

LES SINGULARITÉS À L'INFINI DES POLYNÔMES ET LES COMPACTIFICATIONS TORIQUES

DAVID ALESSANDRINI*

(Received December 3, 2009, revised July 20, 2010)

Abstract. We study the toric compactifications of fibers of a polynomial mapping in several complex variables and analyse their singularities which can appear at infinity. We compare several possible definitions of such singularities. Essentially, these definitions are related to the topological triviality, the non-characteristic condition, the gradient condition and the absence of vanishing cycles at infinity. We generalize to the toric compactification set-up the results known for the projective compactification.

1. Introduction. Soit $f: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ un polynôme. Le théorème suivant décrit le comportement de la topologie des différentes fibres de f :

THÉORÈME 1.1 ([33] ou [10]-[14]-[28]). *Il existe un sous-ensemble fini $B_f \subset \mathbf{C}$ tel que:*

$$f: \mathbf{C}^n \setminus f^{-1}(B_f) \rightarrow \mathbf{C} \setminus B_f$$

soit une fibration localement triviale.

L'ensemble B_f vérifiant cette propriété est appelé ensemble des points de bifurcation de f . Les points de cet ensemble sont aussi appelés valeurs atypiques. Les fibres au-dessus de B_f sont atypiques, soit en raison de leurs singularités dans l'espace affine \mathbf{C}^n , soit à cause du comportement asymptotique à l'infini du polynôme f . Donc, même si f ne possède pas de points critiques dans \mathbf{C}^n , il se peut que f ne définisse pas une fibration localement triviale. Ceci est dû au fait que pour $n > 1$, f n'est pas propre et donc on ne peut pas appliquer le théorème de fibration d'Ehresmann. On va uniquement étudier le comportement asymptotique à l'infini du polynôme f . **On suppose pour cela que f n'a que des singularités isolées dans l'espace affine \mathbf{C}^n .**

Il existe plusieurs définitions qui permettent de contrôler asymptotiquement le gradient de f . Par exemple la condition donnée par Fedorjuk (voir [11]) dans la définition suivante (voir aussi [7] et [8]) :

DÉFINITION 1.2. On dit que le polynôme f est modéré (tame en anglais) à l'infini au-dessus de $t_0 \in \mathbf{C}$, si $\|\text{grad}f(z)\|$ est minoré par une constante $\delta > 0$ pour tout z dans

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32S30; Secondary 32S45, 32S60, 58K05, 58K55.

Key words and phrases. Singularities at infinity, toric varieties, vanishing cycles, non-characteristic condition, vector field.

*I would like to thank Professor Adam Parusiński and the Department of Mathematics at the University of Angers where a significant part of this paper was achieved during my Ph.D.

un voisinage de l'infini (c'est-à-dire en dehors d'un certain compact de \mathbf{C}^n) et $f(z)$ dans un voisinage de t_0 .

On peut donner une définition plus faible exprimée par Pham dans [29] et appelée condition de Malgrange par Parusiński dans [25], en remplaçant dans la définition précédente $\|\text{grad}f(z)\|$ par :

$$(1) \quad \|z\| \cdot \|\text{grad}f(z)\| \geq \delta > 0.$$

Ces deux dernières conditions impliquent la trivialité topologique de f au-dessus de t_0 . De plus, elles sont équivalentes dans le cas de la dimension 2 (voir [13] ou [19]).

A. Parusiński dans [25] et [26] démontre les implications $2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4) \Rightarrow 1)$ entre les quatre notions suivantes en utilisant une compactification projective de l'espace affine \mathbf{C}^n :

- 1) condition de trivialité topologique à l'infini,
- 2) absence de cycles évanescents en dehors du diviseur à l'infini pour l'adhérence projective des fibres du polynôme f ,
- 3) condition non-caractéristique de la définition 2.6,
- 4) hypothèse (1) de modération sur le gradient.

Le but de cet article est de mettre en évidence les liens entre les quatre notions énumérées ci-dessus dans le cas plus général d'une compactification torique quelconque des fibres d'un polynôme. On modifie pour cela la condition de modération (1) en prenant une métrique adaptée au choix de la compactification torique. On a divisé cet article en deux chapitres, le chapitre 2 où on résume les différentes manières théoriques d'exprimer la trivialité topologique et ensuite un chapitre 3 où on illustre ces différentes notions dans le cas d'une compactification torique des fibres d'un polynôme. Les résultats et démonstrations se trouvent essentiellement dans ce dernier chapitre. Enfin, on propose à la fin de ce document, un résumé des résultats obtenus sous forme de diagramme.

2. Les différentes notions de trivialité topologique. Ce chapitre est basé sur les travaux de Hamm, Lê et Mebkhout. Il décrit la correspondance entre la condition non-caractéristique (définie en 2.4-2.5-2.6 et obtenue dans la section 3.3 dans le cas torique) et la notion de cycles évanescents ainsi que celle de trivialité locale en dehors d'un diviseur. On rappelle que ces trois notions sont équivalentes. Ceci est possible car on souhaite seulement obtenir une propriété topologique faible : trivialisier en dehors d'un diviseur. Dans le cas d'une compactification torique ce diviseur est un hyperplan à l'infini.

Ce chapitre permet de faire le lien entre une vision de nature topologique et une vision de nature géométrique d'une même propriété : la condition non-caractéristique. Contrairement aux autres chapitres, les résultats de ce chapitre ne sont valables que sur le corps \mathbf{C} et pas sur \mathbf{R} . Les trois sections suivantes décrivent une propriété locale.

2.1. Généralités sur la notion de cycles évanescents. Donnons d'abord des définitions dans un contexte général. Dans toute cette section, l'ensemble des notions développées seront étudiées localement. Soit \mathbf{F}^\bullet un complexe de faisceaux constructible sur une variété analytique ou algébrique complexe $X \subset \mathbf{C}^k$ de dimension s et $l: \mathbf{C}^k \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction lisse. On note

respectivement le faisceau des cycles proches et évanescents de \mathbf{F}^\bullet le long de l par $\Psi_l \mathbf{F}^\bullet$ et $\Phi_l \mathbf{F}^\bullet$. Pour une définition détaillée de ces deux derniers complexes, on pourra se reporter à Massey [22], appendice B ou bien à Deligne-Katz [9] pour une définition du foncteur Φ_l . Avant de préciser la définition du cycle caractéristique associé à un faisceau, commençons par donner des définitions préliminaires.

