CAPITOLO II.

Curve piane.

§ 1. Tangenti alle curve in generale.

1. L'insieme dei punti che godono d'una proprietà è un luogo geometrico. Questo luogo geometrico dicesi *linea* se ogni punto del luogo si può individuare mediante un numero. Esso dicesi *superficie* se ogni punto del luogo si può individuare mediante due numeri. Il modo più semplice per determinare una linea è il dare la posizione d'un punto in funzione d'una variabile t; e per determinare una superficie basta dare la posizione d'un punto in funzione di due variabili.

Ci occuperemo dapprima delle linee. Detto P un punto della linea, e t il numero che individua P, supporremo che ad ogni valore di t in un certo intervallo corrisponda un sol numero t, in modo cioè che attribuendo a t valori distinti, anche le posizioni di P siano distinte. Supporremo inoltre che il punto P sia funzione continua di t, e viceversa, vale a dire, se P_0 e P sono le posizioni del punto corrispondenti ai valori t_0 e t della variabile, se t tende a t_0, anche P tenda a P_0, e viceversa, se P tende a P_0, anche t tenda a t_0.

Una linea dicesi *curva* quando nessuna porzione di essa giace su d'una linea retta. Una linea è piana se giace tutta in un piano. Una linea non piana dicesi *gobba*, o *a doppia curvatura*.

2. Dicesi *tangente* ad una linea in un suo punto P_0 il limite della retta che unisce il punto P_0 ad un altro punto P della linea, ove P tenda a P_0.

Si dice anche che la tangente ad una curva è la retta che unisce due punti consecutivi od infinitamente prossimi di essa, e con questa dicitura non si intende che la definizione precedente.

Per *direzione d'una linea* in un punto si intende la direzione della tangente in questo punto.

Dicesi *normale* ad una linea in un suo punto P_0 ogni retta passante per P_0 e normale alla tangente alla linea in P_0. Queste rette formano nello spazio il piano normale in P_0 alla tangente; e questo vien detto piano normale alla linea in P_0.

Se la linea è contenuta in un piano, in questo stesso piano non giace che una sola normale.

Se la linea data è una retta, la retta che unisce due suoi punti P_0 e P è la retta stessa, e facendo tendere P a P_0, il suo limite è sempre la retta data, onde la tangente in ogni punto d'una retta coincide colla retta stessa.

Se la linea data è un cerchio di centro C, e se P_0 e P sono due suoi punti, l'angolo che la retta P_0P fa colla perpendicolare in P_0 al raggio CP_0 contenuta nel piano del cerchio, è la metà dell'angolo dei raggi CP_0 e CP; ora col tendere di P a P_0 questi angoli hanno per limite zero, quindi la tangente al cerchio in un suo punto è la perpendicolare al raggio che va a questo punto contenuta nel piano del cerchio; vale a dire, pel cerchio, la tangente definita come limite d'una secante coincide colla retta chiamata pure tangente nella geometria elementare, ma definita diversamente.

3. La tangente ad una linea risulta determinata, ove si conosca la derivata del punto che descrive la linea, in virtù del seguente

TEOREMA I. — Se il punto P è funzione di t avente derivata $\mathbf{u} \equiv \mathrm{PU}$ non nulla, la retta indefinita PU è la tangente alla curva descritta da P.

Infatti, dati a t i valori t e $t+h$, e detti P e P′ i punti corrispondenti della curva, si faccia $\overline{\mathrm{PQ}} \equiv \overline{\mathrm{PP'}} : h$. Il punto Q è un punto della retta PP′. Facciasi tendere h a zero. Il segmento PQ ha per limite la derivata PU per definizione; quindi il punto Q ha per limite U, e la retta PP′Q, che unisce i punti P e Q aventi per limiti i punti P ed U non coincidenti, ha per limite la retta PU (Cap. I, 5, teor. II), ossia PU è la tangente alla linea in P.

Teorema II. — *Se il punto P è funzione di t avente derivata prima continua e non nulla, la tangente in P è anche il limite della congiungente due punti $\mathrm{P}_1\,\mathrm{P}_2$ della linea, quando questi tendano al punto P.*

Invero, sia O un'origine fissa, e pongasi $\overline{\mathrm{OP}} \equiv \mathbf{a}(t)$. Sarà $\overline{\mathrm{OP}_1} \equiv \mathbf{a}(t_1)$, $\overline{\mathrm{OP}_2} \equiv \mathbf{a}(t_2)$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} \equiv \mathbf{a}(t_2) - \mathbf{a}(t_1)$.

Pongasi $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}} \equiv \dfrac{\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}}{t_2 - t_1} \equiv \mathbf{a}(t_1, t_2)$. Si facciano ora tendere t_1 e t_2 a t; si ha $\lim \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}} \equiv \lim \mathbf{a}\,(t_1\, t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \overline{\mathrm{PU}}$ derivata del punto P; e poichè P_1 ha per limite P, Q ha per limite U, e la retta $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$ ha per limite la retta PU, cioè la tangente alla curva.

4. Se M è un punto della tangente alla curva in P, e questo punto ha derivata $\mathbf{u}$ non nulla, le direzioni di $\mathbf{u}$, e di MP coincidono, e quindi è nulla l'area $\mathbf{u}.\mathrm{MP}$. Viceversa, se quest'area è nulla, MP ha la direzione di $\mathbf{u}$, ed il punto M si trova sulla tangente. Dunque l'equazione della tangente, colla notazione dei segmenti, è

$$\mathbf{u}.\mathrm{PM} \equiv 0\,.$$

Se M è un punto della normale, o del piano normale alla curva in P, sarà MP normale ad $\mathbf{u}$, e quindi l'equazione della normale, o del piano normale, è

$$\mathbf{u} \times \mathrm{MP} = 0,$$

sempre supposto che **u** non sia nullo. Si osservi che $2\mathbf{u} \times MP$ è la derivata di $\overline{MP}^2$, presa nell'ipotesi che M sia fisso, e P un punto della curva. Quindi si deduce:

Se la derivata di P non è nulla, il piano normale alla curva è il luogo dei punti M per cui è nulla la derivata di $\overline{MP}^2$.

Il piano normale ad una linea in un suo punto P si può pure considerare come il limite del luogo dei punti equidistanti dai due punti P e P′ della linea, ove P′ tenda a P. Invero il luogo dei punti equidistanti da P e P′ è il piano π normale alla retta PP′ nel suo punto medio C. Ora, se P′ tende a P, anche C tende a P, e se la linea ha tangente Pt nel punto P, la retta PP′ ha per limite la Pt; ed il piano π passante per C e normale a PP′ ha per limite il piano π_0 passante P e normale alla tangente Pt; vale a dire il limite del piano π è il piano normale alla linea in P. Viceversa se il piano π tende ad un limite π_0, che passa necessariamente per P, la retta PP′ normale a π ha per limite la retta Pt normale a π_0; quindi Pt è la tangente alla curva, e π_0 il piano normale.

Questa proprietà del piano normale permette alcune volte di determinarlo direttamente, e dedurne in conseguenza la tangente alla curva. Così, se si sa che i punti A e B distano egualmente dai due punti P e P′ della curva, e se col tendere di P′ a P, A e B hanno per limiti i punti A_0 e B_0 non in linea retta con P, il piano luogo dei punti equidistanti da P e P′ ha per limite il piano PA_0B_0, e questo sarà il piano normale alla curva.

Le cose dette pel piano normale sono applicabili alla retta normale, se la linea sta in un piano fisso; in questo caso basta riconoscere che un punto A equidistante da P e P′ ha per limite A_0, per dedurre che A_0P è la normale alla curva. Così pel cerchio, il centro dista egualmente dai punti P e P′ della circonferenza; e poichè esso è fisso, ed ha per limite sè stesso, si deduce che il raggio che va ad un punto della circonferenza è normale ad essa.

5. Se, pel valore considerato di t, è nulla la derivata prima del punto, per determinare la tangente alla curva può servire il seguente

TEOREMA. — Se il punto P è funzione di t, e per $t = t_0$ sono nulle la derivata prima di P, e tutte le successive fino all'ordine p, la tangente alla linea luogo dei punti P è la retta che passa per P e contiene la derivata d'ordine p.

Invero, se le derivate successive $1^a, 2^a, \dots (p-1)^{ma}$ sono nulle, e la derivata $\mathbf{u}_p$ d'ordine p non è nulla, sarà, per la formula di Taylor:

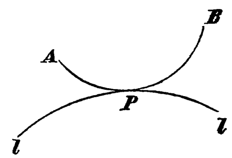
$$\overline{PP'} \equiv \frac{h^p}{p!}(\mathbf{u}_p + \bar{\varepsilon}),$$

ove $\bar{\varepsilon}$ è un segmento che ha con h per limite zero. Quindi, fatto $PQ \equiv \mathbf{u}_p + \bar{\varepsilon}$ e $PU \equiv \mathbf{u}_p$, si deduce che i punti PP′ e Q sono in linea retta, e che il segmento PQ ha per limite PU; quindi il punto Q ha per limite U, il quale è distinto da P, perchè, per ipotesi, PU non è nullo. E la retta PP′ che passa pei punti P e Q, che hanno per limiti i punti P e U non coincidenti, ha per limite la retta PU; dunque questa è la tangente.

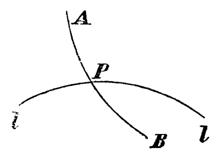
Si osservi però che, se la derivata prima è nulla pel valore considerato di t, anche supposte continue le derivate successive, non è più vero in generale che la tangente in P sia il limite della congiungente due punti P_1 P_2 presi ad arbitrio sulla curva, ove questi si facciano tendere al punto P.

