CAPITOLO VI.

Della Curvatura.

§ 1. Curve piane.

1. Diremo che, in un piano fisso, un cerchio variabile ha per limite un cerchio fisso, se il centro ed il raggio del cerchio variabile hanno rispettivamente per limiti il centro ed il raggio del cerchio fisso.

Dicesi *cerchio osculatore* ad una curva in un suo punto P il limite del cerchio passante per tre punti della curva, i quali tendano al punto P.

TEOREMA. — Se nel piano il punto P, la cui posizione è funzione della variabile t, ha per derivate prima e seconda i segmenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, funzioni continue di t, non nulli e non coincidenti in direzione, il centro C e il raggio R del cerchio osculatore alla curva nel punto P sono definiti dalle equazioni:

$$\overline{CP}^2 - R^2 = 0$$

$$CP \times \mathbf{u} = 0$$

$$CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0.$$

Infatti, dati a t tre valori t_1 t_2 t_3 e detti P_1 P_2 P_3 i punti corrispondenti della curva, siano C il centro e R il raggio del cerchio passante per essi. Pongasi

$$F(t) = CP^2 - R^2.$$

Sarà $F(t)$ una funzione di t positiva, o nulla, o negativa, secondochè il punto P è esterno, o sopra, o interno al cerchio di centro C e di raggio R. Derivando si ha

$$\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}, \qquad \frac{1}{2} F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2.$$

Ora, poichè i punti P_1 P_2 P_3 stanno sul cerchio, sarà

$$F(t_1) = 0, \quad F(t_2) = 0, \quad F(t_3) = 0.$$

Quindi, pel teorema di Rolle, esisteranno due valori t' e t'' medii fra t_1 t_2 t_3 per cui $F'(t') = 0$ e $F'(t'') = 0$, ed un valore t''' compreso fra i precedenti, per cui

$$F''(t''') = 0.$$

Si passi al limite, facendo tendere t_1 t_2 t_3 verso uno stesso valore t. Le equazioni $F(t_1) = F(t_2) = F(t_3) = F'(t') = F'(t'') = F''(t''') = 0$, cui soddisfanno il centro C e il raggio R del cerchio considerato, diventano

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0,$$

cui debbono soddisfare i limiti di C ed R, cioè il centro ed il raggio del cerchio osculatore. Queste sono le tre equazioni che si volevano dimostrare.

COROLLARIO I. — Le equazioni precedenti sono facili ad interpretarsi. La prima dice che $R = gr\, PC$. La seconda $CP \times \mathbf{u} = 0$, dice che il centro C del cerchio osculatore è sulla normale alla curva.

La terza $CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0$, che si può scrivere $PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2$, dice anzitutto che il segmento PC fa un angolo acuto con $\mathbf{v}$, ossia che PC è rivolto verso la concavità della curva. Inoltre, detta $\mathbf{v}_n$ la proiezione di $\mathbf{v}$ sulla normale, l'equazione precedente diventa

$$gr\, PC\, gr\, \mathbf{v}_n = (gr\, \mathbf{u})^2$$

da cui

$$gr\, PC = R = \frac{gr\mathbf{u}^2}{gr\mathbf{v}_n}$$

ossia il raggio del cerchio osculatore è terza proporzionale dopo la derivata prima e la proiezione della derivata seconda sulla normale.

Corollario II. — Il centro del cerchio osculatore ad una curva piana in un suo punto P è il limite del punto d'incontro delle normali alla curva in due suoi punti, i quali tendano a P. Infatti, pongasi

$$f(t) = CP \times \mathbf{u}$$

sarà

$$f'(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2.$$

Se il punto C è il punto d'incontro delle normali alla curva in due suoi punti, corrispondenti ai valori t_1 e t_2 di t, sarà

$$f(t_1) = 0, \quad f(t_2) = 0;$$

quindi per un valore t medio fra t_1 e t_2 sarà $f'(t') = 0$.

Passando al limite le equazioni $f(t_1) = 0$, $f(t_2) = 0$, $f'(t') = 0$ diventano

$$f(t) = 0, \quad f'(t) = 0$$

ossia

$$CP \times \mathbf{u} = 0, \quad CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0$$

che sono appunto le equazioni che determinano il centro del cerchio osculatore.

2. Dalle cose dette potremo facilmente dedurre il modo di comportarsi della curva piana descritta dal punto P rispetto ad ogni cerchio passante per un punto P_0 di quella curva. Siano O ed R il centro ed il raggio di quel cerchio, e facciasi

$$F(t) = \overline{OP}^2 - R^2.$$

$F(t)$ è una funzione di t, perchè P dipende da t, la quale sarà positiva o nulla o negativa secondochè P è esterno o sopra o interno al cerchio considerato. Differenziando si ha

$$\frac{1}{2} F'(t) = OP \times \mathbf{u}$$

$$\frac{1}{2} F''(t) = OP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$$

$$\frac{1}{2} F'''(t) = OP \times \mathbf{u} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Fatto $t = t_0$, il punto P viene in P_0, che è un punto del cerchio; quindi sarà $F(t_0) = 0$. Ora, se il cèntro O del cerchio non sta sulla normale alla curva, sarà $F'(t) \lesssim 0$. Quindi la funzione $F(t)$, che per $t = t_0$ è nulla, e che ha derivata non nulla, cambia di segno quando t passa da valori minori a valori maggiori di t_0; perciò il punto P passa dall'interno all'esterno del cerchio, o viceversa, ossia la curva taglia il cerchio.

Se invece il centro O sta sulla normale alla curva, sarà per $t = t_0$, $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$.

Se C è il centro del cerchio osculatore, sarà $CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2 = 0$; quindi, sottraendo da $F''(t)$, si ricava

$$\frac{1}{2} F''(t) = OC \times \mathbf{v}.$$

Ora, se C non coincide con O, e se il segmento OC è diretto secondo la concavità della curva, sara $F''(t) > 0$. Quindi la funzione $F(t)$, che per $t = t_0$ si annulla insieme alla derivata prima, e la cui derivata seconda è positiva, conserva il segno costante positivo nelle vicinanze di $t = t_0$, ed il punto P, nelle vicinanze di P_0, è sempre esterno al cerchio. Adunque la curva tocca esternamente tutti i cerchi, i cui centri O stanno sulla normale alla curva, e per i quali il segmento OC è rivolto verso la concavità della curva.

Se invece il segmento OC è rivolto verso la convessità della curva, sarà per $t = t_0$, $F(t)=0$, $F'(t)=0$, $F''(t)<0$; quindi $F(t)$ è negativa, nelle vicinanze di t_0, e la curva è, nelle vicinanze di P_0, interna al cerchio.

Se infine il punto O coincide con C, ossia se il cerchio considerato è il cerchio osculatore, sarà $F(t) = 0$, $F'(t) = 0$, $F''(t) = 0$, e occorrerà considerare la derivata terza

$$\frac{1}{2} F'''(t) = CP \times \mathbf{u} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Se questa non è nulla, $F(t)$ cambia di segno nelle vicinanze di $t = t_0$, e la curva taglia il cerchio osculatore.

3. Possiamo arrivare alla considerazione dello stesso cerchio partendo da concetti alquanto differenti.

Dicesi *curvatura assoluta* d'un arco di curva piana AB l'angolo che fanno fra loro le tangenti (o le normali) all'arco nei suoi estremi A e B. Per ben definire quest'angolo converrà immaginare un punto qualunque P dell'arco AB, e la tangente in questo punto alla curva; conducasi da un punto fisso O la parallela a questa tangente; mentre il punto P varia e descrive tutto l'arco AB, questa parallela ruoterà attorno ad O, e descriverà un angolo che sarà la curvatura dell'arco AB. La curvatura d'un arco può superare π, ed anche 2π.

Se si scompone un arco in parti, la curvatura assoluta dell'arco è la somma delle curvature delle sue parti; quindi la curvatura d'un arco è funzione distributiva dell'arco stesso.

Il rapporto della curvatura assoluta d'un arco AB alla sua lunghezza dicesi *curvatura media* di quell'arco.

Il limite della curvatura media d'un arco $P_1 P_2$ di curva, ove i punti P_1 e P_2 tendano ad uno stesso punto P dicesi *curvatura della curva* in quel punto.

La curvatura d'una curva in un suo punto vale il reciproco del raggio del cerchio osculatore in quel punto. Invero, detti P_1 e P_2 due punti della curva, C il punto d'incontro delle normali in questi punti, Δs la lunghezza dell'arco PP′, e $\Delta\tau$ la curvatura di quest'arco, che è eguale all'angolo P_1CP_2 che fanno le due normali negli estremi dell'arco, si ricava dal triangolo P_1CP_2 che

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\operatorname{sen} CP_2 P_1}{CP_1}.$$

Ora la curvatura media dell'arco P_1P_2 si può mettere sotto la forma

$$\frac{\Delta\tau}{P_1P_2} = \frac{\operatorname{sen} \Delta\tau}{P_1P_2} \times \frac{\Delta\tau}{\operatorname{sen} \Delta\tau} \times \frac{P_1P_2}{\Delta s}.$$

Si passi al limite, facendo tendere P_1 e P_2 verso lo stesso punto P. L'angolo CP_2P_1 ha per limite $\frac{\pi}{2}$; il punto C ha per limite il centro del cerchio osculatore, ed il segmento CP_1 il raggio R dello stesso cerchio P. Quindi $\lim \frac{\operatorname{sen} \Delta\tau}{P_1P_1} = \frac{1}{R}$. Nella seconda formula si ha poi

$$\lim \frac{\Delta\tau}{\operatorname{sen} \Delta\tau} = 1, \quad \lim \frac{P_1P_2}{\Delta s} = 1$$

e perciò

$$\lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{1}{R}$$

e siccome il limite di $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ è appunto la curvatura della curva in P, si deduce la proposizione a dimostrarsi.

