GEOMETRIA INFINITESIMALE

INTRODUZIONE

§ 1. Segmenti.

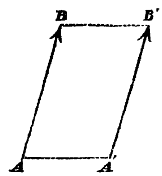
1. Il segmento rettilineo, che va da un punto A ad un punto B, considerato in lunghezza, direzione, e senso, è un ente geometrico, su cui si possono eseguire operazioni analoghe a quelle che si fanno sui numeri.

Rappresenteremo con AB il segmento che va di A in B; A è il punto iniziale, od *origine*, B il punto finale, o *termine*. Alcune volte indicheremo un segmento con una lettera sola, **a**, **b**,...; e sulla notazione del segmento segneremo un tratto rettilineo ($\overline{AB}$, $\overline{\mathbf{a}}$) ogni qual volta siavi pericolo di equivoco.

Due segmenti AB e A'B' diconsi *equipollenti*, e si scrive

$$AB \equiv A'B',$$

se essi hanno la stessa lunghezza, se le rette che li contengono hanno la stessa direzione, ossia sono parallele, e se essi sono percorsi nello stesso senso.



I segmenti AB e BA hanno la stessa lunghezza e la stessa direzione, ma verso opposto; e si indica questo scrivendo

$$AB \equiv -BA.$$

Se i punti estremi d'un segmento coincidono, diremo che esso è nullo. Quindi la scrittura $AB \equiv 0$ esprime la coincidenza dei punti A e B. Un segmento nullo non ha direzione.

2. È chiaro che

Due segmenti equipollenti ad un terzo sono fra loro equipollenti.

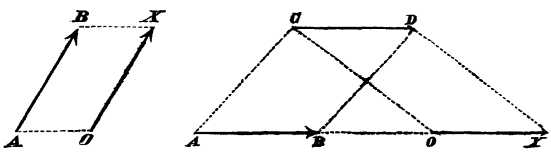
Se le rette AB e A'B' sono parallele, e non coincidenti, e se le rette AA' e BB' sono pure parallele, i segmenti AB e A'B' sono equipollenti, come pure i segmenti AA' e BB'.

Problema. — Da un punto O come origine condurre un segmento OX equipollente ad un segmento dato AB.

Risolveremo questo problema, ammettendo le seguenti costruzioni:

1° Condurre la retta che unisce due punti dati.

2° Segnare la retta che passa per un punto dato, ed è parallela ad una retta data.

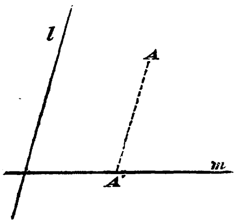


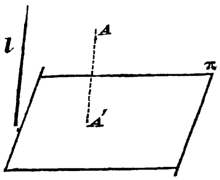
Se il punto O non è sulla direzione di AB, si segni per O la parallela OX ad AB; poi la AO, e la BX parallela ad AO, che incontri OX nel punto X. Il segmento OX è il segmento cercato. Infatti i segmenti AB e OX sono su rette parallele non coincidenti, e le rette AO e BX sono pure parallele; quindi $OX \equiv AB$.

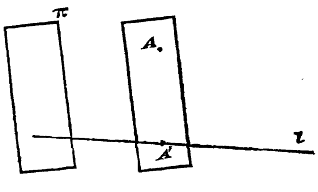
Se il punto O si trova sulla retta AB, si prenda un punto C fuori della retta AB. Si costruisca $CD \equiv AB$, poi $OX \equiv CD$. Sarà $OX \equiv AB$, onde OX è il segmento cercato.

3. Ricorderemo le definizioni delle *proiezioni parallele,* che ci occorrono in seguito. Le proiezioni si possono fare nel piano, o nello spazio.

Nel piano, dicesi proiezione d'un punto A su d'una retta m fatta parallelamente ad una retta l, non parallela ad m, il punto d'inter-







sezione colla m della retta condotta per A parallelamente ad l.

Nello spazio avremo a distinguere due specie di proiezioni.

Proiezione d'un punto A su d'un piano π, fatta parallelamente ad una retta l (non parallela a π) è il punto d'intersezione della parallela ad l condotta per A col piano π.

Proiezione d'un punto A su d'una retta l, fatta parallelamente ad un piano π, è il punto d'intersezione del piano parallelo a π condotto per A colla retta l.

Proiezione d'un segmento AB è il segmento che unisce le proiezioni di A e B.

Proiezione d'una figura formata da punti in numero limitato ad illimitato è la figura formata colle proiezioni dei punti della figura data.

Una proiezione dicesi *ortogonale* o *normale* se la retta o il piano parallelamente a cui si proietta è perpendicolare alla retta o al piano su cui si proietta.

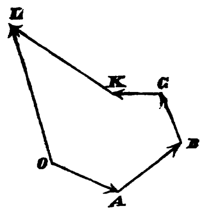
È noto che:

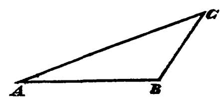
In proiezioni ortogonali, la lunghezza del segmento proiezione è eguale alla lunghezza del segmento proiettato moltiplicata pel coseno dell'angolo che questo fa colla sua proiezione.

Segmenti equipollenti hanno proiezioni equipollenti.

§ 2. Composizione di segmenti.

4. Se più segmenti OA, AB, BC, ... HK, KL sono contigui, ossia il termine dell'uno coincide coll'origine del successivo, si dice loro





somma geometrica il segmento OL che va dall'origine del primo al termine dell'ultimo; e si scrive

$$OL \equiv OA + AB + BC + \dots + KL.$$

Se in più segmenti contigui il termine dell'ultimo coincide coll'origine del primo, la loro somma è nulla; quindi essendo A e B due punti qualunque, sarà

$$AB + BA \equiv 0,$$

e se ABC sono tre punti qualunque,

$$AB + BC + CA \equiv 0,$$

e

$$AC \equiv AB + BC,$$

e

$$AC \equiv BC - BA.$$

Se i segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ sono dati comunque nello spazio, da un'origine arbitraria O si conduca il segmento $OA \equiv \mathbf{a}$; poi $AB \equiv \mathbf{b}$, e così via, $HK \equiv \mathbf{k}$, e $KL \equiv \mathbf{l}$. Il segmento OL, od un suo equipollente qualunque, si dirà la somma dei segmenti dati

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \dots + \mathbf{k} + \mathbf{l}.$$

Risulta dalle definizioni date che la somma geometrica dei segmenti OA ed OB è la diagonale OC del parallelogrammo costrutto su OA e OB; che la somma dei segmenti OA, OB e OC è la diagonale del parallelepipedo costrutto sugli spigoli OA, OB e OC.

I segmenti che si sommano chiamansi pure *componenti;* la loro somma geometrica *risultante.* All'operazione di determinare la somma geometrica di più segmenti si dà pure il nome di *composizione* dei segmenti.

Insegna la Meccanica che se i segmenti componenti rappresentano forze applicate ad un punto, la loro somma geometrica rappresenta la risultante di quelle forze, ossia quella forza che agendo da sola produce sul punto lo stesso effetto che tutte le altre forze insieme.

È chiaro che:

La somma geometrica di più segmenti è indipendente dall'ordine con cui questi si sommano.

La lunghezza della somma geometrica di più segmenti non è maggiore della somma delle lunghezze di questi segmenti.

5. Diremo che un segmento $\mathbf{b}$ è il prodotto d'un segmento $\mathbf{a}$ per un numero m (intero, o fratto o irrazionale, positivo o negativo), e scriveremo $\mathbf{b} \equiv m\mathbf{a}$, se i segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno la stessa direzione, se la ragione delle lunghezza di $\mathbf{b}$ alla lunghezza di $\mathbf{a}$ è rappresentata dal valore assoluto di m, e infine se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ hanno lo stesso verso, quando m è positivo, ed hanno verso contrario quando m è negativo.