§ 2. Tangenti alle curve piane.

6. Può un piano essere diviso da una linea descritta su esso in due parti, o regioni. Così una retta AB lo divide in due parti sovrapponibili, e si riconosce se due punti P e Q appartengono alla stessa parte od a parti opposte, secondochè le aree ABP e ABQ, ovvero i loro doppi AB.AP e AB.AQ hanno lo stesso senso, o senso contrario. Così pure un cerchio divide il piano in due regioni, l'una (interna) formata dei punti che distano dal centro meno del raggio, e l'altra (esterna), i cui punti distano dal centro più del raggio; ecc.



Sia un piano fisso diviso da una linea l in due parti. Diremo che una linea AB contenuta nello stesso piano *tocca* la l nel loro punto comune P, se un arco AB della linea, contenente nel suo interno il punto P, giace tutto da una stessa parte della linea l.



Diremo invece che la linea AB *taglia* la l nel loro punto comune P, se due archi PA e PB di questa linea, terminanti in P, trovansi l'uno da una parte e l'altro dall'altra della linea l.

Potrebbe anche una linea avere più punti comuni colla l, ed in alcuni di questi toccarla, ed in altri tagliarla.

Noi supporremo dapprima che la linea l sia una retta, e discuteremo se la linea descritta da un punto variabile P, che in una posizione speciale P_0 trovasi sulla retta, la tagli o la tocchi.

7. Teorema I. — Se il punto P descrive una linea piana, e se nella posizione speciale P_0 ha una derivata prima non nulla, la linea taglia ogni retta del piano passante per P_0, ma diversa dalla tangente.

Se, inoltre, la derivata seconda di P non è nulla, nè coincide in direzione colla derivata prima, la linea tocca in P_0 la tangente, e nelle vicinanze di P_0 giace da quella banda della tangente verso cui è rivolta la derivata seconda.

Infatti, sia P_0A una retta passante per P_0; e si consideri l'area $P_0P.P_0A$. Suppongasi dapprima che la P_0A non sia la tangente alla curva. Dalla formula $P_0P \equiv h(\mathbf{u} + \varepsilon)$, con $lim\,\varepsilon \equiv 0$, si ricava l'area considerata $P_0P.P_0A = h(\mathbf{u}.P_0A + \varepsilon.P_0A)$. Delle due aree racchiuse in parentesi la prima $\mathbf{u}.P_0A$ è indipendente da h, e non è nulla, perchè le direzioni di $\mathbf{u}$ e P_0A sono distinte; la seconda invece $\varepsilon.P_0A$ è infinitesima con h. Perciò potremo supporre h sufficientemente piccolo in valor assoluto, in modo che la seconda area sia minore della prima, e che l'area $\mathbf{u}.P_0A + \epsilon.P_0A$ abbia il senso dell'area $\mathbf{u}.P_0A$. Ciò supposto, l'area $P_0P.P_0A$ avrà il senso di $\mathbf{u}.P_0A$ se h è positivo, ed avrà senso contrario se h è negativo; quindi i punti P della curva corrispondenti a valori positivi di h stanno da una stessa parte della retta P_0A (cioè da quella verso cui è rivolta $\mathbf{u}$); invece i punti della curva che corrispondono a valori negativi di h stanno dalla parte opposta; perciò la linea descritta da P taglia in P_0 la retta P_0A.

Sia invece P_0A la tangente alla curva in P_0. Dalla formula

$$P_0P \equiv h\mathbf{u} + \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \varepsilon.P_0A)$$

con $lim\,\epsilon \equiv 0$, osservando che l'area $\mathbf{u}.P_0A = 0$, perchè la tangente P_0A ha la direzione della derivata prima, si ricava

$$P_0P.P_0A = \frac{h^2}{2}[\mathbf{v}.P_0A + \epsilon].$$

Ora, se la $\mathbf{v}$, derivata seconda di P, non è nulla, nè coincide in direzione con $\mathbf{u}$, delle due aree racchiuse in parentesi, la prima $\mathbf{v}.P_0A$ sarà diversa da zero, mentre la seconda ha per limite zero; perciò si può supporre che $\mathbf{v}.P_0A + \epsilon$ abbia il senso del primo termine; allora, poichè il fattore $\frac{h^2}{2}$ è sempre positivo, anche l'area $P_0P.P_0A$ ha il senso di $\mathbf{v}.P_0A$, ossia, nelle vicinanze di P_0 i punti della curva trovansi da quella parte della tangente P_0A verso cui è rivolta la derivata seconda.

TEOREMA II. — Se delle derivate del punto P, nella posizione considerata P_0, la prima non nulla è la p^{ma}, e delle successive la prima non nulla, nè coincidente in direzione colla p^{ma} è la q^{ma}, allora:

Ogni retta passante per P_0 e distinta dalla tangente è tagliata dalla linea se p è dispari; è invece toccata se p è pari.

La tangente in P_0 è tagliata dalla linea se q è dispari, è toccata se q è pari.

Infatti, sia P_0A una retta qualunque passante per P_0. Si consideri l'area $\omega(t) = P_0P.P_0A$. La sua derivata n^a è $\mathbf{u}_n.P_0A$, $\mathbf{u}_n$ indicando la derivata n^a di P. Per le ipotesi fatte, l'area $\omega(t)$ si annulla, per $t = t_0$, insieme alle derivate $1^a, 2^a, \ldots (p-1)^{ma}$, e la derivata p^{ma} è $\mathbf{u}_p.P_0A$, la quale non è nulla se P_0A è distinta dalla tangente. Ricorrendo alla formula di Taylor si ha

$$P_0P.P_0A = \frac{h^p}{p!}\left[\mathbf{u}_p.P_0A + \epsilon\right],$$

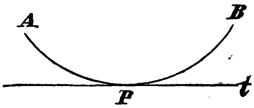
ove ϵ è un'area infinitesima con h; e perciò potremo supporre che l'area $\mathbf{u}_p.P_0A + \epsilon$ abbia il segno del primo termine $\mathbf{u}_p.P_0A$. Ora, se p è dispari, siccome il fattore $\frac{h^p}{p!}$ cambia segno con h, si deduce che l'area $P_0P.P_0A$ ha, per h negativo, il senso opposto di $\mathbf{u}_p.P_0A$, e per h positivo lo stesso senso. Quindi il punto P passa dalla regione del piano verso cui non è diretta $\mathbf{u}_p$ a quella verso cui questo segmento è diretto, e la linea descritta dal punto P taglia la retta P_0A. Se invece p è pari, $\frac{h^p}{p!}$ è sempre positivo, l'area $P_0P.P_0A$ ha il senso dell'area $\mathbf{u}_p.P_0A$, e quindi il punto P trovasi nelle vicinanze di P_0 da quella stessa parte della P_0A verso cui è diretta $\mathbf{u}_p$.

Suppongasi ora che la retta P_0A coincida colla tangente, e quindi abbia la direzione di $\mathbf{u}_p$. In virtù delle ipotesi fatte saranno pure nulle le derivate dell'area $\omega(t)$ fino a quella d'ordine q, che è $\mathbf{u}_q.P_0A$. Quindi per la formula di Taylor si ha

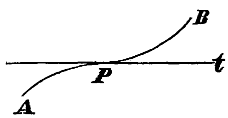
$$P_0P.P_0A = \frac{h^q}{q!}\left[\mathbf{u}_q.P_0A + \epsilon\right],$$

e ragionando in modo analogo, si scorge che se q è dispari, la linea descritta da P taglia la tangente, e, se q è pari, la tocca, e trovasi, nelle vicinanze di P_0, da quella parte della tangente verso cui è rivolta $\mathbf{u}_q$.

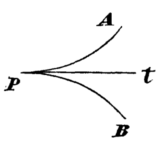
8. Si suol dire che un punto P d'una curva è un punto ordinario se la curva taglia tutte le rette diverse dalla tangente e tocca la tangente. Si dice ancora in questo caso che nel punto considerato la curva rivolge la sua *concavità* verso quella delle due parti in cui il piano è diviso dalla tangente, nella quale essa è contenuta, e rivolge la sua *convessità* verso la parte opposta. Così il punto P è un punto ordinario della curva, se ha derivata prima non nulla, e derivata seconda nè nulla nè coincidente in direzione colla derivata prima, o più generalmente, se delle derivate di P la prima non nulla è d'ordine dispari, e delle susseguenti la prima non nulla nè coincidente in direzione colla tangente è d'ordine pari.

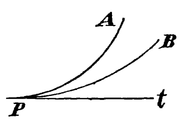


Un punto non ordinario si suol dire *singolare*. Così se la linea taglia tutte le rette passanti pel punto considerato, compresa la tangente, il che avviene quando, conservate le notazioni dell'ultimo teorema, p e q sono dispari, si ha un punto singolare, che vien chiamato *punto di flesso*.



Se la linea tocca tutte le rette diverse dalla tangente, e taglia la tangente, il che avviene se p è pari e q è dispari, si avrà un





punto detto *cuspide*, o punto di regresso di prima specie. E se la linea tocca tutte le rette passanti per il suo punto P, il che avviene quando p e q sono amendue pari, si avrà un punto di regresso di seconda specie.

Finora si è supposto che la posizione del punto P fosse funzione di t avente le successive derivate; si è supposto inoltre che attribuendo a t due valori distinti qualunque, almeno in un certo intervallo, P assumesse pure posizioni distinte. Ma se il punto P, variando t, viene a prendere più volte una stessa posizione, questa posizione si dirà un *punto multiplo* della curva, e potrà essere un punto doppio, triplo, ecc., secondochè P passa due, tre, ecc., volte per quella stessa posizione. Altre singolarità può presentare la linea, ove il punto variabile P non abbia derivate.