Indicheremo la curvatura della curva in P, cioè il limite di $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ con $\frac{d\tau}{ds}$; quindi la formula precedente diventa

$$\frac{d\tau}{ds}=\frac{1}{R}$$

da cui si ricava anche $d\tau=\frac{ds}{R}$; $\tau=\int\frac{ds}{R}$.

Il cerchio osculatore ad una curva dicesi anche *cerchio di curvatura,* il suo centro ed il suo raggio diconsi anche centro e raggio di curvatura.

4. I centri di curvatura corrispondenti ai varii punti d'una curva piana formano in generale una nuova curva che dicesi *evoluta* della curva data; questa poi dicesi *evolvente* della sua evoluta.

Come si è visto, il centro C ed il raggio R del cerchio osculatore sono definiti dalle equazioni

$$\overline{CP}^2-R^2=0,\quad CP\times\mathbf{u}=0,\quad CP\times\mathbf{v}+\mathbf{u}^2=0.$$

Facciasi variare *t;* varieranno P, **u**, **v**, C ed R; dette $\frac{dC}{dt}$ e $\frac{dR}{dt}$ le derivate del punto C e del numero R, differenziando le equazioni precedenti si trova

$$CP\times\left(\mathbf{u}-\frac{dC}{dt}\right)-R\,\frac{dR}{dt}=0,\quad CP\times\mathbf{v}+\left(\mathbf{u}-\frac{dC}{dt}\right)\times\mathbf{u}=0,$$

$$CP\times\mathbf{w}+3\mathbf{u}\times\mathbf{v}-\frac{dC}{dt}\times\mathbf{v}=0.$$

Se dalla prima e seconda di queste equazioni si sottraggono la seconda e terza delle precedenti, si ottiene

$$CP\times\frac{dC}{dt}+R\,\frac{dR}{dt}=0,\ \frac{dC}{dt}\times\mathbf{u}=0.$$

La seconda di queste equazioni dice che $\frac{dC}{dt}$ è normale ad $\mathbf{u}$, ossia, siccome le direzioni di $\mathbf{u}$ e di $\frac{dC}{dt}$ sono le direzioni delle tangenti alla curva data e all'evoluta, si deduce che la tangente all'evoluta nel suo punto C è la normale alla curva data nel punto corrispondente P.

La prima equazione si può scrivere $PC \times \frac{dC}{dt} = R \frac{dR}{dt}$; ora i segmenti PC e $\frac{dC}{dt}$ hanno la stessa direzione, ma possono avere lo stesso verso, o verso opposto; quindi $PC \times \frac{dC}{dt} = \pm gr\, PC . gr \frac{dC}{dt}$ dovendosi prendere il segno $+$ nel primo caso, ed il $-$ nel secondo. Si sostituisca nella formula precedente, osservando che $gr\, PC = R$, e si divida per R. Si avrà

$$gr \frac{dC}{dt} = \pm \frac{dR}{dt}.$$

Si moltiplichi per dt e si integri entro due valori t_0 e t_1. Supposto che per tutti i valori considerati di t si debba sempre prendere o il segno superiore o il segno inferiore, il che avverrà se il raggio di curvatura R va sempre crescendo, ovvero sempre decrescendo, si dedurrà

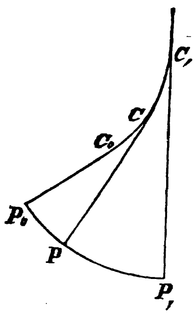
$$\int_{t_0}^{t_1} gr \frac{dC}{dt}\, dt = \pm \int_{t_0}^{t_1} \frac{dR}{dt}\, dt.$$

Ma il primo integrale rappresenta la lunghezza dell'arco descritto dal punto C, e che indicheremo con σ. Detti R_0 e R_1 i valori di R corrispondenti ai valori t_0 e t_1 di t, si avrà $\int_{t_0}^{t_1} \frac{dR}{dt} dt = R_1 - R_0$, quindi

$$\sigma = \pm (R_1 - R_0)$$

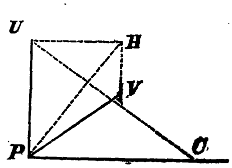
ossia:

Se, mentre il punto P si muove su d'un arco P_0P_1 di curva piana, il centro di curvatura C descrive l'arco C_0C_1 di evoluta, in guisa che il raggio di curvatura CP vada sempre crescendo, ovvero sempre decrescendo, allora la lunghezza dell'arco C_0C_1 è eguale al valor assoluto della differenza dei due raggi di curvatura C_0P_0 e C_1P_1 corrispondenti agli estremi dell'arco considerato.



Di qui si scorge la ragione del nome *evoluta* dato alla curva C_0C_1. Supposto invero, come nella figura, che il raggio di curvatura vada sempre crescendo da P_0 a P_1, preso un punto qualunque P della curva, si ha $\widehat{CC_1}=C_1P_1-CP$, ossia $PC+CC_1=P_1C_1$. Quindi se si immagina un filo inestensibile di cui un estremo fisso sia C_1 e la cui lunghezza sia C_1P_1, e lo si dispone in modo che una sua parte C_1C si avvolga sulla evoluta e l'altra CP sia sulla tangente alla evoluta in C, il punto P sarà un punto dell'arco P_0P_1; e, variando il punto C su CC_1, P descriverà l'arco di curva data P_0P_1.

5. Dalle proposizioni dimostrate si deduce che, se del punto P che descrive la curva si conoscono le derivate prima e seconda, la costruzione del centro di curvatura non presenta alcuna difficoltà. Una costruzione assai semplice è la seguente:



Siano PU e PV le derivate prima e seconda del punto P. Si conduca da V la parallela a PU, e da U la UH ⊥ PU, che incontri questa parallela in H. Si unisca P con H, e da U si abbassi la perpendicolare alla PH; questa incontrerà la normale alla curva in un punto C che sarà il centro di curvatura cercato.

Infatti dai due triangoli simili PUH, CPU si ricava

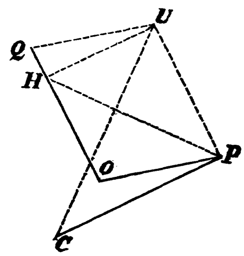
$$UH : PU = PU : PC$$

il che dice appunto che PC è la terza proporzionale dopo PV, derivata prima del punto P, e UH, che è la proiezione della derivata seconda sulla normale.

Come esempio, applicheremo la costruzione precedente all'ellisse. È noto che se un punto P descrive una circonferenza di cerchio di centro O, e si prende per variabile l'angolo α che il raggio OP fa con un raggio fisso OX, la derivata prima del punto P è il raggio OQ che fa con OP un angolo retto, e la derivata seconda è un raggio che fa con OQ un angolo retto, e che perciò è in direzione opposta ad OP.

Si proietti ortogonalmente questa figura su d'un piano. Dette ancora O, P, Q le proiezioni dei punti del cerchio indicati colle stesse lettere, il punto P descriverà un'ellisse, di cui OP e OQ sono due semidiametri coniugati, e le derivate del punto P sono OQ e — OP. Quindi la seguente costruzione:

Si costruisca il parallelogrammo OPUQ sopra OP e OQ; da U si abbassi la UH $\perp$ OQ; si segni la PH, e da U la perpendicolare a PH, che incontrerà la normale alla curva (cioè la perpendicolare in P a PU) nel centro di curvatura C.



La costruzione precedente si semplifica se P è un vertice A dell'ellisse. Si costruisca allora il rettangolo OAUB sui due semiassi; si conduca la AB, e da U la $\perp$ ad AB; questa incontrerà l'asse OA nel centro di curvatura corrispondente ad A, e, per la stessa ragione, incontrerà OB nel centro di curvatura corrispondente a B.

6. Come si è visto, le equazioni che determinano il centro ed il raggio del cerchio osculatore, ove si ponga

$$(1) \qquad F(t) = \overline{CP}^2 - R^2$$

sono

$$(2) \qquad F(t) = 0 \quad F'(t) = 0 \quad F''(t) = 0,$$

ovvero, sviluppando, colla notazione dei segmenti

$$(3) \qquad \overline{CP}^2 - R^2 = 0 \quad PC \times \mathbf{u} = 0 \quad PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2.$$

Detta $\mathbf{v}_n$ la proiezione di $\mathbf{v}$ sulla normale alla curva, si è trovato

$$(4) \qquad R = \frac{(gr\,\mathbf{u})^2}{gr\,\mathbf{v}_n}.$$

Si moltiplichino il numeratore e il denominatore di questa frazione per $gr\,\mathbf{u}$. Osservando che $gr\,\mathbf{u} \,.\, gr\,\mathbf{v}_n$ misura l'area del parallelogrammo $\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}$, la cui base è appunto $\mathbf{u}$, e la cui altezza è $\mathbf{v}_n$, la formula precedente diventa

$$(5) \qquad R = \frac{(gr\,\mathbf{u})^3}{gr\,\mathbf{u}.\mathbf{v}}.$$

Se x ed y sono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, dette α e β quelle del centro di curvatura C, si avrà

$$F(t) = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - R^2$$

e le equazioni (2), $F(t)=0$, $F'(t)=0$, $F''(t)=0$ diventano

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2 \\ (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0 \\ (x-\alpha)d^2x + (y-\beta)d^2y + dx^2 + dy^2 = 0 \end{array} \right.$$

le quali equazioni sono identiche alle (3) sviluppate. Dalle ultime due di queste tre equazioni si possono ricavare le coordinate α e β del centro di curvatura, e si ha

$$(7) \qquad \alpha = x - dy\frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}, \quad \beta = y + dx\frac{dx^2 + dy^2}{dxd^2y - dyd^2x}$$

e sostituendo nella prima si ricava, dopo brevi calcoli

$$(8) \qquad R = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$$

ove il segno $\pm$ si prenderà in guisa che R risulti positivo. Del resto questa espressione di R si ottiene pure dalla (5), osservando che

