeinsame Congruenzdirektricen in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve conjugirt sind, d. h. ein solches, dessen Complexe alle mit der Curve dieselben vier Tangenten

$$(25)\ a_\lambda^4 = 0$$

gemein haben, erweitern. Nach pg. 77 liess sich dieses Büschel in die Form bringen:

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

das durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} übergeht in

$$(27)\ a_s\ - k(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

$a_s = 0$ entsprach demjenigen Kegelschnitt a_σ^2 des Büschels, dessen Grundpunkte auf dem Normkegelschnitte liegen und durch (25) dargestellt sind, und der den Normkegelschnitt trägt d. h. es ist der Complex des Büschels (26) für den die ihm angehörigen Sehnen und Axen der cubischen Curve dieselben Argumentenpaare besitzen (d. h. die im Nullcomplex einander conjugirt sind). Nennt man eine solche Sehne und Axe einfach conjugirt, so hat man:

δ) „Die Complexe des Büschels (26) bilden eine (gewöhnliche) Involution, deren Doppelelemente gegeben sind durch

$$(28)\ a_s = 0,\quad 3\,p_{03} - p_{12} = 0.$$

Irgend ein Paar der Involution hat die Eigenschaft, dass die Sehnen (Axen) des einen Complexes des Paares *conjugirt* sind zu den Axen (Sehnen) des andern.

Die entsprechenden Kegelschnitte bilden eine Involution, deren Doppelelemente der Normkegelschnitt und der ihn tragende (und aus ihm das Punktquadrupel $a_\lambda^4 = 0$ ausschneidende) Kegelschnitt sind.

Die Punkte irgend eines Kegelschnitts des Büschels

$$(29)\ a_\sigma^2 + k\,(4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2) = 0$$

repräsentiren die Sehnen des Complexes

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

und zugleich die Axen des andern

$$(27)\ a_s - k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0.$$

Das Umgekehrte gilt von den Punkten des Kegelschnitts

$$(29)'\ a_\sigma^2 - k\,(4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2) = 0$$

der mit (29) ein Paar der angegebenen Involution bildet.“

73. Ein ausgezeichnetes Paar in der Complexinvolution bilden die beiden speciellen Complexe des Büschels

$$(26)\ a_s + k\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

deren Axen die beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels a_λ^4 sind, die ja in der That nach pg. 69 durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} d. h. von $+\,k$ mit $-\,k$ in einander übergehen.

Die beiden zugehörigen Werthe von k fallen nur zusammen, wenn die Invariante i von a_λ^4 verschwindet (cf. pg. 117) und $a_s = 0$ ist dann selbst der specielle Complex des Büschels. In der That ergiebt die Bedingung, dass (26) einen speciellen Complex vorstellt:

$$(30)\ a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\,(a_2^2 - k^2) = 0 \text{ oder } k = \sqrt{\frac{i}{6}}.$$

Wir können daher Satz (δ) so vervollständigen:

δ') Der Complex $a_s = 0$ (der unter allen Complexen, die die vier Tangenten $a_\lambda^4 = 0$ mit der Curve gemein haben, dadurch ausgezeichnet ist, dass er zu sich selber conjugirt ist) ist in Bezug auf das Paar der beiden speciellen Complexe dieses Büschels

$$(31)\ a_s \pm \sqrt{\frac{i}{6}}\,(3\,p_{03} - p_{12}) = 0$$

zum Nullcomplex der Curve *harmonisch*."

Genau dieselbe Bedingung (30) sagte aber aus (pg. 99), dass die den beiden speciellen Complexen (31) entsprechenden Kegelschnitte H_1, H_2 die waren, (die aus N_2 das Quadrupel a_λ^4 ausschneiden und) denen unendlich viele Dreiecke ein- und N_2 umbeschrieben sind. Daher lautet der zu (δ') analoge Satz der Ebene:

δ') „Ist ein Kegelschnittbüschel gegeben $f + k\varphi = 0$, und trägt f den Kegelschnitt φ, so ist das Paar des Büschels H_1, H_2, denen unendlich viele Dreiecke ein- und φ umbeschrieben sind, harmonisch zum Paare f, φ."

74. Dieses Entsprechen der speciellen Complexe und der Kegelschnitte H möge noch des Näheren erörtert werden, da sie das nothwendigste Vehikel bei der Durchführung der Verwandtschaft beider Theorien sein müsste.

Wir wollen zu dem Zweck umgekehrt von den Kegelschnitten H (bei gegebenem N_2) ausgehen: wir denken uns also irgend einen solchen und ein Dreieck, das ihm und N_2 umbeschrieben ist, dessen Seiten also durch drei Argumente λ_1, λ_2, λ_3 bestimmt sind. Dann repräsentiren die drei Eckpunkte dieses Dreiecks $(\lambda_1 \lambda_2)$ $(\lambda_1 \lambda_3)$ $(\lambda_2 \lambda_3)$ drei in einer Ebene liegende Sehnen der Normcurve. Drei solche Sehnen können aber einem allgemeinen linearen Complexe nie angehören (da sie ja sonst, weil in einer Ebene befindlich, durch einen Punkt gehen müssten), sondern nur, wie bekannt, einem speciellen, dessen Axe dann in der Ebene der drei Sehnen liegen muss. (Dann gehört aber auch jede Gerade jeder durch die Axe gehenden Ebene dem Complexe an, d. h. dann giebt es unendlich viele Dreiecke, die N_2 um- und H einbeschrieben sind.) Da nun jeder Kegelschnitt, der durch die Ecken irgend eines N_2 umschriebenen Dreiecks geht, ein Kegelschnitt H ist, so folgt:

ε) „Den speciellen linearen Complexen H im Raume entsprechen bei unserer Abbildung auf die Ebene die Kegelschnitte H und umgekehrt, und zwar ist das (Argumenten-) Quadrupel H der Schnittpunkte von H mit dem Normkegelschnitt identisch mit dem Quadrupel der Tangenten der cubischen Normcurve, die die Axe des Complexes treffen."

75. Zu jedem Kegelschnitt H gehörte aber ein „conjugirter" Kegelschnitt H′, der gleichfalls mit N_2 die Punkte H gemein hat und mit H harmonisch ist zum Paare N_2, f, (wo f der Kegelschnitt des Büschels H, H′ ist, der N_2 trägt). Die Gleichungen von H und H′ gingen durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} in einander über. Dadurch geht aber auch der Complex H in seinen conjugirten H′ über (dessen Axe zur Axe

von H conjugirt ist in Bezug auf den Nullcomplex der Curve): andrerseits vertauschen sich dabei die Sehnen und Axen des Complexes H, sowie die Axen und Sehnen von H′ d. h.

ε′) „Die Punkte des Kegelschnitts H repräsentiren die Sehnen der cubischen Curve, die dem Complexe H angehören (d. h. seine Axe treffen), und zugleich die Axen der Curve, die dem conjugirten Complexe H′ angehören: entsprechend die Punkte des zu H conjugirten Kegelschnitts H′ die Curvenaxen des Complexes H, sowie die Curvensehnen des Complexes H′."

76. Von den Kegelschnitten H wissen wir nach Früherem noch Folgendes. Die H ein- und N_2 umbeschriebenen Dreiecke sind Poldreiecke eines bestimmten Kegelschnitts *F*, der mit N_2 das Tangentenquadrupel *H* gemein hat und N_2 trägt. Ausserdem ruht *) er noch (als Klassenkegelschnitt aufgefasst) auf dem Kegelschnitt H.

Ebenso verhält sich zum Kegelschnitt H′ ein anderer, *F′*, gerade so, wie eben *F* zu H. Es mag dies jetzt noch schärfer dahin betont werden:

ζ) „In der Schaar der Kegelschnitte, die mit einem festen (N_2) ein (*ganz beliebiges*) Tangentenquadrupel *H* gemein haben, giebt es *ein Paar* von solchen, die N_2 tragen. Sie seien *F*, *F′*.

Andrerseits giebt es in dem Büschel von Kegelschnitten, die mit demselben festen Kegelschnitt (N_2) das Punktquadrupel *H* gemein haben, ein Paar von solchen, denen unendlich viele Dreiecke ein- und N_2 umbeschrieben sind. Sie seien H, H′.

---

*) Es folgt dies ja auch unmittelbar daraus, dass es Poldreiecke von *F* giebt, die H einbeschrieben sind.

Dann sind sich H und F, bezüglich H′ und *F′* eindeutig dadurch zugeordnet, dass immer der erstgenannte Kegelschnitt den zweiten *stützt*, und zugleich immer die dem ersten einbeschriebenen Dreiecke Poldreiecke des zweiten sind.

So gehört also zu *irgend einem* Kegelschnitt *F* stets ein und nur ein Kegelschnitt H *und umgekehrt*. Daher mögen auch des Weiteren zwei solche Kegelschnitte als „zusammengehörig" bezeichnet werden."

77. Die H resp. H′ einbeschriebenen (und N_2 umbeschriebenen) Reihen von Dreiecken bilden auf N_2 zwei zu einander conjugirte Involutionen dritter Ordnung (cf. pg. 96), die wir noch kurz mit Rücksicht auf unsere Abbildung in's Auge fassen wollen.

Eben noch zeigte sich, dass die „H-Dreiecke" (wie sie kurz heissen mögen), sofern sie N_2 umschrieben sind, der Involution correspondiren, die die Ebenen durch die Axe des dem Kegelschnitt H entsprechenden Complexes H aus der cubischen Normcurve ausschneiden (oder kürzer: „der Ebeneninvolution der Complexaxen H").

Das Analoge gilt für Kegelschnitt- und Complex H′.

Da aber die beiden Complexaxen H, H′ in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve einander conjugirt sind, so ist die „Punktinvolution" (das Dualistische zur Ebeneninvolution) der einen identisch mit der Ebeneninvolution der andern, und die „Ebeneninvolution" der ersten identisch mit der Punktinvolution der zweiten. Daher können wir dies so ausdrücken:

η) „Die beiden durch die H-, resp. H′-Dreiecke auf N_2 bestimmten Tangenteninvolutionen (dritter Ordnung) sind zugleich die beiden Ebeneninvolutionen der Complexaxen H, resp. H′ und die beiden Punktinvolutionen der Complexaxen H' resp. H."

Nun geht von jedem Punkte der Complexaxe H eine Sehne an die cubische Curve. Ist das vom Punkte an die Curve gehende Ebenentripel dargestellt durch a_λ^3, so schneidet (cf. pg. 59) die Sehne aus der Curve die zu a_λ^3 gehörige Covariante Δ aus. Andrerseits entspricht dieser Sehne ein bestimmter Punkt des Kegelschnittes H, und zwar der, von dem das Tangentenpaar Δ an den Normkegelschnitt N_2 geht. Umgekehrt entspricht jedem Punkt auf H eine Sehne der cubischen Curve, die die Complexaxe H in einem bestimmten Punkte a_λ^3 trifft. Dies ergiebt aber in Verbindung mit dem letzten Satze:

$\varkappa$) „Die durch die Involution dritter Ordnung der H-Dreiecke (auf N_2) bestimmte quadratische Schaar der zugehörigen Formen Δ führt mittelst ihrer Tangentenpaare zu den Punkten des Kegelschnitts H' (und die durch die H'-Dreiecke bestimmte Schaar der Formen Δ' zu den Punkten von H)."

78. Wir werden bald nachher (Nr. 107) den einfachen geometrischen Zusammenhang zwischen einer cubischen Form und ihrer quadratischen Covariante, wenn beide auf einem Kegelschnitt dargestellt sind, kennen lernen.

Zunächst fragen wir jetzt nach der Bedeutung des obigen Satzes über die „Zusammengehörigkeit" der Kegelschnitte H resp. H' mit F resp. F', für den Raum.

Nach pg. 112 entspricht einem Kegelschnitt F, der N_2 trägt, ein (in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve) sich selbst conjugirter linearer Complex F. Schneidet der Kegelschnitt F aus N_2 das Quadrupel f aus, so ist auch f das Tangentenquadrupel der cubischen Curve, das dem Complex F angehört (cf. pg. 111). Das N_2 und F gemeinsame Tangentenquadrupel H ist die Hesse'sche Covariante von f; dasjenige Tangentenquadrupel, das der zu F gehörige Kegelschnitt H mit N_2 gemein hat (cf. pg. 108), die Covariante „$2jf - 3iH$."

Für den Complex F stellt H die vier Punkte der cubischen Curve dar (cf. pg. 115), deren im Complexe ihnen zugehörige Ebenen die Curve berühren: die Berührungspunkte sind die Form „$2jf - 3iH$". Dem zu H conjugirten Kegelschnitt H′ gehört der Kegelschnitt F' zu, der aus N_2 das Quadrupel f' ausschneiden möge. Dann ist H auch die Hesse-sche Covariante von f', und auch die Invariante i ist beiden Formen f, f' gemeinsam. Daher hat der Kegelschnitt H′ mit N_2 das Tangentenquadrupel „$2j'f' - 3iH$" gemein (die Form f' nebst den sich daran anschliessenden wird weiter unten noch näher bestimmt werden).

Endlich entsprachen (cf. pg. 96) den Poldreiseiten von F, die N_2 umschrieben sind, diejenigen Regelschaaren dreier Tangenten der cubischen Curve N_3, die dem Complexe F angehören, und den Polvierseiten von F, die N_2 umschrieben sind, diejenigen Tangentenquadrupel der cubischen Curve, deren Treffgeraden den Complex F bilden. Daher kann man den Zusammenhang zwischen den Complexen F, F', H, H′ dahin formuliren:

ζ_1) „Zu irgend einem Tangentenquadrupel einer cubischen Raumcurve H, dessen Treffgeraden H, H′ seien, gehört stets ein Paar sich selbst conjugirter Complexe F, F' mit folgenden Eigenschaften.

Die vier Punkte der Curve, deren in den Complexen F, F' ihnen zugeordnete Ebenen die Curve berühren, sind beidemal dieselben und zwar die Berührungspunkte der Tangenten H.

Die Regelschaaren der mit der Ebeneninvolution H resp. H' identischen Tangenteninvolution (dritter Ordnung) gehören dem Complexe F resp. F' an.

Dadurch gehört zu jedem sich selbst conjugirten Complexe F eine bestimmte Gerade H und umgekehrt."

79. Wir fragen nunmehr nach den ebenen Bildern der Geraden eines speciellen linearen Complexes H. Diese Frage löst sich durch die andere:

Welche Beziehung herrscht zwischen zwei H-Kegelschnitten, H, H_1, wenn die Axen der ihnen entsprechenden Complexe H, H_1 sich treffen sollen?

Wenn die Geraden H, H_1 sich treffen, so haben sowohl ihre beiden Ebenen- als Punktinvolutionen je ein Tripel gemeinsam.

Demnach giebt es ein N_2 umschriebenes Dreiseit, durch dessen Ecken H, H_1 und ein zweites desgleichen, durch dessen Ecken die den letzteren conjugirten Kegelschnitte H', H'_1 gehen.

Nun giebt es im allgemeinen vier Sehnen der cubischen Curve, die irgend zwei Raumgerade treffen, entsprechend den vier Schnittpunkten der beiden H-Kegelschnitte.

Da sich in unserm Falle die beiden Raumgeraden treffen, so bestehen die vier erwähnten Sehnen aus den drei Sehnen, die in der Ebene beider Geraden liegen, nebst der einen, die durch ihren gemeinsamen Punkt geht. Dies ergiebt zufolge des Satzes (ε'):

λ) „Sollen die Axen zweier specieller Complexe H, H_1 sich treffen, so muss eines der vier Dreiecke, die man aus den Schnittpunkten der entsprechenden Kegelschnitte H, H_1 bilden kann, dem Normkegelschnitt N_2 umschrieben sein, und sei daher durch die cubische Form η_λ^3 dargestellt.

Das Gleiche gilt dann von den beiden conjugirten Kegelschnitten H', H'_1.

Die bezügliche cubische Form sei η'^3_λ.

Dann sind die Punkte (cf. pg. 59) der Tangentenpaare Δ, Δ' (wo diese Formen die quadratischen Covarianten von η^3_λ, η'^3_λ sind) die *vierten* Schnittpunkte der Kegelschnitte H' H'_1 resp. H, H_1."

