CAPITOLO IV.

# Funzioni della posizione d'un punto.

## § 1. Derivate.

**1.** Un numero U è funzione della posizione d'un punto P, se ad ogni posizione di P, o assolutamente arbitraria o convenientemente limitata, corrisponde un valore del numero U. Così, ad esempio, i numeri che misurano le distanze del punto variabile P da punti o rette o piani fissi sono funzioni numeriche di U, e lo stesso avviene di ogni espressione analitica, somma, prodotto, ecc., di alcune di tali distanze.

Le coordinate cartesiane $x\ y\ z$ del punto P sono pure funzioni numeriche di P, ed ogni funzione analitica $\mathrm{U} = f(x, y, z)$ di queste coordinate è funzione della posizione di P. Viceversa, se U è funzione della posizione di P, date le coordinate $xyz$ di P, risulta determinato questo punto, e quindi il numero U. Perciò ogni funzione numerica della posizione d'un punto si può considerare come funzione delle sue coordinate.

**2.** Diremo che U ha per derivata il segmento **u**, corrispondentemente ad una data posizione di P, e scriveremo $\mathbf{u} \equiv \dfrac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{P}}$ se, attribuendo al punto una nuova posizione P′, la differenza $\Delta\mathrm{U}$ dei due valori assunti da U si può mettere sotto la forma

$$\Delta\mathrm{U} = \overline{\mathrm{PP}'} \times \overline{(\mathbf{u} + \epsilon)}\,,$$

ove $\overline{\epsilon}$ è un segmento che ha per limite zero col tendere di P′ a P. Il prodotto del membro di destra è un prodotto geometrico; quindi se fosse $\epsilon \equiv 0$, ovvero se si trascura $\epsilon$ che ha per limite zero, $\Delta$U si riduce al solo termine $\overline{PP'} \times \mathbf{u}$, e quindi l'incremento della funzione U è eguale alla grandezza di **u** moltiplicata per la proiezione di PP′ sulla direzione di **u**.

Eseguendo il prodotto indicato, si ha

$$\Delta U = \overline{PP'} \times \mathbf{u} + \alpha ,$$

ove si è posto $\alpha = \overline{PP'} \times \overline{\epsilon}$, e quindi, se U ha per derivata **u**, il numero $\alpha$ è infinitesimo d'ordine superiore al primo, ove si prenda la lunghezza di PP′ per infinitesimo principale. Reciprocamente, se $\Delta$U si può mettere sotto la forma $\overline{PP'} \times \mathbf{u} + \alpha$, ove $\alpha$ sia infinitesimo d'ordine superiore al primo, U ha per derivata **u**; invero, se si determina il segmento $\overline{\epsilon}$ che abbia la stessa direzione di PP′ e tale che $\alpha = \overline{PP'} \times \overline{\epsilon} = gr\,PP' \times gr\,\epsilon$, si avrà $\Delta U = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u} + \epsilon)}$, e poichè $gr\epsilon = \frac{\alpha}{gr PP'}$ ha per limite zero, anche $\epsilon$ è infinitesimo, e quindi U ha per derivata **u**.

**3**. Sia per esempio $U = \mathbf{a} \times \overline{OP}$, ove **a** e O sono un segmento ed un punto fissi. Sarà U funzione del punto P. Dato a questo punto una nuova posizione P′, sarà

$$\Delta U = \mathbf{a} \times OP' - \mathbf{a} \times OP = PP' \times \mathbf{a} ,$$

e quindi $\Delta$U si presenta sotto la forma $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon)$, ove si faccia $\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}$, ed $\epsilon \equiv 0$. Dunque **a** è la derivata di $\mathbf{a} \times OP$.

Si consideri ancora la funzione numerica $U = \overline{OP}^2$, ove O è una origine fissa. Data a P una nuova posizione P′, sarà $OP' \equiv OP + PP'$. Elevando a quadrato si ha $\overline{OP'}^2 = \overline{OP}^2 + 2\overline{OP} \times \overline{PP'} + \overline{PP'}^2$. Quindi $\Delta U = \overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2 = 2\overline{OP} \times \overline{PP'} + \overline{PP'}^2$, che si può scrivere

$$\Delta U = \overline{PP'} \times (2\overline{OP} + PP').$$

Perciò $\Delta$U si presenta sotto la forma $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon)$, ove si faccia

$\mathbf{u} \equiv 2\overline{OP}$ e $\epsilon \equiv PP'$; ed $\epsilon$ ha per limite zero se $P'$ tende a $P$. Dunque $\mathbf{u} \equiv 2OP$ è la derivata di $\overline{OP}^2$.

Per le funzioni numeriche della posizione d'un punto sussistono le stesse regole di derivazione che servono per le funzioni numeriche di numeri variabili. Così, per esempio:

Se $U_1$, $U_2$, ... sono funzioni della posizione d'un punto $P$, aventi derivate $\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 ...$ la loro somma

$$U = U_1 + U_2 + ...$$

ha per derivata

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ...$$

cioè la somma geometrica (risultante) delle derivate delle funzioni che si sommano.