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

e che il numero che misura l'area $\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}$, tenendo conto del segno, vale appunto

$$\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Esempio. — Applicheremo le formule precedenti all'ellisse data mediante le equazioni

$$x = a \operatorname{sen} t, \quad y = b \cos t$$

ove a e b sono i semiassi dell'ellisse, e t l'angolo eccentrico. Si avrà

$$F(t) = (a \operatorname{sen} t - \alpha)^2 + (b \cos t - \beta)^2 - R^2.$$

Quindi, derivando due volte rispetto a t, si avranno le tre equazioni

$$(a \operatorname{sen} t - \alpha)^2 + (b \cos t - \beta)^2 = R^2$$
$$\alpha\, a \cos t - \beta\, b \operatorname{sen} t = (a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t$$
$$\alpha\, a \operatorname{sen} t + \beta\, b \cos t = (a^2 - b^2)(\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t);$$

dalle due ultime si possono ricavare le coordinate α e β del centro di curvatura

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a} \operatorname{sen}^3 t, \quad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \cos^3 t;$$

e dalla prima si ottiene

$$R = \frac{(a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Se fra le espressioni di α e β in funzione di t si elimina la vabile t, si avrà l'equazione dell'evoluta dell'ellisse. Quest'eliminazione si eseguisce ricavando dalla prima $\operatorname{sen} t$, dalla seconda $\cos t$, e sostituendo nella relazione $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. Se invece di α e β, coordinate del centro di curvatura, si legge x ed y, l'equazione della evoluta diventa

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

7. Se l'equazione della curva, in coordinate cartesiane ortogonali, è della forma

$$y = f(x)$$

posto $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, le equazioni che determinano le coordinate α e β del centro di curvatura ed il raggio R sono

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$
$$x - \alpha + (y - \beta)\, y' = 0$$
$$1 + y'^2 + (y - \beta)\, y'' = 0$$

da cui si ricava

$$\alpha = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{\pm y''}.$$

Esempio. — L'equazione d'una conica riferita ad un suo asse ed alla tangente nel vertice, è

$$y^2 = 2px + qx^2.$$

Derivando si ha

$$yy' = p + qx, \quad yy'' + y'^2 = q;$$

sostituendo nella seconda ad y' il valore dato dalla prima, si ha dopo alcune riduzioni $y'' = -\frac{p^2}{y^3}$; quindi il raggio di curvatura diventa

$$R = \frac{y^3(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Osservando che $y\sqrt{1+y'^2}$ vale la lunghezza della normale PN (pag. 72), si deduce

$$R = \frac{\overline{PN}^3}{p^2}$$

ossia nelle coniche il raggio di curvatura è proporzionale al cubo della normale.

8. Se la curva è data in coordinate polari mediante un'equazione della forma $r = f(\alpha)$, detto $\mathbf{a}$ un segmento eguale all'unità di misura ed avente la direzione del raggio vettore OP, si ha (pag. 80)

$$OP \equiv r\mathbf{a}, \quad \mathbf{u} \equiv r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}', \quad \mathbf{v} \equiv r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}''$$

ove, com'è noto, $\mathbf{a}'$ è un segmento uguale in lunghezza ad $\mathbf{a}$, e che fa con questo un angolo retto; $\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}$. Quindi si deduce

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad \mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} = (r^2 + 2r'^2 - rr'')\,\mathbf{a}\,.\,\mathbf{a}'$$

e poichè $gr\,\mathbf{a}.\mathbf{a}' = 1$, sarà $gr\,\mathbf{u}.\mathbf{v} = \pm(r^2 + 2r'^2 - rr'')$. Sostituendo quindi nell'espressione del raggio di curvatura, si ottiene

$$R = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

il segno essendo preso in guisa che R risulti positivo.

Si consideri, come esempio, la spirale logaritmica di equazione $r = e^{a\alpha}$. Si avrà $r' = ae^{a\alpha}$, $r'' = a^2 e^{a\alpha}$; sostituendo si ricava

$$R = r\sqrt{1+a^2}.$$

D'altra parte la lunghezza N della normale polare, che in generale vale $\sqrt{r^2 + r'^2}$, nel nostro caso diventa $N = r\sqrt{1+a^2}$; quindi $R = N$, ossia, nella spirale logaritmica, il raggio di curvatura è eguale alla lunghezza della normale polare. Il centro di curvatura sarà perciò l'estremità della sottonormale polare.

9. Sono collegati colla curvatura d'una curva piana alcuni limiti che ora determineremo.

1° Siano P e P′ due punti d'una curva, e sia M la proiezione di P′ sulla tangente alla curva in P. Si descriva il cerchio tangente alla curva in P e passante per P′. Detto Q il secondo punto d'intersezione di MP′ con esso, sarà

$$MP^2 = MP' \times MQ, \quad \text{ossia} \quad \frac{MP^2}{MP'} = MQ.$$

Si faccia ora tendere P′ verso P. Il cerchio ha per limite il cerchio osculatore alla curva in P; il segmento MQ ha per limite il diametro 2R di questo cerchio; quindi si ricava

$$\lim \frac{\overline{PM}^2}{MP'} = 2R.$$

2° L'espressione del raggio di curvatura si può pure ottenere in quest'altro modo. Dati alla variabile t i valori t_1 t_2 t_3, siano P_1 P_2 P_3 le posizioni corrispondenti del punto variabile; dette a, b, c le lunghezze dei lati P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, e Δ l'area del triangolo $P_1P_2P_3$, il raggio R del cerchio passante pei tre punti P_1 P_2 P_3 è dato da

$$R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Ora si ha (V. pag. 66)

$$\lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \equiv \lim \frac{P_1P_3}{t_3 - t_1} \equiv \lim \frac{P_2P_3}{t_3 - t_2} \equiv \mathbf{u};$$

$$\lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)} \equiv \frac{1}{4}\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{v}.$$

Quindi dividendo il numeratore e il denominatore nella espressione di R per $(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_2 - t_1)$, e badando a ciò che diventano queste equipollenze ove si consideri il valore assoluto di ambo i membri, si ritrova

$$\lim R = \frac{(gr\, \mathbf{u})^3}{gr(\mathbf{u} \,.\, \mathbf{v})}.$$

3° Nel triangolo formato dai tre punti $P_1\, P_2\, P_3$ della curva si possono considerare il baricentro S, il centro C del cerchio circoscritto, il punto H d'incontro delle altezze, e il centro Γ del cerchio (dei nove punti) passante pei punti medii dei lati del triangolo. È noto che questi punti stanno su d'una retta, e si ha in valor assoluto ed in segno

$$SH = -2SC, \quad S\Gamma = -\frac{1}{2}\, SC.$$

Facciansi tendere $P_1\, P_2\, P_3$ verso uno stesso punto P. Il baricentro S avrà per limite P; il punto C avrà per limite il centro C del cerchio osculatore; quindi, detti ancora H e Γ i limiti di H e Γ, si avrà

$$PH = -2PC, \quad P\Gamma = -\frac{1}{2}\, PC.$$

Detti $P_1\, P_2\, P_3$ gli angoli dello stesso triangolo, si ha in valor assoluto

$$\frac{\text{sen}\, P_1}{P_2P_3} = \frac{\text{sen}\, P_2}{P_3P_1} = \frac{\text{sen}\, P_3}{P_1P_2} = \frac{1}{2R}.$$

Passando al limite si deduce che i seni degli angoli del triangolo hanno tutti per limite zero; e siccome la somma di questi angoli vale π, due angoli del triangolo avranno per limite zero, ed il terzo avrà per limite π.

Detti $r\ r'\ r''\ r'''$ i raggi dei cerchi inscritto ed exinscritti nel triangolo, si ha

$$r = 4R \operatorname{sen}\frac{1}{2}P_1 \operatorname{sen}\frac{1}{2}P_2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}P_3;$$

$$r' = 4R \operatorname{sen}\frac{1}{2}P_1 \cos\frac{1}{2}P_2 \cos\frac{1}{2}P_3, \quad \text{ecc.};$$

Al limite il raggio del cerchio inscritto e due dei raggi dei cerchi exinscritti hanno per limite zero, mentre uno di questi ha per limite il quadruplo del raggio di curvatura.

10. Se d'un arco di curva piana AB si sa che in ogni suo punto il raggio di curvatura R soddisfa alle condizioni

$$R_1 < R < R_2$$

allora, data una delle tre quantità: la lunghezza s dell'arco di curva, la lunghezza c della sua corda, e l'area u limitata fra l'arco e la corda, si possono determinare dei limiti che comprendano le altre due.