Daraus folgt dann sofort für die Geraden eines speciellen Complexes H:

λ_1) „Den Geraden eines speziellen Complexes H entsprechen alle H-Kegelschnitte, die durch die Ecken irgend eines der dem Complexe H entsprechenden Kegelschnitte H ein- und N_2 umbeschriebenen Dreiecke hindurchgehen.

Dem Netz der Kegelschnitte, die durch die Ecken irgend eines dieser Dreiecke gehen, entspricht das Geradenfeld einer Ebene durch die Complexaxe."

Und da alle diese Dreiecke Poldreiecke des Kegelschnitts *F* sind, so kann man unserm Satze (cf. die Anm. pg. 138) auch die Form geben:

λ_2) „Den Geraden eines speciellen Complexes H entsprechen alle H-Kegelschnitte, die den zum Kegelschnitt H (der dem Complex entspricht) gehörigen Kegelschnitt *F tragen.*

Die Quadrupel der Schnittpunkte aller dieser H-Kegelschnitte mit dem Normkegelschnitt (N_2) sind identisch mit den Quadrupeln der Tangenten, die die Geraden des Complexes H treffen.

Speciell ist die Axe des Complexes selbst eine Gerade desselben, also trägt der Kegelschnitt H gleichfalls F.

Daher erkennt man, wie dieser Satz zugleich eine Verallgemeinerung des Satzes (Nr. 76 anm.) ist.

Um die allgemeinere Frage nach den Bildern der Geraden eines ganz allgemeinen Complexes zu beantworten, legen wir zunächst den algebraischen Inhalt der Sätze „λ" auseinander. Es wird dies zugleich vorher Gelegenheit geben, die wichtigsten hierhergehörigen Formeln (die sich bis jetzt in den Paragraphen 16 bis 20 zerstreut finden) einmal übersichtlich zusammenzustellen und dann nach einigen Richtungen hin zu ergänzen.

§. 21.

Fortsetzung. Die Apolaritätsformeln für (lineare) Complexe und Kegelschnitte.

80. Wir gingen ursprünglich von der binären Form f aus:

$$(1)\quad f \equiv a_\lambda^4 \equiv a_0 \lambda^4 + 4 a_1 \lambda^3 \mu + 6 a_2 \lambda^2 \mu^2 + 4 a_3 \lambda \mu^3 + a_4 \mu^4.$$

Dann war die Gleichung des linearen Complexes, dem die Congruenz der beiden Treffgeraden des Tangentenquadrupels f (der cubischen Normcurve N_3) angehört und der in Bezug auf den Nullcomplex der Curve sich selbst conjugirt ist:

$$(2)\quad a_s \equiv a_0 s_4 + a_1 s_3 + a_2 s_2 + a_3 s_1 + a_4 s_0 = 0.$$

Die Sehnen (und zugleich die Axen) der Curve, die diesem Complexe angehören, bilden sich auf die Ebene des Normkegelschnitts N_2 ab als die Punkte des Kegelschnitts, der N_2 trägt:

$$(3)\quad F'{}^{*)} \equiv a_\sigma^2 \equiv a_0 \sigma_2^2 + 2 a_1 \sigma_0 \sigma_2 + 2 a_3 \sigma_1 \sigma_2 + a_4 \sigma_0^2 + a_2 (2 \sigma_0 \sigma_2 + \sigma_1^2) = 0$$

*) Es tritt von jetzt ab die Nothwendigkeit ein, die Bezeichnungen noch schärfer zu unterscheiden, als es bisher nöthig war. Dazu dienen

Dann war die Involution (dritter Ordnung) der N_2 umschriebenen Poldreiseite von f dargestellt durch:

---

zwei Prinzipien (vgl. dazu die weiteren Entwicklungen dieses Abschnitts):

a) Da unser Normkegelschnitt und unsere cubische Normcurve so gewählt sind, dass die Theorie des letztern auf die des ersteren dadurch übertragen wird, dass (cf. Nr. 32) einer Sehne ($\lambda_1\ \lambda_2$) von N_3 der Punkt der Ebene (λ_1, λ_2) (mit den Tangenten λ_1, λ_2 an N_2) entspricht, so wird der Kegelschnitt der Ebene, dessen Punkte den Sehnen eines linearen Complexes c entsprechen, gleichfalls der Kegelschnitt c genannt (oder „der Sehnenkegelschnitt des Complexes c"). Der zum Complexe c (in Bezug auf den Nullcomplex der cubischen Curve, was der Kürze wegen gewöhnlich fehlt) conjugirte Complex heisst der Complex c': ebenso der entsprechende Kegelschnitt c' der zum Kegelschnitt c conjugirte.

Dann entspricht auch der Kegelschnitt c' mittelst seiner Punkte den Axen (von N_3), die dem Complexe c angehören (heisse also: „der Axenkegelschnitt des Complexes c"). Da nun der Kegelschnitt (3) als Axenkegelschnitt der Geraden erscheint, deren Strahlencoordinaten p_{ik} die Coefficienten der Hesse'schen Form H (9) der Form f (1) sind, so ist damit seine Bezeichnung „F'" gefordert.

Damit stimmt formal der Umstand überein, dass die N_2 umschriebenen Poldreiseite des Kegelschnitts F' (3) diejenige Involution dritter Ordnung auf N_2 bilden, die der der ersten Polaren von f (1) conjugirt ist, so dass also auch in dieser Hinsicht der Accent ein charakteristisches Merkmal des Kegelschnitts andeutet.

b) Die N_2 tragenden Kegelschnitte werden mit lateinischen Buchstaben belegt (gewöhnlich die F-Kegelschnitte (in Beziehung zu einer Form f) genannt). Dagegen die Kegelschnitte, denen Dreiseite ein- und N_2 umbeschrieben sind, mit griechischen Buchstaben (gewöhnlich die H Kegelschnitte genannt, in Beziehung zu einer Form H (9), der Hesseschen von f (1)).

Diese letztere Bezeichnung hat insofern allerdings etwas Missliches, als sonst den Klassenkegelschnitten diese (griechische) Bezeichnung beigelegt wird, und dadurch einige Collisionen unvermeidlich sind. Trotzdem habe ich mich für die gewählte Art entschieden, da der angegebene Gegensatz der F- und H-Kegelschnitte in unserer Theorie den

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} \equiv a_0\,\lambda^3 + 3\,a_1\,\lambda^2\mu + 3\,a_2\,\lambda\mu^2 + a_3\,\mu^3 \\ A_2 \equiv \dfrac{\partial f}{\partial \mu} \equiv a_1\,\lambda^3 + 3\,a_2\,\lambda^2\mu + 3\,a_3\,\lambda\mu^2 + a_4\,\mu^3 \end{cases}$$

Andrerseits ist dies die Involution der Tangententripel auf N_3, deren Regelschaaren dem Complexe $a_s = 0$ angehören. Die sämmtlichen Verbindungsebenen der zugehörigen Berührungspunktetripel gehen durch die eine Treffgerade des Tangentenquadrupels (1) (und diese heisse die dem Complex (2) „zugehörige“ Gerade) und die sämmtlichen Schnittpunkte der Ebenentripel, die sich in genannten Berührungspunkten der Curve anschmiegen, durchlaufen die andere Treffgerade desselben Quadrupels (1). Oder kürzer:

Die Involution (1) ist die Ebeneninvolution der zum Complexe (2) zugehörigen Geraden und zugleich die Punktinvolution der zu jener conjugirten Geraden.

Für die zu (4) conjugirte Involution gilt dann das Umgekehrte. Nun waren (cf. Nr. 36) die Axencoordinaten einer Geraden, deren Ebeneninvolution durch

$$(5)\quad \begin{cases} u_\lambda \equiv u_3\,\lambda^3 + 3\,u_2\,\lambda^2 + 3\,u_1\,\lambda + u_0 \\ v_\lambda \equiv v_3\,\lambda^3 + 3\,v_2\,\lambda^2 + 3\,v_1\,\lambda + v_0 \end{cases}$$

gegeben ist, die folgenden:

$$(6)\quad \sigma q_{ik} = (uv)_{ik}$$

woraus sich die Liniencoordinaten derselben Geraden in bekannter Weise mittelst der Beziehungen:

$$(7)\quad \rho\, p_{ik} = q_{lm}\ (i,\ k,\ l,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

ergeben.

Somit lauten die Liniencoordinaten der Geraden mit der Ebeneninvolution (4):

---

gewöhnlichen dualistischen an Wichtigkeit übertrifft. Im Übrigen ist durch eine theilweise mehrfache Bezeichnung gesorgt, dass Missverständnisse nicht wohl möglich sind.

$$(8)\quad \begin{aligned} \rho p_{01} &= a_0\, a_2 - a_1^2, & \rho p_{20} &= a_0\, a_3 - a_1\, a_2, \\ \rho p_{23} &= a_2\, a_4 - a_3^2, & \rho p_{31} &= a_1\, a_4 - a_2\, a_3, \end{aligned}$$
$$\rho p_{03} = a_1\, a_3 - a_2^2,$$
$$\rho p_{12} = a_0\, a_4 - a_1\, a_3.$$

Mit Einführung dieser p_{ik} wird dann die Hesse'sche Form von f:

$$(9)\quad H \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \lambda} & \frac{\partial A_1}{\partial \mu} \\ \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} & \frac{\partial A_2}{\partial \mu} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

$$\equiv p_{01}\, \lambda^4 - 2\, p_{02}\, \lambda^3 \mu + \lambda^2 \mu^2\, (3 p_{03} + p_{12}) - 2\, \lambda \mu^3\, p_{13} + p_{23}\, \mu^4,$$

also genau identisch mit der Darstellungsform einer Geraden, wie sie in Nr. 38 entwickelt wurde.

„Die ganze weitere Theorie beruht dann darauf, dass man nicht mehr die ursprüngliche Form f (1), sondern ihre Hesse'sche H (9) zum Ausgangspunkt nimmt."

81. Sind die homogenen symmetrischen Funktionen der Wurzeln von (9) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, bezeichnet mit $s_0, s_1, s_2, s_3\, s_4$; so ergab sich (pg. 69): (wenn man den unwesentlichen Proportionalitätsfaktor gleich Eins setzt):

$$(10)\quad \begin{cases} p_{01} = s_0, p_{02} = \frac{s_1}{2}, 3 p_{03} = \frac{s_2 + \sqrt{6i}}{2}, \\ p_{23} = s_4, p_{31} = \frac{s_3}{2}, \ p_{12} = \frac{s_2 - \sqrt{6i}}{2}, \end{cases}$$

wo i die Invariante zweiten Grades von f ist

$$(11)\quad i = \frac{(3\, p_{03} - p_{12})^2}{6}.$$

Durch Vertauschung von $3\, p_{03}$ mit p_{12} erhält man die Liniencoordinaten der zu (8) conjugirten Geraden.

Dann lautete die Gleichung (cf. Nr. 51) des zu $a_\sigma^2 = 0$ (3) gehörigen Kegelschnitts H (der durch die Ecken der N_2 umschriebenen Poldreiseite von $a_\sigma^2 = 0$ geht):

$$(12)\ \mathrm{H} \equiv \eta_\sigma^2 \equiv \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_3 (p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Ferner sind die Liniencoordinaten einer Sehne (α, β) der cubischen Normcurve (wenn die σ_i die homogenen symmetrischen Funktionen von α, β sind) (cf. pg. 74):

$$(13)\ \begin{cases} \rho p'_{01} = \sigma_0^2, & \rho p'_{02} = \sigma_0\sigma_1, & \rho p'_{03} = \dfrac{\sigma_1^2 - \sigma_0\sigma_2}{3}, \\ \rho p'_{23} = \sigma_2^2, & \rho p'_{13} = \sigma_1\sigma_2, & \rho p'_{12} = \quad 3\,\sigma_0\sigma_2 \end{cases}$$

woraus durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} wieder die Liniencoordinaten der Axe (α, β) hervorgehen.

Daher stellen die Punkte des Kegelschnitts H (12) die (Curven-)Axen des speciellen linearen Complexes H dar (wenn die π variable Liniencoordinaten sind):

$$(14)\ \mathrm{H}_\pi \equiv \pi_{01} p_{23} + \pi_{23} p_{01} + \pi_{02} p_{31} + \pi_{13} p_{20} + \pi_{03} p_{12} + \pi_{12} p_{03} = 0$$

oder auch die Sehnen des zu H conjugirten Complexes.

„Dieser Zusammenhang zwischen den Gleichungen (14) und (12) bleibt aber auch vollkommen bestehen, wenn die p_{ik} irgend welche Coefficienten sind, also Complex (14) und Kegelschnitt (12) *allgemeine* werden.“

Die Sehnen des Complexes (14) sind dann dargestellt durch:

$$(12')\ \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 \frac{p_{12}}{3} + \sigma_0\sigma_2 \left(3\,p_{03} - \frac{p_{12}}{3}\right) = 0 \equiv \mathrm{H}' = \eta'^2_\sigma$$

Dies ist also der zu (12) conjugirte Kegelschnitt; wenn also die p Liniencoordinaten, der zu H conjugirte Kegelschnitt H'.

82. Die Kegelschnitte (12) (12') gewinnen eine übersichtlichere Form, wenn man den neuen Kegelschnitt $H_\sigma^2 = 0$ einführt, der aus N_2 das Punktquadrupel H ausschneidet und N_2 trägt, also sich zur Form H verhält, wie der Kegelschnitt F (3) oder $a_\sigma^2 = 0$ zur Form a_λ. Daher ist:

$$(15) \quad H_\sigma^2 \equiv \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0 \sigma_1 p_{31} + \sigma_1 \sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + (2 \sigma_0 \sigma_2 + \sigma_1^2) \left(\frac{p_{03}}{2} + \frac{p_{12}}{6}\right) = 0$$

und der zu H gehörige lineare (sich selbst conjugirte) Complex:

$$(16) \quad H_s \equiv p_{01} s_4 + \frac{p_{20}}{2} s_3 + \left(\frac{p_{13}}{2} + \frac{p_{12}}{6}\right) s_2 + \frac{p_{31}}{2} s_1 + p_{23} s_0 = 0.$$

Dann schreiben sich die Kegelschnitte (12) (12') auch in der Form:

$$(17) \begin{cases} \eta_\sigma^2 \equiv \mathrm{H}' \equiv H_2^2 - \frac{1}{6} (3 p_{03} - p_{12}) (4 \sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2) = 0 \\ \eta'^2_\sigma \equiv \mathrm{H} \equiv H_\sigma^2 + \frac{1}{6} (3 p_{03} - p_{12}) (4 \sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2) = 0. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen wieder bei beliebigen p_{ik} irgend zwei allgemeine, einander conjugirte lineare Complexe dar d. h. genauer die Axen (Sehnen) der cubischen Normcurve, die ihnen angehören.

Sind dagegen die p_{ik} Liniencoordinaten, so kann man nach (11) den Faktor $\frac{1}{6} (3 p_{03} - p_{12})$ durch $\sqrt{\frac{i}{6}}$ ersetzen. (Cf pg. 68.)

Der zweite Faktor $(4\sigma_0 \sigma_2 - \sigma_1^2)$ stellt, $= 0$ gesetzt, den Normkegelschnitt (N_2) dar. In den Formeln (17) steckte der Satz δ' (pg. 136).

83. Kehren wir noch einmal zum Kegelschnitt F (3)

zurück, so haben wir noch zu bemerken, dass seine Gleichung in Liniencoordinaten (sc. der Ebene) ist:

$$(18)\quad u_\alpha^2 \equiv u_0^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} + u_1^2\,(p_{12} + p_{03}) + 2\, u_0\, u_2\, p_{03} = 0.$$

Gerade wie dann der Kegelschnitt F (18) zum Kegelschnitt H (12) gehört, so zum conjugirten Kegelschnitt H' der weitere F':

$$(18')\quad u'^2_\alpha \equiv u_0^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} + u_1^2\,(3\, p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) + 2\, u_0\, u_2\, \frac{p_{12}}{3} = 0.$$

Wie H und H', so unterscheiden sich auch F, F' nur durch Vertauschung von $3\, p_{03}$ und p_{12}.