Invero, data al punto una nuova posizione $P'$, si ha

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + ...,$$

e, per la definizione delle derivate,

$$\Delta U_1 = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u}_1 + \epsilon_1}), \quad \Delta U_2 = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u}_2 + \epsilon_2}), ...;$$

onde sommando

$$\Delta U = PP' \times (\overline{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ... + \epsilon_1 + \epsilon_2 + ...}),$$

ovvero, posto

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + ..., \quad \text{ed} \quad \epsilon \equiv \epsilon_1 + \epsilon_2 + ...,$$

si ha

$$\Delta U = PP' \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon}),$$

dove $\epsilon$ ha per limite zero; quindi $U$ ha per derivata $\mathbf{u}$, c. v. d.

In modo analogo si potrebbero determinare le derivate di prodotti, quozienti, ecc. Ma tutte queste regole, compresa la precedente, sono contenute nel teorema che segue:

4. Teorema. — Se $U_1$, $U_2$, ... $U_n$ sono funzioni numeriche

della posizione del punto P, aventi derivate $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots \mathbf{u}_n$, e U è una funzione numerica dei numeri $U_1\ U_2 \dots U_n$,

$$U = F(U_1, U_2, \dots U_n),$$

avente le derivate parziali di primo ordine continue, anche U ha derivata $\mathbf{u}$, data dalla formula

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dF}{dU_1}\mathbf{u}_1 + \frac{dF}{dU_2}\mathbf{u}_2 + \dots + \frac{dF}{dU_n}\mathbf{u}_n .$$

Infatti, date al punto variabile le posizioni P e P′, e detti $\Delta U_1$, $\Delta U_2, \dots \Delta U_n$ e $\Delta U$ le differenze dei valori delle funzioni $U_1\ U_2 \dots U_n$ ed U, si ha, da una formula di calcolo,

$$\Delta U = \left(\frac{dF}{dU_1} + \alpha_1\right)\Delta U_1 + \left(\frac{dF}{dU_2} + \alpha_2\right)\Delta U_2 + \dots + \left(\frac{dF}{dU_n} + \alpha_n\right)\Delta U_n,$$

ove $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_n$ sono numeri aventi per limite zero ove tendano a zero gli incrementi di tutte le U. Ma, per la definizione delle derivate delle funzioni numeriche, si ha

$$\Delta U_1 = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u}_1 + \epsilon_1)}, \quad \Delta U_2 = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u}_2 + \epsilon_2)},$$
$$\dots\dots, \quad \Delta U_n = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u}_n + \epsilon_n)},$$

ove $\epsilon_1\ \epsilon_2 \dots \epsilon_n$ sono segmenti infinitesimi con PP′. Sostituendo nella formola precedente, e fatto

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dF}{dU_1}\mathbf{u}_1 + \frac{dF}{dU_2}\mathbf{u}_2 + \dots + \frac{dF}{du_n}\mathbf{u}_n,$$

e $$\epsilon \equiv (\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n) + \left(\frac{dF}{dU_1} + \alpha_1\right)\epsilon_1 + \dots + \left(\frac{dF}{dU_n} + \alpha_n\right)\epsilon_n$$

si ricava

$$\Delta U = \overline{PP'} \times \overline{(\mathbf{u} + \epsilon)},$$

ed $\epsilon$ ha per limite zero col tendere di P′ a P, onde U ha per derivata $\mathbf{u}$.

Così per esempio, se

$$U = U_1 + U_2 - U_3,$$

le derivate parziali di U sono 1, 1, e — 1, e quindi

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 .$$

Se $$U = U_1 \times U_2 ,$$

le derivate parziali di U sono $U_2$ e $U_1$, quindi

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_1 U_2 + \mathbf{u}_2 U_1 .$$

Se U è funzione d'un solo numero V, il quale è funzione del punto P, avente per derivata $\mathbf{v}$, si avrà

$$\mathbf{u} = \frac{dU}{dV} \mathbf{v}.$$

Così, se V ha per derivata il segmento $\mathbf{v}$, la funzione $log$V ha per derivata il segmento $\frac{1}{V}\mathbf{v}$, e la funzione $\sqrt{V}$ ha per derivata $\frac{1}{2\sqrt{V}}\mathbf{v}$, supposto in ambi i casi $V > 0$.

**5.** Teorema. — La derivata del numero che misura la distanza d'un punto fisso O dal punto mobile P, distinto da O, è un segmento avente la direzione e il senso del segmento OP ed eguale all'unità di misura.

Invero, sia $r$ il numero che misura la distanza OP, e V il suo quadrato $V = r^2 = \overline{OP}^2$. Si è visto che la derivata di V vale $\mathbf{v} \equiv 2\overline{OP}$; quindi la derivata di $r = \sqrt{V}$ vale

$$\mathbf{u} \equiv \frac{1}{2\sqrt{V}} \mathbf{v} \equiv \frac{OP}{\mathrm{gr}\,OP} ;$$

che è appunto un segmento avente la direzione e il senso di OP, ma eguale in grandezza a $\frac{\mathrm{gr}OP}{\mathrm{gr}OP}$, cioè all'unità di misura.

La regola precedente non è più applicabile se $V = 0$, ossia se P coincide col punto O; in questo caso manca la derivata.

**6.** Più generalmente, se **F** è una figura fissa (linea o superficie), e se ad ogni punto P dello spazio, non appartenente alla figura, corrisponde un punto O di questa, in modo che la distanza OP sia la minima fra le distanze dei punti della **F** dal punto P, e se inoltre col tendere di P ad una posizione speciale $P_0$, anche il punto O corrispondente a P ha per limite il punto corrispondente a $P_0$, allora la derivata del numero che misura la minima distanza del punto P dalla figura **F** è un segmento che ha la direzione di questa minima distanza, nel senso che va dalla figura al punto, ed eguale all'unità di misura.