Supporremo, per semplicità, l'arco AB convesso, cioè tale che ogni retta l'incontri al più in due punti; e che esso sia tutto interno al cerchio di diametro AB. Si immagini un punto P che percorra l'arco AB, ed il cerchio passante pei tre punti A, B, P, il cui raggio r varierà con P. In virtù delle ipotesi fatte, il segmento limitato dall'arco circolare APB e dalla sua corda AB è sempre compreso nel semicerchio di diametro AB; e l'area di questo segmento e la lunghezza dell'arco circolare APB sono tanto più grandi quanto più piccolo è il raggio r del cerchio, e viceversa. Variando P su AB, il raggio r assumerà il suo minimo valore r_1 per una posizione P_1 di P, e assumerà il suo massimo valore r_2 per una posizione P_2 di P.

Allora il segmento limitato dell'arco di cerchio AP_1B e dalla sua corda, il quale è il massimo fra tutti i segmenti APB, conterrà nel suo interno l'arco curvilineo dato. Quindi la lunghezza s dell'arco dato è minore della lunghezza s_1 dell'arco circolare AP_1B, perchè archi contermini, convessi dalla stessa parte, l'uno avviluppato e l'altro avviluppante:

$$s < s_1.$$

Inoltre l'area u compresa fra l'arco dato e la sua corda è minore del segmento u_1 limitato dall'arco di cerchio AP_1B e dalla sua corda:

$$u < u_1.$$

Ma l'arco dato AP_1B e l'arco circolare AP_1B sono tangenti in P_1, e il primo è interno al secondo; quindi il raggio di curvatura della curva data in P_1 è minore del raggio r_1 del cerchio; e siccome R_1 è minore del raggio di curvatura in P_1, si deduce $r_1 > R_1$. Ora l'arco s_1 del cerchio AP_1B è minore dell'arco di cerchio passante per gli stessi punti e descritto con raggio minore R_1:

$$s_1 < 2R_1 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1};$$

e l'area u_1 del segmento di raggio r_1 è minore dell'area del segmento di raggio R_1

$$u_1 < R_1^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1} - \frac{c}{2} \sqrt{R_1^2 - \frac{c^2}{4}};$$

quindi si conchiude

$$s < 2R_1 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1}, \qquad u < R_1^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_1} - \frac{c}{2} \sqrt{R_1^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

In modo analogo, considerando il cerchio AP_2B, si deduce

$$s > 2R_2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_2}, \quad u > R_2^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R_2} - \frac{c}{2} \sqrt{R_2^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Se il raggio di curvatura nei varii punti di AB assume tutti i valori compresi fra R_1 e R_2, allora esisterà un valore R di questo raggio per cui si avrà

$$s = 2R \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R}$$

che si può scrivere

$$c = 2R \operatorname{sen} \frac{s}{2R};$$

ed esisterà un altro valore di R per cui si avrà

$$u = R^2 \operatorname{arcsen} \frac{c}{2R} - \frac{c}{2} \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}.$$

Sviluppando in serie le funzioni che compaiono nel secondo membro si ha

$$s = c + \frac{c^3}{24 R^2} + \frac{3c^5}{64 R^4} + \dots$$

$$c = s - \frac{s^3}{24R^2} + \frac{s^5}{1920 R^4} + \dots$$

$$u = \frac{c^3}{12 R} + \frac{c^5}{160 R^3} + \dots$$

§ 2. Curve a doppia curvatura.

11. Nello spazio un cerchio è determinato conoscendone il piano, il centro e il raggio. Diremo che un cerchio variabile ha per limite un cerchio fisso se il piano, il centro e il raggio del primo hanno rispettivamente per limiti il piano, il centro e il raggio del secondo.

Dicesi *cerchio osculatore* ad una curva (gobba) in un suo punto P il limite del cerchio passante per tre punti della curva i quali tendano al punto P.

Se la posizione del punto P che descrive la curva è funzione della variabile numerica t avente per derivate prima e seconda i segmenti **u** e **v** funzioni continue di t, che pel valore considerato non sono nulle nè coincidono, allora il centro del cerchio osculatore giace nel piano osculatore, sulla normale principale alla curva, da quella parte verso cui è rivolta la derivata seconda, e il raggio del cerchio osculatore è terza proporzionale dopo la derivata prima e la componente normale della derivata seconda.

Infatti, dati a t tre valori $t_1\, t_2\, t_3$, siano $P_1\, P_2\, P_3$ le posizioni corrispondenti del punto P; si immagini il cerchio passante per questi tre punti; il suo piano sarà il piano $P_1P_2P_3$; siano C ed R il centro ed il raggio. Si consideri la funzione $F(t) = \overline{CP}^2 - R^2$, ove si suppone che P sia un punto della curva. Sarà $F(t_1) = 0$, $F(t_2) = 0$, $F(t_3) = 0$. Quindi $\frac{1}{2} F'(t) = CP \times \mathbf{u}$ si annulla per due valori di t medii fra i precedenti, ossia C giace in due piani normali all'arco considerato di curva. Inoltre $\frac{1}{2} F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$ si annulla per un valore di t. Si passi al limite; il piano del cerchio ha per limite il piano osculatore alla curva in P. Quindi il punto C che giace nel piano $P_1P_2P_3$ e soddisfa alle equazioni $F'(t) = 0$ e $F''(t) = 0$ per valori di t medii fra i considerati, avrà per limite un punto, che diremo ancora C, il quale giace nel piano osculatore e che soddisfa pel valore considerato di t, alle condizioni $F'(t) = 0$ e $F''(t) = 0$, vale a dire

$$PC \times \mathbf{u} = 0, \quad PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2.$$

La prima di queste equazioni dice che C giace nel piano normale alla curva; e siccome esso si trova nel piano osculatore, si conchiude che esso sta sulla normale principale alla curva. La seconda equazione dice che l'angolo di PC con $\mathbf{v}$ è acuto (poichè $PC \times \mathbf{v}$ è positivo), e che il prodotto della lunghezza di PC per la proiezione di $\mathbf{v}$ su esso vale il quadrato della derivata prima.

12. La costruzione del cerchio osculatore ad una curva qualunque, ove si conoscano le derivate prima e seconda del punto che la descrive è identica a quella per le curve piane.

La condizione affinchè il centro C giaccia nel piano osculatore si può mettere sotto la forma.

$$PC.\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0 \qquad (1)$$

unendo a questa le due precedentemente trovate

$$(2) \qquad \mathrm{PC} \times \mathbf{u} = 0$$

$$(3) \qquad \mathrm{PC} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2$$

si hanno tre equazioni da cui risulta determinato il punto C.

Se si riferiscono tutti i punti ad assi cartesiani ortogonali, dette $\alpha\,\beta\,\gamma$ le coordinate del punto C, le equazioni precedenti diventano

$$\begin{vmatrix} \alpha - x & \beta - y & \gamma - z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\alpha - x)dx + (\beta - y)dy + (\gamma - z)\,dz = 0$$

$$(\alpha - x)d^2x + (\beta - y)d^2y + (\gamma - z)d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

da cui si possono ricavare le coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma$ del centro del cerchio osculatore, e quindi il suo raggio R. Del resto il raggio del cerchio osculatore si può mettere sotto la forma

$$\mathrm{R} = \frac{(gr\,\mathbf{u})^2}{gr\,\mathbf{v}_n} = \frac{(gr\,\mathbf{u})^3}{gr(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v})}.$$

Ora, indicando con accenti le derivate di x, y, z, si ha

$$gr\,\mathbf{u} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{j}\,.\,\mathbf{k} & \mathbf{k}\,.\,\mathbf{i} & \mathbf{i}\,.\,\mathbf{j} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

quindi

$$gr(\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v}) = \sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2},$$

e

$$\mathrm{R} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}.$$

13. I piani normali alla curva in due suoi punti P_1 e P_2 si incontrano secondo una retta; al limite di questa retta, ove i punti P_1 e P_2 tendano ad una stessa posizione P, si dà il nome di *asse del piano osculatore*. Sia M un punto qualunque dell'intersezione dei piani normali in P_1 e P_2; posto $f(t) = \mathrm{MP} \times \mathbf{u}$, ove P è un punto della curva, e $\mathbf{u}$ la sua derivata, sarà $f(t_1) = 0$ e $f(t_2) = 0$; quindi $f'(t) = \mathrm{MP} \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2$ si annullerà per un valore di t medio fra i precedenti. Passando al limite, la retta in questione, pei cui punti si annullavano $f(t)$ e $f'(t)$, per valori convenienti di t, avrà per limite la retta luogo dei punti M che soddisfano pel valore considerato di t alle equazioni $f(t) = 0$ e $f'(t) = 0$, ossia

$$\mathrm{PM} \times \mathbf{u} = 0 \quad \mathrm{PM} \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2.$$

La prima è l'equazione del piano normale alla curva; la seconda quella d'un piano normale al segmento $\mathbf{v}$, e quindi normale al piano osculatore; onde la retta loro intersezione è normale al piano osculatore; inoltre quelle equazioni sono soddisfatte dal centro del cerhio osculatore; quindi si conchiude che l'asse del piano osculatore è la normale a questo piano nel centro del cerchio osculatore.

14. Intenderemo per limite d'una sfera variabile una sfera fissa il cui centro ed il cui raggio siano i limiti del centro e del raggio della sfera variabile.

Dicesi *sfera osculatrice* ad una curva in un suo punto P il limite della sfera passante per quattro punti della curva, i quali tendano a P.