È chiaro che, essendo $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, .. segmenti, ed m, n, .. numeri, si ha

$$(m + n + \ldots)\, \mathbf{a} \equiv m\mathbf{a} + n\mathbf{a} + \ldots$$

$$m(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots) \equiv m\mathbf{a} + m\mathbf{b} + m\mathbf{c} + \ldots$$

e

$$(m + n)(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \equiv m\mathbf{a} + n\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{b},$$

vale a dire ai prodotti di numeri per segmenti si possono applicare le regole che valgono pel prodotto di due numeri.

Intenderemo colla scrittura $\mathbf{a} : m \equiv \frac{\mathbf{a}}{m}$ il prodotto del segmento $\mathbf{a}$ pel numero $\frac{1}{m}$.

Così risulta ben definito il significato dell'espressione

$$m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} + ...,$$

ove $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,... sono segmenti, ed m, n,... numeri; e questa espressione rappresenta un segmento.

È chiaro che i segmenti $\mathbf{a}$ e $m\mathbf{a}$ sono paralleli ad una stessa retta, e che i segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ sono paralleli ad uno stesso piano.

6. TEOREMA. — *La proiezione della somma di più segmenti è la somma delle proiezioni di questi segmenti.*

Siano $\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c} ... \mathbf{l}$ i segmenti dati; $\mathbf{a}'\ \mathbf{b}' ... \mathbf{l}'$ le loro proiezioni. Da un punto O si conduca $OA \equiv \mathbf{a}$, $AB \equiv \mathbf{b}$, ... $KL \equiv \mathbf{l}$. Sarà $OL \equiv \mathbf{a} + \mathbf{b} + ... + \mathbf{l}$. Si proiettino i punti OAB...KL, e siano O'A'B'...K'L' le loro proiezioni. Sarà $O'A' \equiv \mathbf{a}'$, $A'B' \equiv \mathbf{b}'$, ... $K'L' \equiv \mathbf{l}'$; e quindi $O'L' \equiv \mathbf{a}' + \mathbf{b}' + ... + \mathbf{l}'$. Ma O'L' è la proiezione di OL, dunque la proiezione della somma dei segmenti dati è la somma delle loro proiezioni.

TEOREMA. — *Se la proiezione del segmento* $\mathbf{a}$ *è* $\mathbf{a}'$, *la proiezione di* $m\mathbf{a}$ *è* $m\mathbf{a}'$.

Invero, se $AB \equiv \mathbf{a}$, e $AC \equiv m\mathbf{a}$, e A'B'C' sono le proiezioni di ABC, le rette ABC e A'B'C' sono segate in questi punti da rette o piani paralleli alla retta, o al piano secondo cui si proietta. Quindi la ragione di A'C' a A'B' è eguale alla ragione di AC ad AB; e poichè $AC \equiv m AB$, si deduce $A'C' \equiv m A'B'$.

Da questi teoremi si deduce che se i segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... hanno per proiezioni $\mathbf{a}'\ \mathbf{b}'$ ..., il segmento $m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + ...$ ha per proiezione $m\mathbf{a}' + n\mathbf{b}' + ...$

§ 3. Prodotto di due segmenti.

7. Il prodotto dei numeri assoluti che misurano le lunghezze dei segmenti $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, pel coseno dell'angolo che fanno le loro direzioni e versi, vien detto prodotto dei segmenti **a** e **b**. Lo indicheremo con $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esso è un numero. Se a e b sono le lunghezze dei segmenti, $\widehat{\mathbf{ab}}$ l'angolo che essi fanno, si ha:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab\cos\widehat{\mathbf{ab}}.$$

Se i segmenti **a** e **b** hanno la stessa direzione, e lo stesso verso, $\cos\mathbf{ab} = 1$, e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ab$. Se hanno la stessa direzione, ma verso opposto, $\cos\mathbf{ab} = -1$, e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -ab$.

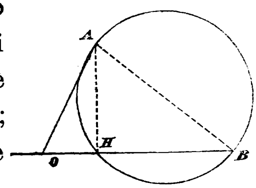
Il prodotto di due segmenti è nullo quando, e solo quando è nullo uno dei due segmenti, ovvero essi sono ortogonali.

Il prodotto di due segmenti non si altera scambiando il loro ordine.

Il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è eguale al prodotto di **a** per la proiezione ortogonale su **a** di **b**, ovvero alla proiezione di **a** su **b** moltiplicato per **b**.

Porremo $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \times \mathbf{a}$, e lo chiameremo quadrato di **a**. Esso vale il quadrato della lunghezza di **a**.

Se da un punto O dello spazio si conduce una segante OMN ad una sfera di centro C, è noto che il prodotto $\mathrm{OM} \times \mathrm{ON}$ è costante, variando la segante, e dicesi potenza del punto O rispetto alla sfera C.



Il prodotto $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$ è la potenza del punto O rispetto alla sfera di diametro AB. Infatti questa sfera incontri OB in H. L'angolo AHB è retto, quindi OH è la proiezione di OA su OB; e la potenza di O rispetto alla sfera, che vale $\mathrm{OH} \times \mathrm{OB}$ vale appunto il prodotto $\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$.

8. Il prodotto della somma geometrica di più segmenti per un segmento è eguale alla somma algebrica dei prodotti di quei segmenti per questo:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} + \mathbf{b} \times \mathbf{h} + \mathbf{c} \times \mathbf{h}.$$

Infatti si proiettino i segmenti **a**, **b**, **c** su **h**, e siano $\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ le loro proiezioni. Sarà $\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}'$ la proiezione di $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, e

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = \mathbf{a}' \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{b} \times \mathbf{h} = \mathbf{b}' \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{c} \times \mathbf{h} = \mathbf{c}' \times \mathbf{h},$$
$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{h} = (\mathbf{a}' + \mathbf{b}' + \mathbf{c}') \times \mathbf{h}.$$

Ora, $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ ed $\mathbf{h}$ essendo segmenti di una stessa retta, si ha

$$(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'+\mathbf{c}')\times\mathbf{h}=\mathbf{a}'\times\mathbf{h}+\mathbf{b}'\times\mathbf{h}+\mathbf{c}'\times\mathbf{h},$$

e quindi

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})\times\mathbf{h}=\mathbf{a}\times\mathbf{h}+\mathbf{b}\times\mathbf{h}+\mathbf{c}\times\mathbf{h}.$$

Da questo teorema si deducono formole, pei segmenti, analoghe a quelle pei numeri. Così si avrà

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}'+\mathbf{b}')=\mathbf{a}\times\mathbf{a}'+\mathbf{a}\times\mathbf{b}'+\mathbf{b}\times\mathbf{a}'+\mathbf{b}\times\mathbf{b}'$$
$$(\mathbf{a}\pm\mathbf{b})^2=\mathbf{a}^2\pm 2\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}^2.$$

Sia ABC un triangolo qualunque; si ha $AB=CB-CA$; quindi

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2-2\overline{CA}\times\overline{CB},$$

e detti a, b, c i numeri che misurano $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, e γ l'angolo che la direzione CA fa con CB si deduce:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

nota formula di trigonometria.

Si ha in modo analogo

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2+2\mathbf{a}\times\mathbf{b}+2\mathbf{a}\times\mathbf{c}+2\mathbf{b}\times\mathbf{c};$$

Se ABCX sono quattro punti qualunque, si ha

$$\overline{AB}\times\overline{CX}+\overline{BC}\times\overline{AX}+\overline{CA}\times\overline{BX}=0.$$

Infatti, ponendo invece di AB, BC, CA rispettivamente $BX-AX$, $CX-BX$, $AX-CX$, l'equazione precedente si riduce ad una identità.

