CAPITOLO III.

Curve nello spazio e superficie.

§ 1. Tangente e piano osculatore.

1. Già si è definita la tangente ad una curva, anche quando questa non è contenuta in un piano, e si è visto che se il punto P, che descrive la curva, ha derivata prima **u** non nulla, la tangente alla curva è la retta avente la direzione della derivata prima; e se alcune delle derivate successive di P sono nulle, la tangente è la retta avente la direzione della prima fra le derivate non nulle.

Ma per le curve sghembe si presentano ancora altri elementi.

Dicesi *piano osculatore* ad una linea in un suo punto P_0 il limite del piano che contiene la tangente alla curva in P_0, e che passa per un altro punto P della linea ove il punto P tenda a P_0.

Si è pure detto che retta normale ad una curva in un punto è ogni retta passante per esso, e normale alla tangente. Queste rette formano un piano, detto *piano normale.*

Si è pure dimostrato che il piano normale alla curva nel punto P_0 si può considerare come il limite del piano luogo dei punti equidistanti da P_0 e da un altro punto P della curva, ove questo abbia per limite P_0.

Fra le normali meritano menzione speciale quella contenuta nel piano osculatore, e che dicesi *normale principale;* e quella che è normale al piano osculatore, e che dicesi *binormale.*

2. Il piano osculatore d'una curva è determinato, ove si conoscano le derivate del punto P, come mostrano le proposizioni che seguono.

TEOREMA I. — Se il punto P ha per $t = t_0$ derivate prima e seconda $\mathbf{u} \equiv P_0U$ e $\mathbf{v} \equiv P_0V$, nè nulle nè coincidenti in direzione, il piano P_0UV è il piano osculatore alla curva.

Invero si ha dalla formula di Taylor

$$\overline{P_0P} \equiv h\mathbf{u} + \frac{h^2}{2}(\mathbf{v} + \bar{\epsilon}),$$

ove $\bar{\epsilon}$ è un segmento che col tendere di h a zero ha per limite zero. Questa equipollenza dice che i segmenti $\overline{P_0P}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$ sono contenuti in uno stesso piano, ove per origine di questi si prenda sempre il punto P_0; e quindi il piano che contiene la derivata $\mathbf{u}$, ossia la tangente, e il punto P contiene pure il segmento $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$. Facciasi tendere h a zero. Il segmento $\mathbf{v} + \bar{\epsilon}$ ha per limite $\mathbf{v}$, ed il suo estremo il punto V estremo di $\mathbf{v}$; quindi il piano che passa per la tangente e per P ha per limite il piano P_0UV, c. v. d.

TEOREMA II. — Se il punto P ha per $t = t_0$ derivate prima e seconda continue, nè nulle nè coincidenti in direzione, il piano osculatore è anche il limite del piano che passa per tre punti della curva, ove questi si avvicinino indefinitamente a P_0.

Infatti, dati a t tre valori $t_1\, t_2\, t_3$, e detti $P_1\, P_2\, P_3$ i punti corrispondenti della linea, facciasi

$$P_1Q \equiv \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1}, \quad P_1R \equiv \frac{P_1P_3}{t_3 - t_1}, \quad \text{e } P_1S \equiv 2\,\frac{QR}{t_3 - t_2}.$$

I punti Q ed S trovansi nel piano $P_1\, P_2\, P_3$.

Presa una origine fissa O e posto $OP \equiv \mathbf{a}(t)$, si avrà:

$$P_1Q \equiv \mathbf{a}(t_1\, t_2), \; P_1R \equiv \mathbf{a}(t_1\, t_3), \; \text{e } P_1S \equiv 2\mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3).$$

Facciansi ora tendere $t_1\, t_2\, t_3$ a t_0. Il punto P_1 ha per limite P_0; inoltre poichè $\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2) \equiv \mathbf{a}'(t)$, e $\lim \mathbf{a}(t_1\, t_2\, t_3) \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{a}''(t)$, si deduce

$\lim P_1Q \equiv P_0U$, $\lim P_1S \equiv P_0V$, e quindi il piano $P_1\,P_2\,P_3$ che passa pei punti P_1QS aventi per limiti P_0 U e V ha per limite il piano P_0UV, c. v. d.

Ovvero:

Sia ω un'area contenuta nel piano $P_1P_2P_3$ (p. e. l'area del triangolo $P_1P_2P_3$), e si consideri il volume

$$V(t) = P_1P.\omega\,,$$

ove P è un punto della curva. Questo volume è funzione di t, ed ha derivate prima e seconda

$$V'(t) = \mathbf{u}.\omega\,, \qquad \text{e } V''(t) = \mathbf{v}.\omega.$$

Ora il volume $V(t)$ si annulla pei valori $t_1\ t_2\ t_3$ di t, perchè per questi valori di t il punto P coincide rispettivamente con $P_1P_2P_3$, e giace nel piano ω. Quindi, se $t_1 < t_2 < t_3$, pel teorema di Rolle, la derivata di $V(t)$ si annullerà per un valore di t medio fra t_1 e t_2, e per un secondo valore medio fra t_2 e t_3; ma se $V'(t) = \mathbf{u}.\omega$ è nullo, sarà $\mathbf{u}$ parallelo al piano ω; perciò il piano $P_1P_2P_3$ è parallelo alle derivate di due punti dell'arco $P_1P_2P_3$, e quindi anche alle tangenti alla curva in questi punti. Inoltre, poichè $V'(t)$ si annulla per due valori di t, la sua derivata $V''(t)$ si annullerà per un valore intermedio, ossia il piano ω è parallelo alla derivata seconda d'un punto dell'arco considerato.

Si passi al limite. I punti $P_1P_2P_3$, e tutti i punti di quest'arco hanno per limite il punto P_0; le derivate prime e seconde di questi punti hanno per limiti le derivate prima e seconda di P_0; e il piano $P_1P_2P_3$, parallelo a due derivate prime, e ad una derivata seconda ha per limite il piano passante per P_0, e che contiene le direzioni delle due derivate prima e seconda.

Si vede da questa dimostrazione che, sotto le condizioni enunciate, il piano osculatore è ancora il limite del piano passante per P_0, e parallelo alle tangenti alla curva in due punti che si avvicinano a P_0.

Teorema III. — Se delle derivate successive del punto

P per $t = t_0$, alcune sono nulle, e la prima non nulla è quella d'ordine p, $\mathbf{u}_p$; e se alcune derivate susseguenti all'ordine p sono nulle, ovvero la loro direzione coincide colla direzione di $\mathbf{u}_p$, e la prima di queste, nè nulla, nè coincidente in direzione con $\mathbf{u}_p$ è la $\mathbf{u}_q$, il piano osculatore alla curva in P_0 è il piano che contiene le direzioni delle derivate d'ordine p e d'ordine q.

Infatti, se le derivate d'ordine $1, 2, \ldots p-1$ sono nulle, e se le derivate d'ordine $p+1, \ldots q-1$, sono o nulle o parallele ad $\mathbf{u}_p$, mentrechè tale non è la $\mathbf{u}_q$, dalla formula di Taylor si ha

$$\overline{P_0P} \equiv \frac{h^p}{p!}\mathbf{u}_p + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\mathbf{u}_{p+1} + \ldots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}\mathbf{u}_{q-1} + \frac{h^q}{q!}(\mathbf{u}_q + \bar{\varepsilon})$$

ove $\bar{\varepsilon}$ è un segmento che ha per limite zero. Osservando che, per le ipotesi fatte, $\mathbf{u}_{p+1}, \ldots \mathbf{u}_{q-1}$ sono eguali ad $\mathbf{u}_p$ moltiplicati per numeri, si deduce

$$\overline{P_0P} \equiv m\mathbf{u}_p + n(\mathbf{u}_q + \bar{\varepsilon})$$

ove m ed n sono numeri. Quindi il segmento $\mathbf{u}_q + \bar{\varepsilon}$ è contenuto nel piano che passa per P_0, per la tangente P_0U_p alla curva, e pel punto P. Sia $\overline{P_0Q} \equiv \mathbf{u}_q + \epsilon$, e $\overline{P_0U_q} \equiv \mathbf{u}_q$. Sarà $\lim \overline{P_0Q} \equiv \overline{P_0U_q}$ ed il punto Q ha per limite U_q, e il piano P_0U_pP ossia P_0U_pQ ha per limite il piano $P_0U_pU_q$, c. v. d.

Si osservi però che, se alcune delle derivate successive del punto P sono nulle, non è più vero in generale che il piano osculatore sia ancora il limite del piano passante per tre punti della curva.

3. Sia lo spazio diviso in due parti da una superficie. Diremo che la linea AB *tocca* la superficie nel loro punto comune P se un arco AB della linea, contenente nel suo interno il punto P, giace tutto da una stessa parte della linea.

Diremo invece che la linea AB *taglia* la superficie in P, se due archi PA e PB aventi l'estremo comune P giacciono l'uno da una parte e l'altro dall'altra della superficie.

In modo analogo a quanto si è fatto per le curve piane, si può studiare il modo di comportarsi d'una curva rispetto ai piani che passano per un suo punto.

Teorema. Se il punto P è funzione di t avente derivata prima **u** non nulla per $t = t_0$, la linea luogo dei punti P taglia tutti i piani passanti per P_0, e non per la tangente. Se inoltre P ha derivata seconda **v** non nulla, nè coincidente colla derivata prima, la linea tocca tutti i piani passanti per la tangente, e distinti dal piano osculatore. Se infine P ha derivata terza **w** non nulla, nè giacente nel piano osculatore, la linea taglia il piano osculatore.