La posizione del punto P, che descrive la curva, sia funzione della variabile numerica t, avente le successive derivate $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Dati a t quattro valori $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$, siano $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ le posizioni corrispondenti del punto; siano ancora C il centro ed r il raggio della sfera passante per essi. Pongasi $\mathrm{F}(t) = \overline{\mathrm{CP}}^2 - r^2$, ove P è il punto che descrive la curva. Poichè i punti $P_1 ... P_4$ stanno sulla sfera, sarà

$$\mathrm{F}(t_1) = 0, \quad \mathrm{F}(t_2) = 0, \quad \mathrm{F}(t_3) = 0, \quad \mathrm{F}(t_4) = 0$$

e così si hanno quattro equazioni che determinano la sfera. Derivando $F(t)$ si ricava

$$\frac{1}{2}F'(t) = CP \times \mathbf{u}, \quad \frac{1}{2}F''(t) = CP \times \mathbf{v} + \mathbf{u}^2,$$

$$\frac{1}{2}F'''(t) = CP \times \mathbf{w} + 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}.$$

Ora, poichè $F(t)$ si annulla per quattro valori di t, si deduce che $F'(t)$ si annullerà per tre, $F''(t)$ per due, e $F'''(t)$ per un valore di t compreso fra i valori considerati. Passando al limite, tutti questi valori di t tendono a quello corrispondente al punto P; e i limiti del centro C e del raggio r, che indicheremo ancora con C ed r soddisferanno alle equazioni

$$F(t) = 0, \quad F'(t) = 0, \quad F''(t) = 0, \quad F'''(t) = 0$$

ossia

$$\overline{CP}^2 = r^2, \quad PC \times \mathbf{u} = 0, \quad PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2, \quad PC \times \mathbf{w} = 3\mathbf{u} \times \mathbf{v}$$

le quali determinano appunto il centro ed il raggio della sfera osculatrice.

Le due equazioni $PC \times \mathbf{u} = 0$ e $PC \times \mathbf{v} = \mathbf{u}^2$ dicono che il centro della sfera osculatrice giace sull'asse del piano osculatore; quindi si scorge che la sfera osculatrice taglia il piano osculatore secondo il cerchio osculatore.

Le equazioni precedenti si possono trasformare in equazioni fra le coordinate dei punti P e C, e così si possono ricavare le espressioni delle coordinate del centro e del raggio della sfera osculatrice; ma arriveremo più tardi allo stesso risultato per altra via.

Si osservi ancora che il centro della sfera osculatrice si può considerare come il punto d'incontro di tre piani normali alla curva in tre punti che tendano a P. Invero, se C è il punto d'incontro di questi piani, conservando le notazioni precedenti, la funzione $\frac{1}{2}F'(t) = CP \times \mathbf{u}$ sarà nulla per tre valori di t; quindi si annulleranno pure, per valori intermedii di t, $F''(t)$ e $F'''(t)$. Al limite, il punto d'incontro dei tre piani tenderà verso un punto C per cui saranno $F'(t)=0$, $F''(t)=0$, $F'''(t)=0$, il quale punto è il centro della sfera osculatrice.

15. Per le curve non piane si hanno a considerare la *curvatura*, che dipende dalle successive deviazioni della tangente, e la *torsione, o seconda curvatura,* che dipende dalle successive deviazioni del piano osculatore.

Sia AB un arco di curva qualunque. Si immagini un punto P che lo percorre da A in B. Da un punto fisso O si conduca un segmento $O\pi$, avente la direzione della tangente alla curva in P, ed eguale all'unità di misura. Variando P da A in B, il punto π descriverà una curva sferica $\alpha\beta$, la cui lunghezza chiamasi *curvatura assoluta* dell'arco AB.

Prendansi sull'arco AB alcuni punti successivi P_0, P_1, P_2,... P_n dei quali il primo coincida con A e l'ultimo con B; siano t_0, t_1,... t_n le tangenti alla curva in questi punti, e π_0, π_1,... π_n i punti corrispondenti della curva sferica. La curvatura di AB è la lunghezza dell'arco di curva sferica π_0, π_1..., π_n; questo alla sua volta è il limite superiore della somma degli archi di cerchio massimo $\pi_0\pi_1$, $\pi_1\,\pi_2$,... $\pi_{n-1}\ \pi_n$ che uniscono a due a due i punti della curva. Ora gli archi $\pi_0\pi_1$, $\pi_1\pi_2$,... misurano gli angoli al centro $\pi_0 O\pi_1$, $\pi_1\, O\pi_2$,... i quali sono eguali agli angoli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... formati dalle tangenti nei successivi punti della curva. Quindi la curvatura dell'arco AB è il limite superiore della somma degli angoli $t_0 t_1$, $t_1 t_2$,... $t_{n-1}\ t_n$ formati dalle successive tangenti all'arco, ove variino in tutti i modi possibili il numero delle tangenti e i loro punti di contatto.

È facile riconoscere che la definizione ora data di curvatura di una curva qualunque coincide con quella precedentemente data, ove la curva sia piana.

La curvatura assoluta d'un arco è una grandezza coesistente coll'arco. Il rapporto $\frac{\sigma}{s}$ fra la curvatura assoluta σ dell'arco alla sua lunghezza s dicesi *curvatura media* dell'arco. Il limite della curvatura media d'un arco di curva, ove gli estremi tendono ad uno stesso punto P, dicesi *curvatura della curva nel punto* P; la indicheremo, secondo il solito, con $\frac{d\sigma}{ds}$. Al reciproco della curvatura d'una curva in un suo punto si dà il nome di *raggio di curvatura* della curva in quel punto. Indicandolo con R, si avrà $\frac{1}{R}=\frac{d\sigma}{ds}$.

16. Si immagini ora in ogni punto P dell'arco curvilineo AB il piano osculatore, e la sua normale, cioè la binormale alla curva. Si conduca dal punto fisso O un segmento Oμ parallelo alla binormale ed eguale all' unità di misura. Variando P da A in B, il punto μ descriverà una curva sferica, la cui lunghezza τ dicesi *torsione assoluta* dell'arco AB.

Si scorge dalla definizione che la torsione d'un arco di curva piana è nulla; e che essa si può considerare come il limite superiore della somma degli angoli diedri formati dai piani osculatori in successivi punti dell'arco.

La torsione d'un arco è funzione distributiva dell'arco. Al rapporto $\frac{\tau}{s}$ della torsione assoluta d'un arco alla sua lunghezza si dà il nome di *torsione media* dell'arco. Il limite $\frac{d\tau}{ds}$ della torsione media d'un arco di curva, ove i suoi estremi tendono ad uno stesso punto P, si chiama *torsione della curva nel punto* P. Facendo $\frac{1}{T}=\frac{d\tau}{ds}$, a T si dà il nome di *raggio di torsione*.

17. Il punto P, che descrive la curva, abbia le successive derivate **u**, **v**, **w**,... Pongasi

$$u=gr\,\mathbf{u},\quad \omega=gr\,(\mathbf{u}.\mathbf{v}),\quad \Delta=gr\,(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}).$$

Se x, y, z sono le coordinate cartesiane ortogonali del punto P, detti **i**, **j**, **k** i segmenti di riferimento, e indicando con accenti le derivate di x, y, z, si ha

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,;\ \mathbf{u} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k};\ \mathbf{v} \equiv x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j} + z''\mathbf{k}\,;$$
$$\mathbf{w} \equiv x'''\mathbf{i} + y'''\mathbf{j} + z'''\mathbf{k};\ldots$$

$$u = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,;$$
$$\omega = \sqrt{(x'y'' - x''y')^2 + (y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2}\,;$$

$$\Delta = \pm \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Siano **a**, **b**, **c** tre segmenti eguali all'unità di misura, dei quali il primo abbia la direzione della tangente, il secondo quella della normale principale, e il terzo quella della binormale alla curva. Questi segmenti soddisferanno alle equazioni:

$$(1)\quad \mathbf{a}^2 = 1,\quad \mathbf{b}^2 = 1,\quad \mathbf{c}^2 = 1,\quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0,\quad \mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0,\quad \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$$

delle quali le tre prime dicono che essi sono eguali all'unità di misura, e le altre tre che essi sono a due a due ortogonali. Inoltre sono soddisfatte le condizioni

$$(2)\qquad \mathbf{c} \times \mathbf{u} = 0,\quad \mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0,\quad \mathbf{b} \times \mathbf{u} = 0$$

che legano questi segmenti colla curva. Le equazioni precedenti definiscono completamente la grandezza e la direzione dei tre segmenti, ma ne lasciano ancora indeterminato il verso. Supporremo perciò che **a**, il quale ha la direzione di **u**, ne abbia pure il verso; che l'area **a**.**b**, la quale giace nel piano osculatore, abbia lo stesso senso dell'area **u**.**v**; e che il volume **a**.**b**.**c** abbia lo stesso senso del volume **u**.**v**.**w**.