Nennen wir die Coefficienten in (18) α_{ik}, die in (12) η_{ik}, so ergiebt sich durch Vergleichung:

$$(19)\ \eta_{00} = \alpha_{22},\ \eta_{01} = -2\,\alpha_{12},\ \eta_{12} = -2\,\alpha_{10}, \eta_{22} = \alpha_{00},\ \eta_{11} = \alpha_{02},\ \eta_{02} = 2\,\alpha_{11} - 4\,\alpha_{02}$$

oder umgekehrt:

$$(20)\quad \alpha_{00} = \eta_{22},\ \alpha_{01} = -\frac{\eta_{12}}{2},\ \alpha_{12} = -\frac{\eta_{01}}{2},\ \alpha_{22} = \eta_{00},\ \alpha_{02} = \eta_{11},\ \alpha_{11} = \frac{\eta_{02}}{2} + 2\,\eta_{11}.$$

Daraus ersehen wir auch, dass

$$(21)\quad \alpha_{11} - 4\,\alpha_{02} = \frac{i_a}{2} = \frac{\eta_{02}}{2} - 2\,\eta_{11}$$

wo i_a die zu f (1) gehörige Invariante (zweiten Grades) ist.

Dies liefert nebenbei mit Rücksicht auf die Bedeutung der Gleichung

$$\alpha_{11} = 4\,\alpha_{02}$$

(cf. pg. 85) den Satz:

α) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt einen andern zugleich trägt und auf ihm ruht, ist die, dass das

Quadrupel der Schnittpunkte beider auf einem derselben ein aequianharmonisches ist. (Cf. Nr. 58).

Dann ist auch dasselbe Quadrupel, auf dem andern Kegelschnitt betrachtet, ein aequianharmonisches.

Endlich ist dann auch das gemeinsame Tangentenquadrupel beider, sowohl auf dem einen, als dem andern Kegelschnitt betrachtet, ein aequianharmonisches.“

Aus Früherem (cf. pg. 80) wissen wir, dass unter dieser Bedingung ($i_a = 0$) der Complex (2) $a_s = 0$ ein spezieller wird und umgekehrt.

Daraus folgt aber die Ergänzung zum letzten Satze:

α_1) „Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt einen andern zugleich trägt und auf ihm ruht, ist auch die, dass er in Bezug auf den andern zugleich ein Kegelschnitt f und H' ist d. h. dass es unendlich viele Poldreiseite des ersten giebt, die dem zweiten umbeschrieben sind, und zugleich unendlich viele Dreiseite, die dem ersten ein- und dem zweiten umbeschrieben sind. Die beiden Schaaren von Dreiseiten bilden (vermöge ihrer Seiten als Tangenten des zweiten Kegelschnitts) auf dem letzteren zwei conjugirte Involutionen dritter Ordnung.“

Man erkennt dies auch folgendermassen.

Irgend ein Kegelschnitt

$$b_\sigma^2 \equiv \Sigma\Sigma\, b_{ik}\, \sigma_i\, \sigma_k = 0$$

wird dann zu einem H-Kegelschnitte (12), wenn seine Coefficienten die Liniencoordinatenidentität erfüllen d. h. wenn (cf. pg. 99):

$$(22)\quad b_{00}\, b_{22} - 4\, b_{01}\, b_{12} + b_{11}\, (2\, b_{02} + b_{11}) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung, in den Coefficienten des Kegelschnitts (3) geschrieben, ist

$$(23)\quad a_0\, a_4 - 4\, a_1\, a_3 + 3\, a_2^2 = \frac{i_a}{2}$$

q. e. d.

84. Jetzt nehmen wir die Frage nach den Bildern der Geraden eines ganz allgemeinen Complexes C in Angriff. Derselbe sei (bei ganz beliebigen Coefficienten p_{ik}) gegeben durch die Form (14), die man auch so schreiben kann:

$$(24)\quad C \equiv \pi_{01}\, p_{23} + \pi_{23}\, p_{01} + \pi_{02}\, p_{31} + \pi_{13}\, p_{20} + (\pi_{12} + \pi_{03})\, p_{03} + \pi_{03}\, (p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Dann sind die ihm angehörigen Curvenaxen dargestellt durch die Form (12):

$$(25)\quad C'^2_\sigma \equiv \sigma_0^2\, p_{23} + \sigma_0\sigma_1\, p_{31} + \sigma_1\sigma_2\, p_{20} + \sigma_2^2\, p_{01} + \sigma_1^2\, p_{03} + \sigma_0\sigma_2\, (p_{12} - p_{03}) = 0 \equiv p_\sigma^2.$$

Mithin sagt die Bedingung (24) bekanntermassen aus, dass der Kegelschnitt (25) apolar ist zum folgenden:

$$(26)\quad u_\pi^2 \equiv u_0^2\, \pi_{01} + 2\, u_0 u_1\, \pi_{02} + 2\, u_1 u_2\, \pi_{13} + u_2^2\, \pi_{23} + u_1^2\, (\pi_{12} + \pi_{03}) + 2\, u_0 u_2\, \pi_{03} = 0.$$

Dies ist aber der Kegelschnitt F' (18), nur dass statt der festen Liniencoordinaten p_{ik} dort variable Liniencoordinaten π_{ik} (aller Geraden des Complexes C) hier auftreten.

Durch Vertauschung von $3\, \pi_{03}$ mit π_{12} geht der Complex C in den ihm conjugirten über oder was dasselbe ist, die Axen des Complexes C in seine Sehnen; desgleichen Kegelschnitt (18) in den ihm conjugirten (18′) (in den π_{ik} geschrieben). Dies liefert aber mit Hülfe des Satzes pg. 148 den wichtigen Satz:

β) „Sind die Axen eines allgemeinen Complexes C durch den Kegelschnitt C' dargestellt, so entsprechen den Geraden des Complexes die H-Kegelschnitte, deren zugehörige F-Kegelschnitte den Normkegelschnitt N_2 *tragen* und zugleich auf C' *ruhen*.

Vertauscht man die Axen des Complexes C mit seinen Sehnen (oder, was dasselbe ist, mit den Axen des conjugirten Complexes C'), so geht auch der Kegelschnitt C' in seinen conjugirten C über (wo C dadurch bestimmt ist, dass das Paar C, C' harmonisch liegt zum Paare H^2_σ, N_2)."

85. Die letzte (Klammer-) Bemerkung ist schon früher (pg. 135) bewiesen, und zwar im Anschluss an die Form f (1). Da jetzt die Form H zu Grunde liegt, so modificiren sich die damaligen Entwicklungen in folgender Art.

Setzt man den Complex (24) linear aus zwei andern zusammen, deren einer der Nullcomplex der cubischen Normcurve sein soll, so erhält man zunächst:

$$(24)\ [\pi_{01} p_{23} + \pi_{23} p_{01} + \pi_{02} p_{31} + \pi_{13} p_{20} + \pi_{03} p_{12} + \pi_{12} p_{03} - z\,(3\,\pi_{03} - \pi_{12})] + z\,[3\,\pi_{03} - \pi_{12}] = 0$$

wo z noch variabel ist.

Man bestimmt jetzt z so, dass der erste Ausdruck in (24) durch sein Verschwinden einen sich selbst conjugirten Complex darstellt, d. h. einen solchen, der sich durch Vertauschung von $3\,\pi_{03}$ mit π_{12} nicht ändert. Dies findet offenbar nur statt, wenn der Coefficient von π_{12}, mit drei multiplicirt, gleich dem Coefficienten von π_{03} wird. Dies ergiebt

$$(27)\ z = -\frac{3\,p_{03} - p_{12}}{6}$$

und unser Complex C geht daher in die Form über:

$$(24')\ [\pi_{01}p_{23}+\pi_{23}p_{01}+\pi_{02}p_{31}+\pi_{13}p_{20}+\frac{1}{6}(3\pi_{03}+\pi_{12})(3p_{03}+p_{12})] - [\frac{1}{6}(3\,\pi_{03} - \pi_{12})\,(3\,p_{03} - p_{12})] = 0.$$

Dann geht aus (24)' der conjugirte Complex C' dadurch hervor, dass man dem zweiten Ausdruck das entgegengesetzte Vorzeichen beilegt.

Dementsprechend formt sich die Gleichung für die (Curven-) Axen (25) unseres Complexes C in folgende um:

$$(25') \; C_\sigma^2 \equiv [\sigma_0^2 \, p_{23} + \sigma_0 \sigma_1 p_{31} + \sigma_1 \sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 \, p_{01} + \frac{1}{6}(3 p_{03} + p_{12}) (\sigma_1^2 + 2\,\sigma_0\sigma_2)] - [\frac{1}{6}(3\,p_{03} - p_{12})\;(4\,\sigma_0\sigma_2 - \sigma_1^2)] = 0,$$

oder kürzer wegen (15):

$$(25') \; C_\sigma^2 \equiv H_\sigma^2 - \frac{1}{6}(3 p_{03} - p_{12})\, N_2 = 0, \text{ wo } N_2 \equiv 4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2 \text{ ist.}$$

Daher schreibt sich auch die Gleichung des Complexes (24') mit Einführung der Bezeichnung

$$(28) \quad N_3 \equiv 3\,\pi_{03} - \pi_{12}$$

und mit Berücksichtigung von (15) (16) kürzer so:

$$(24') \; C \equiv H_s - \frac{1}{6}\,(3\,p_{03} - p_{12})\;N_3 = 0.$$

Damit ist der Beweis unserer Klammer-Bemerkung auf's Neue geleistet.

86. Daraus erhält man im Besondern für die Geraden der ausgezeichneten Complexe H_s, N_3 sofort Folgendes:

γ) „Den Geraden eines sich selbst conjugirten Complexes $H_s = 0$ (der mit der cubischen Normcurve das Tangentenquadrupel H gemein hat) entsprechen die H-Kegelschnitte der Ebene, deren zugehörige F-Kegelschnitte (den Normkegelschnitt N_2 tragen) und auf dem Kegelschnitt $H_\sigma^2 = 0$ ruhen, wo der letztere N_2 im Punktquadrupel H trifft und N_2 trägt."

„Ist der sich selbst conjugirte Complex im Besondern der Nullcomplex der cubischen Normcurve (dem alle Tangenten der Curve angehören), so tritt an die Stelle des Kegelschnitts $H_\sigma^2 = 0$ der Normkegelschnitt N_2 selbst. Dann entsprechen also den Geraden des Nullcomplexes alle die H-Kegelschnitte, deren zugehörige F-Kegelschnitte (N_2 tragen und) auf N_2 ruhen."

Der letztere Satz ist schon bereits im Satze α_1 (pg. 151) enthalten, da bekanntlich (cf. Nr. 39) jede Gerade des Nullcomplexes von einem aequianharmonischen Tangentenquadrupel getroffen wird (und umgekehrt ein jedes Quadrupel dieser Art eine Gerade des Nullcomplexes liefert).

87. Herrscht endlich zwischen den Coefficienten p_{ik} die Liniencoordinatenidentität, d. h. wird der Complex (24) ein specieller, so wird der Kegelschnitt der Ebene, der seine (Curven-) Axen darstellt, ein H'-Kegelschnitt. Man hat daher in Satz β) nur für C' zu setzen H'. Aber in diesem Falle vereinfacht sich der Ausdruck des Satzes bedeutend, wie aus dem Satze (λ_2) des vorigen Paragraphen hervorgeht. Der Grund davon liegt in Folgendem.

Da die p_{ik} jetzt Liniencoordinaten sind, kann man sie in die Gleichung (26) einsetzen, dann stellt

$$(29) \quad u_p^2 = 0$$

den festen F'-Kegelschnitt dar, der zum Kegelschnitt H' (der die Axen des Complexes H darstellt) gehört.

Setzt man andrerseits in die Gleichung (25) für den Kegelschnitt C' statt der festen p_{ik} die variabeln π_{ik}, so entsteht dadurch aus (25):

$$(30) \quad \pi_\sigma^2 = 0$$

die Gleichung des variabeln H'-Kegelschnitts, der die Axen einer Geraden unseres speciellen Complexes H darstellt.

Nun ändert sich die Bedingung der Apolarität zwischen den Kegelschnitten (25) (26) durch Vertauschung der p_{ik}

und π_{ik} nicht, also trägt auch der variable H'-Kegelschnitt (30) den festen F'-Kegelschnitt.

Endlich ändert sich unsere Apolaritätsbedingung (24) auch nicht durch gleichzeitige Vertauschung von $3p_{03}$ mit p_{12}, $3\pi_{03}$ mit π_{12}, wodurch also jetzt auch unser (specieller) Complex H unverändert bleibt, während die Kegelschnitte (25) (26), und damit auch (29) (30) in ihre resp. conjugirten übergehen. Dies ist aber der Satz λ_2 (pg. 143).

δ) „Die Bilder der Geraden eines speciellen Complexes H sind alle die H-Kegelschnitte der Ebene, die den zum Kegelschnitt H (der das Bild der Complexaxe ist) gehörigen F'-Kegelschnitt tragen.“

§. 22.

Ergänzung der bisherigen Formeln.

88. Wir haben jetzt noch, im Anschluss an die gewonnene geometrische Grundlage der H- und F-Kegelschnitte, eine Reihe von Fragen zu erledigen, die, so zu sagen, das Apolaritätsmaterial der Complex- und Kegelschnittstheorie abrunden, von denen einige jedoch einer wichtigen rein algebraischen Ausdrucksweise fähig sind. Gleich die erste der Reihe ist von dieser Art.

Durch das Punktquadrupel H auf N_2 gingen zwei H-Kegelschnitte H, H', denen zwei F-Kegelschnitte F, F' zugehörten, die mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein hatten und auf H resp. H' ruhten.

Die Involution dritter Ordnung der Tangenten von N_2 als Seiten der H' einbeschriebenen Poldreiseite von F' war die der ersten Polaren der Ausgangsform f (1). Diese selbst war das Quadrupel der Schnittpunkte von N_2 und F'.

In gleicher Weise ist dann das Quadrupel der Schnittpunkte von N_2 und F, es heisse f', die Form, deren erste Polaren die zu den Kegelschnitten H und F gehörige, zur ersten conjugirte Involution bilden.

Wir suchen die Form f', d. h. die Schnittpunkte von N_2 mit F.

Nun geht der Kegelschnitt F (als Klassenkegelschnitt aufgefasst) aus F' (26) hervor, indem man $3\pi_{03}$ mit π_{12} vertauscht.

Ehe wir aber so die Form für F aufstellen, legen wir statt der biquadratischen Form f (1) eine canonische Form zu Grunde, indem wir, was immer erlaubt ist, $a_1 = a_3 = 0$ nehmen.