Invero, sia P_0AB un piano passante per P_0. Si consideri il volume $V(t) = P_0P.P_0A.P_0B$, il quale è funzione di t, che si annulla per $t = t_0$. La sua derivata prima è $V'(t) = \mathbf{u}.P_0A.P_0B$; e se il piano P_0AB non contiene la tangente, sarà $V'(t)$ diverso da zero; e quindi $V(t)$ crescente o decrescente; e, siccome si annulla per $t = t_0$, esso passa dal negativo al positivo, o viceversa, ossia il punto P passa da una parte all'altra del piano.

Se invece il piano contiene **u**, sarà $V'(t) = \mathbf{u}.P_0A.P_0B = 0$, e $V''(t) = \mathbf{v}.P_0A.P_0B$; e se il piano non contiene **v**, ossia è diverso dal piano osculatore, sarà $V''(t)$ diverso da zero; quindi $V(t)$ avrà il segno di $V''(t)$, ed il segmento P_0P è rivolto verso la stessa regione dello spazio verso cui è rivolto **v**.

Se infine il piano coincide col piano osculatore, sarà $V''(t) = 0$, e $V'''(t) = \mathbf{w}.P_0A.P_0B$; quindi, se la derivata terza di P, cioè **w**, non giace nel piano osculatore, sarà $V'''(t)$ diverso da zero; quindi $V(t)$ assumerà, nelle vicinanze di $t = t_0$, valori di segno contrario, e il punto P passa da una parte all'altra del piano.

Teorema. Se delle successive derivate $\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 \ldots$ del punto P per $t = t_0$ la prima non nulla è $\mathbf{u}_p$, e delle susseguenti la prima nè nulla nè coincidente in direzione con $\mathbf{u}_p$ è $\mathbf{u}_q$, e delle susseguenti la prima nè nulla nè giacente nel piano $\mathbf{u}_p\mathbf{u}_q$ è $\mathbf{u}_r$, allora:

Ogni piano passante per P_0 e non contenente la tangente è secato dalla linea se p è dispari, è toccato se p è pari.

Ogni piano passante per la tangente, e diverso dal piano osculatore, è secato dalla linea se q è dispari, è toccato se q è pari.

Il piano osculatore infine è secato dalla linea se r è dispari, è toccato se r è pari.

Invero, sia P_0AB un piano passante per P_0. Si consideri il volume

$$V(t) = P_0P.P_0A.P_0B;$$

la derivata n^a di $V(t)$ è

$$V^{(n)}(t) = \mathbf{u}_n.P_0A.P_0B.$$

Per $t = t_0$ si annullano, per le ipotesi fatte, $V(t)$ e le successive derivate $1^a, ..., p - 1^a$, e la derivata d'ordine p è $V^{(p)}(t) = \mathbf{u}_p.\, P_0A.\, P_0B$, la quale non è nulla se il piano P_0AB non contiene la tangente, cioè il segmento $\mathbf{u}_p$; e quindi $V(t)$ per $t = t_0$ cambia di segno se p è impari, ed in questo caso il punto P passa da una parte all'altra del piano, e la linea seca il piano. Se invece p è pari, $V(t)$ conserva un segno costante nelle vicinanze di $t = t_0$, e il punto P si trova nelle vicinanze di P_0 sempre da una stessa parte del piano; ossia la linea tocca il piano.

Se il piano P_0AB contiene la tangente, sarà $V^{(p)}(t) = \mathbf{u}_p.P_0A.\, P_0B = 0$, e saranno pure nulle alcune successive derivate, fino a quella d'ordine q, che sarà $V^{(q)}(t) = \mathbf{u}_q.P_0A.P_0B$, e questa non sarà nulla se il piano P_0AB non contiene $\mathbf{u}_q$, ossia è distinto dal piano osculatore. Se ora q è dispari, $V(t)$ per $t = t_0$ cambia segno, e la curva seca il piano P_0AB; se invece q è pari, $V(t)$ conserva nelle vicinanze di $t = t_0$ un segno costante, e la linea tocca il piano.

Se infine il piano P_0AB coincide col piano osculatore, saranno nulle le successive derivate di $V(t)$ fino a quella d'ordine r, $V^{(r)}(t) = \mathbf{u}_r.P_0A.P_0B$, la quale non è più nulla, perchè $\mathbf{u}_r$ non è nullo, nè giace nel piano osculatore. Quindi, se r è dispari, la curva seca il piano osculatore, e se r è pari, la curva lo tocca.

4. Un punto d'una curva dicesi *ordinario*, se la curva taglia tutti i piani passanti per esso e non contenenti la tangente, tocca tutti i piani passanti per la tangente, e distinti dal piano osculatore, e taglia il piano osculatore. Questo avviene se il punto P ha derivate prima, seconda e terza non nulle, nè giacenti in uno stesso piano; avviene pure se, conservando le notazioni dell'ultimo teorema, si ha p dispari, q pari e r dispari. Ogni punto non ordinario è detto *singolare*. Così se in un punto la curva tocca ogni piano non passante per la tangente (il che avviene quando p è pari), questo punto è detto *punto stazionario* o di *regresso*; se la curva taglia ogni piano passante per la tangente, e distinto dal piano osculatore (il che avviene se q è dispari), a questa tangente si dà il nome di *tangente stazionaria* o di *flesso*; e se la curva tocca il piano osculatore (il che avviene quando r è pari), questo vien detto *piano osculatore stazionario*. In uno stesso punto possono presentarsi anche due, o tutte e tre le singolarità accennate; e combinando insieme tutti i casi di parità o non dei tre numeri p, q, r, si hanno otto casi, uno dei quali corrisponde al punto ordinario, e gli altri sette a punti singolari variamente conformati. Oltre a queste singolarità della curva proveniente da elementi (punti, tangenti, piani osculatori) stazionarii, la curva ne può presentare altre, ove il punto che la descrive passi più volte per una stessa posizione, ovvero manchi di derivata.

Il volume formato colle tre prime derivate del punto P, cioè $\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}$ ha un'importanza nello studio della curva; se esso non è nullo, le tre derivate del punto P non stanno in un piano, e P è un punto ordinario della curva che esso descrive. Anche questo volume si può considerare come un limite.

Se P ha derivate 1ª, 2ª, 3ª, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ continue, se $P_1 P_2 P_3 P_4$ sono quattro punti della curva corrispondenti ai valori t_1 t_2 t_3 t_4 di t, si ha:

$$\lim \frac{\operatorname{vol} P_1P_2P_3P_4}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_4-t_1)(t_3-t_2)(t_4-t_2)(t_4-t_3)} = \frac{1}{72}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}.$$

Infatti, si ha

$$(1) \qquad P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} P_1P_2 . P_1P_3 . P_1P_4 \, .$$

Presa un'origine fissa O, e fatto $OP \equiv \mathbf{a}(t)$, sarà

$$OP_1 \equiv \mathbf{a}(t_1), \quad OP_2 \equiv \mathbf{a}(t_2), \quad OP_3 \equiv \mathbf{a}(t_3), \quad OP_4 \equiv \mathbf{a}(t_4),$$

e quindi

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} [\mathbf{a}(t_2) - \mathbf{a}(t_1)] \, . \, [\mathbf{a}(t_3) - \mathbf{a}(t_1)] \, . \, [\mathbf{a}(t_4) - \mathbf{a}(t_1)] \, .$$

Ora, ricorrendo alle funzioni interpolari, si hanno le formule

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t_2) &\equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_2 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1t_2) \\ \mathbf{a}(t_3) &\equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_3 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1t_2) + (t_3 - t_1)(t_3 - t_2)\, \mathbf{a}(t_1t_2t_3)\, , \\ \mathbf{a}(t_4) &\equiv \mathbf{a}(t_1) + (t_4 - t_1)\, \mathbf{a}(t_1t_2) + (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)\, \mathbf{a}(t_1t_2t_3) + \\ &\quad + (t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)\, \mathbf{a}(t_1t_2t_3t_4)\, ; \end{aligned}$$

quindi sostituendo

$$P_1P_2P_3P_4 = \frac{1}{6} (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)$$
$$\times \mathbf{a}(t_1t_2) . \mathbf{a}(t_1t_2t_3) . \mathbf{a}(t_1t_2t_3t_4).$$

Passando ora al limite, dopo aver diviso pel prodotto delle differenze delle t, ed osservando che

$$\lim \mathbf{a}(t_1t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{u}\, , \quad \lim \mathbf{a}(t_1t_2t_3) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{a}''(t) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{v}\, ,$$
$$\lim \mathbf{a}(t_1t_2t_3t_4) \equiv \frac{1}{6} \mathbf{a}'''(t) \equiv \frac{1}{6} \mathbf{w}\, ,$$

si ha la formula che volevasi dimostrare.

Si deduce da questo teorema che se $\mathbf{u} . \mathbf{v} . \mathbf{w}$ non è nullo, dovrà anche essere il volume $P_1P_2P_3P_4$, per posizioni sufficientemente prossime di questi punti, diverso da zero, ossia nelle vicinanze del punto considerato si può determinare un arco della curva in modo che ogni piano non l'incontri in più di tre punti.

§ 2. Formule.

5. Siano le coordinate $x\ y\ z$ d'un punto P nello spazio funzioni d'una variabile t. Sarà la posizione del punto P funzione di questa variabile; e detti **i**, **j**, **k** i tre segmenti di riferimento, si avrà

$$\mathrm{OP} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

onde derivando,

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

Quindi, se **u** non è nullo, ossia se $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ non sono nulle ad un tempo, la retta parallela ad **u** è la tangente alla curva.