Fatte queste convenzioni si avrà

$$(3)\qquad \mathbf{u} \equiv u\mathbf{a},\quad \mathbf{u}.\mathbf{v} \equiv \omega\mathbf{a}.\mathbf{b},\quad \mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w} \equiv \Delta\,\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}.$$

I segmenti $O\pi$ e $O\mu$, di cui si è parlato nei numeri precedenti, sono equipollenti ad **a** e **c**. Quindi, detti s, σ, τ gli archi della curva data e delle curve descritte dai punti π e μ, e detti ancora R e T i raggi di curvatura e di torsione, si avrà

$$(4) \qquad \frac{ds}{dt} = u, \quad \frac{d\sigma}{dt} = gr\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right), \quad \frac{d\tau}{dt} = gr\left(\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right);$$
$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\mathrm{T}}.$$

Si differenzino le equazioni $\mathbf{c}^2 = 1$, $\mathbf{c} \times \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$; si avrà

$$\mathbf{c} \times d\mathbf{c} = 0, \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{v}\,dt + \mathbf{u} \times d\mathbf{c} = 0, \qquad \mathbf{c} \times \mathbf{w}dt + \mathbf{v} \times d\mathbf{c} = 0.$$

La prima di queste equazioni dice che il segmento $d\mathbf{c}$ è normale al segmento **c**; la seconda, poichè $\mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$, si riduce a $\mathbf{u} \times d\mathbf{c} = 0$, e dice che $d\mathbf{c}$ è normale ad **u**, e quindi ad **a**; perciò il segmento $d\mathbf{c}$ che è normale ad **a** e a **c**, avrà la direzione di **b**. D'altra parte, dalle formule (4) si ha $gr\, d\mathbf{c} = d\tau = \frac{ds}{\mathrm{T}}$; quindi si deduce

$$d\mathbf{c} = \pm \mathbf{b} \frac{ds}{\mathrm{T}}$$

ove si prenderà il segno + o il —, secondochè $d\mathbf{c}$ ha lo stesso senso, o il senso opposto di **b**. Sostituendo questo valore di $d\mathbf{c}$ nella terza equazione, si ha $\mathbf{c} \times \mathbf{w}\,dt \pm \mathbf{v} \times \mathbf{b} \frac{ds}{\mathrm{T}} = 0$. Di qui si ricava

$$\mathrm{T} = \mp \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{b}\, ds}{\mathbf{w} \times \mathbf{c}\, dt};$$

questa espressione di t si può mettere sotto altra forma, introducendo u, ω, Δ. Si ha che $\mathbf{v} \times \mathbf{b} = gr(\mathbf{a}.\mathbf{v})$, $\mathbf{w} \times \mathbf{c} = gr(\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{w})$; $\frac{ds}{dt} = u$; quindi

$$\mathrm{T} = \mp \frac{gr(\mathbf{a}.\mathbf{v})\, u}{gr(\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{w})} = \mp \frac{gr(\mathbf{u}.\mathbf{v})^2}{gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w})} = \mp \frac{\omega^2}{\Delta}.$$

E siccome ω, Δ e T sono numeri positivi, si dovranno scegliere i segni inferiori, e si ha

$$[\mathrm{I}] \qquad d\mathbf{c} \equiv -\mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\omega^2}{\Delta}.$$

Le formule $\mathbf{a}^2 = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = 0$ differenziate, tenendo conto del valore ora ottenuto di $d\mathbf{c}$, dànno

$$\mathbf{a} \times d\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{c} \times d\mathbf{a} = 0$$

ossia il segmento $d\mathbf{a}$, che è normale ad $\mathbf{a}$ e a $\mathbf{c}$, avrà la direzione di $\mathbf{b}$; e siccome $gr\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right) = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{\mathrm{R}dt}$, si deduce $d\mathbf{a} \equiv \pm \mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{R}}$.

L'equipollenza $\mathbf{u} \equiv u\mathbf{a}$, differenziata, dà $d\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}\,du + u\,d\mathbf{a}$. Sostituendo a $d\mathbf{a}$ e du i loro valori, e moltiplicando per $\mathbf{b}$, si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b}\,dt = \pm u\frac{ds}{\mathrm{R}}$$

da cui si ricava $\mathrm{R} = \pm \frac{u\,ds}{\mathbf{v} \times \mathbf{b}\,dt}$. Ma $\frac{ds}{dt} = u$, e

$$\mathbf{v} \times \mathbf{b} = \frac{gr(\mathbf{u}.\mathbf{v})}{u} = \frac{\omega}{u};$$

onde sostituendo $\mathrm{R} = \pm \frac{u^3}{\omega}$. Siccome u, R ed ω sono quantità positive, si dovrà prendere il segno superiore, e si ha

$$[\mathrm{II}] \qquad d\mathbf{a} \equiv \mathbf{b}\frac{ds}{\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{R} = \frac{u^3}{\omega}.$$

La seconda di queste formule dice appunto che il raggio di curvatura d'una curva qualunque è eguale al raggio del cerchio osculatore alla medesima.

Si differenzino infine le formule $\mathbf{b}^2 = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$, che contengono **b**; tenendo conto dei valori precedentemente ottenuti per $d\mathbf{a}$ e $d\mathbf{c}$, si ottiene

$$\mathbf{b} \times d\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{a} \times d\mathbf{b} + \frac{ds}{\mathrm{R}} = 0, \quad \mathbf{c} \times d\mathbf{b} - \frac{ds}{\mathrm{T}} = 0$$

le quali dicono che le proiezioni di $d\mathbf{b}$ sui segmenti **a**, **b**, **c** valgono rispettivamente $-\frac{ds}{\mathrm{R}}$, 0 $\frac{ds}{\mathrm{T}}$; quindi

[III] $$d\mathbf{b} \equiv -\mathbf{a}\frac{ds}{\mathrm{R}} + \mathbf{c}\frac{ds}{\mathrm{T}}.$$

L'equazione del piano normale della curva in P è $\mathrm{PM} \times \mathbf{a} = 0$. Differenziandola, considerando il punto M come fisso, e sostituendo a $d\mathbf{a}$ il suo valore, si ha dopo alcune riduzioni $\mathrm{PM} \times \mathbf{b} = \mathrm{R}$. L'insieme di queste due equazioni determina, com'è noto, l'asse del piano osculatore. Si differenzi una seconda volta; si avrà

$$\mathrm{PM} \times \left(-\mathbf{a}\frac{ds}{\mathrm{R}} + \mathbf{c}\frac{ds}{\mathrm{T}}\right) = d\mathrm{R}.$$

L'insieme delle tre equazioni precedenti determina il centro della sfera osculatrice. Sia C il centro del cerchio osculatore; esso soddisferà alle prime due equazioni $\mathrm{PC} \times \mathbf{a} = 0$, $\mathrm{PC} \times \mathbf{b} = \mathrm{R}$, ed all'equazione del piano osculatore $\mathrm{PC} \times \mathbf{c} = 0$. Quindi

[IV] $$\mathrm{PC} \equiv \mathrm{R}\mathbf{b}$$

e si riconosce di nuovo che il raggio del cerchio osculatore vale il raggio di curvatura R.

Sia S il centro della sfera osculatrice; esso dovrà soddisfare alle tre equazioni precedenti

$$\mathrm{PS} \times \mathbf{a} = 0, \quad \mathrm{PS} \times \mathbf{b} = \mathrm{R}, \quad \mathrm{PS} \times \left(-\mathbf{a}\frac{ds}{\mathrm{R}} + \mathbf{c}\frac{ds}{\mathrm{T}}\right) = d\mathrm{R};$$

e sostituendo a $PS \equiv PC + CS \equiv Rb + CS$ il suo valore, si ricava

$$[V] \qquad CS \equiv c\,T\,\frac{dR}{ds}.$$

Detto r il raggio della sfera osculatrice, sarà

$$r^2 = \overline{PS}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{CS}^2;$$

e sostituendo a PC e CS i loro valori

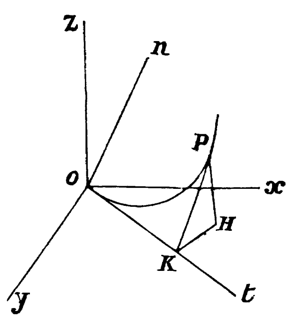
$$[VI] \qquad r^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Dalle due ultime formule si deduce che se R ha un valore costante, e quindi $\frac{dR}{ds} = 0$, sarà $CS \equiv 0$, ossia il centro della sfera osculatrice coincide col centro del cerchio osculatore, e i raggi di quella sfera e di questo cerchio sono eguali.

§ 3. Superficie.

18. I raggi di curvatura di tutte le curve giacenti su d'una superficie e passanti per uno stesso punto sono legati da notevoli relazioni che ora studieremo.

Si riferisca perciò la superficie ad assi cartesiani ortogonali; prendasi per origine O il punto considerato della superficie, e per piano xy il piano tangente alla superficie in quel punto. Allora, se $z = f(x,y)$ è l'equazione della superficie, in virtù delle ipotesi fatte, z, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ saranno nulle per $x = 0$ ed $y = 0$. Quindi,



sviluppando colla formula di Maclaurin, l'equazione della superficie diventa

$$z = \frac{1}{2}\left[(a+\alpha)x^2 + 2(b+\beta)\,xy + (c+\gamma)\,y^2\right],$$

ove a, b, c sono i valori di $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ per $x=0$ ed $y=0$, e α, β, γ sono infinitesimi con x e y.

Si immagini tracciata sulla superficie una linea qualunque passante per O; sia Ot la tangente ad essa in O, On la normale principale, quindi nOt il piano osculatore a questa linea. Dicasi φ l'angolo xOt, e θ l'angolo nOz.