Invero, sia $r$ il numero che misura la distanza OP, e V il suo quadrato, $V = r^2 = OP^2$. Data al punto P la nuova posizione P′, e detto O′ il punto corrispondente della figura, sarà $\Delta V = \overline{O'P'}^2 - \overline{OP}^2$. Ora, poichè OP è la minima distanza del punto P dai punti della figura, sarà $\overline{OP}^2 < \overline{O'P}^2$; in modo analogo $\overline{O'P'}^2 < \overline{OP'}^2$. Tenendo conto di queste diseguaglianze si ha

$$\overline{O'P'}^2 - \overline{O'P}^2 < \Delta V < \overline{OP'}^2 - \overline{OP}^2,$$

ovvero

$$PP' \times (O'P' + O'P) < \Delta V < PP' \times (OP' + OP).$$

Facciasi tendere P′ a P; anche O′ tende ad O, per la ipotesi fatta; e i segmenti OP, OP′, O′P e O′P′ hanno per limite OP; quindi, detti $\alpha$ e $\beta$ due segmenti infinitesimi, sarà

$$PP' \times (2OP + \alpha) < \Delta V < PP' \times (2OP + \beta).$$

Siano $\alpha'$ e $\beta'$ le proiezioni ortogonali di $\alpha$ e $\beta$ su PP′. Sarà

$$PP' \times \alpha = PP' \times \alpha', \text{ e } PP' \times \beta = PP' \times \beta';$$

quindi la diseguaglianza precedente si può scrivere

$$PP' \times (2OP + \alpha') < \Delta V < PP' \times (2OP + \beta');$$

siccome i segmenti $\alpha'$ e $\beta'$ hanno la stessa direzione, che è quella di PP′, si potrà determinare un segmento $\epsilon$, avente pure la stessa direzione, tale che

$$\Delta V = PP' \times (2OP + \epsilon),$$

ed $\epsilon$, che risulta compreso fra $\alpha'$ e $\beta'$, avrà per limite zero, onde V ha per derivata 2OP. Quindi la derivata di $r = \sqrt{V}$ sarà

$$\frac{1}{2\sqrt{V}} 2OP \equiv \frac{OP}{gr\,OP},$$

ossia un segmento avente la direzione e senso di OP, ed eguale alla unità di misura.

Le condizioni restrittive enunciate sono verificate se la figura **F** è una retta od un piano; quindi:

TEOREMA. — La derivata del numero che misura la distanza del punto variabile P da una retta fissa o da un piano fisso, non passante per P, è un segmento avente la direzione della retta su cui giace questa distanza, nel senso che va dalla retta o piano fisso al punto P, ed è eguale all'unità di misura.

7. TEOREMA. — Se il numero U è funzione delle coordinate cartesiane ortogonali $x$, $y$, $z$ del punto P, avente derivate parziali di primo ordine continue, la derivata di U è un segmento avente per coordinate $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$.

Invero, date a P due posizioni di coordinate $x$, $y$, $z$, e $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, se $U = f(x, y, z)$, sarà

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{dx} + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{dU}{dy} + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{dU}{dz} + \gamma\right)\Delta z.$$

Ora si ha

$$PP' \equiv \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k},$$

e se si fa

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dU}{dx}\mathbf{i} + \frac{dU}{dy}\mathbf{j} + \frac{dU}{dz}\mathbf{k}$$

e $$\bar{\epsilon} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k},$$

sarà $lim\, \epsilon = 0$, e

$$\Delta U = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon}),$$

e quindi $\mathbf{u}$ è la derivata di U, c. v. d.

## § 2. Normali a curve e a superficie.

**8.** Sia U una funzione numerica della posizione del punto P. Il luogo dei punti per cui U ha un valore costante dato, vale a dire il luogo dei punti che soddisfanno all'equazione $U = c$, è, sotto certe condizioni restrittive, nello spazio, una superficie, e nel piano una curva.

Suppongasi invero U funzione continua di P, e che assuma per due posizioni A e B del punto P due valori, l'uno maggiore e l'altro minore di $c$. Se si uniscono i punti A e B con un cammino continuo, per un punto di questo cammino U assumerà necessariamente il valore $c$. E siccome sia nel piano che nello spazio due punti si possono unire fra loro con infiniti cammini non aventi di comune che gli estremi, si deduce che sonvi infiniti punti per cui $U = c$, e che questi separano la regione per cui U è maggiore di $c$ da quella per cui U è minore di $c$.

Se, per una posizione speciale di P, U ha il valore $c$, ed ha derivata $\mathbf{u}$ non nulla, allora, se il punto P si sposta nella direzione di $\mathbf{u}$, U cresce, e se si sposta in direzione opposta, U diminuisce. Quindi in questo caso U assume valori maggiori e minori di $c$, e i punti per cui $U = c$ sono in numero infinito.