Se M è un punto di questa tangente, e XYZ sono le sue coordinate, le coordinate del segmento PM sono $\mathrm{X}-x$, $\mathrm{Y}-y$, $\mathrm{Z}-z$; e se questo segmento è parallelo al segmento **u**, le loro coordinate sono proporzionali, ossia le equazioni:

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}} \tag{1}$$

sono soddisfatte dalle coordinate di tutti e soli i punti M della tangente; e perciò queste sono le equazioni della tangente.

Il piano normale alla curva è il piano passante per P e normale al segmento **u**; quindi l'equazione

$$\mathrm{PM} \times \mathbf{u} = 0,$$

che è soddisfatta da tutti i punti M del piano normale e solamente da essi, è l'equazione del piano normale, colla notazione dei segmenti.

Se XYZ sono le coordinate di M, e gli assi di riferimento sono ortogonali, l'equazione precedente diventa

$$(2)\qquad (X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} + (Z - z)\frac{dz}{dt} = 0,$$

la quale è l'equazione del piano normale in coordinate cartesiane ortogonali.

La derivata seconda del punto P è

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k};$$

se essa non è nulla, ossia se $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ non sono ad un tempo nulle, e se la sua direzione non coincide con quella di $\mathbf{u}$, ossia non si ha

$$\frac{d^2x}{dt^2} : \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} : \frac{dy}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} : \frac{dz}{dt},$$

il piano passante per P, e che contiene le direzioni di $\mathbf{u}$ e di $\mathbf{v}$ è il piano osculatore. Se M è un punto di esso, la sua equazione, colla notazione dei segmenti, è

$$PM.\mathbf{u}.\mathbf{v} = 0,$$

ossia, dette X, Y, Z le coordinate di M e sviluppando:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il piano normale e il piano osculatore si incontrano secondo la normale principale. Quindi le equazioni (2) e (3) sono le equazioni della normale principale.

La binormale è la perpendicolare in P al piano osculatore; quindi, se M è un punto di essa, ed X, Y, Z sono le sue coordinate, sarà PM perpendicolare ai segmenti $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e perciò le equazioni della binormale, colla notazione dei segmenti, sono:

$$PM \times \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad PM \times \mathbf{v} = 0;$$

introducendo le coordinate, esse diventano

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} + (Z - z)\frac{dz}{dt} = 0,$$

$$(X - x)\frac{d^2x}{dt^2} + (Y - y)\frac{d^2y}{dt^2} + (Z - z)\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Queste due equazioni si possono pure scrivere

$$\frac{X - x}{dyd^2z - dzd^2y} = \frac{Y - y}{dzd^2x - dxd^2z} = \frac{Z - z}{dxd^2y - dyd^2x}.$$

La derivata terza **w** del punto P è

$$\mathbf{w} = \frac{d^3x}{dt^3}\mathbf{i} + \frac{d^3y}{dt^3}\mathbf{j} + \frac{d^3z}{dt^3}\mathbf{k},$$

e se essa non è contenuta nel piano **u v**, ossia se **u.v.w** non è nullo, la curva taglia il piano osculatore, e P è un punto ordinario. Introducendo le coordinate, si ha

$$\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}.$$

Sono troppo facili a scriversi le equazioni della tangente, del piano osculatore, e delle altre rette e piani con essi collegati, e a discutersi le singolarità della curva ove sia nulla **u**, ovvero **v** sia o nulla, o coincidente con **u**, ovvero **w** o nulla, o contenuta nel piano **uv**.

6. La variabile indipendente t potrebbe coincidere con una delle coordinate, p. e. colla x. In questo caso saranno y e z funzioni di x

$$y = f(x), \qquad z = \varphi(x);$$

e le formule precedenti sono applicabili a questo caso, ove si sostituisca invece di $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ rispettivamente 1, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$,

$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$. Le equazioni (1) della tangente diventano, fatti sparire i denominatori:

$$(1') \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x), \quad \text{e} \quad Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x),$$

e l'equazione del piano osculatore

$$(3') \quad (X - x)\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\right) = (Y - y)\frac{d^2z}{dx^2} - (Z - z)\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Le y e z possono essere date quali funzioni implicite di x, cioè legate ad essa da due equazioni

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \text{e} \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

ed in questo caso servono pure le formule precedenti, ove in esse si sostituiscano alle derivate di y e z i loro valori ricavati colle regole note.

I valori delle derivate prime sono dati dalle equazioni

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

e se fra queste equazioni e le (1') si eliminano $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, si avranno le equazioni della tangente, espresse mediante quantità note.

Il metodo più comodo di eseguire questa eliminazione è di ricavare le derivate dalle (1'), e sostituirle nelle nuove equazioni. Moltiplicando per $X - x$, esse diventano

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dx}(Z - z) = 0,$$

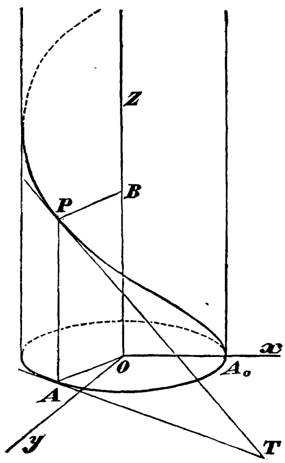
$$\text{e} \qquad \frac{d\Phi}{dx}(X - x) + \frac{d\Phi}{dy}(Y - y) + \frac{d\Phi}{dz}(Z - z) = 0.$$

Si osservi che ciascheduna di queste equazioni dipende solamente da una sola delle due equazioni date $F = 0$, e $\Phi = 0$. Derivando una seconda volta le equazioni date, si ottengono nuove equazioni che determinano le derivate seconde di y e z, e che sostituite nella

(3') determinano il piano osculatore; ma il risultato così ottenuto ha poca importanza, a causa della sua complicazione.

7. Elica. — Un esempio basterà ad illustrare le cose dette.

Sia OA un segmento, il quale parte da una origine O fissa, è contenuto in un piano fisso xOy, ha una lunghezza costante r, e fa con un asse Ox, fissato in questo piano, un angolo variabile α. Sia OB un altro segmento avente la direzione della normale Oz al piano yOx, e la cui lunghezza è proporzionale all'angolo α. Sia infine OP la loro somma geometrica



$$(a) \qquad \mathrm{OP} \equiv \mathrm{OA} + \mathrm{OB};$$

(il punto P si ottiene o conducendo da A il segmento $\mathrm{AP} \equiv \mathrm{OB}$, ovvero da B il segmento $\mathrm{BP} \equiv \mathrm{OA}$). Variando α, il punto P descrive una curva, detta *elica*. La retta mobile indefinita AP genera un cilindro circolare retto, avente per base il cerchio descritto da A, e sopra questo cilindro giace l'elica. La retta indefinita BP si muove pure, appoggiandosi sempre all'asse Oz e mantenendosi parallela al piano xOy; essa genera una superficie detta *elicoide retto*, e anche questa superficie contiene l'elica.

Se si fa $\alpha = 0$, il segmento OA viene in OA_0 sull'asse delle x, e OB si annulla; quindi A_0 è un punto dell'elica.

Se si fa $\alpha = 2\pi$, il segmento OA coincide di nuovo con OA_0, mentre il segmento OB assume un certo valore, cui si dà il nome di *passo dell'elica*. Noi indicheremo con **h** questo passo e con h il numero che lo misura. Attribuendo ad α un valore arbitrario, a causa della proporzionalità del segmento OB all'angolo corrispondente α, si deduce $\frac{\mathrm{OB}}{\alpha} \equiv \frac{\mathbf{h}}{2\pi}$, ossia

$$\mathrm{OB} \equiv \frac{\alpha}{2\pi}\,\mathbf{h}.$$

Si derivi l'equipollenza (a); detta $\mathbf{u}$ la derivata di P, e OA′ e OB′ le derivate dei segmenti OA e OB, si avrà

$$(b) \qquad \mathbf{u} \equiv OA' + OB'.$$

Ora OA′ è un segmento contenuto nel piano xy, eguale in lunghezza ad OA, e tale che l'angolo $AOA' = \frac{\pi}{2}$; e OB′ vale $\frac{1}{2\pi}\mathbf{h}$; quindi, se si fa $A'U \equiv OB' \equiv \frac{1}{2\pi}\mathbf{h}$, sarà OU la derivata del segmento OP, ossia del punto P, e la sua direzione la direzione della tangente all'elica in P. Poichè OU è perpendicolare ad OA, sarà la tangente alla curva in P perpendicolare a BP. Inoltre, detto θ l'angolo che la derivata OU fa col piano xy, ossia l'angolo che la tangente alla curva fa collo stesso piano, si ricava dal triangolo rettangolo OA′U:

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{A'U'}{OA'} = \frac{\frac{1}{2\pi}h}{r} = \frac{h}{2\pi r};$$

quindi la tangente all'elica fa un angolo costante col piano xy, vale a dire essa taglia sotto l'angolo costante le generatrici del cilindro su cui è tracciata.

Se la tangente alla curva in P incontra il piano xy nel punto T, sarà AT tangente al cerchio base in A, e dal triangolo rettangolo TAP si ricava $AT = \frac{AP}{tang\,\theta} = \alpha r$, ossia AT è eguale all'arco di cerchio AA_0.