§ 4. Coordinate di segmenti e di punti.

9. Se $\mathbf{i}$ è un segmento ed x un numero, il segmento $x\mathbf{i}$ è parallelo al segmento $\mathbf{i}$.

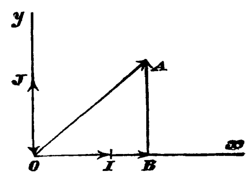
Viceversa, se $\mathbf{i}$ è un segmento non nullo, e se $\mathbf{a}$ è un segmento parallelo ad **i**, detto x il numero che rappresenta la ragione della lunghezza di **a** a quella di **i**, preso positivamente se **a** ed **i** hanno lo stesso senso, e negativamente se hanno senso opposto, sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i};$$

diremo che il numero x è la coordinata del segmento **a** parallelo ad **i**.

10. Se **i** e **j** sono due segmenti, $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ove x ed y sono numeri, è pure un segmento, e questi tre segmenti sono paralleli ad un piano.

Viceversa, se tutti i segmenti che si considerano sono paralleli ad uno stesso piano, presine due **i** ed **j** non nulli, nè paralleli, ogni altro segmento **a** si può mettere sotto la forma $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Invero, fatto $\mathrm{OI} \equiv \mathbf{i}$, $\mathrm{OJ} \equiv \mathbf{j}$, $\mathrm{OA} \equiv \mathbf{a}$, se **i**, **j**, **a** sono paralleli ad uno stesso piano, OI, OJ, OA sono contenuti in uno stesso piano. Sia AB la parallela ad OJ condotta per A, che incontri la OI in B. Sarà



$$\mathrm{OA} \equiv \mathrm{OB} + \mathrm{BA}.$$

Ma, siccome OB ha la stessa direzione di $\mathrm{OI} \equiv \mathbf{i}$, esisterà un numero x tale che $\mathrm{OB} \equiv x\mathbf{i}$; e siccome BA ha la stessa direzione di $\mathrm{OJ} \equiv \mathbf{j}$ esiste un numero y tale che $\mathrm{BA} \equiv y\mathbf{j}$. Quindi

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

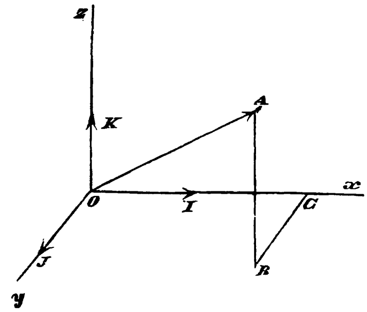
I numeri x ed y diconsi coordinate del segmento **a** rispetto ai segmenti **i** ed **j**.

11. Se infine i segmenti che si considerano sono disposti comunque nello spazio, fissati tre segmenti di riferimento **i**, **j**, **k**, nè nulli, nè paralleli ad uno stesso piano, ogni altro segmento **a** si può mettere sotto la forma

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

ove x, y, z sono tre numeri.

Infatti, fatto $OI \equiv \mathbf{i}$, $OJ \equiv \mathbf{j}$, $OK \equiv \mathbf{k}$, e $OA \equiv \mathbf{a}$, da A si conduca $AB \parallel OK$, che incontri il piano IOJ in B; da B si conduca $BC \parallel OJ$ che incontri OI in C. Sarà:



$$OA \equiv OC + CB + BA.$$

Ma, poichè i segmenti OC, CB, BA sono paralleli ad **i**, **j**, **k**, esistono tre numeri x, y, z tali che

$$OC \equiv x\mathbf{i},\quad CB \equiv y\mathbf{j},\quad BA \equiv z\mathbf{k};$$

e quindi

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

I tre numeri x, y, z, dati i quali è determinato il segmento **a**, e che sono determinati quando sia dato **a**, diconsi coordinate del segmento **a**, rispetto ai segmenti di riferimento **i**, **j**, **k**.

Se i segmenti che si considerano partono tutti da un'origine fissa O, dato il segmento OA, risulta determinato il punto A, e viceversa, dato A, risulta determinato OA. Le coordinate del segmento OA si possono perciò chiamare le coordinate del punto A. Se i segmenti di riferimento OI, OJ, OK sono eguali all'unità di misura, queste coordinate sono le coordinate cartesiane di A, ove si prendano per assi cartesiani le rette OI, OJ, OK. E se questi segmenti, oltre all'essere eguali, sono ancora a due a due ortogonali, si hanno le coordinate cartesiane ortogonali.

12. Troveremo ora alcune relazioni fra le coordinate di segmenti, ed alcune formule di geometria analitica.

1. Se i segmenti **a** e **b**, hanno per coordinate x, y, z, e x', y', z', sarà

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},\quad \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k},$$

quindi

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \equiv (x + x')\,\mathbf{i} + (y + y')\,\mathbf{j} + (z + z')\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} - \mathbf{a} \equiv (x' - x)\,\mathbf{i} + (y' - y)\,\mathbf{j} + (z' - z)\,\mathbf{k},$$

ossia le coordinate della somma o differenza di due segmenti sono le somme o differenze delle coordinate di quei segmenti.

2. Se

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

si deduce

$$m\mathbf{a} \equiv mx\mathbf{i} + my\mathbf{j} + mz\mathbf{k}\,,$$

e così si hanno le coordinate di $m\mathbf{a}$ conoscendo quelle di $\mathbf{a}$.

3. Se i punti A e B hanno per coordinate x, y, z e x', y', z', sarà

$$\mathrm{OA} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,,\quad \mathrm{OB} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}\,,$$

e $$\mathrm{AB} \equiv \mathrm{OB} - \mathrm{OA} \equiv (x' - x)\,\mathbf{i} + (y' - y)\,\mathbf{j} + (z' - z)\,\mathbf{k}\,,$$

e così si hanno le coordinate del segmento AB conoscendo le coordinate di A e di B.

4. Se $\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, e $\mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, moltiplicando si ottiene

$$\begin{aligned}(1)\qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & xx'\mathbf{i}^2 + yy'\mathbf{j}^2 + zz'\mathbf{k}^2 + \\ & + (xy' + x'y)\,\mathbf{i} \times \mathbf{j} + (xz' + x'z)\,\mathbf{i} \times \mathbf{k} + (yz' + y'z)\,\mathbf{j} \times \mathbf{k}\,;\end{aligned}$$

questa formula esprime il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in funzione delle coordinate di $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{b}$, e dei prodotti $\mathbf{i}^2$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, ecc., che sono determinati quando sono dati i segmenti di riferimento.

Se si prendono i segmenti di riferimento eguali all'unità, e ortogonali, si ha:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 1\,,\ \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 1\,,\ \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 1\,,$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = 0\,,\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = 0\,,\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = 0\,,$$

e quindi

$$(2)\qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = xx' + yy' + zz'.$$

5. Se il segmento $\mathbf{b}$ coincide con $\mathbf{a}$, il prodotto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ si riduce ad

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = (\text{lung. } \mathbf{a})^2,$$

e quindi dalla formula (1) si può ricavare la lunghezza d'un segmento, conoscendone le sue coordinate.

Supposti i segmenti di riferimento unitarii ed ortogonali, dalla (2) si ha

$$(3) \qquad (\text{lung. } \mathbf{a})^2 = x^2 + y^2 + z^2 , \quad \text{lung. } \mathbf{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

formula che dà la lunghezza d'un segmento in funzione delle sue coordinate cartesiane ortogonali.