9. Se l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ compresa fra le derivate prima e seconda del punto P non è nulla, le derivate $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di P sono nè nulle nè coincidenti in direzione; quindi questo punto è un punto ordinario della curva che esso descrive. Pertanto il valore dell'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ può servire come criterio analitico per riconoscere i punti ordinarii.

Quest'area si può pure considerare come un limite, come risulta dal teorema seguente:

TEOREMA. — Se il punto P è funzione di t avente le derivate $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ continue, e se, $P_1\, P_2\, P_3$ sono tre punti della curva, corrispondenti ai valori $t_1\; t_2\; t_3$ della variabile t, l'area del triangolo $P_1\, P_2\, P_3$ divisa pel numero $(t_2 - t_1)$ $(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)$ ha per limite la quarta parte dell'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$

$$lim \frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{4}\, \mathbf{u}.\mathbf{v},$$

ove i punti $P_1P_2P_3$ tendano ad una stessa posizione P.

Invero si ha $P_1P_2P_3 \equiv \frac{1}{2}\, P_1P_2.P_1P_3$. Sia O un punto fisso ad arbitrio, e pongasi $OP \equiv \mathbf{a}(t)$; sarà

$$OP_1 \equiv \mathbf{a}(t_1), \quad OP_2 \equiv \mathbf{a}(t_2), \quad OP_3 \equiv \mathbf{a}(t_3),$$

$$\mathbf{a}(t_1,\, t_2) \equiv \frac{P_1P_2}{t_1 - t_2}, \qquad \mathbf{a}(t_1,\, t_3) \equiv \frac{P_1P_3}{t_3 - t_1},$$

e

$$\mathbf{a}(t_1t_2t_3) \equiv \frac{\mathbf{a}(t_1t_3) - \mathbf{a}(t_1t_2)}{t_3 - t_2}.$$

Da queste eguaglianze si ricava

$$P_1P_2 \equiv (t_2 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1\, t_2), \qquad P_1P_3 \equiv (t_3 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1\, t_3),$$

e

$$\mathbf{a}(t_1t_3) \equiv \mathbf{a}(t_1t_2) + (t_3 - t_2)\ \mathbf{a}(t_1t_2t_3).$$

Sostituendo si ha

$$P_1P_2P_3 \equiv \frac{1}{2} (t_2 - t_1)(t_3 - t_1)\ \mathbf{a}(t_1t_2).\mathbf{a}(t_1t_3)$$

$$\frac{1}{2}\ (t_2 - t_1)\ (t_3 - t_1)\ (t_3 - t_2).\mathbf{a}(t_1t_2).\mathbf{a}(t_1t_2t_3)\ ,$$

e quindi

$$\frac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)} \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{a}(t_1t_2).\mathbf{a}(t_1t_2t_3).$$

Passando al limite, e ricordando che

$$lim\,\mathbf{a}(t_1t_2) \equiv \mathbf{a}'(t) \equiv \mathbf{u}$$

e

$$lim\,\mathbf{a}(t_1t_2t_3) \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{a}''(t) \equiv \frac{1}{2}\ \mathbf{v}\,,$$

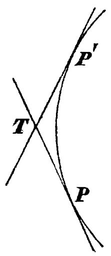
si ha la formula a dimostrarsi.

Nell'enunciato e nella dimostrazione del teorema non si suppone che la curva descritta da P sia piana; e perciò il teorema è anche vero per curve gobbe.

Dal teorema precedente si deduce che, se l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ non è nulla, anche $\dfrac{P_1P_2P_3}{(t_2 - t_1)\,(t_3 - t_1)\,(t_3 - t_2)}$ sarà, per posizioni di $P_1P_2P_3$ sufcientemente prossime a P, diversa da zero; e quindi anche l'area $P_1P_2P_3$ non sarà nulla; ossia, nelle ipotesi fatte, si può determinare un arco della curva descritta da P, nelle vicinanze del punto considerato, il quale non abbia più di due punti in linea retta. Si osservi ancora, che nelle ipotesi fatte, se $t_1 < t_2 < t_3$, il triangolo $P_1P_2P_3$ ha lo stesso senso dell'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$.

TEOREMA. — Se l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ formata colle derivate prima e seconda del punto P non è nulla, il punto d'intersezione delle tangenti alla curva in due suoi punti P e P' ha per limite il punto P, ove P' tenda a P.

Infatti, i punti P e P' corrispondano ai valori t e $t+h$ del parametro; e sia T il punto d'incontro delle due tangenti in questi punti.



Siccome il segmento PT sta sulla tangente, esso ha la direzione della derivata **u** del punto P, e quindi esisterà un numero x tale che $\mathrm{PT} \equiv x\mathbf{u}$. Poichè P'T sta sulla tangente alla curva in P', esso ha la direzione della derivata del punto P', che diremo **u'**, e quindi l'area $\mathrm{P'T}.\mathbf{u}' = 0$. Ora si ha

$$\mathrm{P'T} \equiv \mathrm{PT} - \mathrm{PP'} \equiv x\mathbf{u} - \mathrm{PP'}.$$

e dalla formula di Taylor si ricava

$$\mathrm{PP'} \equiv h\mathbf{u} + \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \bar{\varepsilon})$$

e

$$\mathbf{u}' \equiv \mathbf{u} + h(\mathbf{v} + \bar{\eta});$$

sostituendo questi valori di P'T e **u'** nell'equazione $\mathrm{P'T}.\mathbf{u}' = 0$, essa diventa

$$\left[x\mathbf{u} - h\mathbf{u} - \frac{h^2}{1.2}(\mathbf{v} + \bar{\varepsilon})\right].\left[\mathbf{u} + h(\mathbf{v} + \bar{\eta})\right] = 0;$$

la si ordini rispetto alle potenze di h; osservando che il primo termine $x\mathbf{u}.\mathbf{u} = 0$ e dividendo per h, si ha

$$x\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \bar{\eta}) - h\left[\mathbf{u}.(\mathbf{v} + \bar{\eta}) + \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \bar{\varepsilon}).\mathbf{u}\right] = 0;$$

e passando al limite, il coefficiente di x ha per limite **u.v**, che non è nullo, mentre il secondo termine ha per limite zero; quindi $\lim x = 0$; e poichè $\mathrm{PT} \equiv x\mathbf{u}$, sarà $\lim \mathrm{PT} \equiv 0$, cioè T ha per limite P.

§ 3. Curve riferite a coordinate cartesiane.

10. Un primo modo di determinare una curva nel piano è di dare le coordinate cartesiane $x\ y$ del punto variabile P, che descrive la curva, in funzione d'una variabile t. Detti **i** ed **j** i segmenti di riferimento, sarà

$$\overline{\mathrm{OP}} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

e, per ciò che si è visto, le derivate prima e seconda **u** e **v** sono

$$\mathbf{u} \equiv \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

e

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}.$$

Quindi, se **u** non è nullo, ossia se $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ non sono nulle ad un tempo, la direzione di **u** coincide colla direzione della tangente.

Se M è un punto della tangente, sarà $\mathbf{u}.\mathrm{PM} \equiv 0$; e dette X Y le coordinate di M, l'equazione della tangente è

$$(X - x)\frac{dy}{dt} - (Y - y)\frac{dx}{dt} = 0. \tag{1}$$

L'equazione della normale è, se M è un punto della normale,

$$\mathbf{u} \times \mathrm{PM} = 0,$$

ovvero, supposti gli assi di riferimento ortogonali:

$$(X - x)\frac{dx}{dt} + (Y - y)\frac{dy}{dt} = 0. \tag{2}$$

E la curva, nel punto considerato, rivolge la sua concavità verso quella parte della tangente verso cui è rivolta **v**, a meno che **v** non sia nulla, o la sua direzione coincida con **u**, nel qual caso si applicheranno i criterii noti. L'area **u**.**v** si esprime nel nostro caso sotto la forma

$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{vmatrix} \mathrm{i}.\mathrm{j};$$

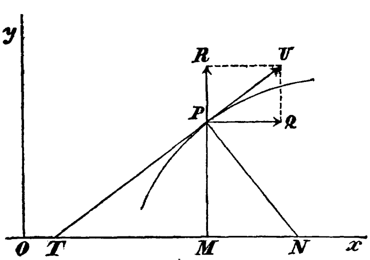
e se quindi il determinante formato colle derivate prime e seconde delle coordinate x y non è nullo, il punto è un punto ordinario della curva.

11. Come caso particolare, la variabile indipendente t potrebbe essere la stessa ascissa, e allora la curva è data nel piano dandone l'ordinata in funzione dell'ascissa:

$$y = f(x).$$

Le coordinate del punto variabile P della curva sono

$$x \text{ e } f(x),$$



e le loro derivate, ossia le coordinate della derivata di P, sono 1 e $f'(x)$; quindi la derivata PU del punto P è la risultante d'un segmento PQ parallelo all'asse delle x e misurato dal numero $+1$, e d'un segmento PR parallelo all'asse delle y, e misurato dal numero $f'(x)$.

La derivata prima di P non è mai nulla; quindi la sua direzione coincide colla direzione della tangente. Se gli assi sono ortogonali, l'angolo che la tangente PU alla curva fa coll'asse delle x ha per tangente trigonometrica $f'(x)$, come si vede dal triangolo rettangolo PQU. L'equazione della tangente si riduce a

$$(1') \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

e quella della normale a

$$(2') \qquad X - x + (Y - y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Le derivate seconde delle coordinate di P sono 0 e $f''(x)$. Quindi la derivata seconda di P è un segmento parallelo all'asse delle y e misurato dal numero $f''(x)$.