Si derivi una seconda volta l'equipollenza $OP \equiv OA + OB$. Poichè la derivata seconda di OA è un segmento OA″ eguale in lunghezza ad OA, ma rivolto in senso opposto $OA'' \equiv -OA$, e poichè la derivata seconda di OB è nulla, detta $\mathbf{v}$ la derivata seconda di P, sarà

$$(c) \qquad \mathbf{v} \equiv -OA \equiv PB;$$

e il piano osculatore alla curva, che contiene la tangente e la direzione di $\mathbf{v}$, è adunque il piano che passa per PB, e per la tangente alla curva. La sua traccia col piano xy passa pel punto T, ed è parallela a PB, poichè questa retta è parallela al piano xy; dunque la traccia del piano osculatore col piano xy è la parallela condotta per T ad OA, cioè la normale ad AT.

Se si riferisce la curva agli assi cartesiani ortogonali Ox, Oy, Oz, le coordinate del segmento OA sono ($r\cos\alpha$, $r\operatorname{sen}\alpha$, 0), e le coordinate del segmento OB sono (0, 0, $\frac{\alpha}{2\pi}h$); quindi le coordinate del segmento OP, cioè del punto P, sono

$$x = r\cos\alpha\,, \quad y = r\operatorname{sen}\alpha\,, \quad z = \frac{\alpha}{2\pi}\,h.$$

Se fra la prima e la seconda equazione si elimina α, si ha l'equazione

$$x^2 + y^2 = r^2$$

del cilindro retto su cui è descritta l'elica; ovvero, interpretata nel piano xy, si ha l'equazione della proiezione dell'elica su questo piano. Eliminando α fra la seconda e terza equazione, si ha

$$y = r\operatorname{sen}\frac{2\pi}{h}\,z\,,$$

che è l'equazione d'una *sinusoide*, proiezione dell'elica sul piano yz. Se fra le tre equazioni si eliminano r ed α, si ha

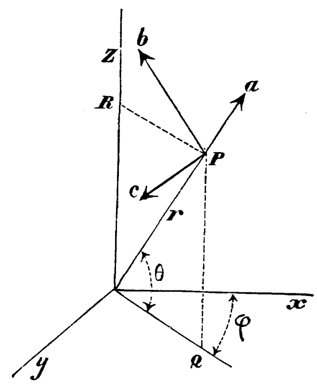
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{2\pi}{h}\,z\,,$$

che è l'equazione della superficie che contiene tutte le eliche aventi lo stesso passo h, lo stesso asse Oz, e la stessa origine A_0. Questa superficie è evidentemente l'elicoide retto generato dalla retta indefinita BP.

8. Coordinate polari. — Un punto P nello spazio può essere determinato mediante coordinate polari.

Segnati tre assi ortogonali Ox, Oy, Oz, dato il punto P, sono determinati il numero r che misura la distanza OP, l'angolo diedro

φ che il piano zP fa col piano zx, e l'angolo θ che OP fa col piano xy; e viceversa, dati questi numeri, è determinato il punto P. Le quantità r, φ, θ sono le coordinate polari di P, e diconsi anche rispettivamente raggio vettore, longitudine e latitudine.



La posizione del punto P è adunque funzione dei tre numeri r, θ, φ. Se si mantengono fisse θ e φ, e si varia r, il punto P si muove sulla retta OP, e la derivata parziale di P rispetto ad r è un segmento, che diremo **a**, eguale in lunghezza all'unità di misura, e diretto secondo OP. Mantenendo fissi r e φ, e variando θ, il punto P si muove su d'un cerchio contenuto nel piano fisso zP e di centro O; quindi la derivata parziale di P rispetto a θ, che coincide colla derivata di $\overline{\mathrm{OP}}$, è un segmento **b** contenuto in questo stesso piano, eguale in lunghezza ad OP, e che fa con questo un angolo retto. Infine, mantenendo fissi r e θ, e variando φ, il punto P descrive un cerchio contenuto in un piano normale ad Oz, avente il centro su questo asse, e il cui raggio è quindi la distanza PR di P da questo asse, la quale vale $r\cos\theta$; quindi la derivata parziale di P rispetto a φ è un segmento **c** tangente a questo cerchio in P, ossia normale in P al piano zP, e misurato dal numero $r\cos\theta$.

Così conosciute le derivate parziali **a**, **b**, **c** di P rispetto ad r, θ, φ, se queste coordinate sono funzioni d'un numero t, sarà anche P funzione di t, e la sua derivata è

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{a}\frac{dr}{dt} + \mathbf{b}\frac{d\theta}{dt} + \mathbf{c}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Poichè i segmenti **a**, **b**, **c** formano un triedro trirettangolo, **u** è la diagonale d'un parallelepipedo retto, i cui spigoli sono misurati da

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}, \quad r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt};$$

quindi, detto u il numero che misura la lunghezza di $\mathbf{u}$, si avrà

$$u = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

Se r è costante, la curva sta su d'una sfera di centro O e di raggio r; i numeri θ e φ sono le coordinate geografiche d'un punto della sfera; in questo caso nella espressione di $\mathbf{u}$ manca il primo termine a $\frac{dr}{dt}$.

9. Raccoglieremo qui alcuni risultati, già ottenuti, su limiti di segmenti, aree, volumi, distanze, ecc. collegati coi punti d'una curva, e da essi, con operazioni analitiche, dedurremo nuovi limiti che hanno una certa importanza nello studio delle curve.

Sia P un punto funzione di t; indicheremo con P_1 P_2, ... le posizioni di questo punto corrispondenti ai valori t_1 t_2 ... di t; supporremo che P abbia derivate $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, ... continue, e che segneremo con indici, ove corrispondano a valori di t pure segnati coll'indice; riferiremo inoltre il punto ad assi cartesiani ortogonali, e diremo x y z le coordinate di P; indicheremo con accenti le loro derivate. I limiti che seguono sono ottenuti facendo tendere t_1 t_2 ... verso uno stesso valore t.

Si è visto che (Cap. I, 16, e Cap. II, 3, teor. II)

$$\lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{u} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}. \tag{1}$$

Se indichiamo con u il numero che misura la grandezza di $\mathbf{u}$, ossia, se poniamo

$$u = gr\mathbf{u} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \tag{2}$$

la formula (1), ove si considerino i valori assoluti di ambo i membri, diventa:

$$\lim \frac{gr\, P_1P_2}{t_2 - t_1} = u. \tag{3}$$

Si è visto che (Cap. II, 9)

$$\lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{4}\,\mathbf{u}.\mathbf{v} \equiv \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \mathbf{j}.\mathbf{k} & \mathbf{k}.\mathbf{i} & \mathbf{i}.\mathbf{j} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Per maggior semplicità nei calcoli, invece di un'area della forma

$$\omega \equiv \alpha\,\mathbf{j}.\mathbf{k} + \beta\,\mathbf{k}.\mathbf{i} + \gamma\,\mathbf{i}.\mathbf{j},$$

ove α β γ sono numeri, si può considerare il segmento

$$\mathbf{a} \equiv \alpha\,\mathbf{i} + \beta\,\mathbf{j} + \gamma\,\mathbf{k},$$

poichè, data l'area è dato il segmento, e viceversa. Questo segmento, che rappresenta l'area è strettamente collegato coll'area stessa poichè la sua direzione è normale al piano dell'area ω, ed il numero che lo misura è eguale al numero che misura l'area (V. pag 28, Eserc. 5°).

Invero, se $\mathbf{b} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ è un nuovo segmento, sarà, eseguendo i calcoli,

$$\omega.\mathbf{b} = (\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}\,,$$

e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \alpha x + \beta y + \gamma z\,,$$

ossia il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è il numero che misura il volume $\omega.\mathbf{b}$, (poichè $\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$ è l'unità di volume). Dunque, se $\mathbf{b}$ è parallelo al piano dell'area ω, e quindi $\omega.\mathbf{b} = 0$, dovrà anche essere $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, e $\mathbf{a}$ perpendicolare a $\mathbf{b}$: pertanto il segmento $\mathbf{a}$, che è normale a tutte le rette parallele al piano ω, è normale a questo piano. Inoltre, poichè il numero che misura $\omega.\mathbf{b}$ vale il prodotto del numero che misura ω per la proiezione sulla normale ad ω, ossia sulla direzione di $\mathbf{a}$, del segmento $\mathbf{b}$, e siccome $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vale il prodotto del numero che misura $\mathbf{a}$ per la proiezione di $\mathbf{b}$ sulla direzione di $\mathbf{a}$, dall'eguaglianza di questi prodotti si deduce che il numero che misura $\mathbf{a}$ coincide col numero che misura ω.