Dann wird aus den Gleichungen (8) (26):

$$(31)\ p_{02} = p_{31} = 0,\ p_{01} = a_0 a_2, p_{23} = a_2 a_4, p_{03} = -a_2^2, p_{12} = a_0 a_4$$

$$(32)\ F' \equiv u_0^2 a_0 a_2 + u_1^2 (a_0 a_4 - a_2^2) + u_2^2 a_2 a_4 - 2 u_0 u_2 a_2^2$$

und F gewinnt die Gestalt:

$$(33)\ F \equiv u_0^2 a_0 a_2 + u_1^2 \frac{(a_0 a_4 - 9 a_2^2)}{3} + u_2^2 a_2 a_4 + 2 u_0 u_2 \frac{a_0 a_4}{3}.$$

Leitet man daraus in gewöhnlicher Weise die Gleichung von F in Punktcoordiuaten ab, so kommt:

$$(34) F \equiv \left\{\frac{a_0 a_4 - 9 a_2^2}{3}\right\} \left\{x_0^2 a_2 a_4 - x_1^2 \frac{a_0 a_4}{3} + x_2^2 a_0 a_2 - 2 x_0 x_2 \frac{a_0 a_4}{3}\right\}.$$

Mithin schneidet F den Normkegelschnitt N_2 in dem Quadrupel:

$$(35)\ f' \equiv \left\{\frac{a_0 a_4 - 9 a_2^2}{3}\right\} \left\{\lambda^4 a_0 a_2 \quad - \quad 2\lambda^2 a_0 a_4 \quad + \quad a_2 a_4\right\}.$$

Da f' und f in der Beziehung stehen, dass ihre ersten Polaren zwei conjugirte Involutionen bilden, so ist f' eine Covariante von f, also bekanntlich (weil vom vierten Grade in λ) in der Form

$$(36)\ f' \equiv x j f + y i H$$

wo x, y Zahlenfaktoren, j, i die bekannten Invarianten von f sind und zwar für die gewählte canonische Form:

$$(37)\quad j = 6\,a_2\,(a_0\,a_4 - a_2^2), \qquad i = 2\,(a_0\,a_4 + 3\,a_2^2).$$

Der Coefficient von λ^4 im Ausdruck $x\,j\,f + y\,i\,H$ wird dann:

$$(38)\quad C = a_0\,a_2\,[a_0\,a_4\,(6\,x + 4\,y) - a_2^2\,(6\,x - 12\,y)]$$

Um für die gesuchte Form f' die Faktoren x, y zu finden, genügt es, die Coefficienten von λ^4 gleich zu setzen, dies ergiebt:

$$(39)\quad x = -\,y = \frac{1}{6} \text{ und daher}$$

$$(40)\quad 6\,f' = j\,f - i\,H.$$

In der That überzeugt man sich leicht, dass für die beiden Involutionen

$$(41)\quad \begin{cases} f_1 + \varkappa\;f_2 \equiv (\lambda^3\,\alpha_0 + \lambda^2 . 0 + 3\,\lambda\,\alpha_2 + 0) \\ f'_1 + \varkappa'\,f'_2 \equiv (\lambda^3\,a_0\,a_2 + \lambda^2 . 0 + \lambda\,(-\,a_0\,a_4) + 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\,\varkappa\,(\lambda^3 . 0 + 3\,\lambda^2\,\alpha_2 + \lambda . 0 + \alpha_4) \\ +\,\varkappa'\,(\lambda^3 . 0 - \lambda^2\,(a_0\,a_4) + \lambda . 0 + (-\,a_2\,a_4) \end{cases}$$

die Bedingung (7)

$$\rho p_{\mathrm{ik}} = q_{\mathrm{lm}}$$

erfüllt sind.

Wir drücken dies in dem Satze aus:

ε) „*Stehen zwei biquadratische binäre Formen in der invarianten Beziehung, dass die Involutionen ihrer ersten Polaren conjugirt sind, und ist die eine f, so ist die andere* „$\dfrac{j\,f - i\,H}{6}$“; *wo i, j, H die bekannten In-(Co-)varianten von f sind.*“

89. Die geometrisch correspondirende Frage ist die nach den gemeinsamen Tangenten des Normkegelschnitts N_2 und des zu F gehörigen Kegelschnitts H.

Das gemeinsame Tangentenquadrupel von N_2 und H' (wo H' zu H conjugirt ist) war schon früher (Nr. 56) gefunden:

$$(42)\ \Phi \equiv \frac{1}{48}(2\,j\,f - 3\,i\,H)$$

Da sich nun H′ zu f verhält, wie H zu f', so entsteht die algebraische Aufgabe, die Covariante (42) für die Grundform f' (40) aufzustellen.

Wir lösen jedoch die Frage geometrisch in demselben Sinne, wie die eben behandelte.

Vertauscht man in (25) $3\,p_{03}$ mit p_{12}, so ergiebt sich der zu H′ conjugirte Kegelschnitt H. Für die canonische Form von $f\ (a_1 = a_3 = 0)$ hat man demnach:

$$(43)\ \mathrm{H} \equiv \sigma_0^2\, a_2\, a_4 + \sigma_1^2 \frac{a_0\, a_4}{3} + \sigma_2^2\, a_0\, a_2 - 2\,\sigma_0\,\sigma_2 . \frac{9\,a^2 + a_0\, a_4}{6}.$$

mithin die dualistische Gleichung (in Liniencoordinaten u):

$$(44)\ \mathrm{H} \equiv u_0^2 \frac{a_0^2\, a_2\, a_4}{3} + u_2^2 \frac{a_4^2\, a_0\, a_2}{3} - \frac{u_1^2}{36}(a_0\, a_4 - 9\, a_2^2)^2$$
$$+ \frac{u_0\, u_2}{36}\, a_0\, a_4\, (a_0\, a_4 + 9\, a_2^2)$$

und das mit N_2 gemeinsame Tangentenquadrupel:

$$(45)\ \Phi' \equiv \lambda^4 \frac{a_0^2\, a_2\, a_4}{3} + \frac{\lambda^2}{12}(a_0^2\, a_4^2 + 18\, a_0\, a_4\, a_2^2 - 27\, a_2^4)$$
$$+ \mu^4 \frac{(a_2\, a_0\, a_4^2)}{3} \equiv x_1\, j\, f + y_1\, i\, H.$$

Bestimmt man die Zahlenfaktoren x_1, y_1 wie oben, so kommt:

$$x_1 = \frac{1}{24},\quad y_1 = \frac{1}{48}\quad \text{und also endlich:}$$

$$(46)\ \Phi' \equiv \frac{1}{48}(2\,j\,f + i\,H)$$

90. Es empfiehlt sich für das Weitere besonders, das Büschel von Kegelschnitten, das N_2 im Punktquadrupel H trifft, aus den beiden durch H gehenden H-Kegelschnitten, und

analog die Schaar von (Klassen-) Kegelschnitten, die mit N_2 das gemeinsame Tangentenquadrupel H besitzen, aus den beiden (zu den beiden H-Kegelschnitten) zugehörigen F-Kegelschnitten (linear) zusammenzusetzen.

Zuvor mag noch für die Darstellung des Kegelschnitts F (in Punktcoordinaten) eine einfache Folgerung aus dem Satze (ε) gezogen werden.

Je nachdem man den Apolaritätsuntersuchungen die Form f oder H zu Grunde legt, wird man die beiden zu H gehörigen F-Kegelschnitte in Punkt- oder Liniencoordinaten darstellen (während man sich für die bezüglichen H-Kegelschnitte, abgesehen von der eben gelösten Frage, auf ihre Darstellung in Punktcoordinaten beschränken wird).

Die beiden F-Kegelschnitte, die zur Form f resp. H gehören, sind in Liniencoordinaten durch (25) oder (25') (wo durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} i. e. des Vorzeichens von $(3\,p_{03} - p_{12})$ in (25') der eine aus dem andern hervorgeht) dargestellt: der Kegelschnitt F' (der eine von beiden) durch Gleichung (3)

$$a_\sigma^2 = 0.$$

Es erübrigt also nur noch die Punktdarstellung von F.

Schreibt man die Form H in der Weise:

$$(47)\quad H \equiv h_0\,\lambda^4 + 4\,h_1\,\lambda^3 + 6\,h_2\,\lambda^2 + 4\,h_3\,\lambda + h_4 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$$

so geht die gesuchte Form für F aus dem Satze (ε) sofort hervor:

ε_1) „Die Gleichung des zum F-Kegelschnitte

$$(3)\quad F' \equiv a_\sigma^2 = 0$$

conjugirten Kegelschnitts

$$(48)\quad F \equiv b_\sigma^2 = 0$$

erhält man mittelst der Relationen:

$$(49)\ \rho b_i = j\, a_i - i\, h_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Dann sind die Involutionen, die die Seiten der (N_2) umschriebenen Poldreiseite von F, F' auf N_2 bilden, einander conjugirt."

91. Wir untersuchen jetzt die ausgezeichneten Kegelschnitte der Schaar $F + k F'$ mit dem gemeinsamen Tangentenquadrupel H (auf N_2), wo (cf. (18) (18')):

$$(50) \begin{cases} F' \equiv u_1^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} \\ F \equiv u_0^2 p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1\, u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23} \end{cases}$$

$$\begin{cases} + u_1^2 (p_{12} + p_{03}) + 2\, u_0\, u_2\, p_{03} = 0 \\ + u_1^2 \left(3\, p_{03} + \frac{p_{12}}{3}\right) + 2\, u_0\, u_2 \cdot \frac{p_{12}}{3} = 0. \end{cases}$$

Zunächst erhält man sofort:

$$(51) \begin{cases} F - F' \equiv 2\left(p_{03} - \frac{p_{12}}{3}\right)(u_1^2 - u_0\, u_2) \\ F + F' \equiv 2\,(u_0^2\, p_{01} + 2\, u_0\, u_1\, p_{02} + 2\, u_1 u_2\, p_{13} + u_2^2\, p_{23}) \end{cases}$$

$$+ 4\, u_1^2 \left(p_{03} + \frac{p_{12}}{3}\right) + 2\, u_0\, u_2 \left(p_{03} + \frac{p_{12}}{3}\right) \equiv 2\, \Phi.$$

Nennt man unsere Kegelschnittschaar mit den gemeinsamen Tangenten H kurz die „Schaar H" (und dualistisch das Büschel mit den gemeinsamen Grundpunkten H das „Büschel H"), so kann man das Resultat (51) so ausdrücken:

ζ) „Legt man der Schaar „H" die beiden F-Kegelschnitte (50) zu Grunde, so erhält man den Kegelschnitt der Schaar, der auf N_2 ruht, aus ihnen durch Addition, dagegen den Normkegelschnitt selber durch Subtraction.

Mithin liegt das Paar „F" zu diesem ausgezeichneten Paar harmonisch."

Umgekehrt ergiebt sich sofort aus (51): (cf. 11)

$$(52)\begin{cases} F\equiv\Phi+\left(p_{03}-\frac{p_{12}}{3}\right)(u_1^2-u_0u_2)=\Phi+\sqrt{\frac{2i}{3}}(u_1^2-u_0u_2)\\ F'\equiv\Phi-\left(p_{03}-\frac{p_{12}}{3}\right)(u_1^2-u_0u_2)=\Phi-\sqrt{\frac{2i}{3}}(u_1^2-u_0u_2).\end{cases}$$

92. Wir suchen nunmehr auch die Schnittpunkte des Kegelschnitts Φ mit N_2.

Für unsere canonische Form von f ergiebt sich:

$$(53)\ \Phi\equiv u_0^2a_0a_2+2u_1^2\frac{a_0a_4-3a_2^2}{3}+u_2^2a_2a_4+2u_0u_2\frac{a_0a_4-3a_2^2}{6}$$

also Φ in Punktcoordinaten:

$$(54)\ \Phi\equiv x_0^2\frac{2}{3}(a_0a_4-3a_2^2)a_2a_4+x_2^2\frac{2}{3}(a_0a_4-3a_2^2)a_0a_2$$
$$+x_1^2\left\{a_0a_4a_2^2-\frac{1}{36}(a_0a_4-3a_2^2)^2\right\}-\frac{2}{9}x_0x_2(a_0a_4-3a_2^2)^2$$

und das Punktquadrupel, welches Φ aus N_2 ausschneidet:

$$(55)\ \Phi_\lambda\equiv\frac{2}{3}\lambda^4a_0a_2(a_0a_4-3a_2^2)+\frac{\lambda^2}{3}(18a_0a_4a_2^2-a_0^2a_4^2-9a_2^4)$$
$$+\frac{2}{3}\mu^4a_2a_4(a_0a_4-3a_2^2)\equiv x_2jf+y_2iH.$$

Für die Zahlenfaktoren kommt:

$$(56)\ x_2=\frac{1}{6},\ y_2=-\frac{1}{12}\ \text{mithin:}$$

$$(57)\ \Phi_\lambda=\frac{1}{12}(2jf-iH)$$

Dies Resultat war auf andere Weise vorauszusehen. Denn wir wissen, dass ein Kegelschnitt (3) $a_\sigma^2=0$, der N_2 trägt und aus N_2 das Quadrupel f (1) ausschneidet, mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein hat.

Mithin muss d u a l i s t i s c h ein Kegelschnitt, der auf N_2 ruht und mit N_2 das Tangentenquadrupel g gemein hat, N_2 im Quadrupel $H(g)$ treffen, wo $H(g)$ die Hesse'sche Form von g ist.

Für unsern Kegelschnitt Φ ist aber die Form g identisch mit H (von f), und daher die gesuchte Form Φ_λ die Hesse'sche Form der Hesse'schen Form von f. Diese ist aber bekanntlich die Form (57).

93. Ehe wir die Beziehungen zwischen den bis jetzt gewonnenen biquadratischen Formen erörtern, stellen wir gleich die allgemeine Frage nach den Tangenten resp. Punkten, die die Kegelschnitte des Büschels „H" resp. der Schaar „H" mit dem Normkegelschnitt N_2 resp. N_2 gemein haben.

Die Kegelschnitte des Büschels „H" bilden, als Klassenkegelschnitte aufgefasst, eine quadratische Schaar. Aber es ist leicht zu sehen, dass die gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte dieser Schaar wieder ein Büschel bilden. Denn da sich unter dem Büschel „H" (oder $\mathrm{H}' + k\,\mathrm{H}$) der Normkegelschnitt selbst befindet, der mit sich selber unendlich viele Tangenten gemein hat, so muss sich auf der linken Seite der Gleichung für die gesuchten Tangentenquadrupel ein in k ganzer, linearer Faktor absondern. Denn nur so kann diese Gleichung für einen gewissen Werth von k identisch verschwinden. Das Analoge gilt von der Schaar „H".

Wir schreiben homogen das Büschel „H" in der Form (cf. 50)

$$(58)\quad \alpha\mathrm{H}' + \beta\mathrm{H} = 0$$

d. i. (cf. 25): $[\alpha\beta]_\sigma \equiv$

$$\alpha\,\{\sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_2\,(p_{12} - p_{03})\}$$

$$+\beta\{\sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2\frac{p_{12}}{3} + \sigma_0\sigma_2(3p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\} = 0.$$

Da aber

$$(59)\quad \mathrm{H}' - \mathrm{H} = (p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\,(\sigma_1^2 - 4\,\sigma_0\,\sigma_2),$$

so muss sich, da sich die in Frage stehenden Tangentenquadrupel für H′, H selbst (cf. (42) (46)) als lineare Combinationen von $j\,f$ und $i\,H$ ergaben, die ganze Schaar derselben in der Form darstellen lassen:

$$(60)\quad \frac{\alpha+\beta}{3}(X j f + Y i H) \equiv [\alpha\,\beta]_\lambda = 0$$

$$\text{wo } (61)\quad X = \xi_1\,\alpha + \eta_1\,\beta,\quad Y = \xi_2\,\alpha + \eta_2\,\beta.$$

Es sind somit nur noch die Zahlenfaktoren ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 zu bestimmen.

Zu dem Zweck machen wir wieder von derselben canonischen Form für f (1) Gebrauch, wie bei den letzten Fällen.