Se $f''(x)$ è positivo, la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y; se $f''(x)$ è negativo, la concavità della curva è rivolta verso la direzione negativa dell'asse delle y. Se poi $f''(x) = 0$, ed $f'''(x)$ non è nullo, la curva taglia la tangente, e si ha un punto di flesso.

Il segmento PT compreso fra il punto P ed il punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x vien detto *lunghezza della tangente*. La sua proiezione TM sull'asse delle x si chiama *sottotangente*. Il segmento PN di normale, compreso fra il punto P e l'asse delle x vien detto *lunghezza della normale;* e la sua proiezione MN sull'asse delle x si dice *sottonormale*.

Supposti gli assi di riferimento ortogonali, è facile esprimere le lunghezze di questi segmenti in funzione dell'ordinata y del punto P, e della sua derivata $\frac{dy}{dx} = y'$. Invero dai triangoli simili PQU, TMP, si ricava $\frac{\mathrm{TM}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{QU}}$, ossia $\frac{\mathrm{TM}}{1} = \frac{y}{y'}$, vale a dire la sottotangente $\mathrm{TM} = \frac{y}{y'}$.

Quindi dal triangolo rettangolo TMP si ottiene

$$\mathrm{TP} = \sqrt{\overline{\mathrm{TM}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2} = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}.$$

Dai triangoli PQU e PMN simili si deduce

$$\mathrm{MN} : \mathrm{QU} = \mathrm{PM} : \mathrm{PQ}\,,$$

ossia

$$\mathrm{MN} : y' = y : 1\,,$$

onde si ricava la sottonormale

$$\mathrm{MN} = yy'.$$

Ed infine dal triangolo rettangolo PMN si ha $\mathrm{PN} = \sqrt{\overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{MN}}^2}$, e sostituendo

$$\mathrm{PN} = y\sqrt{1 + y'^2}.$$

12. Poichè spesso una curva è definita mediante l'equazione $y = f(x)$, sarà utile il trovare direttamente i risultati precedenti.

Siano $\mathrm{OM} = x$, e $\mathrm{OM}' = x + \Delta x$ due ascisse, cui corrispondano le ordinate $\mathrm{MP} = y = f(x)$, e $\mathrm{M'P'} = y + \Delta y = f(x + \Delta x)$.

L'equazione della retta PP′, ove XY siano le coordinate di un punto di essa, è

$$(a) \qquad Y - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(X - x);$$

(invero quest'equazione è di primo grado, e quindi rappresenta una retta; e poichè essa è soddisfatta quando invece di X ed Y si pongano rispettivamente le coordinate (x, y) e $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ dei punti P e P′, questa retta passa pei punti P e P′, e quindi coincide colla PP′).

Si faccia ora tendere Δx a zero. Il coefficiente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ha per limite $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, e la retta PP′ di equazione (a) ha per limite la retta la cui equazione è

$$(b) \qquad Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x);$$

(perchè, supposta l'ascissa X fissa, l'ordinata corrispondente data dalla (a) ha per limite l'ordinata data dalla equazione (b), e quindi tutti i punti della seconda retta sono limiti di punti della prima, e la seconda retta è il limite della prima).

Dunque la retta rappresentata dall'equazione (b) è la tangente alla curva.

Si calcoli la differenza delle ordinate M′P′ della curva, e M′Q della tangente corrispondenti ad una stessa ascissa $OM' = x + h$. Si ha per l'ordinata della curva

$$M'P' = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}[f''(x) + \epsilon],$$

ove $lim\,\epsilon = 0$, per $h = 0$; l'ordinata M′Q della tangente è data dalla (*b*), ove si faccia $X = x + h$, e si ha

$$M'Q = y + \frac{dy}{dx}h = f(x) + hf'(x);$$

e sottraendo

$$M'P' - M'Q = \frac{h^2}{2}[f''(x) + \epsilon], \quad (lim\,\epsilon = 0).$$

Se ora $f''(x)$ è positivo, si può supporre h sufficientemente piccolo in modo che $f''(x) + \epsilon$ sia pure positivo, ed allora, poichè $\frac{h^2}{2}$ è sempre positivo, sarà $M'P' - M'Q > 0$, ossia l'ordinata M′P′ della curva è maggiore dell'ordinata corrispondente M′Q della tangente, e la curva sta nelle vicinanze del punto P, da quella parte della tangente verso cui è rivolta la direzione positiva dell'asse della y; in altre parole la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y. La curva rivolgerebbe invece la sua concavità dalla parte opposta, se $f''(x)$ è negativo.

13. Parabole. — Si suol dare questo nome ad ogni curva la cui equazione in coordinate cartesiane si può mettere sotto la forma

$$y = ax^m,$$

ove m è un esponente qualunque, intero o fratto o incommensurabile, positivo o negativo, che dicesi anche *ordine* della parabola.

Se $m = 2$, ovvero $= \frac{1}{2}$, la curva coincide colla parabola conica, il cui asse è oy nel primo caso, ed ox nel secondo. Per $m = 1$, la linea è una retta passante per l'origine. Se $m = 3$, la curva si chiama parabola cubica, e se $m = \frac{3}{2}$, vien detta parabola semicubica. Se $m = -1$, la curva è un iperbole riferita ai suoi assintoti.

Se m è intero e positivo, la funzione ax^m è definita per tutti i valori di x; lo stesso avviene se m è intero e negativo, tolto il valore speciale $x = 0$, per cui la y diventa infinita.

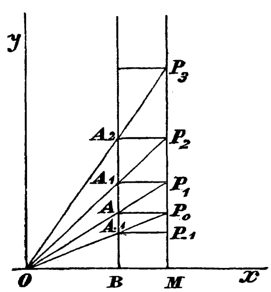
Se m è un intero pari (positivo o negativo) l'asse delle y è un asse di simmetria della linea; invero dati ad x due valori eguali e di segno contrario x e $-x$, i valori corrispondenti dell'ordinata sono eguali, e quindi i due punti della curva, aventi la stessa ordinata ed ascisse eguali ma di segno contrario, sono simmetrici rispetto all'asse delle y.

Se m è un intero dispari, l'origine è un centro della curva. Invero i due punti della curva di ascisse x e $-x$, hanno per ordinate ax^m e $-ax^m$, e quindi sono simmetrici rispetto all'origine.

Se m è fratto, o incommensurabile, per non fare una troppo lunga discussione, supporremo x positivo, e prenderemo per x^m il solo valore aritmetico.

Invece di dare il coefficiente numerico a possiamo dare un punto A per cui la curva passa. Se $x_0 = \mathrm{OB}$ e $y_0 = \mathrm{BA}$ sono le coordinate di A, dovrà essere $y_0 = a x_0^m$; e quindi, eliminando a, l'equazione della parabola diventa:

$$\frac{y}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^m.$$



Sia $\mathrm{OM} = x$ un'ascissa arbitraria. Si vogliono costrurre le ordinate corrispondenti delle varie parabole, per tutti i valori interi, positivi o negativi dell'esponente m.

La retta OA incontri la parallela all'asse delle y condotta per M in P_1, e sia $\mathrm{MP}_1 = y_1$. Si ricava dai triangoli simili OMP_1 e OBA

$$\frac{y_1}{y_0} = \frac{x}{x_0}.$$

Per P_1 si conduca la parallela all'asse delle x, che incontri BA in A_1, e si segni OA_1, che incontra MP_1 in P_2, e sia $MP_2 = y_2$. Dai triangoli simili OMP_2 e OBA_1 si ricava

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{x}{x_0},$$

e quindi

$$\frac{y_2}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2.$$

Per P_2 si conduca la parallela ad Ox, che incontri la BA in A_2, e si segni OA_2 che incontra MP_1P_2 in P_3. Si ricava in modo analogo, posto $MP_3 = y_3$,

$$\frac{y_3}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^3;$$

e così via.

Per A si conduca la parallela ad Ox, che incontri MP_1 in P_0; sarà $MP_0 = y_0$. La OP_0 incontri BA in A_{-1}; per A_{-1} si conduca la parallela ad Ox, che incontri MP_0 in P_{-1}. Posto $MP_{-1} = y_{-1}$, si avrà

$$\frac{y_{-1}}{y_0} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-1},$$

e così via.

Pertanto $y_1, y_2, y_3, \ldots y_0, y_{-1}, \ldots$ sono le ordinate corrispondenti all'ascissa x, delle parabole di esponenti $1, 2, 3, \ldots 0, -1, \ldots$, e P_1, P_2, $P_3, \ldots P_0, P_{-1}, \ldots$ i punti d'intersezione della parallela all'asse delle y condotta per M con queste varie parabole. Variando M, i punti P_1, P_2, $P_3, \ldots P_0, P_{-1}, \ldots$ descrivono le parabole corrispondenti a tutti gli esponenti interi, positivi o negativi.

La derivata in un punto P della parabola d'ordine m si ottiene segnando: 1° il segmento PQ parallelo all'asse delle x, ed eguale all'unità di misura; 2° il segmento PR parallelo all'asse delle y e misurato dalla derivata di ax^m, ossia max^{m-1}; la loro risultante PU è la derivata del punto P, e la sua direzione è la direzione della tangente.