Ciò premesso, se nel nostro caso diciamo $\mathbf{U}$ il segmento che rappresenta l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, ossia poniamo

$$\mathbf{U} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

sarà $gr.\mathbf{U} = gr.\mathbf{uv}$. Ora la grandezza di $\mathbf{U}$ si sa calcolare coi metodi noti; dunque, detto ω il numero che misura il valor assoluto dell'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, si deduce

$$(5) \qquad \omega = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = \sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}.$$

E se nella formula (4) non si considerano in ambi i membri che i valori assoluti, si deduce:

$$(6) \qquad \lim \frac{gr P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} = \frac{1}{4}\,\omega.$$

La formula (4) si può scrivere

$$\lim \frac{P_1P_2}{(t_2-t_1)} \cdot \frac{P_1P_3}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.$$

Se qui si passa al limite facendo tendere dapprima t_1 e t_2 verso uno stesso valore t_1, tenendo conto della (1), e dopo il calcolo posto l'indice 2 invece dell'indice 3, si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.P_1P_2}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}. \tag{7}$$

Sia h il numero che misura la distanza di P_2 dalla tangente in P_1, la quale tangente ha la direzione di $\mathbf{u}_1$; sarà

$$gr(\mathbf{u}_1.P_1P_2) = (gr\mathbf{u}_1) \times h.$$

Quindi se nella formula (7) si considerano le grandezze di ambo i membri e si divide per $u = gr\mathbf{u}$, si ha

$$\lim \frac{h}{(t_2-t_1)^2} = \frac{w}{2u}\,. \tag{8}$$

Le formule (1), (4), (7) si possono applicare a segmenti, invece che a punti, ricorrendo alle relazioni $P_1P_2 \equiv OP_2 - OP_1$, $P_1P_2P_3 \equiv \frac{1}{2} P_1P_2 . P_1P_3 \equiv \frac{1}{2}(OP_2 - OP_1).(OP_3 - OP_1)$; e poi sostituendo ad OP un segmento $\mathbf{a}$. Se $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$.... sono le derivate di questo segmento, si ricava

$$\lim \frac{\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1}{t_2-t_1} \equiv \mathbf{a}', \qquad \lim \frac{(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1).(\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{a}'.\mathbf{a}'',$$

$$\lim \frac{\mathbf{a}'_1.(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{a}'.\mathbf{a}''.$$

Se in queste formule si sostituiscono ad $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}''$, ... rispettivamente $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$,..., si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1}{t_2-t_1} \equiv \mathbf{v}\,, \qquad \lim \frac{(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1).(\mathbf{u}_3-\mathbf{u}_1)}{(t_2-t_1)(t_3-t_1)(t_3-t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{v}.\mathbf{w}\,,$$

$$\lim \frac{\mathbf{v}_1.(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)}{(t_2-t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{v}.\mathbf{w}\,;$$

e quindi

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{u}.\mathbf{v}\,, \tag{9}$$

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2.\mathbf{u}_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}\,, \tag{10}$$

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.\mathbf{u}_2}{(t_2 - t_1)^2} \equiv \frac{1}{2}\,\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}\,. \tag{11}$$

Prendansi, nella (9), i valori assoluti di ambi i membri; indicando con $\widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}$ l'angolo acuto che fanno le direzioni di $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, ossia le tangenti alla curva nei punti P_1 e P_2, si avrà

$$gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2) = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}$$

quindi, dividendo per $(gr\mathbf{u})^2 = u^2$,

$$\lim \frac{\operatorname{sen} \widehat{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2}}{t_2 - t_1} = \lim \frac{\widehat{\mathbf{u}_1\,\mathbf{u}_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{u^2}\,. \tag{12}$$

Si indichi con $sen(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ il seno del triedro formato colle direzioni $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, ossia il rapporto del volume del parallelepipedo compreso fra i segmenti $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$ al parallelepipedo rettangolo, i cui spigoli sono eguali in grandezza ad $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$. Si avrà

$$\mathbf{u}_1.\mathbf{u}_2.\mathbf{u}_3 = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times (gr\mathbf{u}_3) \times \operatorname{sen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3).$$

Quindi dalla (10), dividendo per $(gr\mathbf{u})^3 = u^3$, e posto

$$\Delta = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}\,, \tag{13}$$

si ricava

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)}{(t_2 - t_1).(t_3 - t_1).(t_3 - t_2)} = \frac{\Delta}{2u^3}\,. \tag{14}$$

Indicando con $(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1; \mathbf{u}_2)$ l'angolo formato dal piano che contiene l'area $\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1$, ossia il piano osculatore alla curva in P_1, colla direzione $\mathbf{u}_2$, ossia colla tangente alla curva in P_2, si ha

$$\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.\mathbf{u}_2 = [gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1)] \times (gr\mathbf{u}_2) \times \operatorname{sen}(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1\,;\ \mathbf{u}_2)\,;$$

quindi dalla (11), dividendo per $gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = \omega$, e per $gr\mathbf{u} = u$, si ha

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1\,;\ \mathbf{u}_2)}{(t_2 - t_1)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\Delta}{\omega \times u}\,. \tag{15}$$

Se nella formula (12) invece del segmento $\mathbf{u}$ si legge il segmento $\mathbf{U}$, e quindi invece di $\mathbf{v}$ si legge $\mathbf{V}$, derivata di $\mathbf{U}$, e invece di $\omega = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v})$ si legge $gr(\mathbf{U}.\mathbf{V})$ si ha:

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{U}_1,\mathbf{U}_2)}{t_2 - t_1} = \frac{gr(\mathbf{U}.\mathbf{V})}{\mathbf{U}^2} .$$

Ora, poichè il segmento $\mathbf{U}$ rappresenta l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, il segmento $\mathbf{V}$, derivata di $\mathbf{U}$ rappresenta l'area $\mathbf{u}.\mathbf{w}$ derivata di $\mathbf{u}.\mathbf{v}$, e quindi

$$gr(\mathbf{U}.\mathbf{V}) = (gr\mathbf{U}) \times (gr\mathbf{V}) \operatorname{sen}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) =$$

$$= (gr\mathbf{u}) \times (gr\mathbf{v}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uv}} \times (gr\mathbf{u})(gr\mathbf{w}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uw}} \operatorname{sen}(\mathbf{u}.\mathbf{v};\, \mathbf{u}.\mathbf{w}) ,$$

ove si indichi con $(\mathbf{u}.\mathbf{v};\, \mathbf{u}.\mathbf{w})$ l'angolo formato dai piani delle aree $\mathbf{u},\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}.\mathbf{w}$, che coincide coll'angolo $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ formato dalle loro normali. Ora, da formule note di trigonometria si ha

$$(gr\mathbf{u})(gr\mathbf{v})(gr\mathbf{w}) \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uv}} \operatorname{sen}\widehat{\mathbf{uw}} \operatorname{sen}(\mathbf{uvw}) = gr(\mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w}) = \Delta ,$$

quindi sostituendo

$$\lim \frac{\operatorname{sen}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)}{t_2 - t_1} = \frac{u\Delta}{\omega^2} . \tag{16}$$

Si osservi che, a sinistra, l'angolo piano $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2$ misura l'angolo diedro dei piani osculatori in P_1 e P_2.

Si è pure trovato (N. 4)

$$\lim \frac{P_1P_2P_3P_4}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)} = \tag{17}$$

$$= \frac{1}{72}\, \mathbf{u}.\mathbf{v}.\mathbf{w} = \frac{1}{72}\, \Delta .$$

Questa formula si può scrivere

$$\lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} \cdot \frac{P_1P_4}{(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)(t_4 - t_3)} = \frac{1}{24}\, \Delta ;$$

e se nel membro di sinistra si fanno tendere $t_1\ t_2\ t_3$ ad uno stesso valore t_1, servendoci della (4), e sostituendo l'indice 2 al 4, si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.P_1P_2}{(t_2 - t_1)^3} = \frac{1}{6}\, \Delta . \tag{18}$$

Detto k il numero che misura la distanza di P_2 dal piano dell'area $\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1$, ossia dal piano osculatore in P_1, e osservando che

$$gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1.P_1P_2) = [gr(\mathbf{u}_1.\mathbf{v}_1)] \times k\,,$$

si deduce

$$\lim \frac{k}{(t_2 - t_1)^3} = \frac{\Delta}{6\omega}\,. \tag{19}$$

La formula (17) si può pure scrivere

$$\lim \frac{P_1P_2}{t_2 - t_1} \cdot \frac{P_2P_3}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_4 - t_1)(t_4 - t_2)} \cdot \frac{P_3P_4}{t_4 - t_3} = \frac{1}{12}\Delta\,,$$

e passando al limite, facendo tendere t_1 e t_2 ad uno stesso valore t_1, e t_3 e t_4 ad uno stesso valore t_3, e poi scambiando l'indice 3 in 2, si ha

$$\lim \frac{\mathbf{u}_1.P_1P_2.\mathbf{u}_2}{(t_2 - t_1)^4} = \frac{1}{12}\Delta\,.$$

Ora è noto dalla trigonometria che

$$gr(\mathbf{u}_1.P_1P_2.\mathbf{u}_2) = (gr\mathbf{u}_1) \times (gr\mathbf{u}_2) \times \delta \operatorname{sen} \widehat{\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2},$$

ove δ rappresenta la minima distanza delle rette su cui trovansi $\mathbf{u}_1$ ed $\mathbf{u}_2$, ossia la minima distanza delle tangenti alla curva in P_1 e P_2. Quindi dall'ultima formula scritta si ricava

$$\lim \frac{\delta \operatorname{sen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{(t_2 - t_1)^4} = \frac{\Delta}{12u^2}\,; \tag{20}$$

e dividendo questa formula per la (12) si ha

$$\lim \frac{\delta}{(t_2 - t_1)^5} = \frac{\Delta}{12\omega}\,. \tag{21}$$

§ 3. Piano tangente alle superficie.

10. Diremo superficie il luogo delle posizioni d'un punto variabile P, la cui posizione dipende da due numeri variabili u e v. Supporremo che attribuendo ad u e v due coppie di valori distinte, almeno in certi intervalli, anche le posizioni corrispondenti di P siano distinte. Supporremo inoltre che P sia funzione continua di u e v, cioè se i valori di u e v corrispondenti a P hanno per limiti u_0 e v_0 corrispondenti a P_0, il punto P abbia per limite P_0, e viceversa, se P tende a P_0, u e v abbiano per limiti u_0 e v_0.

Se, dopo aver assegnato il valore di v, si fa variare u, il punto P descrive una curva giacente sulla superficie e determinata dal valore attribuito a v. Variando questo valore, si hanno infinite curve analoghe, il cui insieme forma la superficie. Si otterrebbe un altro sistema di infinite curve sulla superficie scambiando le veci delle variabili u e v.