DÉFINITION 2.1 (voir [32]). Soit $\mathbf{S} = \{S_\alpha\}$ une stratification vérifiant la condition (A) de Whitney. On dit qu'un point p est une singularité de Morse si l'intersection de $\text{Im } dl$ (graphe de la différentielle de l) et $\bigcup_\alpha T_{S_\alpha}^* \mathbf{C}^k$ est une intersection transverse d'espace non-singuliers au point (p, dl) .

DÉFINITION 2.2 (voir [21, Chap.10]). Soit $\mathbf{S} = \{S_\alpha\}$ une stratification de Whitney de X pour laquelle \mathbf{F}^\bullet est constructible. Le cycle caractéristique $\text{Char}(\mathbf{F}^\bullet)$ est défini dans $T^* \mathbf{C}^k$ par la combinaison linéaire suivante :

$$\text{Char}(\mathbf{F}^\bullet) = \sum_\alpha m_\alpha(\mathbf{F}^\bullet) \overline{T_{S_\alpha}^* \mathbf{C}^k},$$

où $\overline{T_{S_\alpha}^* \mathbf{C}^k}$ représente l'adhérence du fibré conormal à S_α dans $T^* \mathbf{C}^k$. De plus, si \mathbf{F}^\bullet est pervers (voir [4]), les coefficients $m_\alpha(\mathbf{F}^\bullet)$ sont des entiers donnés par :

$$m_\alpha(\mathbf{F}^\bullet) = \dim H^{s-1}(\Phi_l \mathbf{F}^\bullet)_p,$$

où $H^*(\Phi_l \mathbf{F}^\bullet)_p$ est la cohomologie du faisceau $\Phi_l \mathbf{F}^\bullet$ pour tout point p appartenant à la strate S_α . Si $\dim S_\alpha > 0$, on définit l comme en 2.1 et si $\dim S_\alpha = 0$, on peut prendre l : forme linéaire générique.

DÉFINITION 2.3. Si \mathbf{F}^\bullet est un faisceau pervers, le support singulier associé est défini de manière ensembliste par :

$$SS(\mathbf{F}^\bullet) = \bigcup_{m_\alpha \neq 0} \overline{T_{S_\alpha}^* \mathbf{C}^k}.$$

REMARQUE. $\text{Char}(\mathbf{F}^\bullet)$ et $SS(\mathbf{F}^\bullet)$ sont bien définis, c'est-à-dire indépendants du choix de la stratification dans les définitions respectives (voir par exemple [17, Chap.9]).

2.2. Les cycles évanescents et la condition non-caractéristique. Le but de ce paragraphe est de relier la condition non-caractéristique à la notion d'absence de cycles évanescents en dehors du diviseur. Soit X une variété analytique ou algébrique complexe et $i : X \rightarrow \mathbf{C}^k$ l'inclusion. Soit $g : X \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $U = X \setminus g^{-1}(0) = X \setminus Y$ soit lisse. On note aussi $j : U \rightarrow X$ l'inclusion et le faisceau $\mathbf{F}^\bullet = i_* j_! \mathbf{C}_U$. La notation \mathbf{C}_U représente le faisceau constant sur U de fibre \mathbf{C} et $j_! \mathbf{C}_U$ son prolongement par zéro. C'est un faisceau pervers d'après Beilinson-Bernstein-Deligne [4].

Les différentes notions présentées de trivialité topologique sont valables dans le contexte général décrit ci-dessus mais nous les appliquerons au chapitre 3 dans le contexte de la compactification torique à l'infini des fibres d'un polynôme. Dans ce contexte particulier X représentera cette compactification torique et le lieu des zéros de la fonction g donnera l'équation du diviseur à l'infini Y .

Le théorème suivant décrit le cycle caractéristique du faisceau pervers $\mathbf{F}^\bullet = i_* j_! \mathcal{C}_U$ associé au lieu des zéros de la fonction g à l'aide de la géométrie de cette hypersurface. La description de cette géométrie sera donnée par des limites aux points singuliers de X d'espaces cotangents aux fibres de g .

Commençons par définir la condition non-caractéristique en introduisant ci-dessous la notion d'espace conormal relatif $T_{g/X}^*$.

DÉFINITION 2.4. L'espace conormal relatif $T_{g/X}^*$ est défini en prenant l'adhérence de l'ensemble suivant :

$$\{(x, \xi) \in T^* \mathcal{C}^k; x = \pi(x, \xi), \xi \neq 0 \text{ et } \xi(v) = 0 \text{ pour tout } v, v \in T_x(g/X)^{-1}(g(x))\}$$

où $\pi : T^* \mathcal{C}^k \rightarrow \mathcal{C}^k$ est la projection canonique du fibré et $T_x(g/X)^{-1}(g(x))$ l'espace tangent au point $x \in X \setminus Y$ à la fibre de g/X au-dessus de $g(x)$.