Se U ha, per una posizione speciale di P, il valore $c$, ed ha nelle vicinanze di P una derivata prima continua e non nulla, allora in quelle vicinanze i punti per cui $U = c$ formano appunto nel piano una linea, e nello spazio una superficie; vale a dire essi si possono far corrispondere univocamente ad una, o a due variabili indipendenti. Per riconoscere questo, senza farne una dimostrazione diretta, basta riferire il punto P a coordinate cartesiane ortogonali $x, y, z$; e sia $U = f(x, y, z)$. Se U ha derivata **u** continua, anche $f(x, y, z)$ ha derivate parziali prime continue, e sarà

$$\mathbf{u} \equiv \frac{df}{dx}\mathbf{i} + \frac{df}{dy}\mathbf{j} + \frac{df}{dz}\mathbf{k},$$

e se **u** non è nullo, una almeno delle tre derivate $\frac{df}{dx} \frac{df}{dy} \frac{df}{dz}$ non è nulla, e quindi l'equazione $f(x, y, z) = c$ determina una delle coordinate in funzione delle altre due. (*Calc. diff.* N. 110 e 112).

**9.** Riconosciuto adunque che i punti per cui $U = c$ formano nel piano una linea, e nello spazio una superficie, possiamo proporci di determinarne la tangente, od il piano tangente.

TEOREMA. — Se U è funzione di P avente derivata **u** non nulla, la direzione di questa derivata è normale alla linea o superficie luogo dei punti per cui U è costante.

Invero, date al punto variabile due posizioni P e P′ per cui U abbia lo stesso valore, sarà $\Delta U = 0$, e per la definizione di derivata $\Delta U = \overline{PP'} \times (\overline{\mathbf{u} + \epsilon})$, ove $\lim \epsilon \equiv 0$. Quindi $PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon) = 0$. Questa formula dice che PP′ è normale al segmento $\mathbf{u} + \epsilon$. Se si fa ora tendere P′ a P, il segmento $\mathbf{u} + \epsilon$ ha per limite **u**; dunque l'angolo che PP′ fa con **u** ha per limite un retto, e quindi **u** è normale alla linea, o superficie luogo dei punti per cui U è costante.

**10.** Ecco alcune applicazioni delle proposizioni precedenti.

1) Siano $r_1\ r_2 \dots r_n$ le distanze del punto P da $n$ punti fissi $A_1$ $A_2 \dots A_n$, e sia

$$U = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots + m_n r_n.$$

Sarà U funzione della posizione del punto P, e, dette $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n$

le derivate di $r_1\, r_2 \dots r_n$, che sono segmenti eguali all'unità di misura, e diretti secondo $A_1P$, $A_2P$, ... $A_nP$, la derivata di U sarà

$$m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 + \dots + m_n\mathbf{u}_n\,;$$

e poichè la direzione di questa derivata è normale al luogo dei punti per cui U è costante, si deduce:

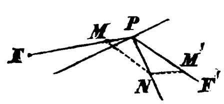
La normale al luogo dei punti, per cui è costante la somma delle distanze da $n$ punti dati moltiplicate per $n$ numeri dati, si ottiene conducendo dal punto considerato del luogo dei segmenti diretti ai punti dati e proporzionali ai numeri dati; la loro risultante è la normale cercata.

Quanto precede è vero sia nel piano che nello spazio; specializzando il numero dei punti dati e le costanti date, si ottengono risultati notevoli.

Così, per esempio, il luogo dei punti, per cui è costante la somma delle distanze da due punti F ed F′, è un'ellisse di cui F ed F′ sono i fuochi; e la costruzione precedente dice che la normale all'ellisse è la bissetrice interna dei raggi focali.

Il luogo dei punti per cui è costante la differenza delle distanze dei punti F e F′ è un iperbole, di cui questi punti sono i fuochi; e la normale all'iperbole è la bissetrice esterna dei ràggi focali.

Il luogo dei punti P per cui è costante la somma delle distanze da due punti dati F ed F′ moltiplicate pei numeri $m$ ed $m'$ è una curva detta *ovale di Cartesio*. Se sulle rette PF e PF′ si portano i segmenti PM e PM′ proporzionali ad $m$ ed $m'$, la loro risultante PN è la normale alla curva in P. Detti $i$ ed $r$ gli angoli FPN e NPF′ = MNP, che i raggi FP e PF′ fanno colla normale PN alla curva, si deduce dal triangolo MNP




$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{MN}{PM} = \frac{PM'}{PM} = \frac{m'}{m}\,.$$

Quindi, se si immagina che l'ovale di Cartesio sia la linea di separazione di due mezzi trasparenti, il cui indice di rifrazione relativo sia $\frac{m'}{m}$, e che raggi luminosi partenti da F vengano a rifrangersi sulla curva, in virtù di una nota legge fisica attribuita pure a Cartesio, i raggi rifratti, od i loro prolungamenti, vengono tutti a passare per F'.

2) La parabola conica si può definire come il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso F (*fuoco*) e da una retta fissa $d$ (*direttrice*). Dette $r$ e $r'$ le distanze d'un punto P da F e da $d$, la funzione

$$U = r - r'$$

sarà, pei punti della parabola, costantemente nulla. Quindi la normale alla parabola è la risultante di due segmenti eguali all'unità di misura, l'uno diretto secondo FP, e l'altro avente la direzione della normale abbassata da F sulla retta $d$. Si scorge immediatamente che la normale alla parabola è la bissettrice esterna dell'angolo formato dal raggio focale e dalla perpendicolare alla direttrice.