Sia P_0 un punto fisso della superficie, e P un altro punto della stessa, che si avvicini indefinitamente a P_0. Nei casi più comuni esiste un piano passante per P_0 e tale che l'angolo acuto fatto dalla retta P_0P con questo piano ha per limite zero quando P tende a P_0. A un piano siffatto si dà il nome di *piano tangente* alla superficie; la sua giacitura dicesi anche *giacitura della superficie* nel punto P_0. La perpendicolare al piano tangente nel punto P_0 dicesi *normale* alla superficie in questo punto.

Così ad esempio, se la superficie è un piano, in ogni suo punto P_0 il piano tangente è il piano stesso; poichè la retta P_0P che unisce P_0 ad un altro punto P della superficie fa con questo piano un angolo nullo, e che quindi ha per limite zero. Se la superficie è una sfera di centro C, il piano tangente in un suo punto P_0 è il piano perpendicolare in P_0 al raggio CP_0, ossia coincide col piano tangente quale è definito dalla geometria elementare; invero l'angolo che la retta P_0P fa con questo piano è eguale alla metà dell'angolo PCP_0, ed ha per limite zero se tende a P_0.

Vedremo più tardi che, in generale, il piano tangente si può anche considerare come un limite.

11. Invece di considerare l'angolo che la retta P_0P fa col piano tangente, riesce spesso più conveniente adoperare il teorema che segue:

Teorema. — Se, per ogni retta P_0P che unisce il punto fisso P_0 col punto variabile P della superficie, si può condurre un piano che, col tendere di P a P_0, abbia per limite un piano fisso, questo piano fisso è il piano tangente alla superficie in P_0.

Viceversa, se la superficie ha un piano tangente in P_0, per ogni retta P_0P che unisce P_0 con un altro punto P della superficie si può condurre un piano che abbia per limite il piano tangente alla superficie, ove P tenda a P_0.

Infatti, sia α il piano passante per P_0P, ed avente per limite il piano fisso π. L'angolo di P_0P con π è minore dell'angolo dei piani α e π. E poichè quest'angolo ha per limite zero, anche l'angolo di P_0P con π ha per limite zero e π è il piano tangente.

Viceversa, se π è il piano tangente alla superficie in P_0, sia α il piano passante per P_0P e per la normale a P_0P contenuta in π. L'angolo dei piani α e π è uguale all'angolo che la retta P_0P fa col piano π, e poichè questo angolo ha per limite zero, anche gli angoli dei piani α e π ha per limite zero, ed il piano α ha per limite π.

È chiaro che se una superficie ha un piano tangente in P_0, e su essa sta descritta una curva avente tangente in P_0, questa tangente alla curva è contenuta nel piano tangente alla superficie. Invero, sia P un altro punto della curva, e quindi della superficie; e sia α un piano passante per P_0P ed avente per limite il piano tangente. Poichè la retta P_0P ha per limite la tangente alla curva, il piano α che contiene la P_0P ha per limite un piano che contiene la tangente alla curva. Ma il piano α ha per limite il piano tangente; dunque il piano tangente alla superficie contiene anche la tangente alla curva descritta su essa.

Viceversa, dal sapere che una superficie ha un piano tangente in P_0, e che una curva passa per questo punto e giace sulla superficie, non è lecito dedurre che questa curva abbia una tangente in P_0. Però questa conseguenza sarà lecita qualora siano imposte alla curva altre condizioni convenienti. Il caso che più spesso si presenta è il seguente:

Teorema. — *Se due superficie hanno comuni i punti di una linea, e in un punto P_0 di questa linea le superficie hanno piani tangenti distinti, anche la linea d'intersezione delle superficie ha in P_0 una tangente, che è l'intersezione dei piani tangenti alle superficie.*

Infatti, sia P un altro punto appartenente alla linea, e quindi alle due superficie; e siano π e π' i piani tangenti alle superficie in P_0. Per la retta P_0P si può condurre un piano α avente per limite π, ed un piano α' avente per limite π'. Ora, passando al limite, la retta P_0P, intersezione dei piani α ed α', ha per limite l'intersezione dei piani π e π', cioè la tangente alla linea d'intersezione della superficie è l'intersezione dei loro piani tangenti.

Come caso speciale, la linea d'intersezione d'un piano colla superficie ha per tangente in un suo punto l'intersezione di questo piano col piano tangente alla superficie in quel punto.

12. Un criterio analitico per riconoscere l'esistenza e determinare il piano tangente ad una superficie è somministrato dalla proposizione che segue.

Teorema. — *Se il punto P è funzione delle variabili u e v, avente derivate parziali di primo ordine continue, non nulle e non coincidenti in direzione, il piano tangente in un punto della superficie descritta da P è il piano passante per questo punto e contenente le direzioni delle due derivate parziali.*

Infatti, siano $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ le derivate parziali del punto P; data alle variabili la nuova coppia di valori $u+h$, $v+k$, detto P' il punto corrispondente della superficie, si ha

$$\overline{PP'} \equiv (\mathbf{p}+\bar{\alpha})h+(\mathbf{q}+\bar{\beta})k,$$

ove $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono segmenti che hanno per limite zero col tendere di h e k a zero. Facciasi $PA \equiv \mathbf{p}$, $PB \equiv \mathbf{q}$, $PC \equiv \mathbf{p} + \bar{\alpha}$, $PD \equiv \mathbf{q} + \bar{\beta}$. Il segmento PP′ è una combinazione lineare di PC e PD, quindi la retta PP′ è contenuta nel piano PCD. Si passi al limite. I punti C e D hanno per limiti A e B, quindi il piano PP′CD ha per limite il piano PAB.

Perciò ogni retta PP′ è contenuta in un piano avente per limite il piano fisso PAB, dunque questo è il piano tangente alla superficie nel punto P.

13. Per giudicare del modo di comportarsi della superficie rispetto al piano tangente, dicansi ancora $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ le derivate di primo ordine del punto P, e $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ le sue derivate del secondo ordine, che supporremo anche continue. Si ha dalla formula di Taylor

$$PP' \equiv \mathbf{p}h + \mathbf{q}k + \frac{1}{2}\left[(\mathbf{r}+\alpha)h^2 + 2(\mathbf{s}+\beta)hk + (\mathbf{t}+\gamma)k^2\right],$$

ove α, β, γ sono segmenti aventi per limite zero. Si consideri il volume $V = \mathbf{p}.\mathbf{q}.PP'$ formato dall'area $\mathbf{p}.\mathbf{q}$ che sta nel piano tangente e dal segmento PP′. Si ricava

$$V = \mathbf{p}.\mathbf{q}.PP' = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{r} + \mathbf{p}.\mathbf{q}.\alpha)h^2 + 2(\mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{s} + \mathbf{p}.\mathbf{q}.\beta)hk\right.$$
$$\left. + (\mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{t} + \mathbf{p}.\mathbf{q}.\gamma)k^2\right],$$

ovvero, posto

$$A = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{r}\,, \quad B = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{s} \quad \text{e} \quad C = \mathbf{p}.\mathbf{q}.\mathbf{t}\,,$$

e chiamando α' β' γ' i volumi infinitesimi $\mathbf{p}.\mathbf{q}.\alpha$, $\mathbf{p}.\mathbf{q}.\beta$ e $\mathbf{p}.\mathbf{q}.\gamma$, si ha

$$V = \frac{1}{2}\left[(A+\alpha')h^2 + 2(B+\beta')hk + (C+\gamma)k^2\right],$$

la quale formula si può pure interpretare supponendo che A, B, C, α', β', γ', V, invece di rappresentare i volumi, rappresentino i numeri che misurano questi volumi.

Ora è noto dal calcolo (N. 133 e segg.), che se la quantità

$$\Delta = AC - B^2$$

è positiva, V conserva un segno costante per valori sufficientemente piccoli di h e k, e quindi il volume **p.q**.PP$'$ ha sempre uno stesso senso, purchè P$'$ sia prossimo a P; vale a dire nelle vicinanze del punto considerato la superficie giace tutta da una parte del piano tangente. Un punto per cui $\Delta > 0$ dicesi *punto ellittico.*

Se invece Δ è negativo, V assume valori di segno contrario variando h e k, e comunque si prendano questi piccoli; quindi la superficie ha i suoi punti, nelle vicinanze di P, alcuni da una parte ed altri dall'altra del piano tangente. Un punto per cui $\Delta < 0$, dicesi *punto iperbolico.*

Se infine $\Delta = 0$, il punto dicesi *parabolico,* e l'esame del modo di comportarsi della superficie rispetto al piano tangente presenta maggiori difficoltà.

14. Si riferisca il punto P, funzione dei numeri u e v, e che genera la superficie, a tre assi cartesiani ortogonali, e siano x, y, z le sue coordinate, che son pure funzioni di u e v.