THÉORÈME 2.5 (*Théorème de Lê-Mebkhout* [20], *Briançon, Maisonobe et Merle* [6]).

$$SS(\mathbf{F}^\bullet) = T_X^* \mathcal{C}^k \cup W_g,$$

où $\mathbf{F}^\bullet = i_* j_! \mathcal{C}_U$ et W_g est défini par :

$$W_g = T_{g/X}^* \cap (g^{-1}(0) \times (\mathcal{C}^k)^*).$$

PREUVE. Les étapes principales de la démonstration sont indiquées dans [2] et [3]. Celle-ci est donnée dans un cadre topologique dans le même esprit que Lê-Mebkhout (Voir [20]), c'est-à-dire que l'on utilise principalement la théorie de Morse classique et les variétés polaires. \square

On choisit de prendre dans les deux prochains paragraphes les notations suivantes : p est un point de $g^{-1}(0)$ et t une fonction de la variété $X \setminus g^{-1}(0)$ à valeur dans \mathcal{C} . De plus \bar{t} représente un prolongement de t sur X , c'est-à-dire que $t = \bar{t}_{X \setminus Y}$. La condition non-caractéristique s'exprime alors par :

DÉFINITION 2.6. On dit que \bar{t} est non-caractéristique par rapport au diviseur d'équation $g = 0$ si pour tout point p appartenant à ce diviseur $(p, d\bar{t}) \notin W_g$, où $d\bar{t}$ représente la différentielle de la fonction \bar{t} .

2.3. La trivialité locale en dehors du diviseur. La condition non-caractéristique permet de trivialisier localement en un point du diviseur l'application t (autrement dit \bar{t} sur $X \setminus Y$). Cette propriété est donnée par le lemme et la proposition suivante.

Le but ici est de pouvoir relever le champ $\partial/\partial t$ à la fois sur l'espace tangent aux niveaux de g et sur l'espace tangent à la sphère dans laquelle on souhaite trivialisier. On donne pour cela le lemme de transversalité :

LEMME 2.7. Soit L_δ l'hyperplan d'équation $t = \delta$, S_ε la sphère de rayon ε et D_α^* le disque privé de son centre. Si la condition non-caractéristique de la définition 2.6 est vérifiée alors pour tout ε suffisamment petit, il existe α et δ avec $0 < \alpha \ll \varepsilon$ et $0 < \delta \ll \varepsilon$, tels que

L_δ soit transverse à $S_\varepsilon \cap g^{-1}(g(z))$ pour tout $z \in S_\varepsilon \cap t^{-1}(D_\delta) \cap g^{-1}(D_\alpha^*)$, g étant considérée comme une fonction sur X .

PREUVE. On va démontrer ce lemme par l'absurde. Supposons donc que la conclusion ne soit pas vraie, il existe alors une suite de points :

$$p_i \in S_\varepsilon \cap t^{-1}(D_\delta) \cap g^{-1}(D_\alpha^*) \subset X \setminus g^{-1}(0)$$

tels que $p_i \rightarrow p \in S_\varepsilon \cap L_0 \cap g^{-1}(0)$ et tels que

$$T_{p_i} t^{-1}(t(p_i)) \cap T_{p_i} g^{-1}(g(p_i)) \subset T_{p_i}(S_\varepsilon \cap X) \subset T_{p_i}(S_\varepsilon).$$

Par passage à la limite, en supposant qu'elles existent, on obtient l'inclusion suivante :

$$L_0 \cap T_p g^{-1}(g(p)) \subset T_p(S_\varepsilon).$$

L'inclusion est conservée après passage à la limite car d'après l'hypothèse non-caractéristique L_δ est transverse à $g^{-1}(g(x))$ pour tout x dans un voisinage V de p , avec $g(x) \neq 0$. On peut alors choisir ε suffisamment petit pour que $S_\varepsilon \subset V$.

Il faut maintenant utiliser une stratification \mathbf{S} de X , vérifiant la condition (A_g) , afin d'avoir si $p \in S \in \mathbf{S}$, avec $S \subset g^{-1}(0)$ une strate :

$$T_p S \subset T_p g^{-1}(g(p)).$$

On obtient alors :

$$(2) \quad L_0 \cap T_p S \subset T_p(S_\varepsilon).$$

Supposons de plus que \mathbf{S} vérifie la condition (A) de Whitney. On peut munir $L_0 \cap X$ de la stratification induite par \mathbf{S} et donc, si ε est suffisamment petit, S_ε est transverse à cette stratification. D'où une contradiction avec l'inclusion ci-dessus (2). \square

On a démontré ce lemme grâce à l'existence d'une stratification de X vérifiant la condition (A_g) (voir l'article [16]). On peut maintenant trivialisier t .

PROPOSITION 2.8. *Supposons que la condition non-caractéristique de la définition 2.6 soit vérifiée, alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et δ tel que $0 < \delta \ll \varepsilon$, on a que*

$$\bar{t}: B_\varepsilon \cap \bar{t}^{-1}(D_\delta) \cap (X \setminus g^{-1}(0)) \rightarrow D_\delta$$

est une fibration topologiquement triviale.

PREUVE. Grâce au lemme de transversalité 2.7, on peut relever par l'application t le champ de vecteurs $\partial/\partial t$ dans l'espace tangent aux fibres de g en un champ de vecteurs non-nuls qui de plus est continu d'après [5]. Pour intégrer ensuite ce champ, on le modifie au voisinage de $S_\varepsilon \cap t^{-1}(D_\delta)$ afin qu'il soit tangent à $S_\varepsilon \cap g^{-1}(g(z))$. Ceci est possible grâce au lemme 2.7 de transversalité. On recolle ensuite ces deux champs à l'aide d'une partition de l'unité. \square

REMARQUE. On retrouve le même type d'arguments dans l'article [34], mais ici on ne fait pas d'hypothèse sur le comportement des strates qui se situent dans le lieu des zéros de

la fonction g , c'est-à-dire la partie à l'infini. En effet, notre préoccupation est de trivialisier en dehors de l'infini.

2.4. L'absence des cycles évanescents et la trivialité topologique. Dans la proposition 2.8, on démontre que la condition non-caractéristique entraîne la trivialité de l'application \bar{t} en dehors du diviseur à l'infini. C'est-à-dire que l'absence des cycles évanescents pour le faisceau pervers $\mathbf{F}^\bullet = i_* j_! \mathbf{C}_U$ et l'application t donne cette trivialité. On cherche maintenant à prouver la réciproque par la proposition suivante :

PROPOSITION 2.9. *Si l'application \bar{t} trivialisie localement $X \setminus Y$ en un point p appartenant à $Y = g^{-1}(0)$ alors $(p, d\bar{t}) \notin SS(i_* j_! \mathbf{C}_U)$.*

PREUVE. Le problème vient du fait que l'application t n'est pas a priori générique et on ne peut donc directement appliquer les définitions du paragraphe 2.2. On va ainsi suivre la preuve générale donnée dans l'article [26] de Parusiński.