3) Com'è noto, ogni conica è il luogo dei punti per cui è costante il rapporto delle distanze da un punto fisso F (fuoco) e da una retta fissa $d$ (direttrice). Dette ancora $r$ e $r'$ le distanze del punto P da F e da $d$, la funzione $\frac{r}{r'}$ è costante pei punti della conica. La derivata di questa funzione è $\frac{r'\mathbf{u} - r\mathbf{u}'}{r'^2}$, ove $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ siano le note derivate di $r$ e $r'$. Dalla costruzione di questa derivata si ha la seguente costruzione della normale alla curva: si porti sulla direzione di PF un segmento eguale a P$d$, e sulla direzione di P$d$, ma in senso opposto (cioè nel senso $d$P), un segmento eguale a PF; la risultante di questi segmenti è normale alla conica in P.

4) Dicesi *ovale di Cassini* il luogo dei punti per cui è costante il prodotto delle distanze da due punti dati F ed F'. Dette $r$ e $r'$ le distanze del punto P da F e F', e $\mathbf{u}$ e $\mathbf{u}'$ le loro derivate, sarà,

pei punti della curva, costante la funzione $rr'$; e la derivata di questa funzione, cioè $\mathrm{u}r' + \mathrm{u}'r$, è normale alla curva. Quindi si porti sulla direzione di PF un segmento eguale a PF′, e sulla direzione di PF′ un segmento eguale a PF; la loro risultante sarà normale alla curva.

5) Il luogo dei punti, nel piano, per cui è costante la somma dei quadrati delle distanze da due rette date $l$ e $l'$, è, com'è noto, una ellisse il cui centro è il punto $ll'$, e i cui diametri equiconiugati sono diretti secondo $l$ e $l'$. Pei punti di questa curva è costante la funzione $r^2 + r'^2$ ove $r$ e $r'$ siano le distanze PM e PM′ di P dalle rette. La derivata di questa funzione è $2(r\mathrm{u} + r'\mathrm{u}')$; quindi la risultante dei segmenti PM e PM′ è la normale alla curva in P.

6) Si immagini nello spazio la superficie i cui punti distano egualmente da due rette date $l$ e $l'$, e che si dimostra essere un paraboloide iperbolico. Dette $r$ e $r'$ le distanze del punto P dalle due rette, la funzione $r - r'$ avrà il valore costante 0 pei punti della superficie. Se da P si conducono due segmenti perpendicolari alle rette date, eguali fra di loro, il primo nel verso dal punto P alla $l$, e il secondo nel verso dalla retta $l'$ al punto P, la loro risultante è normale alla superficie. Si vede di qui che il piano tangente alla superficie biseca l'angolo formato dalle perpendicolari abbassate da P sulle rette date.

7) Il luogo dei punti equidistanti da tre rette date $l\ l'\ l''$ nello spazio è una curva, la quale giace ad un tempo e sulla superficie i cui punti equidistano da $l$ e $l'$, come pure sulla superficie i cui punti equidistano da $l$ e $l''$. Quindi la tangente alla curva in un suo punto P si ottiene a questo modo. Da P si abbassino le perpendicolari PA, PB, PC sulle rette date. I piani perpendicolari alle faccie APB, BPC e CPA del triedro, nelle bissettrici di queste faccie, passano per una retta che è la tangente cercata.

8) Se U, funzione del punto P, ha per derivata **u**, detto M un punto del piano tangente alla superficie per cui U è costante, sarà

$$PM \times \mathbf{u} = 0$$

l'equazione del piano tangente. Riferito il sistema a coordinate cartesiane ortogonali, dette $x$, $y$, $z$ le coordinate di P, e X, Y, Z quelle di M, e fatto $U = F(x, y, z)$, le coordinate di **u** sono $\frac{dF}{dx}, \frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dz}$; quindi l'equazione del piano tangente diventa (p. 122):

$$(X - x)\frac{dF}{dx} + (Y - y)\frac{dF}{dy} + (Z - z)\frac{dF}{dz} = 0.$$

9) I punti del piano, per cui è costante la minima distanza da una linea data in questo piano, formano una linea che dicesi *parallela* alla data.

Il luogo dei punti nello spazio, per cui è costante la minima distanza da una linea data dicesi *superficie tubulare*.

La superficie luogo dei punti nello spazio, pei quali è costante la minima distanza da una superficie data, dicesi *parallela* a questa.

Se P è un punto del luogo, e PM la sua minima distanza dalla linea o superficie data, supposte verificate le condizioni del N. 6, sarà PM normale al luogo dei punti P. Vedremo presto che, sotto certe condizioni restrittive, PM è anche normale alla linea o superficie data.

## § 3. Massimi e minimi.

**11.** Sia U una funzione numerica della posizione del punto P, avente derivata **u**. Data al punto la nuova posizione P', sarà

$$\Delta U = PP' \times (\mathbf{u} + \epsilon) \qquad (\mathit{lim}\, \epsilon \equiv 0).$$