Se T è il punto d'intersezione della tangente coll'asse delle x, e quindi TM è la sottotangente, si ha

$$\mathrm{TM} : \mathrm{PQ} = \mathrm{MP} : \mathrm{QU}\,, \text{ ossia } \mathrm{TM} : 1 = ax^m : max^{m-1},$$

da cui

$$\mathrm{TM} = \frac{1}{m}\, x,$$

ossia **nella parabola d'ordine** m **la sottotangente è l'**m^a **parte dell'ascissa.** Questa proprietà permette di costrurre facilissimamente la tangente ad ogni parabola.

Così, se $m = 2$ (parabola conica), se P è un punto della curva, sia T il punto medio dell'ascissa OM; sarà PT la tangente alla curva. Se $m = -1$ (iperbole), si prenda $\mathrm{TM} = -\mathrm{OM}$, vale a dire $\mathrm{MT} = \mathrm{OM}$; la PT è la tangente cercata. Ecc. ecc.

La derivata seconda di $f(x) = ax^m$ è $y'' = m\,(m-1)\,ax^{m-2}$, e dal suo segno si può dedurre da che parte la curva rivolga la sua concavità.

Supposto $a > 0$, se ad x si attribuiscono soli valori positivi, allora:

Se $m > 1$, sarà $y'' > 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y;

Se $1 > m > 0$, sarà $y'' < 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione negativa dell'asse delle y;

Se $m < 0$, sarà $y'' > 0$, e la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva delle y;

Se $m = 1$, ovvero $m = 0$, la linea si riduce ad una retta, e non si ha più a parlare di concavità.

Quando ad x si possano anche dare valori negativi (nel qual caso supporremo m intero, e diverso da zero e da uno, e quindi $m(m-1)$ sempre positivo) si dedurrà che la curva rivolge la sua concavità verso la direzione positiva delle y se m è pari, verso la negativa, se m è dispari.

Nel caso speciale della parabola conica di equazione $y^2 = 2px$, si ha una proprietà, da cui deriva una nuova costruzione della tangente. Invero, derivando quest'equazione si ha $yy' = p$. Ora il membro di sinistra rappresenta la sottonormale; dunque in questa curva la sottonormale è costante.

14. Curva logaritmica. — Con questo nome si chiama la curva di equazione $y = a^x$, ove a è una costante positiva, che supporremo maggiore di 1.

Attribuendo ad x i valori interi

$$\ldots. -2, \; -1, \; 0, \; 1, \; 2, \; 3, \ldots.$$

l'ordinata y assume i valori

$$a^{-2}, \; a^{-1}, \; a^0 = 1, \; a^1 = a, \; a^2, \; a^3, \ldots$$

Questi segmenti si costruiscono con facilità segnando due rette OA_0 e OA_1 partenti da un punto O, e su esse i segmenti $OA_0 = a^0 = 1$, e $OA_1 = a^1 = a$. Si costruiscano i triangoli OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ... e $OA_{-1}A_0$, $OA_{-2}A_{-1}$, ... simili ad OA_0A_1. Si vede immediatamente che $OA_2 = a^2$, $OA_3 = a^3$, ... $OA_{-1} = a^{-1}$, $OA_{-2} = a^{-2}$, ecc.

Conoscendo le ordinate a^x ed $a^{x'}$ corrispondenti a due ascisse x ed x', si può determinare l'ordinata corrispondente all'ascissa media $\frac{x+x'}{2}$; quest'ordinata è $a^{\frac{x+x'}{2}} = \sqrt{a^x . a^{x'}}$, ossia è la media geometrica delle ordinate a^x ed $a^{x'}$, e quindi si può costrurre colla riga e col compasso. In tal modo si possono costrurre infiniti punti della curva, e tanto prossimi quanto si vuole.

Per trovare la tangente alla curva nel punto P di ascissa x, basta segnare $PQ = 1$, e poi $QU = a^x \log a$; la retta PU sarà la tangente cercata. Se essa incontra l'asse delle x in T, il triangolo TMP è simile al triangolo PQU; quindi si ha

$$\frac{TM}{PQ} = \frac{MP}{QU},$$

e sostituendo a PQ, MP, QU i loro valori 1, a^x, $a^x \log a$, si deduce

$$\mathrm{TM} = \frac{1}{\log a},$$

ossia nella curva logaritmica la sottotangente TM è costante, qualunque sia il punto della curva. Questa proprietà permette di costrurre con facilità la tangente alla curva in ogni suo punto.

Siccome poi la derivata seconda di P è un segmento parallelo all'asse delle y e misurato da $a^x \log^2 a$, che è positivo, si deduce che la curva rivolge sempre la concavità verso la direzione positiva dell'asse delle y.

15. Sia $f(x, y) = 0$ una equazione fra le coordinate cartesiane x ed y d'un punto nel piano. Se questa equazione determina una delle coordinate, p. e. la y come funzione implicita di x, il che avviene quando pei valori di x ed y considerati non è $\frac{df}{dy} = 0$, si avrà nel piano una curva.

La derivata $\frac{dy}{dx}$ è data dall'equazione

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\ \frac{dy}{dy} = 0,$$

da cui si ricava

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}},$$

e sostituendola nell'equazione della tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

fatti sparire i denominatori, e trasportando tutto nel primo membro, l'equazione della tangente diventa

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dx}(Y - y) = 0.$$

In essa oltre, alle coordinate X ed Y d'un punto della tangente compaiono ancora le coordinate x y del punto di contatto, le quali non sono indipendenti, ma legate dalla relazione $f(x, y) = 0$. Quindi, combinando in vario modo l'equazione precedente con quella della curva, all'equazione della tangente si possono dare varie forme.

Esempio. — Sia l'equazione $f(x, y) = 0$ di secondo grado in x ed y

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fg + c = 0.$$

Si avrà

$$\frac{1}{2}\frac{df}{dx} = ax + hy + g, \quad \frac{1}{2}\frac{df}{dy} = hx + by + f,$$

e l'equazione della tangente diventa

$$(ax + hy + g)\ (X - x) + (hx + by + f)\ (Y - y) = 0,$$

ovvero ordinando

$$\begin{gathered}(ax + hy + g)\,X + (hx + by + f)\,Y - \\ -(ax^2 + 2hxy + by^2 + gx + fy) = 0,\end{gathered}$$

ed aggiungendo a questa equazione quella della curva, si otterrà infine

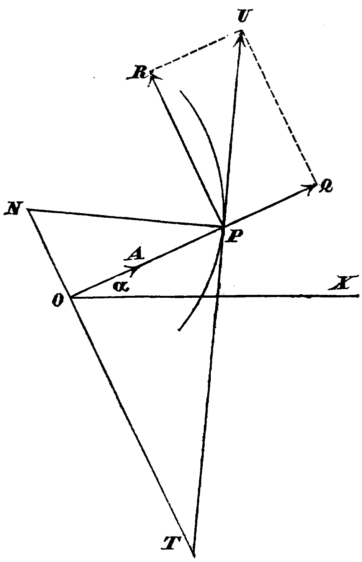
$$(ax + hy + g)\,X + (hx + by + f)\,Y + gx + fy + c = 0.$$

§ 4. Curve riferite a coordinate polari.

16. Un punto P nel piano può essere dato in coordinate polari mediante l'angolo α che la retta che lo congiunge ad un punto fisso O, detto origine o polo, fa con una retta fissa OX, detta asse polare, e mediante il numero r che misura la distanza OP. I numeri r ed α diconsi coordinate polari del punto P. Ad Y si dà anche il nome di *raggio vettore*, e quello di *argomento* ad α.

Se α è una variabile indipendente, ed r una funzione di α

$$r = \varphi(\alpha),$$



la posizione del punto di coordinate r ed α, dipende dalla sola variabile α, e variando questa, il punto descrive una linea piana.

Sia $\overline{\mathrm{OA}} \equiv \mathbf{a}$ il segmento eguale all'unità di misura, e che fa l'angolo α coll'asse polare. Sarà

$$\overline{\mathrm{OP}} \equiv r\mathbf{a}.$$

Si derivi questa equipollenza. Detti r' e $\mathbf{a}'$ le derivate di r ed $\mathbf{a}$ ed osservando che la derivata di OP coincide colla derivata di P, che diremo $\mathbf{u}$, si ha

$$\mathbf{u} \equiv r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}';$$

il che dice che la derivata PU del punto P è la risultante di due segmenti $r'\mathbf{a}$ e $r\mathbf{a}'$. Il primo $r'\mathbf{a}$ è un segmento avente la stessa direzione di OA, ossia di OP, e misurato dal numero $r' = \frac{dr}{d\alpha} = \varphi'(\alpha)$, e sia PQ; l'altro $r\mathbf{a}'$ si ottiene ricordando che la derivata $\mathbf{a}'$ del segmento variabile $\mathbf{a}$ è un segmento eguale ad $\mathbf{a}$, ossia all'unità, e perpendicolare ad OA (Cap. I, N. 9, V); quindi $r\mathbf{a}'$ è un segmento PR eguale al raggio vettore OP e perpendicolare ad esso.

Detto θ l'angolo che la derivata PU, ossia la direzione della tangente, fa col raggio vettore, si ricava dal triangolo rettangolo QPU:

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\mathrm{QU}}{\mathrm{PQ}} = \frac{r}{r'} = \frac{r d\alpha}{dr}.$$

Sia PN la normale alla curva in P, ON la perpendicolare in O al raggio vettore OP ed N il loro punto d'intersezione. Sarà il triangolo OPN eguale al triangolo QUP, e quindi ON $=$ PQ, e PN $=$ PU. Perciò la lunghezza del segmento ON, che dicesi *sottonormale polare,* è ON $= r' = \frac{dr}{d\alpha}$.