Si \bar{t} trivialisie localement $X \setminus Y$ en un point p tel que $\bar{t}(p) = t_0$ alors p n'appartient pas au support du faisceau $\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_* j_! \mathbf{C}_U)$. On rappelle que le support d'un faisceau est défini par :

DÉFINITION 2.10. Le support du faisceau $\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_* j_! \mathbf{C}_U)$ que l'on note :

$$\text{supp}(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_* j_! \mathbf{C}_U))$$

est l'ensemble fermé des points p où $(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_* j_! \mathbf{C}_U))_p \neq 0$.

La proposition 2.9 résulte alors principalement de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.11 (voir [17, Chap.8], [23] ou bien [26]). *On suppose que $\bar{t}(p) = t_0$. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes:*

- i) $(p, d\bar{t}) \notin SS(i_* j_! \mathbf{C}_U)$.
- ii) $p \notin \text{supp}(\Phi_{\bar{t}-t_0}(i_* j_! \mathbf{C}_U))$.

□

REMARQUE. Comme le remarque Parusiński dans l'article [26], on obtient la même proposition en remplaçant le faisceau $i_* j_! \mathbf{C}_U$ par tout faisceau pervers \mathbf{F}^\bullet . En particulier, on a que ce faisceau $\mathbf{F}^\bullet = i_* j_! \mathbf{C}_U$ est pervers car \mathbf{C}_U est pervers (voir [4]) et \mathbf{C}_U est pervers car U est un espace lisse de codimension 1.

Pour terminer cette section, nous exprimons la trivialité topologique en terme de limite d'espace cotangent à l'aide de W_g .

PROPOSITION 2.12 (voir [26]). *Pour tout $p \in g^{-1}(0)$ on a que:*
 $(p, dt) \notin SS(i_* j_! \mathbf{C}_U)$ si et seulement si $(p, dt) \notin W_g$.

PREUVE. Pour cette démonstration, nous avons besoin du lemme :

LEMME 2.13. *Comme $\text{sing}(X) \subset g^{-1}(0)$, où $\text{sing}(X)$ est l'ensemble des singularités de X , alors $T_X^* \mathbf{C}^k \cap (g^{-1}(0) \times (\mathbf{C}^k)^*) \subseteq W_g$.*

PREUVE. Soit $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de $X \setminus g^{-1}(0)$ telle que $p_n \rightarrow p \in g^{-1}(0)$. Comme $X \setminus g^{-1}(0)$ est lisse, on peut écrire :

$$\begin{aligned} T_{g/X}^* &= \overline{\{(x, \xi) \in T^*C^k ; x \in X \setminus g^{-1}(0), \xi(\ker d_x(g/X)) = 0\}} \\ &= \overline{\{(x, \xi) \in T^*C^k ; x \in X, \xi(T_x X \cap \ker d_x g) = 0\}}, \end{aligned}$$

et on a alors $(T_X^*C^k)_{p_n} \subset (T_{g/X}^*)_{p_n}$, car si $(p_n, \xi) \in (T_X^*C^k)_{p_n}$ alors $\xi(T_{p_n} X) = 0$ et donc aussi $\xi(T_{p_n} X \cap \ker d_{p_n} g) = 0$. En passant à la limite, on obtient le résultat voulu. \square

De plus, d'après le théorème 2.5 on a que :

$$SS(i_* j_! C_U) = T_X^* C^k \cup W_g.$$

Le lemme 2.13 et ce théorème donne le résultat de la proposition. \square

3. Le cas torique. Ce chapitre est structuré de la manière suivante. Dans la section 3.1, on présente quelques notions préparatoires sur les propriétés de la compactification torique des fibres d'un polynôme. On présente ensuite dans la section 3.2, les différentes techniques qui seront utilisées comme les champs de vecteurs et les conditions de contrôles sur ces champs. La section 3.3 donne les principaux résultats de cet article dans le cas d'une compactification torique de l'espace affine C^n . On démontre à l'aide de l'hypothèse de modération sur le gradient de la définition 3.2, la propriété locale suivante : le champ de vecteurs de Kuo-Paunescu après modification torique donne un champ de vecteurs contrôlé par rapport au diviseur à l'infini. Cette dernière condition est équivalente à la condition la plus importante : la condition non-caractéristique.

Pour simplifier les notations, on choisira dans la suite de cet article d'adopter les conventions suivantes. Soit h_1 et h_2 deux fonctions positives sur C^n . $h_1 \sim h_2$ signifie qu'il existe deux constantes $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ telles que : $k_1 h_1(z) \leq h_2(z) \leq k_2 h_1(z)$, pour tout $z \in C^n$ dans un voisinage autour d'un point ou bien dans un voisinage de l'infini (c'est à dire en dehors d'un certain compact de C^n). De même, $h_1 \lesssim h_2$ signifie qu'il existe une constante $k > 0$ telle que $h_1(z) \leq k h_2(z)$ pour tout $z \in C^n$ dans le voisinage considéré.

3.1. Compactification torique des fibres d'un polynôme. Dans cette section, on va expliquer la construction de l'ensemble, que l'on notera X , formé par la compactification torique des fibres de f .