Si dividano ambo i membri per la grandezza di PP'. Sarà

$$\frac{\Delta U}{gr PP'} = \frac{PP'}{gr PP'} \times (\mathbf{u} + \epsilon),$$

ed il segmento $\frac{PP'}{gr PP'}$ è diretto secondo PP' ed eguale all'unità di misura. Si faccia ora tendere P' verso P, in modo che $\frac{PP'}{gr PP'}$ tenda ad un limite **p**, il quale sarà pure un segmento eguale all'unità di misura; sarà $lim \frac{\Delta U}{gr PP'} = \mathbf{p} \times \mathbf{u}$. Ora, supposto **u** non nullo, se l'angolo $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{u}}$ è acuto, sarà $\mathbf{p} \times \mathbf{u} > 0$, e poichè $gr$ PP' è un numero positivo, sarà anche, per posizioni di P' sufficientemente prossime a P, $\Delta U > 0$. Se invece l'angolo $\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{u}}$ è ottuso, sarà $\mathbf{p} \times \mathbf{u} < 0$, e, per posizioni di P' sufficientemente prossime a P, sarà $\Delta U < 0$. Noi diremo che il punto P si sposta nella direzione e senso del segmento **p**, eguale all'unità di misura, se, essendo P' una sua nuova posizione, $lim \frac{PP'}{gr PP'} = \mathbf{p}$. Quindi, da quanto si disse, si conchiude che:

Se U è funzione numerica del punto P, avente derivata **u** non nulla, se il punto P si sposta nella direzione e senso del segmento **p** che fa un angolo acuto con **u**, U cresce; se invece la direzione e senso in cui si sposta P fa un angolo ottuso con **u**, U diminuisce.

Questa proposizione serve nella ricerca dei massimi e minimi valori che assume U, qualora P varii o liberamente nello spazio, ovvero sia obbligato a condizioni restrittive, come a descrivere una linea od una superficie data. Se U diventa massima per una posizione speciale di P, è necessario che spostando P in ogni direzione e senso compatibile colle condizioni imposte, U diminuisca; e se U è minima per la posizione considerata di P, spostando P in ogni direzione e senso possibile, U deve crescere.

**12.** Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P variabile liberamente nello spazio, e se corrispondentemente ad una posizione di questo punto U diventa massima o minima, la derivata **u** di U, se esiste, è nulla.

Invero, se la derivata **u** non è nulla, spostando P in una direzione che faccia un angolo acuto con **u**, U cresce, e quindi non è massima corrispondentemente al punto considerato; spostando invece P in una direzione che faccia un angolo ottuso con **u**, U diminuisce, e quindi non è minima. Dunque, se **u** non è nullo, U non è nè massima nè minima.

Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P, il quale sta su d'una linea *l*, e, corrispondentemente ad una posizione speciale di P, U diventa massima o minima, se U ha derivata **u**, e la linea *l* ha in P una tangente, e questo punto non è di regresso sulla linea, la proiezione di **u** sulla tangente alla linea è nulla.

Invero, se la proiezione di **u** sulla tangente non è nulla, sarà anche **u** non nullo, nè normale alla linea. Ora, in virtù delle ipotesi fatte, il punto P si può spostare sulla linea, nella direzione della tangente, in due sensi opposti; e uno di questi fa con **u** un angolo acuto, e l'altro un angolo ottuso; quindi secondochè si sposta in un senso o nell'altro, U cresce, o diminuisce, e non è nè massima nè minima.

Teorema. — Se U è funzione numerica del punto P, il quale sta su d'una superficie S, e, corrispondentemente ad una posizione speciale di P, U diventa massima o minima, se U ha derivata **u**, e la superficie un piano tangente in P, e se sulla superficie si possono segnare almeno due linee passanti per P, aventi ivi tangenti distinte, e per le quali P non sia un punto di regresso, la proiezione di **u** sul piano tangente alla superficie è nulla.

Invero, le proiezioni di **u** sulle due tangenti alle linee descritte sulla superficie sono nulle; dunque o **u** è nullo, ovvero è normale alle due tangenti, e quindi normale al piano tangente, che le contiene. In ogni caso la proiezione di **u** sul piano tangente è nulla.

Questi teoremi sono una utile guida ed una regola di esclusione pella ricerca dei massimi e minimi d'una funzione U; per applicarli effettivamente, converrà determinare dapprima quei punti i quali soddisfano alle condizioni enunciate; e poi discutere se ad essi corrisponde un massimo, od un minimo, o nè l'uno nè l'altro. Questa discussione può essere più o meno facile a seconda della natura del problema; noi ne daremo alcuni esempi.

**13.** Si consideri la distanza del punto variabile P dal punto fisso O. La sua derivata **u** è un segmento diretto secondo OP, ed eguale all'unità di misura, salvochè P coincida con O, nel qual caso non si ha derivata. Quindi, in virtù di quanto si è detto, se P varia liberamente nello spazio, la sua distanza da O non diventa nè massima nè minima per alcuna posizione del punto, salvochè esso venga a coincidere con O. È evidente che, in questo ultimo caso, quella distanza diventa zero, che è il suo più piccolo valore.

Ma se P sta su d'una linea, e, corrispondentemente ad una sua posizione speciale distinta da O, OP è massima o minima, se la linea ha ivi una tangente, e il punto non è un punto di regresso, deve OP essere normale alla linea. Analogamente per le superficie. Ma il determinare i punti della linea, o superficie, le cui normali passano per O, e il riconoscere se la loro distanza sia massima o minima, è problema più o meno complicato, a seconda della natura della linea o superficie data. È noto come si determini facilmente la minima distanza da un punto ad una retta o piano dato, e la massima o minima distanza da un punto ad un cerchio o sfera data.