Come caso particolare, se i punti A e B hanno per coordinate cartesiane ortogonali x, y, z e x', y', z', si deduce

$$\text{lung. AB} = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}.$$

6. Detti a e b i valori assoluti delle lunghezze di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, e θ l'angolo che fanno questi segmenti, la formula (2) diventa

$$ab\cos\theta = xx' + yy' + zz' ,$$

e, risolvendola rispetto a $\cos\theta$, e sostituendo ad a e b i loro valori dati da (3), si ricava

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

che dà il coseno dell'angolo di due segmenti in funzione delle loro coordinate cartesiane ortogonali.

7. Siano $\mathbf{i}\ \mathbf{j}\ \mathbf{k}$ e $\mathbf{i}'\ \mathbf{j}'\ \mathbf{k}'$ due terne di segmenti fondamentali. Supposte note le coordinate dei tre primi segmenti rispetto ai secondi:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &\equiv \alpha\mathbf{i}' + \beta\mathbf{j}' + \gamma\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} &\equiv \alpha'\mathbf{i}' + \beta'\mathbf{j}' + \gamma'\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} &\equiv \alpha''\mathbf{i}' + \beta''\mathbf{j}' + \gamma''\mathbf{k}' , \end{aligned}$$

e conoscendo le coordinate del segmento $\mathbf{a}$ rispetto alla prima terna

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} ,$$

si vogliono le coordinate di $\mathbf{a}$ rispetto alla seconda terna.

La questione si risolve immediatamente sostituendo in questa formula ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i loro valori. Si ottiene

$$\mathbf{a} \equiv (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z)\,\mathbf{i}' + (\beta x + \beta' y + \beta'' z)\,\mathbf{j}' + (\gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\mathbf{k}',$$

ed i coefficienti di $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$ sono le nuove coordinate di $\mathbf{a}$. Si vede di qui che le nuove coordinate sono funzioni lineari omogenee delle antiche.

§ 5. Applicazioni.

13. Per famigliarizzare il lettore al calcolo dei segmenti, tratteremo alcune questioni che si riferiscono ai baricentri.

Siano $A_1\ A_2 \ldots A_n$ n punti dello spazio, cui siano affissi rispettivamente i numeri, o pesi $m_1\ m_2 \ldots m_n$.

Sia O un punto dello spazio, e si calcoli la somma geometrica

$$\mathbf{s}(O) \equiv m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \ldots + m_n OA_n ,$$

che è un segmento, che dipende da O. Si vuol esaminare la legge con cui, variando questo segmento, varia O.

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula $OA \equiv OS + SA$, si ricava

$$m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \ldots + m_n OA_n \equiv$$
$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, OS + m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \ldots + m_n SA_n ,$$

ossia

$$(1) \qquad \mathbf{s}(O) \equiv (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, OS + \mathbf{s}(S).$$

Se la somma numerica $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ non è nulla, si può determinare un punto S tale che, corrispondentemente ad esso, sia $\mathbf{s}(S) \equiv 0$. Invero, affinchè questo avvenga, è necessario e sufficiente che sia

$$\mathbf{s}(O) \equiv (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) OS ,$$

da cui si ricava il segmento OS, e siccome O è fisso, risulta determinato il punto S.

Questo punto S, corrispondentemente al quale è nulla la somma geometrica $\mathbf{s}(S)$, dicesi *baricentro* dei punti dati coi pesi dati.

Supposto che nella formula (1) il punto S sia appunto il baricentro, essa diventa

$$\mathbf{s}(\mathrm{O}) \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\mathrm{OS},$$

ovvero

$$(2) \qquad m_1\mathrm{OA}_1 + m_2\mathrm{OA}_2 + \dots + m_n\mathrm{OA}_n \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\mathrm{OS}\,,$$

che esprime la somma dei segmenti variabili di sinistra in funzione del solo segmento variabile OS.

Se invece la somma $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 0$, la equipollenza (1) dice che $\mathbf{s}(\mathrm{O}) \equiv \mathbf{s}(\mathrm{S})$, ossia la somma $\mathbf{s}(\mathrm{O})$ è indipendente dal punto O; e se corrispondentemente ad un punto dello spazio essa non è nulla, essa non sarà nulla per alcun altro punto; e se essa è nulla per uno, lo sarà per tutti.

14. Siano $x_r\ y_r\ z_r$ le coordinate del punto A_r, ed il punto arbitrario O sia l'origine delle coordinate. Allora

$$\mathrm{OA}_r \equiv x_r\mathbf{i} + y_r\mathbf{j} + z_r\mathbf{k}\,,$$

e sostituendo nella formula (2), ed ordinando si ha

$$(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_n x_n)\,\mathbf{i} + (m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_n y_n)\,\mathbf{j}$$
$$+ (m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_n z_n)\,\mathbf{k} \equiv (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\,\mathrm{OS},$$

dalla quale si ricavano le coordinate del segmento OS, ossia del baricentro S; queste sono

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}\,,\quad \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}\,,\quad \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

Si proiettino i punti $\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_n$ ed il loro baricentro S su d'un piano o su d'una retta; e segnamo con un accento le loro proiezioni. Poichè

$$m_1\mathrm{SA}_1 + m_2\mathrm{SA}_2 + \dots + m_n\,\mathrm{SA}_n \equiv 0\,,$$

si deduce

$$m_1\mathrm{S'A}_1' + m_2\mathrm{S'A}_2' + \dots + m_n\,\mathrm{S'A}_n' \equiv 0\,,$$

ossia la proiezione del baricentro S dei punti dati è il baricentro delle proiezioni di questi punti, ove alle proiezioni si affiggano gli stessi pesi.

Il baricentro S dei due punti A_1 e A_2 coi pesi m_1 e m_2 ($m_1 + m_2 \gtrless 0$) si trova sulla retta A_1A_2 e la divide in segmenti SA_1 ed SA_2 il cui rapporto è $-\frac{m_2}{m_1}$. Infatti si ha, per la definizione del baricentro $m_1SA_1 + m_2SA_2 \equiv 0$, ossia $SA_1 \equiv -\frac{m_2}{m_1} SA_2$, il che dice appunto quanto si voleva dimostrare. Reciprocamente ogni punto della retta $A_1 A_2$ si può considerare come il loro baricentro, purchè ad essi si affiggano pesi convenienti.

È pure facile lo scorgere che il baricentro S di tre punti A, B, C giace nel piano di questi punti; e viceversa, se S giace nel piano ABC, esso si può considerare come il baricentro dei punti A, B, C, ove a questi si affiggano pesi convenienti.

Se il gruppo di punti $A_1\ A_2 \dots A_n$ coi pesi $m_1\ m_2 \dots$ ha un baricentro S, ed il gruppo di punti $A_{n+1} \dots A_{n+p}$ coi pesi $m_{n+1} \dots m_{n+p}$ ha un baricentro S′, il baricentro S″ del sistema formato dai due gruppi di punti, coi rispettivi pesi, è il baricentro di S col peso $m_1 + m_2 \dots + m_n$, e di S′ col peso $m_{n+1} + \dots + m_{n+p}$. Invero si ha

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)OS \equiv m_1OA_1 + \dots + m_nOA_n\,,$$
$$(m_{n+1} + \dots + m_{n+p})OS' \equiv m_{n+1}OA_{n+1} + \dots + m_{n+p}OA_{n+p}\,,$$
$$(m_1 + \dots + m_n + m_{n+1} + \dots + m_{n+p})OS'' \equiv$$
$$m_1OA_1 + \dots + m_nOA_n + m_{n+1}OA_{n+1} + \dots + m_{n+p}OA_{n+p}\,,$$

da cui si ricava:

$$(m_1 + \dots + m_n + m_{n+1} + \dots + m_{n+p})OS'' \equiv$$
$$(m_1 + \dots + m_n)\,OS + (m_{n+1} + \dots + m_{n+p})\,OS'\,,$$

che dice appunto quanto si voleva dimostrare.