Soit $E = \{a^j\}$ un ensemble fini de m points de l'espace N^n , $\Gamma_-(E)$ est l'enveloppe convexe dans \mathbf{R}^n de l'ensemble $\{a^j + \mathbf{R}_-^n ; j = 1, \dots, m\}$ et $\Gamma_- = \Gamma_-(E) \cap \mathbf{R}_+^n$ où $\mathbf{R}_+ = \{a \in \mathbf{R} ; a \geq 0\}$. Le polyèdre Γ_- est donc commode par construction (voir [24] pour une définition). La variété torique associée à l'éventail complet Γ_- est construite par dualité : soit S l'ensemble des sommets de Γ_- , l'ensemble des cônes $(\Gamma_- - s)^\vee$ pour $s \in S$ ainsi que les faces de ces cônes forment cet éventail. On subdivise ensuite l'éventail afin d'obtenir un éventail non-singulier Δ_{Γ_-} et une variété torique lisse $T(\Delta_{\Gamma_-})$ (voir [12]). Comme Δ_{Γ_-} est un éventail non-singulier, si σ est un cône de dimension n de cet éventail alors S_σ , le semi-groupe associé à σ^\vee , est généré par n variables telles que $S_\sigma = \mathbf{Z}_{\geq 0} v_1 + \dots + \mathbf{Z}_{\geq 0} v_n$. L'algèbre de type fini $\mathbf{C}[u_1, \dots, u_n] = \mathbf{C}[z^{v_1}, \dots, z^{v_n}]$ engendrée par $u_1 = z^{v_1}, \dots, u_n = z^{v_n}$, où u_i sont

les variables toriques et z_i les coordonnées affines dans \mathbf{C}^n avec $z^{v_i} = z_1^{v_{i1}} \cdots z_n^{v_{in}}$, définie la variété torique lisse T_σ isomorphe à \mathbf{C}^n .

Soit $f : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ un polynôme noté $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$. On définit son support par :

$$\text{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbf{N}^n ; c_\alpha \neq 0\}.$$

On suppose dans la suite que $\text{supp}(f) \subset \Gamma_-$.

LEMME 3.1. *On fixe dans ce lemme un cône de dimension maximale $\sigma \in \Delta_{\Gamma_-}$. Pour $i = 1, \dots, n$, on note u_i les variables toriques associées aux générateurs du semi-groupe de σ^\vee . Il existe $(p_{k+1}, \dots, p_n) \in (\mathbf{N}^*)^{n-k}$ tel que*

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \cdots u_n^{p_n} f(z)$$

soit constituée de monômes dont la puissance appartient à σ^\vee . On peut donc écrire :

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \cdots u_n^{p_n} f(z) = \bar{f}(u),$$

où $\bar{f} : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ est un polynôme.

PREUVE. Comme σ est un cône polyédral convexe, on a : $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. On peut alors dire qu'à σ^\vee correspond un unique sommet du polyèdre Γ_- avec les mêmes faces adjacentes que celles de σ^\vee , en effet on a supposé que σ était de dimension maximale. Or σ^\vee a pour sommet l'origine du repère, donc si on choisit Γ_- tel que $\text{supp}(f) \subset \Gamma_-$, après une translation, tous les points de $\text{supp}(f)$ se retrouvent inclus dans σ^\vee . Précisons cette dernière affirmation.

Si le sommet appartient au sous-espace vectoriel de dimension $n - k$ et d'équation :

$$P_k = \{z \in \mathbf{R}^n ; z_1 = \cdots = z_k = 0\},$$

alors le cône σ est du type :

$$\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}\},$$

où $\tilde{w}^F \in \mathbf{Z}_-^n$ désigne le vecteur primitif orthogonal à la face F n'appartenant pas à P_k^\perp et $\tilde{e}_i \in P_k^\perp$ (ce ne sont pas forcément les vecteurs de la base canonique). Si le vecteur $-\mathbf{v}$ désigne le sommet de Γ_- alors par une translation dans le sous-espace P_k de vecteur :

$$\mathbf{v} = (-p_{k+1} \cdots -p_n),$$

où $(p_{k+1}, \dots, p_n) \in (\mathbf{N}^*)^{n-k}$, on obtient que :

$$\mathbf{v} + \text{supp}(f) \subset \sigma^\vee.$$

Cela se traduit de manière multiplicative par la conclusion du lemme. \square

Soit T_σ la variété affine associée à un cône quelconque σ . On définit alors la fonction \bar{F} et l'ensemble X_σ comme suit :

$$u_{k+1}^{p_{k+1}} \cdots u_n^{p_n} [f(z) - t] = \bar{f}(u) - t u_{k+1}^{p_{k+1}} \cdots u_n^{p_n} = \bar{F}(u, t),$$

$$(3) \quad X_\sigma = \{(u, t) \in \mathbf{C}^{n+1} ; \bar{F}(u, t) = 0\} \cap (T_\sigma \times \mathbf{C}).$$

Soit Y_σ le lieu à l'infini de X_σ . Il s'écrit donc :

$$Y_\sigma = \{(u, t) \in \mathbf{C}^{n+1} ; u_{k+1} \cdots u_n = 0\} \cap X_\sigma .$$

Donnons à présent quelques propriétés simples des ensembles X_σ et Y_σ :

PROPRIÉTÉ 1. Y_σ est un ensemble qui ne dépend pas de t .

PROPRIÉTÉ 2. $X_\sigma \setminus Y_\sigma$ est non-singulier.

Le travail présenté à partir de la section 3.3 aura la propriété d'être local et dans ce contexte l'étude se fera dans une carte au voisinage d'un point du diviseur à l'infini, c'est-à-dire que l'on choisira pour l'étude un cône de la variété torique contenant ce point. L'ensemble X_σ est défini en (3) et la fonction $g(u) = u_{k+1} \cdots u_n$ donne l'équation locale du diviseur à l'infini $g(u) = 0$. X_σ représente localement l'adhérence du graphe de f dans la variété affine $T_\sigma \times \mathbf{C}$. Précisons la signification de l'application $\bar{t} : X_\sigma \rightarrow \mathbf{C}$ avec la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 3. \bar{t} est induite par la projection canonique $\text{pr}_2 : T_\sigma \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ et sa fibre $\bar{t}^{-1}(t_0)$ représente l'adhérence de $t^{-1}(t_0) = f^{-1}(t_0)$ dans X_σ pour tout t_0 .