**14.** Si consideri la somma delle distanze del punto P dai punti fissi A e B. La sua derivata **u** è la risultante di due segmenti eguali diretti secondo AP e BP. Essa è nulla se P è un punto interno al segmento AB, non esiste se P coincide in A o B, ed è diversa da zero e la sua direzione è quella della bissettrice interna dell'angolo APB per ogni altra posizione di P. Quindi, se P è variabile liberamente nello spazio, la somma delle sue distanze da A e B non può diventar massima o minima per alcuna posizione di P che non appartenga al segmento AB, compresi gli estremi. Si vede immediatamente che in questo caso essa assume il suo piccolo valore.

Ma se il punto P sta su d'una linea fissa, e per una sua posizione speciale quella somma diventa massima o minima, se questo punto non appartiene al segmento AB, e se la linea ha ivi tangente, e il punto non è un punto di regresso, la bissetrice dell'angolo APB deve essere normale alla linea, ovvero anche le rette AP e PB devono fare colla tangente angoli eguali. Analogamente per le superficie.

Ecco come si può trattare il problema in un caso particolare.

Determinare su d'una retta data $l$ il punto per cui è minima la somma delle distanze da due punti dati A e B.

Se la retta $l$ incontra il segmento AB in un punto P interno od estremo al segmento, sarà evidentemente P il punto cercato.

Se la retta $l$ non incontra AB, si faccia ruotare il piano $l$B attorno alla $l$ finchè esso venga a coincidere col piano $l$A, ed in modo che il punto A e la nuova posizione di B, che diremo B′, giacciano da parti opposte della $l$. La retta AB′ incontri la $l$ in P; dico che P è il punto cercato. Invero sia Q un altro punto della $l$; sarà $PB = PB'$, $QB = QB'$; quindi $PA + PB = PA + PB' = AB'$, e $QA + QB = QA + QB' > AB'$; dunque $PA + PB < QA + QB$, c. v. d.

In modo analogo si determina il punto d'un piano per cui è minima la somma delle distanze da due punti dati. Ma se il luogo del punto P è p. e. un cerchio, anche supposti i punti A e B nel piano di questo cerchio, il determinare i punti del cerchio per cui le PA e PB fanno angoli eguali colla tangente è un celebre problema di grado superiore al secondo (problema di *Alhazen*).

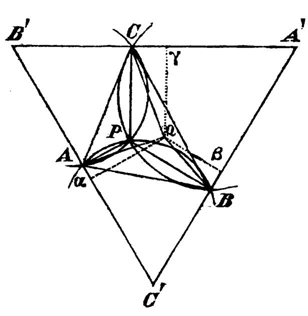
**15.** Si consideri ancora la somma delle distanze del punto P da tre punti fissi ABC. La sua derivata è la risultante di tre segmenti eguali all'unità di misura, e diretti secondo AP, BP, CP, salvochè P coincida con uno dei tre punti dati. Quindi, se P varia liberamente nello spazio, affinchè corrispondentemente ad una posizione speciale quella somma sia massima o minima, deve o P coincidere con uno dei punti ABC, ovvero deve annullarsi la risultante di tre segmenti diretti secondo PA, PB e PC ed eguali; ed affinchè questo avvenga è necessario che P giaccia nel piano ABC, e che le rette PA PB PC facciano a due a due angoli di 120°.

Ecco la trattazione rigorosa di questa questione.

Determinare il punto P per cui è minima la somma delle distanze da tre punti dati ABC.

Si supponga dapprima che nel triangolo ABC tutti gli angoli siano minori di 120°. Si descriva su AB un arco di cerchio giacente dalla parte di AB verso cui è posto C, e capace dell'angolo di 120°; e su AC un arco di cerchio analogo, pure capace dello stesso angolo. Questi archi si incontrino in P; dico che P è il punto cercato.

Invero, preso nel piano un altro punto Q, si conducano in A B C le normali alle PA PB PC le quali formano il triangolo A′B′C′. Gli angoli di questo triangolo sono supplementari di 120°, ossia valgono 60°, ed il triangolo A′B′C′ è equilatero. Dal punto Q si abbassino le perpendicolari $Q\alpha$, $Q\beta$, $Q\gamma$ sui lati di A′B′C′. È noto dalla geometria che $Q\alpha + Q\beta + Q\gamma \overline{\gtrless} PA + PB + PC$, e precisamente, se Q è pure interno al triangolo A′B′C′ si ha il segno $=$, e se esterno, il $>$. Ora, $QA > Q\alpha$, $QB > Q\beta$, $QC > Q\gamma$, perchè la perpendicolare è minore dell'obliqua;




dunque $QA + QB + QC > PA + PB + PC$, ossia la somma delle distanze di P dai punti ABC è minore della somma analoga per ogni altro punto del piano ABC.

Se poi si considera un punto R nello spazio, sia Q la sua proiezione di sul piano ABC. Sarà

$$RA > QA, \quad RB > QB, \quad RC > QC;$$

quindi

$$RA + RB + RC > QA + QB + QC > PA + PB + PC.$$

Dunque effettivamente la somma delle distanze del punto P dai punti ABC è minore della somma analoga per ogni altro punto dello spazio.

Si lascia al lettore l'esame del caso in cui un angolo superi i 120°, nel qual caso il vertice di quest'angolo è il punto cercato.

**16.** Il numero U potrebbe anche essere funzione della posizione di più punti P, Q, R, ..., e se, corrispondentemente ad una loro posizione speciale, U diventa massima o minima, supposti fissi tutti i punti uno eccettuato, la U diventa funzione di questo solo punto, che, per la sua posizione considerata, deve diventare massima o minima.