Dann geht (58) zufolge der Gleichungen (31) über in:

$$(62)\quad \sigma_0^2 a_2 a_4(\alpha+\beta) + \sigma_2^2 a_0 a_2(\alpha+\beta) + \frac{\sigma_1^2}{3}(a_0 a_4\beta - 3a_2^2\alpha) +$$

$$2\,\sigma_0\sigma_2\frac{1}{6}\left\{a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2\,(\alpha-3\,\beta)\right\} = 0 \equiv [\alpha\,\beta]_\sigma$$

mithin in Liniencoordinaten:

$$(63)\quad [\alpha\,\beta]_u = u_0^2\,\frac{\alpha+\beta}{3}\,a_0\,a_2\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha)$$

$$+\frac{u_1^2}{36}\left\{36\,(\alpha+\beta)^2\,a_0\,a_4\,a_2^2 - [a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2(\alpha-3\beta)^2]\right\}$$

$$-2\,u_0\,u_2\,\frac{1}{18}\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha)\,\{a_0\,a_4\,(3\,\alpha-\beta) + 3\,a_2^2\,(\alpha-3\beta)\}$$

$$+\,u_2^2\,\frac{\alpha+\beta}{3}\,a_2\,a_4\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha) = 0.$$

Dann liefert die Combinirung von dieser Gleichung mit der des Normkegelschnitts N_2:

$$(64)\quad \frac{\alpha+\beta}{3}\Big[\lambda^4\,a_0\,a_2\,(a_0\,a_4\,\beta - 3\,a_2^2\,\alpha) + \frac{\lambda^2}{4}\left\{18\,(\alpha+\beta)\,a_0\,a_4\,a_2^2\right.$$

$$\left.+\;9a_2^4\,(\alpha-3\,\beta) - a_0^2\,a_4^2\,(3\,\alpha-\beta)\right\} + \mu^4\,a_2\,a_4\,(a_0\,a_4\,\beta$$

$$-\;3\,a_2^2\,\alpha)\Big] = 0$$

und durch Vergleichung mit (60):

(65) $X = \frac{\alpha + \beta}{8}$, $Y = \frac{\beta - 3\alpha}{16}$, und demnach endlich:

(66) $[\alpha\,\beta]_\lambda \equiv \frac{\alpha + \beta}{3}\,\frac{1}{16}\{2\,(\alpha + \beta)\,j\,f + (\beta - 3\,\alpha)\,i\,H\}$ oder:

$$= \frac{\alpha + \beta}{3}\,\frac{1}{16}\cdot\{\alpha\,(2\,j\,f - 3\,i\,H) + \beta\,(2\,j\,f + i\,H)\}.$$

94. Es schliesse sich unmittelbar daran an die ganz analoge Behandlung der Schaar „H“:

$$(67)\quad \gamma\,\mathrm{F}' + \delta\,\mathrm{F} \equiv \text{(cf. 52)}$$

$$\gamma\,\{u_0^2\,p_{01} + 2\,u_0\,u_1\,p_{02} + 2\,u_1\,u_2\,p_{13} + u_2^2\,p_{23} + u_1^2\,(p_{12} + p_{03}) + 2\,u_0\,u_2\,p_{03}\} + \delta\,\{u_0^2\,p_{01} + 2\,u_0\,u_1\,p_{02} + 2\,u_1\,u_2\,p_{13}$$
$$+ u_2^2\,p_{23} + u_1^2\,(3\,p_{03} + \frac{p_{12}}{3}) + 2\,u_0\,u_2\,\frac{p_{12}}{3}\} = 0 \equiv [\gamma\,\delta]_u.$$

Da nach (51)

$$(51)\quad F' - F \equiv 2\,(p_{03} - \frac{p_{12}}{3})\,(u_0\,u_2 - u_1^2)$$

so kann man, wie vorher, schliessen, dass die Schaar der gesuchten Schnittpunktquadrupel (mit N_2) dargestellt ist durch

$$(68)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\alpha + \beta}{3}\,(U\,j\,f + V\,i\,H)$$

wo sich U, V linear und ganz aus γ, δ zusammensetzen.

Für die canonische Form von f geht (67) über in: (69)

$$[\gamma\,\delta]_u = u_0^2\,a_0\,a_2\,(\gamma + \delta) + u_2^2\,a_2\,a_4\,(\gamma + \delta) + \frac{u_1^2}{3}\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\} + \frac{2\,u_0\,u_2}{3}\,(a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma) = 0$$

also in dualistischer Darstellung:

$$(70)\quad [\gamma\,\delta]_x \equiv x_0^2\,\frac{\gamma + \delta}{3}\,a_2\,a_4\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\}$$
$$+ \frac{x_1^2}{9}\,\{9\,a_0\,a_4\,a_2^2\,(\gamma + \delta)^2 - (a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma)^2\}$$
$$- 2\,x_0\,x_2\,\frac{1}{9}\,(a_0\,a_4\,\delta - 3\,a_2^2\,\gamma)\,\{a_0\,a_4\,(3\,\gamma + \delta) - 3\,a_2^2\,(\gamma + 3\,\delta)\}$$

$$+ x_2^2 \frac{\gamma + \delta}{3} a_0 a_2 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\} = 0$$

was mit der Gleichung des Normkegelschnitts N_2 combinirt, zum Punktquadrupel führt:

$$(71)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\gamma + \delta}{3} [\lambda^4 a_0 a_2 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\}$$
$$+ 2\lambda^2 \{9 a_0 a_4 a_2^2 (\gamma + \delta) - a_0^2 a_4^2 \delta - 9 a_2^4 \gamma\}$$
$$+ a_2 a_4 \{a_0 a_4 (3\gamma + \delta) - 3 a_2^2 (\gamma + 3\delta)\}] = 0.$$

Der Vergleich mit (68) ergiebt durch Rechnung:

$$(72)\quad U = \frac{\gamma + \delta}{2},\quad V = -\frac{\delta}{2}$$

und endlich damit:

$$(73)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \frac{\gamma + \delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \{(\gamma + \delta) f j - i \beta H\}$$
$$= \frac{\gamma + \delta}{3} \cdot \frac{1}{2} \{\gamma (j f) + \delta (j f - i H)\} = 0.$$

95. Diese beiden Resultate für $[\alpha\,\beta]_\lambda$, $[\gamma\,\delta]_\lambda$ mögen ihren besondern Ausdruck in dem Satze finden:

(η) „Das *Büschel* „H“ der Kegelschnitte (die N_2 im Punktquadrupel H treffen):

$$(58)\quad \alpha\, \mathrm{H}' + \beta\, \mathrm{H} = 0$$

hat mit N_2 die Tangenteninvolution

$$(66)\quad [\alpha\,\beta]_\lambda \equiv \alpha (2 j f - 3 i H) + \beta (2 j f + i H),$$

andrerseits die *Schaar* „H“ der Kegelschnitte (die mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein haben)

$$(67)\quad \gamma F' + \delta F = 0$$

hat mit N_2 die Punktinvolution

$$(73)\quad [\gamma\,\delta]_\lambda \equiv \gamma j f + \delta (j f - i H) = 0$$

gemein.“

96. Handelt es sich nur um dieses Schlussresultat (η), so hätte man weit einfacher zum Ziele kommen können.

Denn da wir, um zunächst das Büschel „H“ in der Weise zu behandeln, wissen, dass H resp. H′ mit N_2 die Tangenten (cf. (42), (46)*

$$2\,j\,f - 3\,i\,H = 0, \quad 2\,j\,f + i\,H = 0$$

gemein hat, und ausserdem die Gleichung aller seiner Tangentenquadrupel, wenn man das Büschel in der Form

$$\mathrm{H}' + k\,\mathrm{H} = 0$$

schreibt, linear in k sein muss (cf. 60), so kann dieselbe nur die Form haben:

$$(2\,j\,f - 3\,i\,H) + \mu\,k\,(2\,j\,f + i\,H) = 0$$

wo μ zu bestimmen ist.

Nun kann für $k = -1$ (cf. (59)) diese Gleichung nur zu $H = 0$ werden, und umgekehrt, denn es giebt keinen andern Kegelschnitt, der mit N_2 die Punkte H und zugleich mit N_2 die Tangenten H gemein hat, als den Normkegelschnitt selbst.

Dadurch bestimmt sich $\mu = 1$, und wir haben die Form (66).

Genau in derselben Weise kann man die Schaar „H“ behandeln. Die Kegelschnitte F', F haben mit N_2 die Punkte (cf. (40))

$$f = 0, \quad j\,f - i\,H = 0$$

gemein, und für den Normkegelschnitt, als Kegelschnitt der Schaar, kann die Gleichung der Punktquadrupelschaar nur zu $H = 0$ werden, so dass man sogleich zur Form (73) kommt.

97. Mittelst des Satzes (η) gehört zu jeder Form

$$(74) \quad \xi\,j\,f + \eta\,i\,H = 0$$

ein einziger Kegelschnitt der Schaar „H“ und ein einziger des Büschels „H“, sodass diese beiden Reihen dadurch projektivisch auf einander bezogen sind; und zwar wird für den Kegelschnitt des Büschels „H“ (58)

$$\alpha = \frac{\xi - 2\,\eta}{8}, \; \beta = \frac{3\,\xi + 2\eta}{8}$$

also seine Gleichung

$$(75)\quad \xi\,(\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H}) + 2\,\eta\,(\mathrm{H} - \mathrm{H}') = 0.$$

Speciell der Form f entspricht also der folgende:

$$(76)\quad \mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H} \equiv \sigma_0^2\,p_{23} + \sigma_0\,\sigma_1\,p_{31} + \sigma_1\,\sigma_2\,p_{20} + \sigma_2^2\,p_{01} + \sigma_1^2\,\frac{(p_{03} + p_{12})}{4} + 2\,\sigma_0\,\sigma_2\,p_{03} = 0.$$

Andrerseits wird für den bezüglichen Kegelschnitt der Schaar „H“ (67):

$$\gamma = \xi + \eta, \quad \delta = -\eta$$

also der Kegelschnitt selbst:

$$(77)\quad \xi\,F' + \eta\,(F' - F) = 0.$$

Endlich die projektivische Beziehung zwischen Büschel und Schaar „H“:

$$(78)\quad \mathrm{H}' + \mu\,\mathrm{H} = 0, \quad F' + \nu\,F = 0$$

gewinnt nach leichter Rechnung die Gestalt:

$$(79)\quad \mu\nu + \frac{\mu - \nu}{3} - 1 = 0.$$

98. Endlich mag noch der Vollständigkeit wegen auch Büschel und Schaar „f“ (in analoger Bezeichnung) der gleichen Behandlung unterworfen werden, wenn auch die bezüglichen Formeln bei weiteren Anwendungen in den Hintergrund treten.

Es genügt hier, dem Büschel den Normkegelschnitt und den Kegelschnitt F' zu Grunde zu legen, da alle übrigen Formeln sich leicht, wenn man sie braucht, aus denen des „H“-Büschels ergeben.

Für die „f“-Schaar gilt dann das dualistische.

Wir schreiben also das „f“-Büschel in der Form (cf. pg. 161) $(a_1 = a_3 = 0)$:

$$(80)\quad \sigma_0^2\,k'\,a_4 + \sigma_1^2\,(k'\,a_2 - k) + \sigma_2^2\,k'\,a_0 + 2\,\sigma_0\,\sigma_2\,(k'a_2 + 2\,k) = k'\,a_\sigma^2 + k\,(4\,\sigma_0\,\sigma_2 - \sigma_1^2) = k'\,F' + k\,N_2 = 0$$

also in Liniencoordinaten:

(81) $u_0^2 k' a_4 (k' a_2 - k) + u_1^2 \{k'^2 a_0 a_4 - (k' a_2 + 2 k)^2\}$

$+ u_2^2 k' a_4 (k' a_2 - k) - 2 u_0 u_2 (k' a_2 - k) (k' a_2 + 2 k)$

und daher die mit N_2 gemeinsamen Tangenten:

(82) $$k' [\lambda^4 a_0 (k' a_2 - k) + \lambda^2 \{k' (a_0 a_4 - 3 a_2^2) - 6 k a_2\}$$

$$+ a_4 (k' a_2 - k)] = k' \left\{\frac{k' H}{2} - k f\right\} = 0$$

Analog wird die „f" Schaar: (mit dualistischer Bezeichnung „Φ')"

(83) $$u_0^2 \rho' a_0 + u_1^2 (4 \rho' a_2 - \rho) + u_2^2 \rho' a_4$$

$$+ 2 u_0 u_2 (\rho' a_2 - \frac{\rho}{2}) = 0$$

also in Liniencoordinaten:

(84) $$x_0^2 \rho' a_4 (4 \rho' a_2 - \rho) + x_1^2 \{a_0 a_4 \rho'^2 - (\rho' a_2 + \frac{\rho}{2})^2\}$$

$$+ x_2^2 \rho' a_0 (4 \rho' a_2 - \rho) - 2 x_0 x_2 (\rho' a_2 + \frac{\rho}{2}) (4 \rho a_2 - \rho) = 0$$

und ihr Schnitt mit N_2:

(85) $$k' [\lambda^4 (4 \rho' a_0 a_2 - \rho a_0) + \lambda^2 \{4 \rho' (a_0 a_4 - 3 a_2^2) - 6 \rho a_2\}$$

$$+ (4 \rho' a_2 a_4 - \rho a_4) = k' (2 H \rho' - f \rho) = 0.$$

(η_1) „Die Tangenten resp. Punkte, die das Büschel resp. die Schaar „f":

(80) $k' F' + k N_2 = 0$, resp. (83), $\rho' \Phi' + \rho N_2 = 0$

mit N_2 resp. N_2 gemein haben, sind gegeben durch:

(82) $\frac{k' H}{2} - k f = 0$, resp. (83) $2 H \rho' - f \rho = 0$ *)."

99. Diese sämmtlichen Formeln über die gemeinsamen Punkte resp. Tangenten der Schaaren f, H, resp. der Büschel

---

*) Umgekehrt hätte man auch mit zu grundelegung des Satzes (η_1), indem man die Form f mit H vertauscht und für letztere die bezüglichen Covarianten bildet, und dann in der Weise der Nr. 96 verfährt, die Formeln für Büschel und Schaar „H" ableiten können.

f, H mit dem Normkegelschnitte lassen sich ohne Weiteres auf die linearen Complexe übertragen. Es mag hier genügen, den Satz mitzutheilen, der diese Uebertragung vollständig vermittelt.

Wir wissen, dass die Punkte irgend eines Kegelschnitts C der Ebene den (N_3) Sehnen eines Complexes C entsprechen (der dadurch vollständig bestimmt ist). Das Schnittpunktquadrupel (N_2, C) ist identisch mit dem Quadrupel der Tangenten von N_3, die dem Complexe C angehören.

Was entspricht den gemeinsamen Tangenten (N_2, C).

Den Schnittpunkten irgend einer Tangente λ von N_2 mit C: $(\lambda\alpha)$, $(\lambda\beta)$ entsprechen die beiden Sehnen von N_3, die vom Punkte λ ausgehen und dem Complex C angehören, durch die also die Ebene des Complexes, die durch den Punkt λ geht, vollständig bestimmt ist.

Durch das Zusammenfallen von α, β ergiebt sich daher:

k) „Den vier Tangenten λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ von N_2, die zugleich solche von C sind, entsprechen die vier Punkte a_i der cubischen Curve, deren durch den Complex C ihnen zugeordnete Ebenen die Curve berühren."

Einen speciellen Fall dieses Satzes haben wir schon früher (pg. 115) kennen gelernt, wenn nemlich der Kegelschnitt C ein F-Kegelschnitt ist. Schneidet derselbe N_2 im Quadrupel f, so hat er mit N_2 das Tangentenquadrupel H gemein: andererseits war aber die Bedeutung von H für die cubische Curve die im letzten Satze allgemein angegebene.

100. Wir stellen die wichtigsten, einer eingehenderen Untersuchung zur Basis dienenden Kegelschnitte des „H"

Büschels und der „H"-Schaar in einer Tabelle zusammen, zugleich mit ihren Schnittpunkten und Tangenten, die sie mit dem Normkegelschnitt gemein haben (cf. Satz η):

Tabelle (86) *)

Binäre Form	„H"-Büschel.	„H"-Schaar.
f (1)	$\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H}$ (76)	F' (50)
$jf - iH$ (40)	$3\,\mathrm{H}' + \mathrm{H}$	F (50)
$2jf - 3iH$ (42)	H', (17)	$F' - 3F$
$2jf + iH$ (46)	H (17)	$3F' - F$
$2jf - iH$ (57)	$\mathrm{H}' + \mathrm{H} \equiv H_\sigma^2$ (17)	$F' + F \equiv H_u^2 \equiv \Phi$ (51)
H (9)	$\mathrm{H}' - \mathrm{H} \equiv N_2$ (59)	$F' - F \equiv \mathrm{N}_2$ (51)

Daraus erkennt man unmittelbar, dass man die vier Kegelschnitte

$$\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H},\ 3\,\mathrm{H}' + \mathrm{H},\quad F' - 3F,\ 3F' - F,$$

abgesehen von den ihnen zugehörigen Formen, auch sehr einfach mittelst der andern einfacheren Kegelschnitte ausdrücken (resp. definiren) kann. Dies sprechen die Sätze aus:

λ) „Es sind folgende Kegelschnittpaare zu einander harmonisch

1) im Büschel „H":

$$(87)\ \begin{cases} (\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H}', N_2) & \text{und}\quad (H_\sigma^2, \mathrm{H}) \\ (\mathrm{H} + 3\,\mathrm{H}', N_2) & \text{„}\quad (H_\sigma^2, \mathrm{H}') \text{ und demnach auch:} \\ \hline (\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H}, \mathrm{H} + 3\mathrm{H}') & \text{„}\quad (H_\sigma^2, N_2) \end{cases}$$

2) in der Schaar „H":

$$(88)\ \begin{cases} (3F' - F, H_u^2) & \text{und}\quad (\mathrm{N}_2, F') \\ (3F' - F', H_u^2) & \text{„}\quad (\mathrm{N}_2, F) \text{ und demnach auch:} \\ \hline (3F' - F, 3F - F') & \text{„}\quad (\mathrm{N}_2, H_u^2)\text{“}. \end{cases}$$

*) Die nicht nummerirten Kegelschnitte erhält man leicht nach Formel (79).