Localement, en un point à l'infini, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & X_\sigma & \hookrightarrow & T_\sigma \times \mathbf{C} & \hookrightarrow & \mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \\
 g \swarrow & \downarrow \bar{t} & \searrow \text{pr}_2 & & \searrow \text{pr}_2 & \\
 \mathbf{C} & & & & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

On peut maintenant préciser la notion de compactification torique des fibres d'un polynôme de manière globale. X (resp. Y) est obtenu par recollement de tous les X_σ (resp. Y_σ) et le diagramme commutatif ci-dessus reste valable sans spécifier la carte associée à σ .

3.2. Les fonctions compensatrices et le champ de vecteurs de Kuo-Paunescu-Abderrahmane. Dans cette section, on explique comment généraliser la condition (1) (voir l'introduction) de modération de Malgrange sur le gradient de la même manière qu'Abderrahmane généralise dans [1] la condition de Kuo-Paunescu donnée dans [27]. On donne aussi le champ de vecteurs généralisé associé à la nouvelle métrique. A la fin de cette section, on donne une propriété globale affine de contrôle de ce champ de vecteurs.

3.2.1. la fonction de contrôle et les fonctions compensatrices associées. Reprenons les notations de la section 3.1 et notons Γ_-^* l'ensemble des sommets de $\Gamma_- \setminus \{0\}$, avec :

$$\Gamma_-^* = \{a^j ; a^j \neq 0, j = 1, \dots, m\} .$$

Si p est un nombre réel positif, on note : $p_i^j = pa_i^j$ et $p^j = pa^j$ où a_i^j pour $i = 1, \dots, n$ sont les coordonnées du point $a^j \in \Gamma_-^*$. On introduit alors comme dans [1] la fonction de contrôle relative au polyèdre Γ_-^* de la manière suivante : pour tout $z \in \mathbf{C}^n$,

$$\rho(z) = \left(\sum_{j=1}^m |z|^{2p^j} \right)^{1/2p} = \left(\sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n |z_i|^{2p_i^j} \right)^{1/2p} .$$

C'est-à-dire que les monômes $|z|^{2p^j}$ correspondent aux sommets a^j de Γ_-^* .

Rappelons maintenant la définition des fonctions compensatrices associées à ρ . Comme Γ_- est commode par construction, on note a^1, \dots, a^n les sommets appartenants respectivement aux axes z_1, \dots, z_n . Soit F une face de dimension $n - 1$ du polyèdre Γ_- et soit w^F l'unique vecteur de \mathcal{Q}_-^n tel que pour tout $x \in F$, $\langle x, w^F \rangle = -1$. On définit alors $\alpha(i)$ par :

$$\alpha(i) = \min_{F \in \mathbf{F}} \{|w_i^F|\} = |\max_{F \in \mathbf{F}} \{w_i^F\}|$$

où \mathbf{F} est l'ensemble des faces de codimension 1 de Γ_- . On introduit alors les fonctions compensatrices de la même manière qu'Abderrahmane dans [1], c'est-à-dire comme suit :

$$(4) \quad \rho_i(z) = \left(|z_i|^{2p/\alpha(i)} + \sum_{k \neq i} |z_k|^{2pa_k^k} \right)^{\alpha(i)/2p} \sim |z_i| + \sum_{k \neq i} |z_k|^{\alpha(i)a_k^k}$$

pour $i = 1, \dots, n$. Les ρ_i sont construites pour être des formes de degré $\alpha(i)$ avec le système de poids $w = (w_1, \dots, w_n)$ où $w_k = 1/a_k^k$ pour $k \neq i$ et $w_i = \alpha(i)$. On choisira dans notre cas la deuxième expression de (4) car $\alpha(i)$ peut éventuellement être nul.

Aux fonctions compensatrices ρ_i , on associe une métrique hermitienne relative au polyèdre Γ_- :

$$(5) \quad \left\langle \rho_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \rho_j \frac{\partial}{\partial z_j} \right\rangle_{\Gamma} = \delta_{ij}$$

ainsi qu'un champ de vecteurs décrit dans la section suivante.

3.2.2. Rappel sur le champ de vecteurs de Kuo-Paunescu et Abderrahmane. Dans la métrique (5), le gradient et sa norme s'écrivent :

$$\text{grad}_{\Gamma} f(z) = \sum_{i=1}^n \rho_i(z) \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_i}(z) \rho_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

et

$$\|\text{grad}_{\Gamma} f\|_{\Gamma}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\rho_i \left| \frac{\partial f}{\partial z_i} \right| \right)^2.$$

REMARQUE. La norme construite par Abderrahmane dans [1] pour un polyèdre quelconque généralise celle de Paunescu construite dans [27] pour le cas quasi-homogène. C'est-à-dire que la construction de Paunescu peut-être vue comme un cas particulier de celle d'Abderrahmane. De même, le cas de Paunescu est une généralisation du cas de Kuo dans [18]. En effet, si le polyèdre est homogène (c'est-à-dire de poids $(1, \dots, 1)$) on a que :

$$\|\text{grad}_{\Gamma} f\|_{\Gamma} = \|z\| \cdot \|\text{grad} f(z)\|.$$

Dans le cas quasi-homogène de poids (w_1, \dots, w_n) , on retrouve le gradient de Paunescu.

Ce champ de vecteurs sera défini sur $X \setminus Y$ par :

$$(6) \quad \mathbf{V}(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i(\overline{\partial f / \partial z_i}) \rho_i}{\|\text{grad}_{\Gamma} f\|_{\Gamma}^2} \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{pour } \|z\| \text{ grand.}$$

C'est un champ de vecteurs analytique réel. Il est tangent à l'hypersurface $F^{-1}(0)$, où F est donnée par $F(z, t) = f(z) - t$. C'est-à-dire tangent au graphe de f . Donnons à présent la condition de contrôle associée à ce champ :

$$(7) \quad \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} = V_i = \frac{1}{\|\text{grad}_\Gamma f\|_\Gamma} \cdot \frac{\rho_i \overline{(\partial f / \partial z_i)}}{\|\text{grad}_\Gamma f\|_\Gamma} \cdot \rho_i.$$