La tangente alla curva in P incontri la perpendicolare ON al raggio vettore OP nel punto T. Al segmento OT si suol dare il nome di *sottotangente polare.* Dal triangolo rettangolo OPT si ricava in valor assoluto OT $=$ OP$tang\theta$, ossia, sostituendo

$$\mathrm{OT} = \frac{r^2}{r'} = \frac{r^2 d\alpha}{dr}.$$

Le lunghezze PN e PT diconsi anche *lunghezza della normale* e *della tangente.* Si ha dalla figura

$$\mathrm{PN} = \sqrt{\overline{\mathrm{PO}}^2 + \overline{\mathrm{ON}}^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{r^2 d\alpha^2 + dr^2}}{d\alpha},$$

$$\mathrm{PT} = \sqrt{\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{OT}}^2} = \sqrt{r^2 + \frac{r^4}{r'^2}} = \frac{r}{r'}\sqrt{r'^2 + r^2} = \frac{r}{dr}\sqrt{dr^2 + r^2 d\alpha^2}.$$

La derivata seconda del punto P è

$$\mathbf{v} \equiv r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}'',$$

cioè è la risultante : del segmento $r''\mathbf{a}$, ossia di un segmento avente la direzione di OA, e misurato dal numero r''; del segmento $2r'\mathbf{a}'$, ossia d'un segmento la cui direzione fa un angolo retto con OA, e misurato dal numero $2r'$; e del segmento $r\mathbf{a}''$, ossia d'un segmento la cui direzione è opposta a quella di OA, e misurato dal numero r.

L'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ vale nel nostro caso $(r'\mathbf{a} + r\mathbf{a}').(r''\mathbf{a} + 2r'\mathbf{a}' + r\mathbf{a}'')$, ovvero sviluppando e ricordando che $\mathbf{a}'' \equiv -\mathbf{a}$, si trova

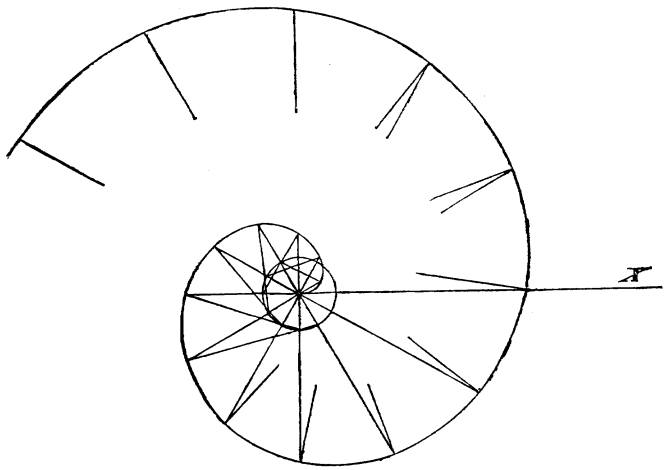
$$\mathbf{u}.\mathbf{v} = (2r'^2 - rr'' + r^2)\mathbf{a}.\mathbf{a}'.$$

L'area $\mathbf{a}.\mathbf{a}'$ compresa fra due segmenti eguali all'unità di misura, ed ortogonali, è l'area unità di misura; quindi l'area $\mathbf{u}.\mathbf{v}$ è misurata dal numero $2r'^2 - rr'' + r^2$.

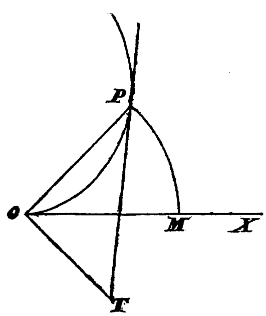
17. Spirale d'Archimede. — Pongasi $r = a\alpha$, ove a è una costante arbitraria. Si avrà una curva, detta spirale d'Archimede (ἕλιξ).

In essa r varia proporzionalmente ad α. Quindi, conoscendo un punto A della curva, se ne possono ottenere infiniti altri, segnando delle rette OB, OC, ... che facciano coll'asse polare OX angoli multipli, o summultipli di AOX, e poi portando su esse raggi vettori multipli o summultipli di OA secondo la stessa ragione.

La sottonormale ON, che in generale vale $\frac{dr}{d\alpha}$, nel nostro caso si riduce ad a ed è costante. Dunque **nella spirale d'Archimede la sottonormale ha una lunghezza costante.**



Questa proprietà permette di costrurre con grande facilità la normale, e quindi la tangente alla curva.



Invece della sottonormale si può calcolare la sottotangente polare, che vale $r^2 \frac{d\alpha}{dr}$, ossia, nel nostro caso, OT $= a\alpha^2$. Se si descrive con centro O e con raggio OP l'arco di cerchio PM compreso fra il punto P e l'asse OX, sarà appunto l'arco PM eguale ad $a\alpha^2$; quindi la sottotangente OT è eguale in lunghezza all'arco di cerchio di raggio OP, e di ampiezza l'angolo POX.

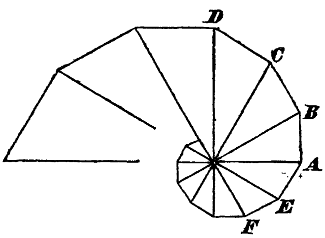
La tangente trigometrica dell'angolo $\theta =$ OPT vale $\frac{rd\alpha}{dr} = \alpha$, e quindi col crescere indefinitamente di α anche θ cresce, ed ha per limite un retto.

18. Spirale logaritmica. — Chiamasi con questo nome la curva la cui equazione è $r = Ce^{a\alpha}$, ove C ed a sono due costanti, ed e è la base dei logaritmi naturali.

Se $a = 0$, si deduce $r = C$, ossia la spirale logaritmica è in questo caso un cerchio.

Se a non è nullo, variando C si hanno infinite spirali, che però non sono che posizioni distinte d'una stessa curva. Invero, se si prende per nuovo asse polare una retta passante per lo stesso polo, ma che faccia l'angolo ω coll'antico asse polare, di un punto qualunque del piano non si altera il raggio vettore, mentrechè, chiamando α' il nuovo argomento, si avrà $\alpha' = \alpha - \omega$. Quindi l'equazione della curva diventa $r = Ce^{a(\alpha' + \omega)} = Ce^{a\omega} e^{a\alpha'}$, che ha la stessa forma della primitiva, salvochè invece della costante C trovasi $Ce^{a\omega}$, e prendendo convenientemente ω si può fare in modo che essa assuma il valore che più ci piace.

Quindi, senza ledere la generalità della curva, si può supporre $C = 1$, e la sua equazione ridotta alla forma $r = e^{a\alpha}$.



Una proprietà notevole di questa curva è la seguente. Se OA, OB e OC, OD sono due coppie di raggi vettori che vanno ai punti ABCD della curva, ed esse sono egualmente inclinate fra loro, ossia se l'angolo AOB è eguale all'angolo COD, allora i triangoli OAB ed OCD sono simili. Invero, detti α, β, γ, δ gli argomenti di questi raggi vettori, sarà in valor assoluto

$$\frac{OB}{OA} = e^{a(\beta - \alpha)} \qquad \frac{OD}{OC} = e^{a(\delta - \gamma)},$$

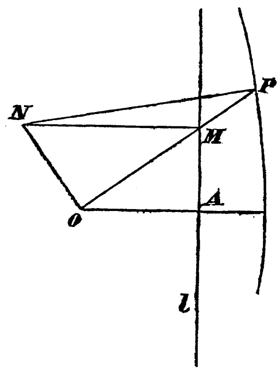
e siccome $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, perchè le coppie di raggi vettori sono egualmente inclinate fra loro, si ha $\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$, e quindi i triangoli OAB e OCD, che hanno gli angoli in O eguali e i lati che li comprendono proporzionali, sono simili.

Perciò, se della spirale si conoscono il polo O e due punti A e B, se si costruiscono i triangoli OBC, OCD, ... simili ad OAB, si hanno infiniti punti C, D,.... della spirale, che vanno in un senso; e se si costruiscono i triangoli OEA, OFE, ... pure simili ad OAB, si hanno altri punti E, F, ... che procedono in senso opposto. Inoltre, se OA e OB sono due raggi vettori, se si segna la bissetrice del loro angolo, ed OH è il raggio vettore che corrisponde a questa bissetrice, dovranno i triangoli OAH ed OHB essere simili e quindi OH è media proporzionale fra OA ed OB, e si sa costrurre colla riga e col compasso. In tal modo si possono determinare sulla curva infiniti altri punti, tanto prossimi quanto si vuole.

Continuando a chiamare θ l'angolo fatto dalla tangente alla curva col raggio vettore, si ha, nel nostro caso, $tang\theta = \frac{1}{a}$, ossia è costante, ed anche θ risulta costante. Quindi la spirale logaritmica taglia sotto angolo costante tutti i raggi vettori.

19. Concoidi. — Sia nel piano una linea l. Da un punto O del piano si conduca la retta OM ad un punto qualunque M della linea l, e si porti sulla direzione OM un segmento MP di lunghezza costante. Variando M sulla linea l, il punto P descriverà una linea, che dicesi concoide di l, rispetto al polo O.

Riferita la linea l a coordinate polari, di cui O è il polo, sia $r = f(\alpha)$ la sua equazione. Detto r_1 il raggio vettore corrispondente al punto P, e h la lunghezza costante MP, sarà $r_1 = r + h$. Derivando si ha $\frac{dr_1}{d\alpha} = \frac{dr}{d\alpha}$. Ma $\frac{dr}{d\alpha}$ e $\frac{dr_1}{d\alpha}$ sono le sunnormali della linea l, e della sua concoide, quindi la concoide d'una linea ha la stessa sottonormale polare della linea data.