Conservando le notazioni precedenti, si avrà

$$\mathbf{p} \equiv \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}, \quad \mathbf{q} \equiv \frac{dx}{dv}\mathbf{i} + \frac{dy}{dv}\mathbf{j} + \frac{dz}{dv}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} \equiv \frac{d^2x}{du^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{du^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{du^2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{s} \equiv \frac{d^2x}{dudv}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dudv}\mathbf{j} + \frac{d^2x}{dudv}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{t} \equiv \frac{d^2x}{dv^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dv^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dv^2}\mathbf{k}.$$

Se M è un punto del piano tangente, sarà

$$\mathrm{PM}.\mathbf{p}.\mathbf{q} = 0;$$

e, dette XYZ le coordinate di M, l'equazione del piano tangente diventa

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \dfrac{dx}{du} & \dfrac{dy}{du} & \dfrac{dz}{du} \\ \dfrac{dx}{dv} & \dfrac{dy}{dv} & \dfrac{dz}{dv} \end{vmatrix} = 0.$$

Se il punto M sta sulla normale alla superficie, sarà

$$PM \times \mathbf{p} = 0, \quad PM \times \mathbf{q} = 0;$$

queste sono le equazioni della normale colla notazione dei segmenti. Introducendo le coordinate di P, M, **p**, **q**, esse diventano

$$(X - x)\frac{dx}{du} + (Y - y)\frac{dy}{du} + (Z - z)\frac{dz}{du} = 0,$$

e
$$(X - x)\frac{dx}{dv} + (Y - y)\frac{dy}{dv} + (Z - z)\frac{dz}{dv} = 0,$$

che si possono pure scrivere

$$\frac{X - x}{\frac{dy}{du}\frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv}\frac{dz}{du}} = \frac{Y - y}{\frac{dz}{du}\frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv}\frac{dx}{du}} = \frac{Z - z}{\frac{dx}{du}\frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv}\frac{dy}{du}}.$$

I volumi $A = \mathbf{p.q.r}$, $B = \mathbf{p.q.s}$, $C = \mathbf{p.q.t}$ si possono pure esprimere mediante le coordinate, e si ha

$$A = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{dx}{dv} & \frac{dy}{dv} & \frac{dz}{dv} \\ \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2x}{dudv} & \frac{d^2x}{dv^2} \end{vmatrix},$$

e analogamente per B e C.

15. Le variabili u e v, da cui dipende la posizione del punto P della superficie, possono essere due delle coordinate del punto P. Se le coordinate x ed y sono le variabili indipendenti, sarà z funzione di x ed y

$$z = f(x, y).$$

Si avrà in questo caso, facendo $u = x$ e $v = y$,

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{i} + \frac{dz}{dx}\mathbf{k}, \quad \mathbf{q} \equiv \mathbf{j} + \frac{dz}{dy}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r} \equiv \frac{d^2z}{dx^2}\mathbf{k}, \quad \mathbf{s} \equiv \frac{d^2z}{dxdy}\mathbf{k}, \quad \mathbf{t} \equiv \frac{d^2z}{dy^2}\mathbf{k};$$

l'equazione del piano tangente diventa

$$\mathrm{Z} - z = \frac{dz}{dx}(\mathrm{X} - x) + \frac{dz}{dy}(\mathrm{Y} - y);$$

i volumi indicati con A, B, C si riducono alle derivate seconde di z rispetto ad x ed y, ove **i.j.k** sia l'unità di volume, e

$$\Delta = \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2.$$

La z potrebbe essere funzione implicita di x ed y, cioè legata ad essa mediante un'equazione

$$\mathrm{F}(x, y, z) = 0.$$

Supposto che questa equazione determini effettivamente la z in funzione di x ed y, e supposto ancora $\frac{dF}{dz}$ non nulla, si avranno, per determinare $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, le equazioni

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \qquad \text{e} \qquad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0;$$

eliminando, fra queste due equazioni e quella del piano tangente, $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$, il che si ottiene aggiungendo all' equazione del piano tangente queste due moltiplicate per $\mathrm{X} - x$ e $\mathrm{Y} - y$, si ha

$$\frac{dF}{dx}(\mathrm{X} - x) + \frac{dF}{dy}(\mathrm{Y} - y) + \frac{dF}{dz}(\mathrm{Z} - z) = 0,$$

che è l'equazione del piano tangente alla superficie, ed in questa equazione non compaiono che le derivate parziali di F rispetto alle tre variabili x, y, z.

Così p. e. se l'equazione della superficie è di secondo grado

$$\mathrm{F}(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44} + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z_2 = 0,$$

si ricava

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dx} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dy} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dz} = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34},$$

e quindi l'equazione del piano tangente è:

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})(X - x) +$$
$$+ (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})(Y - y) +$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})(Z - z) = 0.$$

Se a questa equazione si aggiunge la $F(x, y, z) = 0$, l'equazione del piano tangente assume la forma

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})X + (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})Y +$$
$$+ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})Z + (a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}) = 0.$$

§ 4. Esempi.

16. Coni. — Se da un punto fisso V si conducono le rette a tutti i punti d'una linea l, queste rette formano una superficie detta *cono*. Il punto V ne è il *vertice*, la linea l la *base*, o *direttrice*; ed essa può essere piana, ovvero non; ogni retta che unisce V con un punto della l dicesi *generatrice*.

Teorema. — Se At è la tangente alla linea base nel suo punto A, ed essa non coincide colla generatrice VA del cono, il piano VAt è tangente alla superficie conica in tutti i punti della generatrice VA.

Infatti, sia P un punto della generatrice VA, P′ un altro punto della superficie e VA′ la generatrice passante per esso. La retta PP′ è contenuta nel piano VAA′. Facciasi tendere P′ a P; la retta AA' ha per limite la At tangente alla base in A, e il piano VAA' ha per limite il piano VAt. Dunque la retta PP' è contenuta in un piano che ha per limite il piano fisso VAt; quindi questo piano è il piano tangente alla superficie in P, cioè in ogni punto della generatrice VA.

Cilindri. — Dicesi *superficie cilindrica* o *cilindro,* la superficie luogo delle rette passanti per i punti d'una linea fissa l, e parallele ad una retta fissa r. La linea l dicesi ancora *base,* o *direttrice* del cilindro. Un cilindro si può considerare come un cono in cui il vertice sia all'infinito.

In modo analogo a quanto si è detto pel cono, si dimostra che:

Se At è la tangente in A alla linea base d'una superficie cilindrica ed essa non coincide colla generatrice passante per A, il piano che contiene questa generatrice e la tangente At è il piano tangente al cilindro in tutti i punti della generatrice passante per A.

L'intersezione d'un piano con un cono o con un cilindro è la proiezione su questo piano della linea base l, fatto o dal centro V, o parallelamente alla direzione r; quindi dalle proposizioni precedenti si deduce la stessa costruzione della tangente alla proiezione d'una curva, che fu indicata al Cap. II, N. 21.

17. Sia l una linea rigida che si muove nello spazio, ossia si muove in guisa che non si alterano le reciproche distanze dei suoi punti. Durante questo movimento i punti della l descrivono nuove linee, che diremo m; e le varie posizioni di l, come pure le linee m stanno su d'una superficie, che si dice *generata* dalla linea l.

Noi supporremo che per ogni punto della superficie passi una sola linea l, ed una sola linea m; e supporremo che se sulla superficie il punto P' ha per limite il punto P, tutti i punti della l che passa per P' abbiano per limiti i punti corrispondenti della l che passa per P.

Il piano tangente alla superficie in un suo punto P è il piano che contiene le tangenti alle due linee l ed m delle superficie passanti per P, supposto che esse abbiano tangenti, e che queste non coincidano.

Infatti, sia P′ un altro punto della superficie, e siano l' e m' le linee l ed m che passano per P′. Sia Q il punto che sta sulle linee (l', m), e R il punto che sta sulle (l, m'); si consideri il piano PQP′. Col tendere di P′ a P, il punto Q ha per limite P, per l'ipotesi fatta, e poichè PR è in valor assoluto eguale a QP′ (poichè questi segmenti sono posizioni distinte d'un segmento invariabile in lunghezza) anche R ha per limite P.

La retta PQ ha per limite la tangente alla curva m in P. Dico poi che la retta QP′ ha per limite la tangente alla l in P. Invero, dette t e t' le tangenti alle l ed l' nei punti P e Q, sarà l'angolo $\widehat{QP',t} < \widehat{QP',t'} + \widehat{t',t}$; ma l'angolo $\widehat{QP',t} = \widehat{PR,t}$ perchè posizioni d'uno stesso angolo; quindi $\widehat{QP't} < \widehat{PR',t} + \widehat{t', t}$. Si faccia tendere P′ a P; le rette PR e t' hanno per limiti la tangente t alla linea l in P; quindi gli angoli $\widehat{PB,t}$, e $\widehat{t', t}$ tendono a zero, e lo stesso avviene dell'angolo $\widehat{QP',t}$ ossia la retta QP′ ha per limite la tangente alla l in P.

Pertanto ogni retta PP′ che unisce il punto P ad un altro punto P′ della superficie è contenuta in un piano PQP′, che ha per limite il piano che contiene le tangenti alle linee l ed m in P; dunque questo è il piano tangente alla superficie.

18. Si dice che una figura rigida ruota attorno ad un asse, se, oltre al conservarsi inalterate le reciproche distanze dei suoi punti, rimangono pure inalterate le loro distanze da due punti fissi dell'asse. Durante questo movimento ogni punto della figura descrive un cerchio contenuto in un piano normale all'asse ed il cui centro sta su quest'asse.

La superficie generata da una linea l, che ruota attorno ad un asse, dicesi *superficie di rivoluzione*. I cerchi descritti dai punti della linea diconsi *paralleli*; ogni sezione fatta nella superficie con un piano passante per l'asse dicesi *meridiano*.

Dalle cose dette precedentemente risulta che il piano tangente alla superficie di rivoluzione in un suo punto è il piano che contiene le tangenti alla linea l ed al parallelo, che passano per questo punto. Siccome poi la tangente al parallelo in P è normale al piano del meridiano passante per P, così il piano tangente in un punto P della superficie è il piano normale al piano del meridiano, e passante per la tangente alla l; in altre parole, la normale alla superficie di rivoluzione incontra l'asse.