En utilisant l'hypothèse de la définition 3.2 de la section 3.3 ci-dessous de modération sur le gradient, on obtient que :

$$(8) \quad |V_i| = \left| \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} \right| \lesssim \rho_i,$$

car les deux premiers termes du produit (7) sont bornés. Le calcul suivant donne alors la condition de contrôle à l'infini du champ de vecteurs \mathbf{V} par la fonction $1/\rho$. On obtient par dérivation des fonctions composées :

$$(9) \quad \left| \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \mathbf{V}} \right| = \left| \sum_i \frac{\partial(1/\rho)}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} \right| = \frac{1}{\rho^2} \left| \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial \mathbf{V}} \right|,$$

donc

$$\left| \frac{\partial(1/\rho)}{\partial \mathbf{V}} \right| \lesssim \frac{1}{\rho^2} \sum_i |V_i| \left| \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \right| \lesssim \frac{1}{\rho^2} \sum_i |\rho_i| \left| \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \right| \lesssim \left| \frac{1}{\rho} \right|.$$

La dernière inégalité s'obtient grâce à la propriété suivante sur la fonction de contrôle et les fonctions compensatrices :

$$(10) \quad \left| \rho_i \frac{\partial \rho}{\partial z_i} \right| \lesssim \rho, \quad \text{pour tout } i \text{ et } \|z\| \text{ au voisinage de l'infini.}$$

La démonstration de l'inégalité (10) se fait en utilisant la version à l'infini du lemme des petits chemins de [24] et du corollaire 3.6 donné dans la section suivante.

3.3. Les théorèmes de trivialité dans le cas torique. On va supposer dans cette section l'hypothèse de modération sur le comportement asymptotique du gradient donnée par la définition suivante :

DÉFINITION 3.2. On dit que le polynôme f vérifie la condition de Malgrange-Paunescu et Abderrahmane à l'infini au-dessus de t_0 , si

$$\|\text{grad}_\Gamma f(z)\|_\Gamma \gtrsim 1$$

pour tout z dans un voisinage de l'infini (c'est-à-dire en dehors d'un certain compact de \mathbf{C}^n) et $f(z)$ dans un voisinage de t_0 .

On en déduira dans cette section les différentes propriétés locales à l'infini du champ de vecteurs étudié dans la section précédente après une modification torique. On démontre que ce champ est contrôlé par la fonction décrivant le diviseur à l'infini. On en déduit ensuite la condition non-caractéristique. Donc d'après le chapitre 2, cette dernière condition est suffisante pour obtenir une trivialité locale en dehors du lieu à l'infini Y de la variété obtenue en compactifiant les fibres d'un polynôme. Tous les calculs de cette section seront effectués dans

une carte, c'est-à-dire dans le système de coordonnées associé à un cône de la variété torique donnée par le polyèdre de f (voir section 3.1).

3.3.1. Le champ de vecteurs contrôlé. L'hypothèse de la définition 3.2 sur la modération asymptotique du gradient étant supposée vérifiée, l'inégalité (9) nous indique que l'on peut espérer contrôler le flot du champ de vecteurs (6) par rapport à g (le diviseur à l'infini étant donné par $g = 0$). On calcule pour cela la transformation de ce champ après une modification torique et on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 3.3. \mathbf{V} étant le champ de vecteurs analytique réel tangent à $X \setminus Y$ donné en (6). Si f vérifie la condition de la définition 3.2 alors pour toute carte affine T_σ de la variété torique $T(\Delta_{\Gamma_-})$ si $g(u) = u_{k+1} \cdots u_n = 0$ est l'équation du diviseur à l'infini, on a au voisinage d'un point p de ce diviseur vérifiant $\bar{t}(p) = t_0$ les propriétés suivantes :

- i) $|\partial u_i / \partial \mathbf{V}| \lesssim |u_i|$ pour $i = k + 1, \dots, n$.
- ii) $|\partial u_i / \partial \mathbf{V}| \lesssim 1$ pour toutes les autres coordonnées toriques qui ne font pas parties de l'espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.
- iii) $\partial t / \partial \mathbf{V} = 1$.

On déduit directement de i) que $|\partial u / \partial \mathbf{V}| \lesssim |u|$, pour toute fonction torique appartenant à l'espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$, en particulier, on a que $|\partial g / \partial \mathbf{V}| \lesssim |g|$.

Pour démontrer le théorème 3.3, la section suivante est essentielle.

3.3.2. La stabilité par les opérateurs. Le lemme 3.5 et le corollaire 3.6 nous seront utiles respectivement pour la démonstration du théorème 3.3 et de l'inégalité (10). Dans le lemme, on étudie la stabilité des cônes de la variété torique par les opérateurs $\rho_j |\partial / \partial z_j|$ et dans le corollaire, on démontre la stabilité du polyèdre Γ_- par ces mêmes opérateurs.

DÉFINITION 3.4. Soit S un ensemble convexe, on dit que S est stable si pour tout $\alpha \in S \cap \mathbf{Z}^n$ et pour tout $j = 1, \dots, n$, l'expression :

$$\rho_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^\alpha) \right|$$

est constituée de monômes (en valeur absolue) dont la puissance appartient à $S \cap \mathbf{Q}^n$.

LEMME 3.5. Pour tout cône σ de la compactification torique de \mathbf{C}^n tel que :

$$\sigma = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}\},$$

et pour tout $\mathbf{v} \in \sigma^\vee \cap \mathbf{Z}^n$ les deux cas suivants se présentent :

- 1) Si \mathbf{v} appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ alors $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ est stable. En particulier, on obtient, quand $\mathbf{v} = 0$, que σ^\vee est stable.
- 2) Sinon, si \mathbf{v} n'appartient pas à ce sous-espace vectoriel alors $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable. Mais pour tout $\alpha \in (\sigma^\vee + \mathbf{v}) \cap \mathbf{Z}^n$ et pour tout $j = 1, \dots, n$, l'expression :

$$\rho_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^\alpha) \right|$$

est constituée de monômes dont la puissance appartient à $\sigma^\vee \cap \mathbf{Q}^n$.