15. Siano ancora $A_1\,A_2 \dots A_n$ punti dati, cui sono affissi i numeri, o pesi, $m_1\,m_2 \dots m_n$. Preso un punto O nello spazio, si consideri la somma

$$\Sigma(O) = m_1\overline{OA_1}^2 + m_1\overline{OA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{OA_n}^2 ,$$

ove con $\overline{OA}^2$ si intende il quadrato del numero che misura OA, vale a dire OA $\times$ OA. Si vuol studiare il modo di variare di questa somma col variare di O.

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula OA $\equiv$ OS $+$ SA, si deduce:

$$\begin{aligned} m_1\overline{OA_1}^2 + m_2\overline{OA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{OA_n}^2 = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overline{OS}^2 + \\ + 2(m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \ldots + m_n SA_n) \times OS + \\ + m_1 \overline{SA_1}^2 + m_2\overline{SA_2}^2 + \ldots + m_n\overline{SA_n}^2 . \end{aligned}$$

Se ora $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ non è nullo, esiste il baricentro dei punti dati, colle masse date, e se S è questo baricentro, sarà

$$m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \ldots + m_n SA_n \equiv 0 ,$$

e la formula precedente si riduce a

$$\Sigma(O) = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\overline{OS}^2 + \Sigma(S) ,$$

e così resta espressa la somma $\Sigma(O)$ in funzione del solo segmento OS variabile con O. Se $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ è positiva, $\Sigma(O)$ si riduce a $\Sigma(S)$ quando O coincide con S. Per ogni altra posizione di O sarà $\Sigma(O) > \Sigma(S)$; ossia, se la somma dei pesi è positiva, la somma $\Sigma(O)$ è minima quando O coincide col centro di gravità. Essa sarebbe massima se la somma dei pesi fosse negativa. Se il punto O varia, ma in modo che $\overline{OS}^2$ sia costante, ossia movendosi su d'una sfera di centro S, $\Sigma(O)$ si mantiene pure costante.

Se $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$, la prima formula scritta diventa

$$\Sigma(O) = 2(m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \ldots) \times OS + \Sigma(S) ,$$

ovvero, fatto $\mathbf{s} \equiv m_1 SA_1 + m_2 SA_2 + \ldots + m_n SA_n$, che è un segmento indipendente da S, si deduce

$$\Sigma(O) = 2\mathbf{s} \times OS + \Sigma(S) ,$$

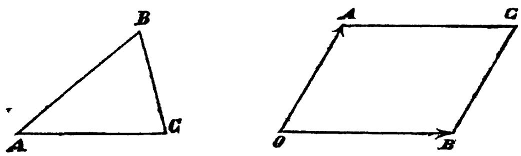
e quindi sarà $\Sigma(O) = \Sigma(S)$ tutte le volte che $\mathbf{s} \times OS = 0$, ossia, se

s non è nullo, la somma $\sum(O)$ non si altera spostando il punto O in un piano perpendicolare ad **s**. Se infine $\mathbf{s} \equiv 0$, la somma $\sum(O)$ ha un valore costante per tutti i punti dello spazio.

§ 6. Aree.

16. L'area d'una figura piana, ove si consideri ad un tempo la sua grandezza, la giacitura del piano che la contiene, ed il verso in cui è percorso il suo perimetro, è un nuovo ente geometrico.

Indicheremo con ABC l'area del triangolo di vertici A, B, C, ed il cui perimetro sia percorso nell'ordine in cui sono segnati i vertici. Indicheremo con **a** . **b**, ove **a** e **b** sono due segmenti, l'area del pa-



rallelogrammo OACB, ove OA $\equiv$ **a**, e OB $\equiv$ **b**, ed il cui perimetro sia percorso nel verso del primo segmento OA $\equiv$ **a**, e quindi nel verso opposto al secondo. Il punto fra le due lettere **a** e **b** sta per separarle, e non indica una moltiplicazione, benchè l'operazione **a.b** abbia alcune proprietà della moltiplicazione.

In quanto segue considereremo specialmente le aree di parallelogrammi, o esprimibili con parallelogrammi.

Diremo che due aree piane α e β sono equipollenti, se hanno la stessa grandezza, se hanno la stessa giacitura, ossia se i loro piani sono paralleli, e se i perimetri delle due aree sono percorsi nello stesso verso, ossia, se una persona che li percorre amendue, mantenendosi sempre parallela a sè stessa, ha sempre a sua destra, od a sua sinistra l'interno dell'area. Indicheremo l' equipollenza scrivendo $\alpha \equiv \beta$.

Così è chiaro che i triangoli ABC, BCA, CAB sono equipollenti;

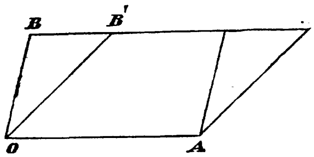
mentrechè i triangoli ACB, BAC, CBA, pure equipollenti fra loro, hanno la stessa grandezza dei tre primi, ma hanno verso opposto. Analogamente i parallelogrammi **a**.**b** e **b**.**a** hanno la stessa grandezza e giacitura, ma verso opposto. Indicheremo questo scrivendo

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv -\mathbf{b}.\mathbf{a}\,.$$

Se i segmenti **a** e **b** sono paralleli, sarà $\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv 0$. Viceversa, se $\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv 0$, è necessario e sufficiente che o i segmenti siano paralleli, ovvero che uno di essi sia nullo. Come caso speciale, se **a** è un segmento qualunque, sarà sempre $\mathbf{a}.\mathbf{a} \equiv 0$.

17. È noto che

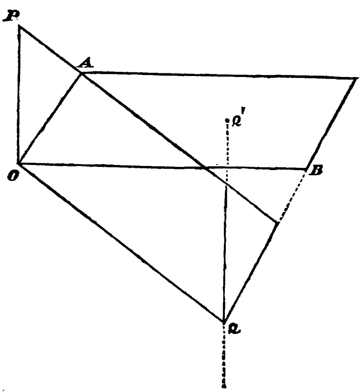
Due aree equipollenti ad una terza sono fra loro equipollenti.



Se i parallelogrammi OA.OB e OA.OB′ hanno un segmento OA comune, e sono compresi fra le rette OA e BB′ parallele, essi sono equipollenti.

Problema. — Dato un parallelogrammo OA.OB, ed un segmento OP, costrurre un segmento OQ tale che OP.OQ ≡ OA.OB.

È chiaro che il piano OP.OQ contiene OP, e se OP.OQ ≡ OA.OB, è necessario che OP sia contenuto in uno stesso piano con OA ed OB.



La retta condotta per O parallelamente a PA incontri la parallela ad OA condotta per B, nel punto Q. Dico che OQ soddisfa alle condizioni imposte. Se per Q conduco la parallela ad OP, e prendo in questa un punto ad arbitrio Q′, anche OQ′ soddisfa alle condizioni volute.

Infatti, i parallelogrammi OA.OB e OA.OQ hanno un segmento

OA comune, e sono compresi fra le rette parallele OA e BQ; quindi OA.OB $\equiv$ OA.OQ; ma i parallelogrammi OA.OQ e OP.OQ hanno OQ comune, e sono compresi fra le rette parallele OQ e PA; quindi OA.OQ $\equiv$ OP.OQ; perciò OA.OB $\equiv$ OP.OQ.