101. Die Tabelle (86) zeigt ausserdem unmittelbar, dass die dualistischen Gegenbilder der Kegelschnitte

$$F', \ F, \qquad \mathrm{H}', \ \mathrm{H}$$

keine andern sind, als

$$\mathrm{H}' + 3\,\mathrm{H}, \ \mathrm{H} + 3\,\mathrm{H}', \ F' - 3\,F, \ F - 3\,F'.$$

Dies kann man aber auch leicht direkt, ohne Hilfe der zugehörigen binären Formen, nachweisen.

Denn es war H′ der Kegelschnitt, der durch die Ecken aller der N_2 umschriebenen Dreiseite ging, deren Seiten (auf N_2) diejenige Involution dritter Ordnung bildeten, die zu der der ersten Polaren der Form f (1) conjugirt war.

Der zu H′ dualistische Kegelschnitt wird demnach umhüllt sein von den Seiten der N_2 einbeschriebenen Dreiecke, deren Ecken (auf N_2) dieselbe Involution bilden, wie die Seiten der H′ einbeschriebenen Dreiseite.

Dieser Involution gehörten zwei Elemente λ_1, λ_2 an unter der Bedingung (Gleichung des Kegelschnitts H′)

$$(17) \quad \sigma_0^2\, p_{23} + \sigma_0\sigma_1\, p_{31} + \sigma_1\sigma_2\, p_{20} + \sigma_2^2\, p_{01} + \sigma_1^2\, p_{03} + \sigma_0\,\sigma_2\,(p_{12} - p_{03}) = 0.$$

Wir suchen die Verbindungsgeraden der Punkte λ_1, λ_2, die dieser Relation genügen. Nun waren (cf. pg. 44) die Coordinaten einer Geraden (λ_1, λ_2):

$$(89) \quad \tau u_0 = \sigma_2, \quad \tau u_1 = -\frac{\sigma_1}{2}, \quad \tau u_2 = \sigma_0,$$

so dass der gesuchte Kegelschnitt dargestellt ist durch:

$$(90) \quad u_2^2\, p_{23} - 2\, u_2\, u_1\, p_{31} - 2\, u_0\, u_1\, p_{20} + u_0^2\, p_{01}$$
$$+ u_1^2 (2p_{03} + \frac{2}{3} p_{12} + 2p_{03} - \frac{2}{3} p_{12}) + u_0 u_2 (\frac{p_{12}}{3} + p_{03} + \frac{2p_{12}}{3} - 2p_{03}) = 0$$

oder nach (51) (59):

$$(91) \quad H_u^2 - \frac{2}{3}(3\,p_{03} - p_{12})\,(u_0\,u_2 - u_1^2) \equiv H_u^2 - 2\sqrt{\frac{2i}{3}}\,\mathrm{N}_2 = 0.$$

Nun war nach (50):

$$(50)\ H_u^2 \equiv \frac{F' + F}{2}$$

$$2\sqrt{\frac{2i}{3}}N_2 \equiv F' - F, \text{ mithin}$$

$$(92)\quad \begin{cases} H_u^2 - 2\sqrt{\dfrac{2i}{3}}\ N_2 \equiv \dfrac{3\,F - F}{2} \\ H_u^2 + 2\sqrt{\dfrac{2i}{3}}\ N_2 \equiv \dfrac{3\,F' - F}{2}. \end{cases}$$

Genau in derselben Weise gelangt man vom Kegelschnitt F' (50) zu dem dualistischen $H' + 3\,H$ (76), und durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} (oder $+\sqrt{i}$ mit $-\sqrt{i}$) vom Kegelschnitt F zu $H + 3\,H'$.

Dies möge durch den Satz hervorgehoben werden (mit Hülfe einer leichten Abkürzung):

μ) „Sind H', H die beiden Kegelschnitte, denen die *Dreiseite* zweier conjugirter Involutionen dritter Ordnung (auf einem Kegelschnitte N_2) *einbeschrieben* sind, und F', F die beiden andern, für die diese Dreiseite resp. Poldreiseite sind, so sind dualistisch $F' - 3\,F$, $F - 3\,F'$ die beiden Kegelschnitte, denen die *Dreiecke* derselben Involutionen (auf demselben Kegelschnitt N_2) *umbeschrieben* sind, und $H' + 3\,H$, $H + 3\,H'$ die beiden andern, für die diese Dreiecke resp. Poldreiecke sind."

§. 23.

Fortsetzung und Schluss. Die Sehnen und Axen der cubischen Raumcurve.

102. Wir wollen am Schluss den bisher durchlaufenen Weg der Abbildung von Raum auf Ebene in der Weise kurz umkehren, dass wir zeigen, wie man von der allgemeinen Lehre der Raumgeraden (der H-Kegelschnitte in der Ebene)

wieder zu dem ursprünglichen Fundament der Abbildung (Nr. 23 ff.) zurückkehrt. Bei dieser Gelegenheit wird denn auch die Erklärung, wie sich die Covarianten einer cubischen Form zu dieser auf dem (Norm)Kegelschnitt verhalten, nachgeholt werden.

Die einem H-Kegelschnitt ein- und N_2 umschriebenen Dreiseite repräsentiren die Ebeneninvolution der entsprechenden Geraden H auf N_3. Daran schliesse sich hier beiläufig folgende Betrachtung.

Umgekehrt entsprechen dann den sämmtlichen Kegelschnitten, die einem festen, N_2 umschriebenen Dreiseit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ umschrieben sind, die sämmtlichen Geraden der Ebene, die aus N_3 die Punkte λ_1, λ_2, λ_3 ausschneidet. Lässt man beide Ebenen zusammenfallen, so hat man das bemerkenswerthe Resultat:

α) „Man kann bekanntlich die Punkte einer Ebene bei festem Fundamentaldreieck noch auf zweifach unendlich viele Weisen durch eine quadratische, ein-eindeutige, involutorische Verwandtschaft aufeinander beziehen (indem man z. B. einen ganz beliebigen Punkt der Ebene sich selbst entsprechen lässt).

Denkt man sich durch die Ecken des Fundamentaldreiecks eine sonst beliebige Raumcurve dritter Ordnung gelegt, so entsprechen jenen zweifach unendlich vielen *Transformationen* in der Ebene die zweifach unendlich vielen *Abbildungen* der cubischen Curve auf die Kegelschnitte, die man dem Fundamentaldreieck *einbeschreiben* kann.“

Wir sind schon früher (Nr. 33) rein geometrisch zur Betrachtung dieser quadratischen Transformation geführt, und wiederholen hier nur die dortige Bemerkung, eine nähere Betrachtung derselben möge verschoben bleiben, bis sich in der

Theorie der biquadratischen Involution die Gelegenheit findet, sie an der ihr zukommenden Stelle zu untersuchen.

103. Wir fragen jetzt zunächst nach der Bedingung, unter der ein H-Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt. Die Gleichung von H′ war:

$$(1)\ \sigma_0^2 p_{23} + \sigma_0\sigma_1 p_{31} + \sigma_1\sigma_2 p_{20} + \sigma_2^2 p_{01} + \sigma_1^2 p_{03} + \sigma_0\sigma_2(p_{12} - p_{03}) = 0$$

mithin seine Determinante:

$$(2)\Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & \frac{p_{20}}{2}, & \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, \\ \frac{p_{20}}{2}, & p_{03}, & \frac{p_{31}}{2}, \\ \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, & \frac{p_{31}}{2}, & p_{23} \end{vmatrix} \text{oder} 4\Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & \frac{p_{12}-p_{03}}{3} \\ p_{20}, & 4p_{03}, & p_{31} \\ \frac{p_{12}-p_{03}}{2}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix}$$

Es lässt sich aber $4\,\Delta'$ auch in folgende Form bringen:

$$(3)\ 4\Delta' = \begin{vmatrix} p_{01}, & p_{20}, & p_{03} \\ p_{20}, & p_{03}+p_{12}, & p_{31} \\ p_{03}, & p_{31}, & p_{23} \end{vmatrix} + (p_{12} - 3p_{03})(p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12})$$

wo der zweite Theil verschwindet.

Durch Vertauschung von $3\,p_{03}$ mit p_{12} würde sich daraus die Determinante Δ des Kegelschnitts H ergeben.

Nun war aber (3) die linke Seite der Gleichung (cf. Nr. 37 pg. 66) für die Geraden p_{ik}, die in einer Ebene der Normcurve liegen, also $\Delta = 0$ die Gleichung der Geraden p_{ik}, die die Normcurve treffen. Dies liefert:

β) „Zerfällt ein Kegelschnitt H in ein Linienpaar, so trifft die Gerade H die cubische Normcurve und umgekehrt; zerfällt dagegen der zu H conjugirte Kegelschnitt H′, so liegt die Gerade H in einer Ebene der cubischen Curve (u. u.).“

104. Weiter ist aber leicht zu sehen, dass die eine Gerade eines Linienpaares H nothwendig Tangente von N_3 sein muss,

und umgekehrt eine Tangente von N_2 mit jeder Geraden der Ebene einen H-Kegelschnitt repräsentirt.

In der That, der Kegelschnitt H zerfalle in die Geraden u, v, so dass:

(4) $H \equiv \eta_\sigma^2 \equiv (u_0\,\sigma_0 + u_1\,\sigma_1 + u_2\,\sigma_2)\,(v_0\,\sigma_1 + v_1\,\sigma_1 + v_2\,\sigma_2)$

so geht die Bedingung für die Coefficienten η_{ik} (d. i. die Bedingung, dass der Kegelschnitt η_σ^2 ein H-Kegelschnitt ist (cf. pg. 99))

$$(5)\ \eta_{00}\,\eta_{22} - 4\,\eta_{01}\,\eta_{12} + \eta_{11}\,(2\,\eta_{02} + \eta_{11}) = 0$$

über in

$$(6)\ \ (u_0\,u_2 - u_1^2)\,(v_0\,v_2 - v_1^2) = 0. \quad \text{q. e. d.,}$$

also lautet die Ergänzung von (β):

β_1) „Die Geraden, die die cubische Curve treffen, entsprechen den Linienpaaren H der Ebene, d. i. den Linienpaaren, deren eine Gerade N_2 berührt."

In der That folgt ja Satz (β_1) aus (β), wenn man nur berücksichtigt, dass wenn eine Raumgerade die cubische Curve trifft, von den vier die Gerade treffenden Tangenten der Curve zwei coincidiren.

Man kann aber auch beide Sätze (β) (β_1) geometrisch unmittelbar einsehen, vermöge der Fundamentalbedeutung eines H-Kegelschnitts.

Denn einem Linienpaar kann ein Dreieck nur so einbeschrieben sein, dass entweder eine Seite des Dreiecks mit einer der beiden Geraden des Paares coincidirt, oder zwei Seiten des Dreiecks mit den beiden Geraden. Der zweite Fall ist offenbar nur ein Specialfall des ersten.

Soll nun das Dreieck, wie für einen H-Kegelschnitt erforderlich, ausserdem dem Normkegelschnitt N_2 umschrieben sein, so folgen daraus die beiden gesuchten Sätze.

105. Sei nun die Tangente von N_2 „τ“, und die weitere Gerade, die mit ihr den H-Kegelschnitt bildet, (α, β), so zerfällt die zugehörige H-Involution (dritter Ordnung) in den festen Faktor $(\lambda - \tau)$ und eine gewöhnliche mit den Doppelelementen α, β.

In der That haben ja die Ebenen durch die Raumgerade H mit der Curve N_3 einen festen Punkt (τ) gemein. Der Geraden (α, β) in der Ebene entsprechen die Geraden der Fläche zweiter Ordnung, die durch N_3 und die Gerade H geht, und zwar der Schaar, der H nicht angehört. Die beiden Tangentenebenen durch H an diese Fläche sind auch solche an die Curve, und zwar berühren sie in den Punkten α, β.

Die zur obigen conjugirte Involution (d. i. die Punktinvolution der Geraden H) enthält den Cubus eines linearen Faktors $(\lambda - \tau)$.

Unter den Dreiecken, die dem conjugirten Kegelschnitt H' (entsprechend der conjugirten Geraden H', die in der Ebene τ von N_3 liegt) einbeschrieben sind (und N_2 umbeschrieben) befindet sich demnach speciell die dreifach zählende Tangente τ.

106. Soll nun die Raumgerade H die Curve N_3 noch einmal treffen, d. h. Sehne sein, so müssen α, β coincidiren (in τ'), und der bezügliche H-Kegelschnitt besteht dann aus dem Tangentenpaar τ, τ' (von N_2), und umgekehrt muss jedes Tangentenpaar von N_2 einer Sehne von N_3 entsprechen.

γ) „Dies ist aber die ursprüngliche Abbildung von Raum auf Ebene, nach der einem Punkte der Ebene (vermöge seines an N_2 gehenden Tangentenpaares) eine Sehne der cubischen Curve entsprach u. u.“

Die näheren Beziehungen der in diesem Falle vorhandenen Kegelschnitte H' H, F', F zu den bezüglichen Complexen sind schon früher besprochen *), so dass hier nur einige Ergänzungen Platz finden mögen, die sich im Wesentlichen auf die den Axen der cubischen Curve entsprechenden H-Kegelschnitte beziehen.

Die einer Axe ($\tau\tau'$) zugehörige Ebeneninvolution enthält die beiden Cuben $(\lambda-\tau)^3$ und $(\lambda-\tau')^3$, setzt sich also aus ihnen linear zusammen. Dann gehört bekanntlich jede cubische Form φ, deren Hesse'sche Covariante Δ die Wurzeln τ, τ' besitzt, der Involution an, oder, wenn φ irgend ein Tripel der Involution, so ist sie dargestellt durch

$$(7) \quad \varphi + k\,Q$$

wo Q die cubische Covariante von φ ist:

δ) „Den Axen der cubischen Curve N_3 entsprechen alle die H-Kegelschnitte, deren zugehörige (N_2 umschriebene) Dreiseite eine Involution (7) besitzen" oder auch: „den Axen entsprechen alle *nicht zerfallenden*, N_2 an zwei Stellen berührenden H-Kegelschnitte."

107. Wie construirt man daher von dem gegebenen Punktepaar $(\tau, \tau') = \Delta$ aus die Involution (7) oder, was dasselbe ist, zu einer cubischen Form φ ihre Covarianten Δ und Q?

Dies ergiebt sich sofort mit Hülfe der Fundamentaleigenschaft des (Norm-)Kegelschnitts, dass die Punkte (Strahlen) einer Geraden (Punktes) (α, β) eine Involution mit den Doppelelementen α, β bilden.

Denn benützt man die bekannte Beziehung von Q und Δ zu f, dass jede der Wurzeln von Q mit den drei Wurzeln φ ein harmonisches Quadrupel bildet, und dass die Wurzeln von Δ die Doppelelemente einer Involution sind, der je eine Wurzel von φ mit einer zugehörigen von Q zusammen angehören, so hat man[36] (cf. Sturm, Crelle 86, pg. 121 ff.):

---

*) Insbesondere vergleiche man die Tabelle (86) (der Nr. 100) mit den Resultaten der Nummern 63, 64.

ε) „Stellt man die cubische Form φ durch drei Tangenten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von N_2 dar, so treffen die Verbindungslinien der Ecken dieses Dreiseits mit den Berührungspunkten der resp. Gegenseiten N_2 im Punkttripel Q und diese drei Verbindungsgeraden treffen sich im Punkte Δ.

Ebenso gilt die dualistische Construction."

108. Für Δ war das Resultat schon in der Nr. 34 implicite enthalten. Denn drücken wir das dort erhaltene Ergebniss dualistisch aus, so heisst es: „In einer Ebene $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ liegt eine Axe der Curve N_3, deren Ebenen α, β durch die Covariante Δ der cubischen Form gegeben sind, deren Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind."