Così ad esempio, se PQ sono due punti appartenenti rispettivamente a due linee date $l$ ed $l'$, e se per essi è minima (o massima) la distanza fra due punti appartenenti alle linee, deve PQ essere la minima distanza di P da ogni punto Q della seconda linea, come pure la minima distanza del punto Q da ogni punto P della prima linea; quindi, se P e Q sono punti ordinarii delle due linee, deve la PQ essere una loro normale comune.

Se PQR sono tre punti di tre linee date, e corrispondentemente ad una loro posizione il perimetro del triangolo ABC, cioè la somma delle distanze PQ + QR + RP, è massimo o minimo, mantenendo fissi Q ed R, deve PQ + PR + QR essere minima per quella posizione considerata di P, e quindi le rette PQ e PR debbono essere egualmente inclinate rispetto alla tangente alla linea luogo dei punti P. Analogamente le QP e QR sono egualmente inclinate rispetto alla seconda linea, e lo stesso avviene di RP e RQ rispetto alla terza.

## Esercizii.

**17.** 1. Sia O un punto fisso, ed $l$ una retta fissa che supporremo passante per O; sia P un punto variabile. La derivata dell'angolo che la retta OP fa colla $l$ è un segmento contenuto nel piano $l$OP, normale ad OP, e la cui grandezza vale il reciproco della grandezza di OP.

2. Sia O un punto fisso, e $\pi$ un piano fisso. La derivata dell'angolo che la retta OP fa con $\pi$ è un segmento contenuto nel piano normale a $\pi$ e passante per OP; questo segmento è normale ad OP, e la sua grandezza vale il reciproco della grandezza di OP.

3. Siano nel piano $n$ punti $A_1 A_2 ... A_n$, ed $l$ una retta arbitraria. Dette $r_1 r_2 ... r_n$ le distanze d'un punto P dai punti fissi, e $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ gli angoli che le rette $A_1P$, $A_2P$, ... formano colla retta fissa $l$, per ogni punto del piano passa una curva per cui è costante la funzione $\log r_1 + \log r_2 + ... + \log r_n$, ed una curva per cui è costante la funzione $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$. Queste due curve si incontrano ad angolo retto.

Se i punti dati sono due, le prime curve sono ovali di Cassini, e le seconde iperboli equilatere.

4. Il luogo dei punti P per cui è costante la somma degli angoli che OP fa con due rette fisse $a$ e $b$, che supporremo passanti per O, è un cono di vertice O, che coincide col luogo delle rette OP che fanno colle due rette date angoli la cui somma è costante. Il piano tangente a questo cono lungo una generatrice OP è il piano che biseca esternamente l'angolo diedro formato dai piani O$Pa$ e O$Pb$.

5. Si consideri il cono di vertice O luogo delle rette OP per le quali è costante una data funzione analitica $f(\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n)$ degli angoli $\alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ che esse fanno con altrettante rette fisse $a_1 a_2 ... a_n$, che supporremo passanti per O. Si immagini il piano normale alla retta OP; si proiettino su questo piano le rette $a_1 a_2 ... a_n$, e si portino su queste proiezioni dei segmenti proporzionali a $\frac{df}{d\alpha_1}, \frac{df}{d\alpha_2}, \cdots \frac{df}{d\alpha_n}$. La loro risultante è normale al piano tangente al cono lungo la generatrice OP.

6. Determinare su d'una retta il punto per cui è massima la differenza delle distanze da due punti dati.

7. Determinare su d'una retta data il punto per cui è minima la somma delle distanze da un punto dato e da una retta data. I punti e le rette date stanno in un piano.

8. Determinare su d'una retta $r$ data il punto per cui è massima o minima la somma o la differenza delle distanze da due linee $l$ ed $l'$, date comunque nello spazio.

Si facciano ruotare le due linee $l$ ed $l'$ attorno ad $r$; esse genereranno due superficie di rivoluzione; siano $m$ ed $m'$ le intersezioni di un piano passante per $r$ con queste superficie (cioè i loro meridiani); sia AB la massima o minima distanza delle due linee $m$ ed $m'$; e la retta AB incontri la $r$ in P. Se P è un punto medio del segmento AB, esso è il punto della $r$ per cui è massima o minima la somma delle distanze da $l$ ed $l'$; se invece P appartiene al prolungamento di AB, esso è il punto per cui è massima o minima la differenza delle distanze delle $l$ ed $l'$.

9. Determinare su d'una retta, o su d'un piano, il punto per cui è minima la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati.

È il punto medio delle proiezioni dei punti dati.

10. Determinare su d'una retta o su d'un piano il punto per cui è massima o minima la somma dei quadrati delle distanze da $n$ punti dati, moltiplicate per $n$ numeri dati.

È la proiezione del baricentro dei punti dati, cui siano affissi i numeri dati.

11. Determinare il punto per cui è minima la somma delle distanze dai quattro vertici d'un quadrilatero piano convesso.

È il punto d'incontro delle diagonali.

12. Determinare il triangolo ABC, i cui vertici stanno su tre rette date nello spazio, e la cui area è minima, ovvero il cui perimetro è minimo, ovvero il cui cerchio circoscritto è minimo.

Le altezze del triangolo, ovvero le bissetrici, ovvero i raggi del cerchio circoscritto che vanno ai vertici del triangolo, debbono essere rispettivamente normali alle rette date.