Inoltre, siccome OP.OQ $\equiv$ OP.OQ$'$, si deduce che ogni segmento OQ$'$ soddisfa alle condizioni volute.

18. Se le aree considerate hanno la stessa giacitura, ossia trovansi tutte in uno stesso piano, od in piani paralleli, è sufficientemente definito che cosa si intenda per loro somma, che è ancora un'area avente la stessa giacitura.

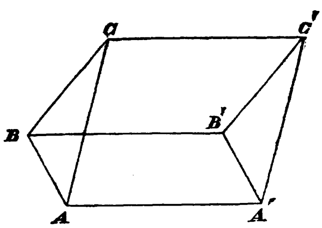
Intenderemo per prodotto di un'area α per un numero m una nuova area, tale che la ragione della sua grandezza alla grandezza di α sia eguale al valore assoluto di m, che abbia la stessa giacitura di α, e lo stesso verso se m è positivo, ovvero il verso opposto se m è negativo.

È chiaro che se α è un'area non nulla, ogni altra area avente la stessa giacitura si può mettere sotto la forma $m\alpha$.

Diremo che l'area σ è la somma geometrica delle aree α e β, aventi giacitura qualunque, se, proiettando su ogni piano arbitrario π parallelamente ad ogni retta arbitraria, la proiezione di σ è la somma delle proiezioni di α e di β.

Teorema. — Se **a**, **b** ed **l** sono segmenti, l'area determinata dal segmento **a** + **b** con **l** è la somma geometrica delle aree determinate da **a** con **l**, e da **b** con **l**:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\mathbf{l} \equiv \mathbf{a}.\mathbf{l} + \mathbf{b}.\mathbf{l}$$



Suppongansi dapprima i segmenti **a**, **b**, **l** in uno stesso piano. Sia AB $\equiv$ **a**, BC $\equiv$ **b**, e quindi AC $\equiv$ **a** + **b**. Sia AA$'$ $\equiv$ BB$'$ $\equiv$ CC$'$ $\equiv$ **l**. Sarà **a**.**l** $\equiv$ ABB$'$A$'$, e **b**.**l** $\equiv$ BCC$'$B$'$. Dalla somma di questi parallelogrammi togliendo il triangolo ABC, ed aggiungendovi l'equipollente A$'$B$'$C$'$, si deduce

$$ABB'A' + BCC'B' \equiv ACC'A\ ,$$

ossia

$$\mathbf{a}.\mathbf{l} + \mathbf{b}.\mathbf{l} \equiv (\mathbf{a} + \mathbf{b}) . \mathbf{l}\ ,\ \text{c. v. d.}$$

Siano ora i segmenti comunque nello spazio. Si proietti su d'un piano qualunque. Siano $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{l}'$ le proiezioni di $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{l}$; sarà $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ la proiezione di $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, e $\mathbf{a}'.\mathbf{l}'$, $\mathbf{b}'.\mathbf{l}'$, $(\mathbf{a}' + \mathbf{b}').\mathbf{l}'$ le proiezioni di $\mathbf{a}.\mathbf{l}$ $\mathbf{b}.\mathbf{l}$ e $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}$. Ora, per ciò che si è dimostrato, siccome $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{l}'$ sono in uno stesso piano, si deduce $\mathbf{a}'.\mathbf{l}' + \mathbf{b}'.\mathbf{l}' \equiv (\mathbf{a}' + \mathbf{b}').\mathbf{l}'$, ossia la proiezione, su d'un piano arbitrario, dell'area $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l}$ è la somma delle proiezioni di $\mathbf{a}.\mathbf{l}$ e di $\mathbf{b}.\mathbf{l}$, e quindi $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l} \equiv \mathbf{a}.\mathbf{l} + \mathbf{b}.\mathbf{l}$, c. v. d.

Il teorema precedente permette di sommare due, e quindi più aree contenute in piani non paralleli. Siano α e β le due aree contenute in piani non paralleli. Sulla retta intersezione dei due piani si prenda un segmento arbitrario $\mathbf{l}$, e si determini il segmento $\mathbf{a}$ in modo che $\mathbf{a}.\mathbf{l} \equiv \alpha$ ed il segmento $\mathbf{b}$ tale che $\mathbf{b}.\mathbf{l} \equiv \beta$. Sarà $(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\mathbf{l} \equiv \alpha + \beta$, ossia la somma delle aree date.

Siccome, scambiando i due segmenti che formano un parallelogrammo esso non cambia che segno, si deduce

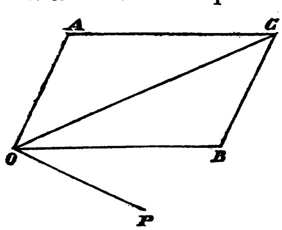
$$\mathbf{l}.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \equiv \mathbf{l}.\mathbf{a} + \mathbf{l}.\mathbf{b}$$

e quindi

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}).(\mathbf{c} + \mathbf{d}) \equiv \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{d} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{d}\ .$$

Il teorema dimostrato è equivalente ad un noto teorema di geometria piana.

Sia OACB un parallelogrammo, e OC la sua diagonale. Sarà



$OC \equiv OA + OB$. Preso nel piano ad arbitrio un punto P, sarà

$$OC.OP \equiv OA.OP + OB.OP.$$

Ora OC.OP, OA.OP, OB.OP sono i doppi delle aree dei triangoli POC, POA, POB; dunque il primo triangolo è la somma degli altri due (teorema di Varignon).

19. Siano nello spazio n punti $A_1\, A_2 \ldots A_n$, cui siano affissi n segmenti $\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$. Preso un punto O si consideri la somma geometrica delle aree:

$$\omega(O) \equiv OA_1.\mathbf{a}_1 + OA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots + OA_n.\mathbf{a}_n \,.$$

Si vuol studiare il modo di variare di quest'area, ove varii il punto O.

Sia S un' altro punto dello spazio. Siccome $OA \equiv OS + SA$, si deduce

$$OA_1.\mathbf{a}_1 + OA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots \equiv OS.(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots) + SA_1.\mathbf{a}_1 + SA_2.\mathbf{a}_2 + \ldots$$

ovvero

$$\omega(O) \equiv OS.(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots) + \omega\,(S)$$

od ancora, ponendo $\mathbf{s} \equiv \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots$,

$$\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s} + \omega(S).$$

Supposto $\mathbf{s}$ non nullo, si deduce $\omega(O) \equiv \omega\,(S)$ se $OS.\mathbf{s} \equiv 0$; ossia se OS è parallelo ad $\mathbf{s}$. Quindi l'area $\omega(O)$ non varia se il punto O si muove su d'una parallela al segmento $\mathbf{s}$.

Se $\mathbf{s}$ è parallelo al piano $\omega(O)$, si può determinare un segmento OS tale che $\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s}$; e pel quale $\omega(S) \equiv 0$. Questi punti S sono infiniti, e giacciono su d' una retta parallela ad $\mathbf{s}$. In tal caso l'area ω, somma di n parallelogrammi compresi fra un lato variabile con O, ed un lato fisso, resta espresso mediante un parallelogrammo della stessa natura. Ma se $\mathbf{s}$ non è parallelo al piano $\omega(O)$, non sarà mai $\omega(O) \equiv OS.\mathbf{s}$, e quindi per nessun punto S dello spazio si può avere $\omega(S) \equiv 0$.

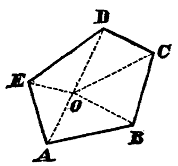
Se poi $\mathbf{s} \equiv 0$, l'area $\omega(O)$ risulta indipendente dal punto O.