Diese Axe ist nun offenbar die (einzige eigentliche) Doppeltangente der Curve vierter Ordnung mit drei Spitzen in $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die den Schnitt unserer Ebene mit der Tangentenfläche der Curve N_3 bildet.

Dieser Doppeltangente und Axe entspricht nun nach der angegebenen Nummer (cf. auch Satz α) der Kegelschnitt der Ebene, der durch die Ecken des Dreiecks $\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3$ (das N_2 umschrieben ist) geht und den Normkegelschnitt zweimal berührt.

q. e. d.

109. Mit den weiteren Ausnahmefällen der H-Kegelschnitte wollen wir uns nicht aufhalten, sie sind ohne Mühe angebbar; es wird vielmehr hohe Zeit, dass wir uns unserem Hauptabschnitt, der Theorie der Involutionen vierter Ordnung, zuwenden, zu der wir alsobald gelangen, sobald wir statt der (H-)Kegelschnitte durch die Ecken eines N_2 umschriebenen Dreiseits diejenigen durch die Ecken eines ganz beliebigen Dreiecks substituiren.

Daraus wird sich dann ergeben, dass die projektivischen Theorien der rationalen ebenen Curve vierter Ordnung, ferner der allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung (sofern man sie als Jacobi'sche Curve eines Kegelschnittnetzes auffasst), sowie der allgemeinen quadratischen involutorischen Transformation in der Ebene, endlich auch die Theorie zweier cubischer Curven im Raume, um unwichtigere hier nicht zu erwähnen, mit der angekündigten Theorie der biquadratischen Involution in gewissem Sinne identisch sind, woraus denn eine grosse Zahl, theils schon bekannter, meistens aber neuer Eigenschaften der in Rede stehenden Gebilde fliessen wird; namentlich in dem Sinne der (erweiterten) ternären und dann auch der quaternären Apolaritätstheorie.

Ehe wir aber dieses Gebiet in Angriff nehmen, möge noch die Theorie einer biquadratischen Form, die uns bisher beschäftigte, in der Weise abgerundet werden, dass auch die Darstellung auf der biquadratischen Normcurve, soweit es nöthig ist, um den Zusammenhang mit dem Bisherigen deutlich hervortreten zu lassen, berücksichtigt werden soll.

§. 24.

Darstellung der binären biquadratischen Form auf der biquadratischen Normcurve.

110. Aus dem Hauptsatze des §. 13 geht einmal hervor, dass die Form

$$(1)\quad x_0\lambda^4 - x_1\lambda^3 + x_2\lambda^2 - x_3\lambda + x_4 = 0$$

einen Punkt im Raume von vier Dimensionen, mit den Coordinaten x_i darstellt, bezogen auf die zugehörige Normcurve:

$$(2)\quad \lambda^4 : 4\lambda^3 : 6\lambda^2 : 4\lambda^1 : 1 = x_4 : x_3 : x_2 : x_1 : x_0$$

sodann aber auch, dass jedes Punktquadrupel (s_i) der Curve, dessen Verbindungsraum *) $(u_x = 0)$ durch den Punkt x_i (1) geht, der Bedingung:

---

*) d. h. der Raum, der die vier Punkte des Quadrupels enthält.

$$(3)\ x_0\, s_4 - \frac{x_1}{4}\, s_3 + \frac{x_2}{6}\, s_2 - \frac{x_3}{4}\, s_4 + x_4\, s_0 = 0$$

genügt (wie auch umgekehrt, dass durch (3) sämmtliche Punktquadrupel der Curve von der angegebenen Art dargestellt sind).

In der That zeigen ja die damaligen Entwicklungen (cf. besonders die Anmerkung pg. 49), dass die Coordinaten u_i eines Raumes $u_x = 0$, der aus der Curve ein Punktquadrupel s_i ausschneidet, mittelst der Gleichungen bestimmt sind:

$$(4)\quad u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4 = s_4 : -\frac{s_3}{4} : \frac{s_2}{6} : -\frac{s_1}{4} : s_0$$

so dass die Gleichung (3) mit der Gleichung des Punktes x_i „$u_x = 0$" (wo aber jetzt die x_i fest und die u_i variabel zu denken sind) identisch wird.

111. Der bequemeren Anschauungs- und Ausdrucksweise halber möge statt der Betrachtung der Form (1) auf der Curve (2) die derselben Form auf der vom Punkte (1) in einen beliebigen Raum $v_x = 0$ „projicirten" Curve (2) zu Grunde gelegt werden.

Diese[37] „Projektion" geht einfach (ganz analog einer solchen im gewöhnlichen Raume von einem Punkte auf eine Ebene) so vor sich, dass alle durch den Punkt (1) gehenden Räume $u_x = 0$ (die als specielle Schnittgebilde alle Strahlen vom Punkte (1) an die Curve (2) d. h. ihren „Projektionskegel" enthalten) mit einem festen, beliebig (doch so, dass er zum Punkte und zur Curve keine specielle Lage einnimmt) gewählten Raume $v_x = 0$ geschnitten werden, wodurch die Räume $u_x = 0$ in die Ebenen des Raumes $v_x = 0$ und die Strahlen des „Projektionskegels" in die Punkte einer rationalen Raumcurve vierter Ordnung übergehen, für die also irgend vier Punkte dann (und nur dann) auf einer Ebene liegen, wenn sie (d. h. ihre Argumente) der Bedingung (3) genügen.

Da jedes Quadrupel (3) zur Form (1) apolar ist, so folgt hieraus sofort, dass auf ein ganz beliebiges Coordinatensystem im Raum $v_x = 0$ bezogen, unsere Curve dargestellt ist durch das System:

$$(5)\quad \sigma y_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\lambda^4 + \ldots a_{i4} \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

wo die φ_i der einen Bedingung zu genügen haben, irgend vier (linear unabhängige) zu (1) apolare Formen vierten Grades zu sein d. h. umgekehrt, wo die Form (1) die zur Gruppe der φ_i conjugirte Form ist.

(Dann sind nach Früherem die Coefficienten x_i in (1) die vierreihigen Determinanten des Coefficientensystems der φ_i die sich also bei einer Collineation des Raumes $v_x = 0$ nur um einen Faktor ändern.)

„Umgekehrt stellen die binär-invarianten Eigenschaften der Form (1) (die zusammenfallen mit den combinant-invarianten Eigenschaften der φ_i) diejenigen quaternär-invarianten Eigenschaften unserer Raumcurve (5) dar, die identisch sind mit denjenigen quinär-invarianten Eigenschaften der Normcurve (2), die sich bei ihrer Projection vom Punkte (1) aus (in einen beliebigen Raum $v_x = 0$) nicht ändern."

112. Wir schreiben wieder, um die Gleichförmigkeit mit den vorigen Paragraphen dieses Abschnitts zu wahren, statt (1), (3):

$$(6)\quad a_\lambda \equiv a_0\lambda^0 + 4a_1\lambda^1 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 = 0$$

$$(7)\quad a_s \equiv a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 = 0$$

Aus der Erzeugung der Form (6) aus (7) erkennt man zunächst sofort[38]:

α) „Die Form $a_\lambda = 0$ stellt (in diesem Paragraphen) die vier Punkte der Curve (5) dar, in denen eine Ebene vier consecutive Punkte mit der

Curve gemein hat (oder kürzer ihre vier „Undulationspunkte") und umgekehrt hätte man den Titel dieses Paragraphen durch diese Definition der Form a_λ ersetzen können."

Da a_λ nur dann zu sich selbst apolar ist, wenn ihre Invariante i verschwindet, so haben wir[39]:

„Die vier Undulationspunkte der Curve (5) liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn die Invariante i ihrer Form a_λ verschwindet."

Im allgemeinen ist durch drei Punkte der Curve $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ der vierte (λ_4) eindeutig bestimmt, der mit ihnen auf einer Ebene liegt. Liegen aber die drei ersten in einer Geraden (die also dann eine dreifache Sehne der Curve ist), so wird der vierte (λ_4) unbestimmt d. h. die Argumententripel (σ_i) der dreifachen Sehnen sind gegeben durch:

$$(8)\quad \begin{cases} A_1 \equiv a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3 = 0 \\ A_2 \equiv a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

das heisst (cf. Nr. 50):

β) „Die zur Involution der ersten Polaren von a_λ conjugirte Involution (8) stellt die dreifachen Sehnen der Curve dar."

Wir geben diesem Satze noch eine andere Form, indem wir ausdrücken, wann eine Sehne (λ_1, λ_2) der Curve diese noch einmal trifft.

Dann haben wir aus den Gleichungen (8) oder anders geschrieben:

$$(9)\quad \begin{cases} A_1 \equiv (a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2) + \lambda_3\,(a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2) \\ A_2 \equiv (a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2) + \lambda_3\,(a_2\,\tau_0 + a_3\,\tau_1 + a_4\,\tau_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \equiv A_{11} + \lambda_3\,A_{12} = 0 \\ \equiv A_{21} + \lambda_3\,A_{22} = 0 \end{cases}$$

λ_3 zu eliminiren und erhalten den Satz (cf. Nr. 51):

β_2) „Die Sehne $\lambda_1, \lambda_2\,(\tau_i)$ trifft die Curve noch einmal unter der Bedingung:

$$(10)\ H_\tau = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

113. Excurs. Diese dreifachen Sehnen bilden bekanntlich (cf. Nr. 13) die eine Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung, der einzigen, die durch die Curve geht. Projicirt man nun, ganz wie oben, unsere Curve von irgend einem Raumpunkte aus auf eine Ebene, so erhält man in dieser eine rationale Curve vierter Ordnung, für die vier Punkte in einer Geraden liegen, wenn sie zwei Bedingungen:

$$(11)\quad a_s = 0,\quad b_s = 0$$

genügen. Soll aber der Projektionspunkt auf einer dreifachen Sehne liegen, so erhält die ebene Curve einen dreifachen Punkt.

Andrerseits wird aber für diesen ein vierter Punkt (λ_4) in den Gleichungen (11) unbestimmt d. h. es finden die Relationen statt:

$$(12)\ \begin{cases} a_0\,\sigma_0 + a_1\,\sigma_1 + a_2\,\sigma_2 + a_3\,\sigma_3 = 0 \\ a_1\,\sigma_0 + a_2\,\sigma_1 + a_3\,\sigma_2 + a_4\,\sigma_3 = 0 \\ b_0\,\sigma_0 + b_1\,\sigma_1 + b_2\,\sigma_2 + b_3\,\sigma_3 = 0 \\ b_1\,\sigma_0 + b_2\,\sigma_1 + b_3\,\sigma_2 + b_4\,\sigma_3 = 0 \end{cases}$$

und dies geschieht unter der Bedingung:

$$(13)\ B \equiv \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist also die Bedingung des dreifachen Punktes der ebenen (der dreifachen Sehne der Raum-)Curve. In der That lassen sich (cf. Salmon, Höhere Algebra art. 220), wenn $B = 0$, die beiden Formen

$$(14) \quad a_\lambda, \quad b_\lambda$$

als lineare Combinationen derselben drei vierten Potenzen darstellen, woraus unter Bildung von a_s, b_s die Existenz des dreifachen Punktes sofort ersichtlich ist. (Dann sind auch a_λ, b_λ als Polaren einer Form fünften Grades darstellbar, worauf später noch zurückgekommen wird.)

Schreibt man B mit Hülfe des Grassmann'schen Satzes (§. 1) in den Coefficienten der zu a_λ, b_λ conjugirten Gruppe, so kommt man thatsächlich auf die Form der Nr. 13 zurück, die nur in der dort angegebenen Weise zu ändern ist, um zur Gleichung der Fläche zweiter Ordnung in Punktcoordinaten zu gelangen.

114. Kehren wir zurück zu Gleichung (10), so wird die Sehne λ_1, λ_2, die noch einmal trifft, zur Tangente, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ wird, wodurch H_τ in die Hesse'sche Form H von a_λ übergeht.

Setzt man andrerseits in (9) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ und eliminirt dann λ, so gelangt man zu den Restpunkten $\lambda_3 = \rho$ dieser Tangenten. Diese Elimination lieferte (cf. Nr. 57) die Covariante:

$$(9) \quad P = 3\,j\,f - 2\,i\,H = 0$$

und man hat somit:

γ) „Unter den dreifachen Sehnen unserer Curve (5) giebt es vier Tangenten λ (mit den Restpunkten ρ): dann sind die λ die Wurzeln der Hesse'schen Form H von a_λ, und die ρ die Wurzeln der Covariante (9) P."

115. Soll die Invariante j von a_λ verschwinden (cf. Nr. 55) so giebt es ein Werthepaar δ_1, δ_2 (τ_i) das die Gleichungen:

$$(10) \begin{cases} A_{11} \equiv a_0\,\tau_0 + a_1\,\tau_1 + a_2\,\tau_2 = 0 \\ A_{12} \equiv a_1\,\tau_0 + a_2\,\tau_1 + a_3\,\tau_2 = 0 \\ A_{22} \equiv a_2\,\tau_0 + a_3\,\tau_1 + a_4\,\tau_2 = 0 \end{cases}$$

befriedigt, also mit jedem Werthepaar λ_1, λ_2 zusammen ein auf einer Ebene liegendes Punktquadrupel der Curve bildet und somit einen eigentlichen Doppelpunkt der Curve darstellt. Dann würde H das Quadrat einer quadratischen Form (deren Wurzeln eben δ_1, δ_2 sind). In der That werden ja die dreifachen Sehnen dann die Kanten des Kegels zweiter Ordnung, der die Curve vom Doppelpunkte aus projicirt und es ist evident, dass die Tangenten (cf. γ), die die Curve noch einmal treffen, keine anderen sein können, als die Tangenten des Doppelpunktes selbst. Somit gilt der Satz[40]:

δ_1) „Wenn $j = 0$ (und nur dann), besitzt die Curve (5) einen eigentlichen Doppelpunkt δ_1, δ_2. Dann wird sowohl H als P gleich Δ^2, wo δ_1, δ_2 die Wurzeln der quadratischen Form Δ sind, und zwar stellt genauer H die Tangenten des Doppelpunktes, P die in ihnen liegenden beiden Punkte dar."

Man kann die Argumente 0, ∞ als die des Doppelpunktes wählen, was vermöge der linearen Transformation

$$(11)\quad \lambda' = k\,\frac{\lambda - \delta_1}{\lambda - \delta_2}$$

geschieht und zugleich k so bestimmen, dass a_λ die einfache Form annimmt:

$$(12)\quad a_\lambda \equiv \lambda^4 - 1.$$

Dann wird

$$(13)\quad a_s \equiv \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 - 1 = 0.$$

Im allgemeinen dagegen wird

$$(14)\quad a_\lambda \equiv (\lambda - \delta_1)^4 d_1 + (\lambda - \delta_2)^4 d_2$$

und

$$(15)\quad a_s \equiv \psi(\delta_1)\, d_1 + \psi(\delta_2)\, d_2 = 0$$

wo

$$(16)\quad \psi(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

116. Rücken die Argumente δ_1, δ_2 zusammen, so wird der Doppelpunkt zur Spitze. Wir wollen die Invariantenbedingung dafür in verschiedener Form aufstellen.

Sei vorläufig noch δ_1, δ_2, so kann man zunächst aus je zwei der drei Gleichungen (10) die aus δ_1, δ_2 gebildeten Funktionen τ_i berechnen.