Si prenda su questa curva un punto qualunque P; siano x, y, z le sue coordinate, ρ la sua distanza dall'origine, λ, μ, ν gli angoli che la retta OP fa cogli assi. Dal punto P si abbassi la perpendicolare PH sul piano xOy, e la PK sulla tangente Ot. Dal triangolo rettangolo PHK si ricava $\mathrm{PK} = \frac{z}{\cos \mathrm{HPK}}$; sostituendo nello sviluppo di z ad x ed y i loro valori $\rho \cos \lambda$ e $\rho \cos \mu$, si avrà

$$\mathrm{PK} = \rho^2 \frac{(a+\alpha)\cos^2\lambda + 2(b+\beta)\cos\lambda\cos\mu + (c+\gamma)\cos^2\mu}{2\cos \mathrm{HPK}}$$

dividasi per $\rho^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2$; si ottiene

$$\frac{\mathrm{PK}}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{(a+\alpha)\cos^2\lambda + 2(b+\beta)\cos\lambda\cos\mu + (c+\gamma)\cos^2\mu}{2\cos \mathrm{HPK}}.$$

Facciasi ora tendere P verso il punto fisso O. Si ha che

$$\lim \frac{\mathrm{PK}}{\overline{\mathrm{OP}}^2} = \frac{1}{2\mathrm{R}}$$

indicando con R il raggio di curvatura della curva data in O; $\lim \alpha = \lim \beta = \lim \gamma = 0$; la retta OP ha per limite la tangente Ot, e gli angoli λ, μ, ν che essa fa cogli assi hanno per limiti

$$\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{2}$$

che Ot fa cogli assi; la retta indefinita PH ha per limite Oz; il piano OKP tende al piano osculatore della curva in O; quindi la retta indefinita PK ha per limite On; l'angolo HPK ha per limite $zOn = \theta$; perciò passando ai limiti, e moltiplicando per 2 si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\theta}.$$

19. Dalla formula precedente si possono dedurre alcune conseguenze.

Anzitutto, il raggio di curvatura della curva in O non dipende che dagli angoli φ e θ; quindi esso è eguale al raggio di curvatura della sezione piana fatta nella superficie col piano osculatore alla curva data. In tal modo lo studio della curvatura delle infinite curve tracciate sulla superficie resta ridotto a quello delle sezioni piane di essa.

Si sechi la superficie col piano zOt (per cui $\theta = 0$). Detto R_0 il raggio di curvatura corrispondente, si avrà

$$\frac{1}{R_0} = a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi\,;$$

quindi, sostituendo nella formula precedente, $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0 \cos\theta}$, ossia

$$R = R_0 \cos\theta.$$

Questa formula dice che il raggio di curvatura R d'una curva qualunque segnata sulla superficie è eguale a quello della sezione fatta con un piano normale alla superficie e passante per la tangente alla curva, proiettato sul piano osculatore della curva (teorema di MEUNIER).

In altre parole, se si immagina la sfera tangente alla superficie in O e di raggio R_0, poi si seca la superficie data e la sfera con un piano qualunque passante per Ot, l'intersezione del piano colla sfera è il cerchio osculatore dell'intersezione del piano colla superficie data. Questa proposizione riduce l'esame delle sezioni oblique a quello delle sezioni normali, alle quali ora ci potremo limitare.

20. Pertanto, indicando ora con R il raggio di curvatura della sezione fatta nella superficie col piano normale zOt si avrà

$$\frac{1}{R} = a\cos^2\varphi + 2b\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi + c\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

sia in valor assoluto che in segno. Variando φ, e quindi questo piano normale, varierà la curvatura $\frac{1}{R}$; ci proponiamo di trovarne i massimi e minimi valori. Perciò si faccia la derivata di $\frac{1}{R}$ rispetto a φ, e la si eguagli a zero; si avrà l'equazione

$$2(c-a)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi + 2b(\cos^2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi) = 0$$

ovvero

$$(c-a)\mathrm{sen}\,2\varphi + 2b\cos 2\varphi = 0$$

ossia

$$\mathrm{tang}\,2\varphi = \frac{2b}{a-c},$$

cui debbono soddisfare i valori di φ che rendono massima o minima $\frac{1}{R}$. Ora, escluso il caso in cui $b=0$, e $a-c=0$, questa equazione fornisce per $\mathrm{tang}\,2\varphi$ un valore unico e determinato, quindi per 2φ infiniti angoli; ed indicando con $2\varphi_0$ uno qualunque di quelli che hanno per tangente $\frac{2b}{a-c}$, ogni angolo 2φ sarà della forma $2\varphi_0 + k\pi$, e quindi

$$\varphi = \varphi_0 + k\frac{\pi}{2},$$

ove k è un numero intero. Fatto $k=0$ si ha una prima soluzione $\varphi=\varphi_0$, cui corrisponde un certo piano. Fatto $k=1$ si ha

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$$

cui corrisponde un piano normale al precedente; attribuendo a k altri valori, si ritrovano gli stessi piani. Quindi esistono due e due soli piani corrispondentemente ai quali la derivata di $\frac{1}{R}$ è nulla; essi sono ortogonali fra loro, e, come vedremo quanto prima, per uno di essi la curvatura è massima e per l'altro è minima. Le sezioni fatte nella superficie con questi due piani diconsi *sezioni principali;* le tangenti a queste sezioni principali diconsi *tangenti principali.*

Finora nel sistema di assi cartesiani a cui si è riferita la figura, si è fissata la posizione dell'origine e del piano xOy; rimaneva ancora arbitraria la posizione dei piani xOz e yOz. Potremo supporre che essi coincidano coi piani delle sezioni principali; allora l'equazione $\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{2b}{a-c}$ dovrà essere soddisfatta da $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$; quindi si annulla b, e l'equazione che dà la curvatura di una sezione normale qualunque, diventa

$$\frac{1}{R} = a\cos^2\varphi + c\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Fatto $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ il piano segante viene a coincidere successivamente coi due piani principali xOz e yOz; quindi detti R_1 e R_2 i raggi di curvatura di queste sezioni principali, si avrà

$$\frac{1}{R_1} = a, \quad \frac{1}{R_2} = c.$$

Sostituendo questi valori nella formula precedente si ottiene

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R_2},$$

la quale formula, dovuta ad EULERO, determina la curvatura d'una sezione normale qualunque nella superficie mediante le curvature principali $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$, e l'angolo φ che il piano di quella sezione fa con uno dei piani principali.

21. Per studiare il modo di variare di R col variare di φ, suppongasi dapprima che i due raggi di curvatura principali abbiano lo stesso segno; allora è facile il riconoscere dalla formula precedente che R avrà sempre lo stesso segno, vale a dire che tutte le sezioni normali rivolgono la concavità nello stesso senso; inoltre R risulta sempre compreso fra R_1 e R_2. Un punto siffatto è un *punto ellittico.*

Suppongasi invece che R_1 e R_2 abbiano segno opposto, p. e. $R_1 > 0$ $R_2 < 0$. Scambiando R_2 in $-R_2$ si ha

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} - \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2}.$$

Per $\varphi = 0$, R vale R_1; facendo crescere φ, si vede che $\frac{1}{R}$ diminuisce perchè diminuisce il minuendo ed aumenta il sottraendo; $\frac{1}{R}$ si annulla ove si prenda per φ un valore tale che

$$\frac{\cos^2 \varphi}{R_1} = \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{R_2},$$

ossia

$$\operatorname{tang} \varphi = \pm \sqrt{\frac{R_1}{R_2}},$$

che ci fornisce per φ due valori eguali e di segno contrario. Facendo ancora crescere φ, la curvatura diventa negativa, e va crescendo in valor assoluto fino ad assumere il valore $-\frac{1}{R_2}$ per $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Variando φ da $\frac{\pi}{2}$ a π, la curvatura riprende gli stessi valori in ordine inverso. Il raggio di curvatura invece parte dal valore R_1, va crescendo fino a diventare infinito, poi assume valori negativi e va decrescendo in valor assoluto fino ad assumere il valore $-R_2$. In questo caso il punto è *iperbolico.*

Potrebbe anche avvenire che una delle curvature sia nulla; se p. e. $\frac{1}{R_2}=0$, sarà $\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}$, e variando φ da 0 a $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{R}$ varia da $\frac{1}{R_1}$ a zero, e R da R_1 ad ∞. In questo caso il punto è *parabolico.*

Nella discussione precedente si è supposto che nell'equazione $\operatorname{tang} 2\varphi=\frac{2b}{a-c}$ il numeratore e il denominatore non si annullassero contemporaneamente. Se invece $b=0$ ed $a=c$, l'equazione in R dà semplicemente $R=\frac{1}{a}$, vale a dire in questo caso il raggio di curvatura è costante per tutte le sezioni normali. Un punto siffatto dicesi *umbilico.*

22. Le questioni riferentisi alla curvatura delle superficie si possono trattare indipendentemente dalla scelta particolare di assi prima fatta; in tal modo troveremo alcune formule generali che saranno utili nelle discussioni di questo genere.

La posizione del punto P sulla superficie sia funzione delle due variabili u e v; pongasi, secondo il solito

$$\frac{dP}{du}\equiv \mathrm{p},\quad \frac{dP}{dv}\equiv \mathrm{q},\quad \frac{d^2P}{du^2}\equiv \mathrm{r},\quad \frac{d^2P}{du\,dv}\equiv \mathrm{s},\quad \frac{d^2P}{dv^2}\equiv \mathrm{t}.$$

Si supponga ora che le variabili u e v siano funzioni d'una nuova variabile indipendente t; allora il punto P descriverà sulla superficie una curva di cui vogliamo calcolare la curvatura.

Si avrà, da note regole di derivazione

$$dP\equiv \mathrm{p}du+\mathrm{q}dv \tag{1}$$

$$d^2P\equiv \mathrm{r}du^2+2\mathrm{s}du\,dv+\mathrm{t}dv^2+\mathrm{p}d^2u+\mathrm{q}d^2v. \tag{2}$$

La direzione del segmento dP determina la tangente alla curva; la formula (1) dice che essa è contenuta nel piano $\mathrm{p}.\mathrm{q}$, il quale è perciò il piano tangente alla superficie. La direzione di questa tangente dipende da du e dv, o meglio dal loro rapporto.