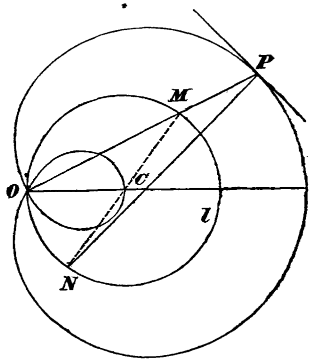
Questa proprietà permette di trovare immediatamente la tangente alla concoide conoscendo la tangente alla curva primitiva, e dà luogo alla seguente costruzione: Si segni la ON $\perp$ OMP, fino ad incontrare la normale in M alla l nel punto N. La retta NP è la normale cercata.

Se la linea l è una retta, la concoide assume il nome di *concoide di Nicomede.* Se si prende per asse polare la perpendicolare OA abbassata da O sulla l, l'equazione della retta è $r = \frac{a}{\cos\alpha}$, e quella della concoide

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} + h.$$

Si vede che la curva è simmetrica rispetto alla retta OA. Se M è un punto di l, e P il corrispondente della concoide, segnato MN $\perp l$, e ON $\perp$ OM, la NP è la normale alla concoide in P.

Altro caso importante di concoidi è quello in cui la linea l è un cerchio, ed il punto O sta sulla circonferenza. Essa dicesi *lumaca di Pascal.* Questa curva ha forme differenti, secondochè il segmento h è maggiore, o eguale o minore del diametro del cerchio. Se h è eguale al diametro del cerchio, la curva dicesi anche *cardioide.* Presa per asse polare la retta OC



che va al centro C del cerchio, detto a il raggio del cerchio, sarà OM $= 2a\cos\alpha$, e quindi l'equazione della concoide è

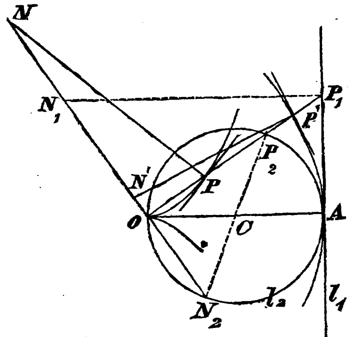
$$r = 2a\cos\alpha + h.$$

La normale alla curva in P si ottiene segnando il diametro MCN; sarà ON la sottonormale, ed NP la normale cercata.

20. Cissoidi, ecc. — Siano nel piano due linee l_1 ed l_2. Da un punto O si conduca la retta OP_1P_2 ad incontrare le due linee l_1 ed l_2 in P_1 e P_2; e si segni sulla retta OP_1P_2 un punto P tale che $OP = OP_1 \pm OP_2$. Variando la direzione della retta OP, il punto P descriverà una linea l. Si vuol trovare la tangente alla l in P conoscendo le tangenti in P_1 e P_2 alle l_1 ed l_2.

Detti r_1, r_2, r i raggi vettori corrispondenti a P_1 P_2 e P, sarà

$r = r_1 \pm r_2$, e quindi $\frac{dr}{d\alpha} = \frac{dr_1}{d\alpha} \pm \frac{dr_2}{d\alpha}$; ossia la sottonormale della l in P è la somma o differenza delle sottonormali di l_1 e l_2 in P_1 e P_2. Da ciò una costruzione semplicissima della normale alla curva.

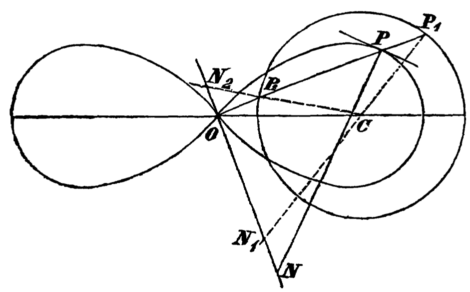


Sia p. e. la linea l_1 una retta AP_1, la l_2 un cerchio C tangente alla retta in A, e il punto O sia l'altro estremo del diametro passante per A. Preso $OP = OP_1 - OP_2 = P_2P_1$, si avrà come luogo dei punti P una curva, detta *cissoide di Diocle*. Essa è simmetrica rispetto alla retta OA. Posto $OA = a$, si deduce $OP_1 = \frac{a}{\cos\alpha}$, $OP_2 = a\cos\alpha$, e quindi l'equazione della cissoide è

$$r = \frac{a}{\cos\alpha} - a\cos\alpha = a\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}.$$

La costruzione della normale alla curva in P si otterrà nel seguente modo: La retta P_2C incontri in N_2 il cerchio; segnata la retta indefinita ON_2, il segmento ON_2 sarà la sottonormale del cerchio. Da P_1 si innalzi la $P_1N_1 \perp AP_1$ che incontri ON_2 in N_1; poi si segni $\overline{ON} \equiv \overline{ON_1} - \overline{ON_2} \equiv \overline{ON_1} + \overline{N_2O} \equiv \overline{N_2N_1}$. La NP è la normale cercata.

Le linee l ed l_2 possono anche essere archi di una stessa curva. Così se da un punto O contenuto nel piano d'un cerchio C si conduce una trasversale OP_2P_1 a questo cerchio, e si porta su questa trasversale il segmento $OP = OP_1 - OP_2 = P_2P_1$, si avrà come luogo dei punti P una curva. Per condurre la normale a questa curva,



si segni la $\perp$ in O al raggio OPP_2P_1, che incontri il raggio del cerchio passante per P_1 in N_1, e il raggio passante per P_2 in N_2. Si porti $ON = ON_1 - ON_2 = N_2N_1$. Sarà PN la normale cercata.

Se si prende per asse polare la retta OC, e si chiamano r ed α le coordinate polari di P, a il raggio del cerchio C, e b la distanza OC, l'equazione della curva ottenuta nel modo testè indicato è

$$r = 2\sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

La curva ha forme diverse secondochè O è esterno od interno al cerchio. Nel caso in cui le tangenti condotte da O al cerchio siano ortogonali, dicesi *lemniscata*.

Più generalmente, se da un punto O si conduce una retta ad incontrare in $P_1\,P_2 \ldots P_n$ n linee date, e si porta su essa un segmento

$$OP = m_1 OP_1 + m_2 OP_2 + \ldots\ldots + m_n\, OP_n\,,$$

ove $m_1\, m_2 \ldots\ldots m_n$ sono numeri arbitrarii, dette $N_1\, N_2 \ldots N_n$ N le estremità dalle sottonormali corrispondenti, sarà:

$$ON = m_1\, ON_1 + m_2\, ON_2 + \ldots + m_n\, ON_n\,.$$

Sia ancora, come nella cissoide, C un cerchio, O un punto della circonferenza, OCA un diametro, e AP_1 la perpendicolare ad esso in A. Segnata la OP_2P_1 che incontra il cerchio in P_2 e la retta in P_1, sia P′ il loro punto medio. Il luogo dei punti P′ è una curva, detta *visiera di Agnesi* (fig. a pag. 86).

Si ha $OP' = \dfrac{OP_1 + OP_2}{2}$; quindi l'equazione di questa curva è

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{\cos\alpha} + a\cos\alpha\right),$$

e la sua normale in P′ si ottiene segnando il diametro P_2CN_2; poi ON_2; in seguito $P_1N_1 \parallel OA$, che incontri ON_2 in N_1; detto N′ il punto medio di N_1 ed N_2, sarà N′P′ la normale cercata.

§ 5. Proiezioni e inversione.

21. Proiezioni. — Se si proiettano i punti d'una figura sopra un piano π, o con raggi paralleli ad una data direzione, ovvero con raggi che partono da un centro di proiezione O, si otterrà nel piano π una figura, che dicesi proiezione parallela o centrale della prima.

Ogni punto P dello spazio ha per proiezione un punto determinato ed accessibile, eccettuati i casi in cui P coincide col centro O di proiezione, ovvero in cui il raggio OP risulta parallelo al piano di proiezione. Ogni retta ha per proiezione una retta, salvochè o la retta sia essa stessa un raggio di proiezione, ovvero il piano che la proietta risulti parallelo al piano π. Noi escluderemo, in ciò che segue, questi casi eccezionali, ed allora risulta dai teoremi del Cap. I, 6, che:

Se il punto P ha per limite P_0, la proiezione di P ha per limite la proiezione di P_0.

Se la retta r ha per limite r_0, la proiezione di r ha per limite la proiezione di r_0.

Teorema. — La proiezione della tangente ad una curva in un suo punto è la tangente alla proiezione della curva nel punto corrispondente.

Infatti, se P e P′ sono due punti della curva C che si proietta, e M ed M′ sono le loro proiezioni, la retta MM′ è la proiezione di PP′. Si faccia tendere P′ verso P; la PP′ ha per limite la tangente alla curva descritta da P, e la sua proiezione MM′ ha per limite la proiezione di questa tangente; dunque la retta MM′ che unisce i punti M ed M′ della proiezione della curva data tende verso un limite ossia questa curva proiezione ha tangente, e questa tangente è la proiezione della tangente alla curva considerata.

Siccome le coniche si possono considerare come proiezioni d'un cerchio, dalla proposizione precedente si deduce la costruzione della tangente alle coniche.

22. Inversione. — Sia O un punto fisso nel piano, e k un numero dato. Ad ogni punto P del piano si faccia corrispondere il punto Q della retta OP, tale che

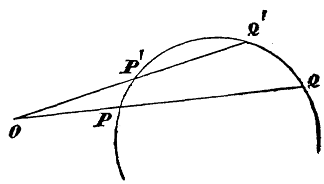
$$OP \times OQ = k^2.$$

Il punto Q, che è determinato, ove sia dato P, salvochè P coincida in O, dicesi *l'inverso* di P; se P descrive una linea, Q descriverà una linea che dicesi *l'inversa* di quella descritta da P. Il punto O vien detto centro d'inversione.