Führen wir drei unbestimmte Faktoren ρ_2, ρ_1, ρ_0 ein, so erhalten wir zuvörderst:

$$(17)\quad \begin{cases} \rho_2\,\tau_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} & -\rho_2\,\tau_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} & \rho_2\,\tau_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \\ \rho_1\,\tau_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & -\rho_1\,\tau_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} & \rho_1\,\tau_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \\ \rho_0\,\tau_0 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & -\rho_0\,\tau_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} & \rho_0\,\tau_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \end{cases}$$

mithin zwischen den ρ die Relationen:

$$(18)\ \rho_1 = -\frac{\rho_0\,\tau_1}{\tau_0},\ \rho_2 = \frac{\rho_0\,\tau_2}{\tau_0}$$

also umgekehrt aus (17) (18):

$$(19)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \rho_0\,\tau_0, & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -\rho_0\,\tau_1, & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \rho_0\,\tau_2 \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \dfrac{\rho_2\,\tau_2^2}{\tau_0}, & \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\dfrac{\rho_0\,\tau_1\,\tau_2}{\tau_0}, & \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \dfrac{\rho_0\,\tau_1^2}{\tau_0}. \end{cases}$$

Die Bedingung für das Coincidiren der Werthe δ_1, δ_2

$$(20)\ 4\,\tau_0\,\tau_2 - \tau_1^2 = 0$$

lautet daher nach (19)

$$(21)\quad 4\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 0 = -\frac{i}{2}.$$

Andrerseits werden dann aus den Gleichungen (19), wenn δ das Argument der Spitze bezeichnet, die folgenden:

$$(22) \begin{cases} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = \rho_0, & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -2\rho_0\delta, & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \rho_0\delta_2 \\ \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \rho_0\delta^4, & \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -2\rho_0\delta^3, & \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix} = 4\rho_0\delta^2 \end{cases}$$

woraus sofort folgt, dass die Hesse'sche Form von a_λ übergeht in

$$(23) \quad H \equiv \rho_0 (\lambda - \delta)^4.$$

Dies liefert zunächst:

δ_2) „Ist $i = 0$ und $j = 0$ (und nur dann), so besitzt die Curve (5) eine Spitze, die vierfach gerechnet die Hesse'sche Form von a_λ bildet, so dass ihr Argument aus irgend zwei der Gleichungen (22) berechnet werden kann.“

Wenn aber i und j verschwinden, so hat bekanntlich a_λ einen dreifachen Faktor

$$(24) \quad a_\lambda \equiv (\lambda - \delta)^3 (\lambda - \varepsilon)$$

(Denn da dann auch die Discriminante von a_λ verschwindet, so ist es erlaubt, eine canonische Form für a_λ einzuführen, in der $a_0 = a_1 = 0$. Dann aber muss wegen $i = 0$ auch a_2 verschwinden.)

Nimmt man δ einmal $= 0$, das anderemal $= \infty$, so gelangt man zu zwei Normalformen von a_λ, denen folgende beiden Normalformen der zugehörigen Form a_s entsprechen:

$$(25) \quad \begin{array}{ll} \text{I} & k_4 s_4 + k_3 s_3 = 0 \\ \text{II} & k_0 s_0 + k_1 s_1 = 0 \end{array}$$

Aus I geht wieder die allgemeine Form für die Spitze δ hervor:

$$(26) \quad K_4 (\lambda_1 - \delta)(\lambda_2 - \delta)(\lambda_3 - \delta)(\lambda_4 - \delta)$$
$$+ K_3 [(\lambda_1 - \delta)(\lambda_2 - \delta)(\lambda_3 - \delta) + (\lambda_1 - \delta)(\lambda_2 - \delta)(\lambda_4 - \delta)$$
$$+ (\lambda_1 - \delta)(\lambda_3 - \delta)(\lambda_4 - \delta) + (\lambda_2 - \delta)(\lambda_3 - \delta)(\lambda_4 - \delta)] = 0$$

oder einfacher

$$(26') \quad K_4 + K_3 \left[\frac{1}{\lambda_1 - \delta} + \frac{1}{\lambda_2 - \delta} + \frac{1}{\lambda_3 - \delta} + \frac{1}{\lambda_4 - \delta}\right] = 0$$

Diese Gleichungen werden noch mehr vereinfacht, wenn man der einen noch übrig bleibenden Undulationsebene das Argument ∞ resp. 0 beilegt. Dann gehen dieselben über in:

$$(25)' \begin{cases} \text{I} & s_3 = 0 \\ \text{II} & s_1 = 0 \end{cases}$$

$$(26'') \quad \frac{1}{\lambda_1 - \delta} + \frac{1}{\lambda_2 - \delta} + \frac{1}{\lambda_3 - \delta} + \frac{1}{\lambda_4 - \delta} = 0$$

Dies drücken wir in einem besonderen Satze so aus:

δ_3) „Rücken drei der vier Undulationsebenen der Curve (5) zusammen, so wird ihr gemeinsamer Punkt zur Spitze (und umg.); hat diese das Argument δ, so geht die Bedingung, dass vier Curvenpunkte in einer Ebene liegen, in die Form über:

$$(27) \quad \sum_1^4 {}_i \frac{1}{\lambda_1 - \delta} = \text{const.}$$

wo die rechts stehende Constante verschwindet, wenn man (was immer erlaubt ist) der vierten Undulationsebene das Argument ∞ beilegt.

Legt man ausserdem zugleich (was gleichfalls erlaubt ist) der Spitze das Argument 0 bei, so geht (27) über in

$$(28) \quad s_3 = 0$$

oder bei Vertauschung der Argumente 0, ∞ in

$$(28') \quad s_1 = 0.\text{“}$$

117. Nun gelingt es aber auch ohne Mühe, diesen Satz unmittelbar und continuirlich aus der Gleichung (15) $a_s = 0$, die für den Fall eines Doppelpunktes δ_1, δ_2 galt, abzuleiten, indem man δ_1 sich δ_2 immer mehr nähern lässt.

Schreiben wir sie etwas anders:

$$(15)\quad \psi(\delta_1) - D\,\psi(\delta_2) = 0$$

oder auch, wenn

$$(16)\quad \delta_2 - \delta_1 = \Delta \text{ gesetzt wird}$$

in folgender Form:

$$(15)\quad \frac{\psi(\delta_1) - D\,\psi(\delta_1 + \Delta)}{\Delta} = 0,$$

so bemerken wir, dass sich D zugleich mit kleiner werdendem Δ der Eins nähert und in diese übergeht, falls Δ verschwindet, d. h. die linke Seite wird dann der Differentialquotient von $\psi(\delta_1)$ nach δ_1:

$$(29)\quad \frac{d\,\psi(\delta_1)}{d\,\delta_1} = 0 \quad \text{oder kürzer } \psi'(\delta_1) = 0,$$

oder auch nach Division mit $\psi(\delta_1)$

$$(30)\quad \frac{\psi'(\delta_1)}{\psi(\delta_1)} \equiv \frac{d\,l\,g\,\psi(\delta_1)}{d\,\delta_1} = 0$$

was sofort zu Gleichung (26″) führt, von der man dann wieder zu (27) gelangt.

118. Excurs. Clebsch[41] schlägt ein ähnliches Verfahren ein für die rationalen ebenen Curven, nur dass er seine Betrachtungen an die Abel'schen Integrale der rationalen Curve anlehnt, was wie man aus Obigem erkennt, durchaus unnöthig ist.

Es mag bei dieser Gelegenheit der Zusammenhang beider Betrachtungen kurz erörtert werden.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns gleichfalls auf die ebenen rationalen Curven (obgleich dieselbe Betrachtung für j e d e rationale Curve gilt). Sei eine solche gegeben durch:

$$(31)\quad \rho x_i = \varphi_i(\lambda) = a_{i0}\,\lambda^n + \ldots a_{in}$$

so kann man stets die lineare Transformation ausgeführt denken, durch die irgend einer der Doppelpunkte die Argumente 0, ∞ erhält. Dann müssen aber nothwendig die Beziehungen herrschen

$$(32)\ \tau a_{io} = a_{in}$$

was zur Folge hat, dass eine der Schnittpunktgleichungen, wenn sie nach §. 2 abgeleitet werden, in die Form übergeht:

$$(33)\ \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \ldots \lambda_n = \tau.$$

Daraus folgt, wenn man sich die angewandte lineare Transformation wieder rückwärts ausgeführt denkt, dass sich das ganze System der Schnittpunktgleichungen ersetzen lässt durch das andere:

$$(34)\ \frac{(\lambda_1-\alpha_i)(\lambda_2-\alpha_i)\ldots(\lambda_n-\alpha_i)\,{}^{*)}}{(\lambda_1-\beta_i)(\lambda_2-\beta_i)\ldots(\lambda_n-\beta_i)} = \tau_i \text{ oder } \psi(\alpha_i)-\tau_i\,\psi(\beta_i)=0$$

wo (34) aus so viel Gleichungen besteht, als Doppelpunkte α_i, β_i, vorhanden sind. (Die Constanten τ_i sind dann leicht nach Clebsch mittelst der Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die durch alle Doppelpunkte, immer einen ausgenommen, hindurchgehen, in ihrer Abhängigkeit von den α_i β_i darzustellen.)

Lässt man nun den Doppelpunkt zur Spitze werden, d. h. rücken α_i, β_i zusammen in r, so geht nach unserm obigen Verfahren (34) über in die andere

$$(35)\ \sum_1^n{}_k \frac{1}{\lambda_k - r} = \text{const.} = 0$$

oder speciell (36) $s_1 = 0$ resp. $s_{n-1} = 0$.

In der That ist ja die Verbindungslinie der Punkte mit den homogenen Coordinaten a_{i0}, a_{i1}, die Tangente des Punktes ∞: diese wird aber unbestimmt (und nur dann) wenn der Punkt ∞ eine Spitze wird, andererseits aber, wenn die beiden angegebenen Punkte identisch werden. Dann aber erhält man nach §. 2 als eine der Gleichungen (34):

---

*) Andrerseits ist diese Form a priori angebbar. Denn da jede der Schnittpunktgleichungen linear und symmetrisch ist und ferner, wenn α_i β_i ein Doppelpunkt, eine der Gleichungen für $\lambda_r = \alpha_i$, $\lambda_s = \beta_i$ $(r, s, = 1, 2, \ldots n)$ identisch erfüllt werden muss, so kann sie nur die Form (34) besitzen.

$$s_{n-1} = \text{const.}$$

Das Entsprechende gilt für das Argument 0.

Wir gelangen nun zur Clebsch'schen Methode, wenn wir:

$$(37)\ lg\,(\lambda - \alpha_i) = \mu^{(i)},\quad lg\,(\lambda - \beta_i) = \nu^{(i)},\quad lg\,\tau_i = \Delta_i$$

setzen. Dann erhalten wir im allgemeinen durch Logarithmirung von (34)

$$(38)\ \frac{\mu_1^{(i)}}{\nu_1^{(i)}} + \frac{\mu_2^{(i)}}{\nu_2^{(i)}} + \ldots \frac{\mu_n^{(i)}}{\nu_n^{(i)}} = \Delta_i + 2\,\varkappa\pi i \text{ oder} \equiv \Delta_i \pmod{2\,\pi i}$$

oder wenn nach

$$(39)\ \ lg\,\frac{\lambda - \alpha_i}{\lambda - \beta_i} = \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{(i)} = \zeta^{(i)}$$

gesetzt wird,

$$(38')\ \ \Sigma\,\zeta^{(i)} \equiv \Delta_i.$$

Dies ist die erste (Integral-) Form von Clebsch (für den Doppelpunkt $\alpha_i\,\beta_i$). Schreiben wir jetzt (38) etwas anders:

$$(40)\ \ \sum_k \mu_k^{(i)} \equiv \Delta_i \sum_k \nu_k^{(i)}$$

und lassen nunmehr α_i und β_i sich nähern, so nähert sich Δ_i der Grenze 0 und wir haben für $\alpha_i = \beta_i$

$$(41)\ \sum_k \mu_k^{(i)} \equiv 0.$$

Dies ist die zweite (Integral-) Form von Clebsch (für die Spitze α_i). Durch Differentiation gelangt man wieder zu den Formen (34) (35) zurück.

In der That denkt man sich, wie häufig geschieht, die rationalen Curven continuirlich aus solchen vom Geschlechte 1 (den elliptischen Curven) entstanden, so werden durch diesen Process die auf die Doppelpunkte der elliptischen Curve bezüglichen elliptischen Integrale dritter Gattung zu Logarithmen d. h. man gelangt von den Gleichungen des Abel'schen Theorems, nach denen die Summe von n Werthen eines solchen Integrales, bezogen auf die n Schnittpunkte der Curve mit einer Geraden, einer Constanten (abgesehen von Perioden) gleich ist, continuirlich zu Gleichung (38') und dadurch zu (34). Man kann also sagen:

„Durch die Substitution (37) „$\lambda - \alpha_i = e^{\mu_i u}$ gehen die Gleichungen des Schnittpunkttheorems der rationalen ebenen Curven über in die des Abelschen Theorems für dieselben.“

Für Raum- (und höhere) rationale Curven treten Doppelpunkte im Allgemeinen nicht mehr auf, so dass dann auch die Form (38) resp. (34) nicht mehr möglich ist, dafür werden wir aber, wie sich später zeigen wird, in vollständiger Analogie mit der Ebene, die vierfachen Sehnen (und entsprechend in höheren Räumen die sechsfachen Ebenen etc. der Curven) einführen. Ist eine solche vierfache Sehne einer Raumcurve durch die Argumente

$$\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_4$$

bestimmt, so lauten stets zwei der Schnittpunktgleichungen der Curve:

$$(42) \begin{cases} d_1\, \psi(\delta_1) + d_2\, \psi(\delta_2) + d_3\, \psi(\delta_3) + d_4\, \psi(\delta_4) = 0 \\ d'_1\, \psi(\delta_1) + d'_2\, \psi(\delta_2) + d'_3\, \psi(\delta_3) + d'_4\, \psi(\delta_4) = 0 \end{cases}$$

u. s. f.

119. Von der Covariante Θ wurde pg. 117 gezeigt, dass ihre drei Wurzelpaare ε_i, η_i ($i = 1, 2, 3$) die Eigenschaft haben, dass sowohl $\varepsilon_i^3\, \eta_i$, als $\varepsilon_i\, \eta_i^3$ ein zu a_λ apolares Quadrupel bilden d. h. die Gleichung $a_s = 0$ befriedigen (und dass umgekehrt dies die drei einzigen Werthepaare *) der Art sind). Dies giebt den Satz:

ε) „Die Covariante Θ stellt die drei (eigentlichen) Sehnen der Curve dar, die zugleich Axen (Linien zweier Osculationsebenen) derselben sind.“

*) Mit getrennten Elementen, denn uneigentliche Werthepaare der Art (mit zusammenfallenden Elementen) sind ja durch $\lambda_i\, \lambda_i$ gebildet, wo λ_i eine Wurzel von a_λ ist.

120. Endlich fällt ein Berührungspunkt der Tangenten (cf. γ), die noch einmal treffen, mit seinem Restpunkt zusammen, wenn die Tangente zur dreipunktigen wird und umgekehrt. Dann hat man in den Gleichungen

$$(9)\quad A_1 = 0,\ A_2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ zu setzen und λ zu eliminiren.

Da aber A_1, A_2 durch Gleichsetzung der drei Argumente λ_1, λ_2, λ_3 zu den ersten Differentialquotienten von a_λ werden und deren Resultante gleich der Discriminante D von a_λ ist, so hat man:

ζ) „Eine in drei consecutiven Punkten treffende Tangente der Curve ist (und nur dann) unter der Bedingung $D = 0$ vorhanden, dann ist sie die Axe von zwei consecutiv gewordenen Undulationsebenen der Curve: das Argument dieser Tangente ist zugleich eine gemeinsame Wurzel von H und P."

121. Mit Hülfe dieser Sätze ist es ohne Mühe möglich, alle weiteren invariantiven Bildungen (resp. Bedingungen) auf der Curve (5) zu studiren, was uns hier indess von der Ausführung unseres Hauptplanes, die Apolarität (vor Allem die ternäre und quaternäre) in der Theorie einer (und mehrerer) biquadratischen binären Form nachzuweisen, zu weit abführen würde.

Nachdem die Apolaritätstheorie einer solchen Form im Wesentlichen durchgeführt ist, erübrigt noch die schon bedeutend schwierigere zweier solcher Formen d. h. die Theorie der Involutionen vierter Ordnung, die ja nach dem Hauptsatze des ersten Capitels mit der Theorie der Gruppen von drei solchen Formen identisch ist.

Diese Theorie der biquadratischen Involution führt dann wieder unmittelbar zur Theorie einer und mehrerer Formen sechsten Grades, da beide auf's innigste verwachsen sind.

Im Uebrigen sehe man den Schluss des vorigen Paragraphen nach.