Il raggio di curvatura R della curva è eguale al quadrato di dP diviso pel valore della componente di d^2P normale alla tangente. Elevando a quadrato dP si ha

$$dP^2 = \mathrm{p}^2 du^2 + 2\mathrm{p} \times \mathrm{q}\, du\, dv + \mathrm{q}^2 dv^2$$

ovvero, facendo per brevità

(3) $$E = \mathrm{p}^2,\ F = \mathrm{p} \times \mathrm{q},\ G = \mathrm{q}^2,$$

si ha

(4) $$dP^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Così dP^2 è una funzione omogenea di secondo grado in du e dv; essa è necessariamente sempre positiva: il discriminante di questa funzione vale $EG - F^2$, ovvero indicando con p, q i valori assoluti dei segmenti **p** e **q**, si ha $E = p^2$, $F = pq \cos(\mathrm{p}, \mathrm{q})$, $G = q^2$; quindi $EG - F^2 = p^2q^2(1 - \cos^2 \widehat{\mathrm{pq}}) = p^2q^2 \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathrm{p}.\mathrm{q}}$. Chiamando ω l'area del parallelogrammo $\mathrm{p}.\mathrm{q}$, cioè posto $\omega = pq \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{p}.\mathrm{q}}$, si deduce

$$\omega = \sqrt{EG - F^2}.$$

Indichiamo per un momento con a la componente di d^2P normale alla tangente dP della curva, e con b la componente di d^2P normale alla superficie. Sia θ l'angolo che la normale principale alla curva fa colla normale alla superficie, cioè l'angolo dei segmenti a e b; si avrà

$$a = \frac{b}{\cos\theta}.$$

Per calcolarci b, si consideri il volume $\mathrm{p}.\mathrm{q}.d^2P$; in virtù della (2) si ha

(6) $$\mathrm{p}.\mathrm{q}.d^2P = A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2$$

ove si faccia

$$(7) \qquad A = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{r}, \; B = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{s}, \; C = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{t}.$$

Ma il volume del parallelepipedo $\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P$ vale il prodotto dell'area base $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, che si è chiamata ω, per la componente di d^2P normale al piano $\mathbf{p}.\mathbf{q}$, la quale componente si è chiamata b; dividendo perciò per ω si ha

$$b = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P}{\omega};$$

quindi

$$a = \frac{\mathbf{p}.\mathbf{q}.d^2P}{\omega \cos\theta};$$

e la curvatura

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{dP^2}$$

ovvero, sostituendo:

$$(8) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\omega} \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2} \frac{1}{\cos\theta}.$$

Questa formula esprime la curvatura della curva data in funzione di du e dv, o meglio del loro rapporto da cui dipende la direzione della tangente alla curva, e dell'angolo θ che la normale principale alla curva fa colla normale alla superficie. Da essa si deduce immediatamente il teorema di Meunier.

23. Supponendo $\theta = 0$, cioè che il piano osculatore alla curva sia normale alla superficie, si ha

$$(9) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\omega} \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}.$$

Vogliamo ora determinare du e dv in guisa che $\frac{1}{R}$ risulti massimo o minimo. Ricorrendo alle note regole sui massimi e minimi, si ha che du e dv debbono soddisfare alle equazioni

$$\frac{A du + B dv}{E du + F dv} = \frac{B du + C dv}{F du + G dv} = \frac{A du^2 + 2B du\, dv + C dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}$$

(le quali equivalgono ad una sola equazione). Indicando con λ il valore comune di questi fratti, le equazioni precedenti si possono scrivere

$$
\begin{aligned}
&(A-\lambda E)du+(B-\lambda F)dv=0\\
(10)\qquad &(B-\lambda F)du+(C-\lambda G)dv=0\\
&\frac{1}{R}=\frac{\lambda}{\omega}.
\end{aligned}
$$

Si eliminino du e dv fra le due prime equazioni; si avrà l'equazione

$$
\begin{vmatrix} A-\lambda E & B-\lambda F \\ B-\lambda F & C-G\lambda \end{vmatrix}=0,
$$

ossia sviluppata

$$
(11)\qquad (AC-B^2)-(AG+EC-2BF)\lambda+(EG-F^2)\lambda^2=0
$$

equazione di secondo grado in λ che ci fornisce per λ due valori. Risulta dalle cose dette che questi valori sono sempre reali, come si potrebbe pure riconoscere dall'esame dell'equazione. Questi valori di λ, sostituiti nella terza delle (10) dànno i valori delle curvature principali $\frac{1}{R_1}$ e $\frac{1}{R_2}$. Si ricava con calcoli semplicissimi

$$
(12)\qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{AG+EC-2BF}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}},
$$

$$
(13)\qquad \frac{1}{R_1R_2}=\frac{AC-B^2}{(EG-F^2)^2}.
$$

Eliminando invece il λ fra le due prime equazioni (10) si ha, dopo alcuni calcoli

$$
(14)\qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix}=0,
$$

la quale determina i due rapporti $\frac{du}{dv}$ corrispondenti alle tangenti delle sezioni principali.

Se il punto considerato è un umbilico, l'equazione (9) deve dare per $\frac{1}{R}$ sempre lo stesso valore qualunque siano i valori di du e dv; perciò è necessario e sufficiente che si abbia

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C}{G}. \tag{15}$$

In questo caso l'equazione (14) diventa una identità, e risulta indeterminata la direzione delle tangenti principali.

L'equazione

$$A du^2 + 2B du dv + C dv^2 = 0 \tag{16}$$

se $AC - B^2 < 0$, ossia se il punto è iperbolico, determina due valori di $\frac{du}{dv}$ corrispondentemente ai quali si ha $\frac{1}{R} = 0$. Alle due rette aventi queste direzioni si dà il nome di *tangenti di flesso* della superficie, perchè in generale le sezioni fatte nella superficie con piani passanti per una di esse hanno ivi un punto di flesso.

Diconsi *linee di curvatura* d'una superficie le linee della superficie che sono in ogni loro punto tangenti alle tangenti principali. La determinazione di queste linee dipende dall'integrazione della equazione differenziale (14). Per ogni punto della superficie passano due di queste linee, che si incontrano ad angolo retto.

Diconsi *linee assintotiche* della superficie quelle linee tracciate in essa che hanno per tangenti le tangenti di flesso della superficie. La loro equazione si ottiene integrando la (16). Per ogni punto iperbolico della superficie passano due di queste linee; pei punti parabolici una, e per gli ellittici nessuna.

Esercizii.

1. Se le *inverse* d'una linea piana L e del suo cerchio osculatore C sono la linea L' e il cerchio C', allora C' è il cerchio osculatore della curva L'.

2. Nel piano, la curva i cui punti distano d'una quantità costante da una curva data dicesi *parallela* ad essa. Le curve parallele hanno le stesse normali e la stessa evoluta.

3. Il raggio di curvatura della *catenaria* (Cap. II, N. 23, es. 2°) è eguale alla lunghezza della normale.

4. Il raggio di curvatura della *lemniscata* $r^2 = a^2 \cos^2 \alpha$ vale $\frac{a^2}{3r}$.

5. Il raggio di curvatura dell'*elica*, detto r il raggio del cerchio base, e θ l'angolo costante che la tangente all'elica fa col piano della base, vale $\frac{r}{\operatorname{sen}^2\theta}$. Il centro della sfera osculatrice coincide col centro del cerchio osculatore. Questi centri formano una nuova elica avente lo stesso asse e lo stesso passo della data. Il raggio di torsione vale $\frac{r^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \cot \theta$.

6. Se le *inverse* d'una curva a doppia curvatura L, del suo cerchio osculatore C e della sfera osculatrice S sono L', C' e S', allora C' e S' saranno rispettivamente il cerchio osculatore e la sfera osculatrice di L'. Il piano del cerchio C' è il piano osculatore alla L'.

7. Costrurre il piano osculatore e il cerchio osculatore della *lossodromia* (Cap. III, 22, es. 5°).

8. Se una superficie è data, in assi cartesiani ortogonali, da un'equazione della forma $z = f(x, y)$, dette p e q le derivate di primo ordine di z rispetto ad x e y, e r, s, t quelle del secondo ordine, il raggio di curvatura R d'una sezione normale è dato dalla formula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{dx^2 + dy^2 + (p dx + q dy)^2}.$$

Detti R_1 e R_2 i raggi di curvatura delle sezioni principali, si ha

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{r+t+rq^2-2spq+tp^2}{\left(1+p^2+q^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{1}{R_1\,R_2}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

L'equazione differenziale delle linee di curvatura è

$$\begin{vmatrix} r & s & t \\ 1+p^2 & pq & 1+q^2 \\ dy^2 & -dxdy & dx^2 \end{vmatrix}=0.$$

Quella delle linee assintotiche è

$$rdx^2+2sdxdy+tdy^2=0.$$

Le condizioni affinchè il punto sia un umbilico sono

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t}.$$

9. Se una superficie è data da un'equazione della forma $f(x,y,z)=0$, dette $f_1\ f_2\ f_3,\ f_{11},\ f_{12}$, ecc. le derivate parziali del primo e secondo ordine di f rispetto ad xyz, la condizione affinchè il punto considerato sia parabolico è

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_2 & f_{12} & f_{22} & f_{23} \\ f_3 & f_{13} & f_{23} & f_{33} \end{vmatrix}=0.$$

10. Sono linee di curvatura dei *cilindri* le generatrici e le sezioni fatte con piani normali alle generatrici. Le generatrici sono anche linee assintotiche; tutti i punti sono parabolici.

11. Le linee di curvatura dei *coni* sono le generatrici e le sezioni fatte nel cono con sfere aventi per centro il vertice del cono. Le generatrici sono linee assintotiche; i punti sono parabolici.

12. Nella superficie di rivoluzione le linee di curvatura sono i meridiani e i paralleli.