Fra le superficie di rivoluzione, oltre alla sfera, che si può considerare come di rivoluzione attorno ad ogni suo diametro, è a menzionarsi la superficie generata dalla rivoluzione d'un cerchio attorno ad un asse posto nel piano del cerchio ma non passante pel centro, la quale vien detta *toro*; e la superficie generata dalla rotazione d'una retta attorno ad un asse che non incontra, ne è parallelo ad essa, che è *l'iperboloide di rivoluzione*.

19. Un altro esempio di superficie cui è pure applicabile la proposizione precedente, è l'*elicoide retto*, ossia la superficie generata dalla retta BP del N. 7, la quale incontra l'asse dell'elica, si appoggia all'elica, ed è parallela al piano normale all'asse dell'elica. Ogni punto della retta BP alla distanza costante r da B, descrive un'elica sulla superficie; e le linee chiamate l ed m sono rispettivamente le varie posizioni della retta BP, che diconsi generatrici, e le varie eliche descritte dei punti della BP. Il piano tangente alla superficie nel punto P è perciò il piano contenente la generatrice BP, e la tangente all'elica passante per questo punto, la quale tangente sappiamo costrurre.

Detto θ l'angolo che il piano tangente all'elicoide in P fa col piano xy, e h il passo dell'elica, si ha

$$tang\theta = \frac{h}{2\pi r};$$

quindi, muovendosi P sulla generatrice BP, ossia variando r, varia pure θ, e quest'angolo diminuisce man mano che P si allontana dall'asse.

20. In modo analogo a quello con cui furono trattate le questioni precedenti, se ne possono trattare altre simili. In generale, se su d'una superficie sono segnati due sistemi di linee l ed m, in modo che per ogni punto P della superficie passi una sola linea l ed una sola linea m, e si conoscono le tangenti alle linee l ed m passanti per P, se la superficie ha un piano tangente in P, questo deve contenere quelle tangenti, e quindi è determinato, se esse sono distinte. Ma dal supporre l'esistenza delle tangenti alle linee l ed m non si può conchiudere l'esistenza del piano tangente alla superficie, se non si introducono alcune condizioni restrittive.

Detto P′ un altro punto della superficie, ed l' ed m' le linee l ed m che passano per esso, sia Q il punto d'intersezione delle linee m ed l', e si consideri il piano PQP′. Col tendere di P′ a P anche Q tende a P, e la retta PQ ha per limite la tangente alla linea m in P. Se ora noi possiamo accertarci che la retta QP′, col tendere di P′ e Q a P, abbia per limite la tangente alla l in P (il che non è conseguenza necessaria dell'esistenza di questa tangente) si conchiuderà che la retta PP′ è contenuta in un piano PQP′ che ha per limite il piano che contiene le tangenti in P alle linee l ed m, e quindi che esso è il piano tangente alla superficie.

21. Omografia. — Suppongasi che ad ogni punto P dello spazio (soggetto se occorre, a convenienti limitazioni) corrisponda un punto P*, che diremo *omologo* del primo, in guisa che, se P descrive una retta r, anche P* descriva una retta r^* che diremo omologa della prima; inoltre si supponga che se P tende a P_0, il punto P* abbia per limite P_0^*. Si deduce allora che: se P descrive un piano π il suo omologo descrive pure un piano π^* omologo del primo; se la retta r ha per limite la r_0, la retta r^* ha per limite la r_0^*; e se il piano π ha per limite π_0, il piano π^* ha per limite π_0^*.

Una corrispondenza fra i punti P e P_0^*, nella quale siano verificate le ipotesi enunciate, dicesi *omografia;* e si potrebbe dimostrare l'identità di questa definizione dell'omografia con quelle che soglionsi dare nei corsi di geometria proiettiva.

Se il punto P descrive una curva **C** avente tangente t, e piano osculatore π, il punto P^* descriverà una curva $\mathbf{C}^*$ la cui tangente è la retta t^* omologa di t, ed il cui piano osculatore è π^* omologo di π.

Se il punto P descrive una superficie **S**, avente piano tangente π, il punto P^* descrive una superficie $\mathbf{S}^*$ il cui piano tangente è π^* omologo di π.

Infatti, se P e P′ sono due posizioni del punto P che descrive la curva **C** e P^* e P'^* i loro omologhi, la retta $P^*P'^*$ è l'omologa di PP′; e col tendere di P′ a P la PP′ ha per limite la tangente t alla curva **C** nel punto P, e quindi la $P^*P'^*$ ha per limite la retta t^* omologa di t; dunque t^* è la tangente alla $\mathbf{C}^*$ in P^*. Il piano che passa per t, e per P′ ha per limite il piano osculatore π alla curva **C**; quindi il suo omologo, cioè il piano che passa per t^* e per P^*, ha per limite il piano π^* omologo di π. Dunque π^* è il piano osculatore alla $\mathbf{C}^*$ in P^*.

Se P e P′ sono due posizioni del punto P che descrive la superficie **S**, e P^* e P'^* sono i loro punti omologhi sulla $\mathbf{S}^*$, si immagini il piano α, che contiene la PP′, e che ha per limite il piano π tangente alla superficie in P. Il piano α^*, omologo di α, contiene la $P^*P'^*$, ed ha per limite il piano π^*; dunque ogni retta $P^*P'^*$ che unisce il punto P^* ad un altro punto P'^* della $\mathbf{S}^*$ è contenuta in un piano avente per limite π^*; e questo è il piano tangente alla superficie.

Esercizii.

22. 1. La proiezione dell'elica (N. 7) sul piano xy fatta parallelamente ad una retta obliqua rispetto a questo piano è una cicloide (Cap. II, eserc. 5).

La proiezione dell'elica sul piano xy fatta da un centro di proiezione che giace sull'asse è una spirale iperbolica (Cap. II, eserc. 3).

2. Siano $l_1\ l_2\ ...l_n$ n linee descritte sopra uno stesso cono di vertice O; una generatrice di questo cono incontri queste linee nei punti $P_1\ P_2\ ...P_n$; si deter-

mini sulla stessa generatrice un punto P tale che

$$OP = f(OP_1, OP_2, \dots OP_n).$$

Variando la generatrice, il punto P descrive sul cono una nuova linea l. La costruzione della tangente a questa linea si ottiene a questo modo. Si immagini il piano tangente al cono lungo la generatrice considerata; esso conterrà le tangenti alle linee $l_1\ l_2 \dots l_n$ ed l. Le normali alle linee $l_1\ l_2 \dots l_n$ contenute in questo piano incontrino la perpendicolare in O alla retta $OP_1P_2 \dots P_nP$ in $N_1N_2 \dots N_n$; si determini su questa perpendicolare il punto N tale che

$$ON = \frac{df}{dOP_1} ON_1 + \frac{df}{dOP_2} ON_2 + \dots + \frac{df}{dOP_n} ON_n.$$

La NP è normale alla curva descritta da P, e la perpendicolare in P alla NP, contenuta nel piano tangente al cono è la tangente alla linea descritta da P.

3. Si porti sulla retta OP che unisce il punto fisso O al punto variabile P d'una curva un segmento PQ di lunghezza costante; conoscendo la tangente alla linea descritta da P, trovare la tangente alla linea descritta da Q (*concoide*).

4. Si determini sulla retta OP che unisce il punto fisso O al punto P d'una curva un punto Q tale che $OP \times OQ = k^2$, ove k è un numero costante (*inversione*). I piani normali alle linee descritte da P e Q, ed il piano perpendicolare nel punto medio di PQ passano per una stessa retta; le tangenti alle curve descritte da P e Q si incontrano in un punto di questo piano. Queste proposizioni si possono dedurre dall'esercizio 2°, ovvero trattare in modo analogo a quello seguìto al Cap. II, N. 22.

5. L'inversa della spirale logaritmica, il centro d'inversione essendo un punto della perpendicolare al piano della spirale nel suo polo, è una curva sferica detta *lossodromia*. Essa taglia sotto angolo costante tutti i cerchi massimi della sfera passanti pel centro d'inversione.

6. Da un punto fisso O si conduca una retta che incontri n superficie fisse nei punti $P_1\ P_2 \dots P_n$. Si determini su questa retta il punto P la cui distanza da O sia una funzione analitica delle distanze analoghe dei punti $P_1\ P_2 \dots P_n$:

$$OP = f(OP_1, OP_2, \dots OP_n).$$

Variando la retta, il punto P descrive una superficie. Il piano perpendicolare in O alla retta incontri le normali alle superficie date nei punti $N_1\ N_2 \dots N_n$. Si determini il punto N, pure contenuto in questo piano, e tale che

$$\overline{ON} \equiv \frac{df}{dOP_1} \overline{ON_1} + \frac{df}{dOP_2} \overline{ON_2} + \dots + \frac{df}{dOP_n} \overline{ON_n};$$

sarà NP la normale alla superficie descritta da P.

7. Si porti sulla retta OP, che unisce il punto O al punto variabile P di una superficie data, il segmento PQ di lunghezza costante. Variando P, il punto Q descrive una superficie, che si può considerare come la concoide della prima rispetto al polo O.

Il piano perpendicolare in O alla OPQ incontri la normale alla superficie descritta da P in N. Sarà NQ la normale alla superficie descritta da Q.

8. Si determini sulla retta OP, che unisce il punto O al punto variabile P d'una superficie, il punto Q tale che $OP \times OQ = k^2$, ove k è una costante data. Variando P, il punto Q descrive una seconda superficie (inversa della prima) Le normali alle superficie descritte da P e Q si incontrano in un punto del piano perpendicolare nel punto medio di PQ.