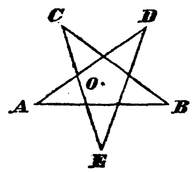
Limitandoci alle figure nel piano siano $A_1B_1 \equiv \mathbf{a}_1$, $A_2B_2 \equiv \mathbf{a}_2$, ...; allora $OA.\mathbf{a}$ è il doppio dell'area del triangolo OAB. Quindi, se la risultante $\mathbf{s}$ dei segmenti A_1B_1, A_2B_2,... è nulla, la somma dei triangoli OA_1B_1, OA_2B_2,... è costante per ogni punto O del piano. Se invece la risultante di questi segmenti non è nulla, la somma $OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots$ è nulla per tutti i punti d'una certa retta. Segnata questa retta, e portato su essa un segmento equipollente ad **s**, e sia SS′, si deduce

$$OA_1B_1 + OA_2B_2 + \ldots \equiv OSS',$$

e così la somma dei triangoli di sinistra è espressa mediante un solo triangolo.

Se i segmenti dati sono il lati d'un poligono chiuso ABCDE, si avrà appunto $\mathbf{s} \equiv 0$, e quindi la somma $\omega \equiv OAB + OBC + OCD + ODE + OEA$ è costante, qualunque sia il punto O. Ora si vede che se il poligono non si interseca, questa somma costante è l'area del poligono. E si suol porre in generale per definizione dell'area d'una linea poligonale ABC... chiusa, qualunque, la somma $OAB + OBC + \ldots$, che è indipendente dal punto O.





Così ad esempio, se ABCDE è un pentagono regolare stellato, avrà un significato la sua area, benchè esso non risulti dai concetti della geometria elementare; e detto O il centro del pentagono, quest'area vale cinque volte l'area del triangolo OAB.

20. Siano ancora $A_1\ A_1 \ldots A_n$ n punti dello spazio, cui sono affissi i numeri o pesi $m_1 m_2 \ldots m_n$. Presi due punti P e Q si vuol studiare il modo di variare dell'area

$$\Omega \equiv m_1A_1PQ + m_2A_2PQ + \ldots + m_nA_nPQ,$$

al variare di P e Q.

Si ha

$$2\Omega \equiv m_1A_1P.PQ + m_2A_2P.PQ + \ldots + m_nA_nP.PQ,$$

ossia

$$2\Omega \equiv (m_1A_1P + m_2A_2P + \ldots + m_nA_nP).PQ$$

Se ora $m_1 + m_2 + ... + m_n$ non è nullo, esiste il baricentro S dei punti dati coi pesi dati, e sarà

$$m_1A_1P + m_2A_2P + ... + m_nA_nP \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SP ;$$

quindi

$$2\Omega \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SP.PQ ,$$

ed infine

$$\Omega \equiv (m_1 + m_2 + ... + m_n)SPQ .$$

Così l'area Ω è uguale all'area del triangolo di vertici il baricentro ed i due punti dati, moltiplicata per $m_1 + m_2 + ... + m_n$.

Se invece $m_1 + m_2 + ... + m_n = 0$, $m_1A_1P + ... + m_nA_nP$ è un segmento indipendente da P. Dettolo **s**, sarà

$$2\Omega \equiv \mathbf{s}.PQ.$$

21. Ragionando dapprima nel piano, siano x y e x' y' le coordinate dei segmenti **a** e **b**.

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} , \qquad \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}.$$

Osservando che $\mathbf{i}.\mathbf{i} \equiv 0$, $\mathbf{j}.\mathbf{j} \equiv 0$, $\mathbf{j}.\mathbf{i} \equiv -\mathbf{i}.\mathbf{j}$, si deduce

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv (xy' - x'y)\,\mathbf{i}.\mathbf{j} \equiv \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j} ;$$

e così resta espressa l'area **a.b** in funzione delle coordinate dei segmenti dati, e dell'area **i.j** formata dei segmenti di riferimento. Se questi sono eguali all'unità ed ortogonali, l'area **i.j** è appunto l'unità di misura delle aree, ed in tal caso $xy' - x'y$ è il numero che misura l'area **a.b**.

Se i punti A B C hanno per coordinate $x\,y$, $x'\,y'$, $x''\,y''$, si avrà

$$ABC \equiv \frac{1}{2}\,AB.AB \equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'-x & y'-y \\ x''-x & y''-y \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j} \equiv \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i}.\mathbf{j}.$$

Nello spazio, riferiti i segmenti **a** e **b** ai segmenti **i j k**, sia

$$\mathbf{a} \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} , \qquad \mathbf{b} \equiv x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} ;$$

si deduce in modo analogo:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} \equiv (xy'-x'y)\,\mathbf{i}.\mathbf{j} + (yz'-y'z)\,\mathbf{j}.\mathbf{k} + (zx'-xz')\mathbf{k}.\mathbf{i} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{j}.\mathbf{k} & \mathbf{k}.\mathbf{i} & \mathbf{i}.\mathbf{j} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

che esprime l'area **a.b** in funzione delle coordinate di **a** e di **b**, e delle aree **i.j**, **j.k**, e **k.i** che giacciono nei piani coordinati.

§ 7. Volumi.

22. Se α è un'area piana data in grandezza, giacitura, e senso, ed **l** un segmento pure dato, intenderemo con α.**l** il volume del solido (prisma) generato da un segmento che si muove conservandosi sempre equipollente ad **l**, e la cui origine percorra tutti i punti di α. Così **a.b.c** rappresenta il volume del parallelepipedo compreso da tre spigoli equipollenti ad **a**, **b**, **c**.

Come pei segmenti giacenti su d'una stessa retta non si ha a parlare di direzione, ma solamente di grandezza e senso, e come pelle aree che stanno in uno stesso piano non si ha a considerare che la grandezza e senso, così pei volumi non avremo a considerare che la grandezza e senso.

Diremo che due volumi α.**l** e β.**l'** sono equipollenti, se oltre all'avere la stessa grandezza, hanno lo stesso senso, ossia se trasportando l'un solido in modo che coincidano i piani delle aree α e β, e queste aree siano percorse nello stesso senso, i due solidi trovansi da una stessa parte, ovvero da parti opposte del piano delle aree.

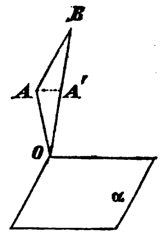
Così i volumi **a.b.c**, **b.c.a**, **c.a.b** sono equipollenti; mentrechè **b.a.c**, **a.c.b**, **c.b.a** sono pure fra loro equipollenti, ma di senso opposto ai primi.

È chiaro che cosa si intende per somma di più volumi, e per prodotto d'un volume per un numero.

TEOREMA. Il volume $\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ è eguale alla somma dei volumi $\alpha.\mathbf{a}$ e $\alpha.\mathbf{b}$; cioè

$$\alpha.(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha.\mathbf{a}+\alpha.\mathbf{b}.$$

Invero, sia $OA \equiv \mathbf{a}$, e $AB \equiv \mathbf{b}$; per A si conduca il piano parallelo ad α, che incontri OB in A'. Il volume generato da OA è eguale a quello generato da OA', perchè prismi aventi la stessa base, e compresi fra piani paralleli; e per la stessa ragione, il volume generato da AB è eguale al volume generato da A'B. Ma il volume generato da OA' più il volume generato da A'B è il volume generato da OB, dunque



$$\alpha.OA+\alpha.AB=\alpha.OB\,, \quad \text{c. v. d.}$$

Quindi si deduce, che se $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sono somme geometriche di più segmenti, il volume $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ è la somma di tutti i volumi ottenuti combinando una componente di $\mathbf{a}$ con una componente di $\mathbf{b}$ e con una componente di $\mathbf{c}$.