Se PQ e P′Q′ sono due coppie di punti corrispondenti, sarà $OP \times OQ = OP' \times OQ'$, e quindi i punti P, Q, P′, Q′ stanno su d'uno stesso cerchio.

Teorema. — La normale alla linea descritta da P, la normale alla linea descritta dal suo inverso Q, e la perpendicolare nel punto medio di PQ passano per uno stesso punto.

Infatti, siano P e P′ due posizioni di P, e Q e Q′ i loro punti inversi. Poichè PP′QQ′ stanno su d'uno stesso cerchio, la perpendicolare nel punto medio di PP′, la perpendicolare nel punto medio di PQ, e la perpendicolare nel punto medio di QQ′ passano per uno stesso punto C, che è il centro del cerchio.



Si passi al limite. La prima perpendicolare ha per limite la normale alla linea descritta da P; la seconda perpendicolare non varia; il loro punto d'intersezione C ha per limite il punto d'intersezione della normale alla curva data colla perpendicolare nel punto medio di PQ, il quale punto chiameremo ancora C; quindi la terza perpendicolare ha per limite la retta CQ; ma il limite di questa terza perpendicolare, ossia della perpendicolare nel punto medio di QQ', è la normale alla curva descritta da Q (N. 5): dunque anche questa curva ha normale e le normali alle linee descritte da P e Q passano per un punto C della perpendicolare nel punto medio di PQ.

Dal triangolo isoscele CPQ si ricava che le normali alle due curve inverse fanno angoli eguali e di senso opposto col raggio OPQ; quindi anche le tangenti alle due curve nei punti P e Q fanno con OPQ angoli eguali, e di senso opposto, e si incontrano in un punto della perpendicolare nel punto medio di PQ.

Esercizii.

23. 1. Costrurre la tangente alla curva (*sinusoide*) di equazione:

$$y = \operatorname{sen} x$$

ovvero, più generalmente

$$y = b \operatorname{sen} \frac{x}{a}.$$

Tutti i punti d'intersezione di questa curva coll'asse delle x sono centri, e punti di flesso; e le perpendicolari all'asse delle x nei loro punti di mezzo sono assi di simmetria.

2. Costrurre la curva di equazione

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

e determinare la tangente in un suo punto qualunque. Questa curva dicesi *catenaria.*

3. Costrurre la curva (*spirale iperbolica*) la cui equazione in coordinate polari è

$$r = \frac{a}{\alpha}.$$

Dimostrare che la sua sottotangente polare è costante. Essa ha un assintoto parallelo all'asse polare, alla distanza a da esso.

4. Se si hanno due curve riferite a coordinate cartesiane

$$y = f(x) \quad \text{e} \quad y = \varphi(x),$$

e si determina una terza curva, la cui ordinata sia media fra le ordinate delle due curve precedenti

$$y = \frac{f(x) + \varphi(x)}{2},$$

le tangenti nei punti corrispondenti alle due curve date e la tangente alla terza curva concorrono in un punto.

Lo stesso avviene se l'ordinata della terza curva è funzione lineare delle ordinate delle curve date, della forma

$$y = \frac{mf(x) + n\varphi(x)}{m+n},$$

ove m ed n sono numeri costanti.

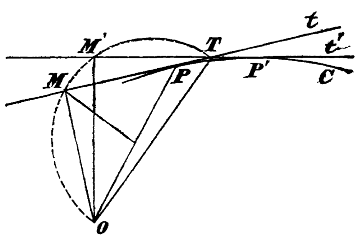
5. Sia, nel piano, O un punto fisso, e OP il segmento risultante d'un segmento costante in lunghezza, ma variabile in direzione, e d'un segmento di direzione costante, e la cui lunghezza sia proporzionale all'angolo che il primo segmento fa con una retta fissa. Trovare la derivata del segmento OP, e quindi la tangente alla curva descritta da P (*cicloide*).

6. Nel piano sia ancora O un punto fisso, ed OP il segmento risultante di due segmenti **a** e **b**, di lunghezza costante, e che fanno con una retta fissa del piano angoli funzioni lineari d'una stessa variabile t. Trovare la derivata di OP, e quindi la tangente alla curva descritta da P (*epicicloide*).

7. Sia C una curva avente in ogni punto P una tangente t; supporremo inoltre che il punto d'intersezione della tangente t con una tangente consecutiva t' abbia per limite il punto di contatto P.

Il luogo dei punti M piedi delle perpendicolari OM abbassate da un punto fisso O sulle tangenti alla curva C dicesi *podaria* della C; O è il polo della podaria.

TEOREMA. — La normale alla podaria nel punto M passa pel punto di mezzo della retta OP.



Invero, se t e t' sono due tangenti alla curva C, ed M ed M' i piedi dalle perpendicolari abbassate da O su esse, detto T il punto d'intersezione delle tangenti t e t', gli angoli OMT ed OM'T sono retti, e quindi i punti M ed M' trovansi sulla circonferenza di diametro OT, e la perpendicolare nel punto medio di MM' passa pel centro del cerchio, cioè pel punto medio di OT. Si passi al limite, facendo tendere t' a t. Il punto T d'intersezione delle tangenti ha per limite il punto P di contatto della t colla curva; il punto medio di OT ha per limite il punto medio di OP, e la perpendicolare nel punto di mezzo di MM', la quale passa pel punto medio di OT, ha per limite la retta che va da M al punto medio di OP. Ma il limite della perpendicolare nel punto di mezzo di MM' è la normale alla curva descritta da M; dunque la normale alla podaria in M passa pel punto di mezzo di OP.

8. La podaria d'un cerchio di centro C, di raggio r, e di polo O è una lumaca di Pascal, ossia la concoide del cerchio di diametro OC, di polo O, e in cui il segmento costante è r (N. 19).

9. Se un angolo BAC di grandezza costante si muove in guisa che i suoi lati AB ed AC tocchino due curve fisse in due punti (variabili) B e C, la normale alla linea descritta da A passa pel centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC.

Si suppone naturalmente la possibilità, e la continuità di questo movimento. Si suppone inoltre che per le due curve date il punto d'intersezione di due tangenti consecutive abbia per limite il punto di contatto.

Per dimostrare il teorema, sia B' A' C' una nuova posizione della terna di punti BAC, e siano B_1 e C_1 i punti d'intersezione di AB con A'B', e di AC con A'C'. Poichè gli angoli B_1AC_1 e $B_1A'C_1$ sono eguali, i punti $AA'B_1C_1$ stanno su d'una circonferenza, e quindi la normale nel punto medio di AA' passa pel centro di questa circonferenza. Si passi al limite. I punti B_1 e C_1 hanno per limiti B e C, il centro del cerchio passante per AB_1C_1A', ossia il punto d'intersezione delle perpendicolari nei punti medii di AB_1 e AC_1 ha per limite il punto d'intersezione delle perpendicolari nei punti medii di AB e AC, ossia ha per limite il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC; e il limite della perpendicolare nel punto medio di AA', che passava pel centro del primo cerchio, ossia la normale alla curva descritta da A, passerà pel centro del cerchio ABC.

Discutere il caso in cui l'angolo in A è retto.

10. Se O è il centro d'inversione, e P, Q, e P', Q' sono due coppie di punti corrispondenti nell'inversione, i triangoli OPQ e OQ'P' sono simili, ed in senso opposto.

Dimostrare che l'inversa d'una retta passante per O è la retta stessa.

La linea inversa d'una retta non passante per O è un cerchio che passa per O; e l'inversa d'un cerchio che passa per O è una retta, che non passa per questo punto.

L'inversa d'un cerchio non passante per O è un cerchio che gode della stessa proprietà.

11. La linea inversa della spirale d'Archimede, il centro d'inversione essendo l'origine della spirale, è la spirale iperbolica.

L'inversa della spirale logaritmica, con centro d'inversione nel polo, è una spirale logaritmica eguale alla prima.

L'inversa della lumaca di Pascal, il centro d'inversione essendo il polo, è una conica, ed il centro di inversione ne è un fuoco. Nel caso speciale della cardioide, l'inversa è una parabola.

L'inversa d'una conica, il centro di inversione essendo un punto qualunque O del piano, è la podaria d'una seconda conica, il polo essendo lo stesso punto O. La podaria dell'iperbole equilatera, come pure la sua inversa, il centro d'inversione essendo il centro della curva, è la lemniscata.

12. La curva di equazione $y = f(x)$, e la curva di equazione $Y = \sqrt{A \pm y^2}$, qualunque sia la costante A, hanno, nei punti corrispondenti ad una stessa ascissa, le sottonormali eguali in valor assoluto; queste hanno lo stesso senso, se sotto il radicale c'è il segno $+$, e senso contrario, se il segno $-$. Se si fa $y = \frac{b}{a} x$, e quindi la prima linea data è una retta passante per l'origine, si ricava

$$Y^2 \mp \frac{b^2}{a^2} x^2 = A,$$

come equazione della seconda linea. Quindi la curva ottenuta è una conica avente per centro l'origine, ed è un'iperbole od una ellisse, secondochè si prende sotto il radicale il segno $+$ o $-$.

13. Le curve $y = f(x)$, e $Y = \frac{A}{f(x)}$ hanno, nei punti di identica ascissa, le sottotangenti eguali e di segno contrario.