23. Si riferiscano i segmenti dati a tre segmenti $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, e sia

$$\mathbf{a}\equiv x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k},\quad \mathbf{b}\equiv x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k},\quad \mathbf{c}\equiv x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k};$$

e si calcoli il volume

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}=(x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}).(x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}).(x_3\mathbf{i}+y_3\mathbf{j}+z_3\mathbf{k}).$$

Sviluppando il membro di destra, e tenendo conto che ogni volume compreso fra tre dei segmenti $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$, di cui due siano ripetuti, è nullo, e che i volumi compresi fra i segmenti distinti $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, sono tutti eguali a meno del segno, e valgono $\pm\,\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$, secondochè per passare da questa scrittura alla precedente occorre un numero pari o dispari d'inversioni delle lettere $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ $\mathbf{k}$, si deduce che $\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}$ è uguale ad $\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k}$ moltiplicato per un polinonio di cui tutti i termini sono della forma $\pm\,x_\alpha y_\beta z_\gamma$, ove α, β, γ sono una permutazione degli indici 1, 2, 3, e che il segno è $+$ o $-$, secondochè la permutazione è di classe pari o dispari; vale a dire, per la definizione dei determinanti

$$\mathbf{a.b.c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \mathbf{i.j.k}.$$

Il tetraedro ABCD è la sesta parte del parallelepipedo compreso fra gli spigoli AB, AC, e AD

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6}\,\mathrm{AB.AC.AD}\,;$$

quindi, se $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ e $x_4 y_4 z_4$ sono le coordinate dei vertici ABCD, si avrà

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \mathbf{i.j.k}$$

ovvero

$$\mathrm{ABCD} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \mathbf{i.j.k}$$

24. Siano $A_1\ A_2 \ldots A_n$ n punti dello spazio, e si immaginino delle aree $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_n$. Potremo, per maggior facilità, supporre che A_1 sia un punto dell'area ω_1, che A_2 sia un punto di ω_2, e così via. Preso ad arbitrio un punto O nello spazio, si vuol studiare il modo di variare, variando O, del volume

$$\mathrm{V(O)} = \omega_1.\mathrm{OA}_1 + \omega_2.\mathrm{OA}_2 + \ldots + \omega_n.\mathrm{OA}_n.$$

Sia S un altro punto dello spazio. Ricorrendo alla formula $\mathrm{OA} \equiv \mathrm{OS} + \mathrm{SA}$, e posto $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, si deduce

$$\mathrm{V(O)} = \Omega.\mathrm{OS} + \mathrm{V(S)}.$$

Quindi sarà $\mathrm{V(O)} = \mathrm{V(S)}$ se $\Omega.\mathrm{OS} = 0$, ossia, se Ω non è nullo, qualora OS sia parallelo al piano dell'area Ω. Ossia V(O) conserva un valore costante quando O si sposti in un piano parallelo ad Ω.

Se Ω non è nullo, si può determinare un punto S tale che $\Omega.OS = V(O)$, e quindi $V(S)=0$; e questi punti S sono in numero infinito, e giacciono su d'un piano parallelo ad Ω. Sia S un punto siffatto; l'ultima formula dice $V(O)=\Omega.OS$, ossia il volume V(O) risulta espresso mediante il solo segmento OS variabile con O.

Se poi $\Omega=0$, V(O) ha un valore indipendente dal punto O.

I risultati precedenti si possono pure interpretare a questo modo. Il volume $\omega.OA$, ove A è un punto di ω, vale tre volte il volume della piramide di base ω e il cui vertice è O. Quindi: Se si hanno più aree ω_1, ω_2... determinate anche in posizione, e si fa la somma U(O) dei volumi delle piramidi aventi per basi queste aree, e per vertice un punto variabile O, se la somma delle aree $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + \ldots$ non è nulla, la somma delle piramidi è eguale alla piramide avente per base un'area $\Omega \equiv \omega_1 + \omega_2 + \ldots$ determinata di posizione, e per vertice il punto O. Quindi quella somma è costante se il punto O si sposta in un piano parallelo ad Ω, ed è nulla per tutti i punti del piano Ω. Se $\Omega \equiv 0$, la somma di queste piramidi è indipendente da O. Come caso speciale, se le aree ω sono le faccie di un poliedro non chiuso, il cui contorno sia una linea poligonale qualunque, U(O) è il volume del solido il cui vertice è O, e la cui base è il poliedro dato; e questo volume si mantiene costante se O si muove su d'un piano parallelo ad Ω. Se infine le aree ω sono le faccie d'un poliedro chiuso, $\Omega \equiv 0$, e il valore costante di U(O) coincide col volume del solido, qualora questo sia convesso. In ogni caso, si suol assumere U(O) come il volume del poliedro, qualunque sia la sua forma.

Esercizii.

25. — 1. Costrurre il triangolo ABC conoscendo i tre punti A'B'C' che dividono i lati in dati rapporti; p. e. tali che

$$BA' \equiv A'C, \quad 2CB' \equiv B'A, \quad 3AC' \equiv C'B.$$

2. Dimostrare che, essendo A, B, A', B' quattro punti dello spazio, si ha

$$2AB \times A'B' = \overline{AB'}^2 + \overline{A'B}^2 - \overline{AA'}^2 - \overline{BB'}^2.$$

3. Alcuni Autori indicano che il punto S è il baricentro dei punti $A_1\, A_2 \ldots A_n$, coi pesi $m_1\, m_2 \ldots m_n$ scrivendo

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, S = m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_n A_n .$$

Dànno ragione sufficiente di questa notazione le formule:

a) Essendo O un punto arbitrario si ha (N. 13, formula 2)

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, OS \equiv m_1 OA_1 + m_2 OA_2 + \ldots + m_n\, OA_n .$$

b) Essendo P e Q due punti arbitrarii, si ha (N. 20)

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\ PQS \equiv m_1 PQA_1 + m_2 PQA_2 + \ldots + m_n\, PQA_n .$$

c) Essendo PQR tre punti arbitrarii, si ha

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, PQRS \equiv m_1 PQRA_1 + m_2 PQRA_2 + \ldots + m_n\, PQRA_n .$$

d) Se l è una retta arbitraria, ed lA rappresenta il segmento (in grandezza, direzione e senso) che segna la minima distanza dalla retta l al punto A, si ha

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, lS \equiv m_1 lA_1 + m_2 lA_2 + \ldots + m_n\, lA_n .$$

e) Se π è un piano arbitrario, e πA rappresenta il segmento che segna la minima distanza dal piano π al punto A, si ha

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\, \pi S \equiv m_1 \pi A_1 + m_2 \pi A_2 + \ldots + m_n\, \pi A_n .$$

Dimostrare le formule *c*, *d*, *e*.

4. La proiezione ortogonale d'un'area su d'un piano è in grandezza eguale all'area proiettata moltiplicata pel coseno dell'angolo che il piano di quest'area fa col piano su cui si proietta.

5. Un'area piana si può rappresentare mediante un segmento, la cui direzione sia normale al piano dell'area, la cui grandezza sia misurata dallo stesso numero che misura la grandezza dell'area, ed il cui senso sia collegato convenientemente col senso dell'area, in modo cioè, che se le aree ω ed ω' sono rappresentate dai segmenti $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{a}'$, trasportando l'area ω' in modo che il suo piano coincida col piano dell'area ω, e coincidano pure i sensi di queste aree, i segmenti $\mathbf{a}$ ed $\mathbf{a}'$, che acquistano la stessa direzione, abbiano pure lo stesso senso.

Dimostrare il teorema:

Se le aree α, β, γ, ... sono rappresentate dai segmenti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ..., l'area $\alpha + \beta + \gamma + \ldots$ è rappresentata dal segmento $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \ldots$