PREUVE. Soit \mathbf{s} le vecteur sommet de Γ_- correspondant à σ . \mathbf{s} appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ et on peut choisir Γ_- pour que $\mathbf{s} \in N_+^n$. On va d'abord démontrer la stabilité de $\mathbf{s} + \sigma^\vee$. Il suffit de vérifier que pour toute face F de Γ_- de dimension $n - 1$ et que pour tout α vérifiant :

$$\langle \alpha, -w^F \rangle \leq 1,$$

alors $\rho_j |\partial/\partial z_j(z^\alpha)|$ soit constitué de monôme $|z|^\beta$ tel que :

$$(11) \quad \langle \beta, -w^F \rangle \leq 1.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j}(z^\alpha) \right| &= |\alpha_j| |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_j|^{\alpha_j-1} \dots |z_n|^{\alpha_n} \left(|z_j| + \sum_{k \neq j} |z_k|^{\alpha(j)a_k^k} \right) \\ &= |\alpha_j| |z|^\alpha + |\alpha_j| \sum_{k \neq j} |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_j|^{\alpha_j-1} \dots |z_k|^{\alpha(j)a_k^k + \alpha_k} \dots |z_n|^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les monômes de la somme remplissent les conditions de (11). On note $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha(j)a_k^k, \dots, \alpha_n)$ le vecteur puissance. Il reste à prouver que pour toute face $F : \langle \beta, -w^F \rangle \leq 1$. Un calcul donne :

$$\begin{aligned} \langle \beta, -w^F \rangle &= -[\alpha_1 w_1^F + \dots + \alpha_j w_j^F - w_j^F + \dots \\ &\quad + \alpha_k w_k^F + \alpha(j)a_k^k w_k^F + \dots + \alpha_n w_n^F] \\ &= \langle \alpha, -w^F \rangle + w_j^F - \alpha(j)a_k^k w_k^F. \end{aligned}$$

Soit à prouver que pour toute face F :

$$(12) \quad |w_j^F| \geq \alpha(j)a_k^k |w_k^F|.$$

Soit $x \in F$, par convexité de Γ_- , on a $\langle a^k - x, -w^F \rangle \leq 0$ et donc :

$$a_k^k |w_k^F| = \langle a^k, -w^F \rangle \leq \langle x, -w^F \rangle = 1.$$

On en déduit que :

$$a_k^k |w_k^F| \leq 1 \leq \frac{|w_j^F|}{\alpha(j)},$$

par définition de $\alpha(j)$ si celui-ci est non-nul. Si $\alpha(j)$ est nul, l'inégalité (12) est évidente.

On peut finir la démonstration en regardant dans quelles conditions la propriété de stabilité est conservée par une filtration.

Posons $\alpha' = \alpha + \mathbf{v} - \mathbf{s}$ avec $\alpha' \in \mathbf{v} + \sigma^\vee \cap \mathbf{Z}^n$ et $\alpha \in \mathbf{s} + \sigma^\vee$, \mathbf{s} représentant comme toujours le vecteur sommet du polyèdre. Considérons à présent les deux cas suivants :

1) Pour le premier cas la démonstration est identique à celle du lemme précédent. La seule différence est que le degré de filtration n'est pas identique le long des vecteurs $-w^F$. Soit \mathbf{v} un vecteur appartenant au plan engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Si σ est du type $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k, \tilde{w}^{F_{k+1}}, \dots, \tilde{w}^{F_n}\}$, on a alors :

$$\langle \alpha', \tilde{e}_i \rangle = \langle \alpha + \mathbf{v} - \mathbf{s}, \tilde{e}_i \rangle = \langle \alpha + \mathbf{v}, \tilde{e}_i \rangle = \langle \alpha, \tilde{e}_i \rangle \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, k,$$

et

$$\langle \alpha', -w^F \rangle = \langle \alpha + \mathbf{v} - \mathbf{s}, -w^F \rangle = \langle \alpha + \mathbf{v}, -w^F \rangle - 1.$$

On peut à présent affirmer que pour tout α vérifiant la propriété de stabilité relative à $\sigma^\vee + \mathbf{s}$ alors $\alpha' = \alpha + \mathbf{v} - \mathbf{s}$ vérifie la propriété de stabilité relative à $\sigma^\vee + \mathbf{v}$. En effet,

$$\alpha' = \alpha + \mathbf{v} - \mathbf{s} \quad \text{et} \quad \beta' = \beta + \mathbf{v} - \mathbf{s}$$

en supposant toujours que $\rho_j |\partial z^\alpha / \partial z_j|$ (resp. $\rho_j |\partial z^{\alpha'} / \partial z_j|$) soit formé de monômes $|z|^\beta$ (resp. $|z|^{\beta'}$). De plus, on a l'inégalité suivante permettant de conclure :

$$\begin{aligned} \langle \beta', -w^F \rangle &= \langle \beta + \mathbf{v} - \mathbf{s}, -w^F \rangle = \langle \beta + \mathbf{v}, -w^F \rangle - 1 \\ &= \langle \mathbf{v}, -w^F \rangle + \langle \beta, -w^F \rangle - 1 \leq \langle \mathbf{v}, -w^F \rangle. \end{aligned}$$

2) Dans le deuxième cas, on suppose ici que $e_i = \tilde{e}_i$ pour $i = 1, \dots, k$ (cas projectif par poids). Si \mathbf{v} possède une coordonnée telle que $v_j \neq 0$, pour un indice $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable. En effet, si on prend le sommet de l'ensemble convexe $\sigma^\vee + \mathbf{v}$, c'est à dire \mathbf{v} , alors $\langle \mathbf{v}, e_j \rangle = \mathbf{v}_j$. Et après application de l'opérateur correspondant $\rho_j |\partial / \partial z_j|$ à $z^\mathbf{v}$ on obtient des monômes $|z|^\beta$ qui vérifient $\langle e_j, z^\beta \rangle < \mathbf{v}_j$. Donnons quelques explications :

$$\rho_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^\mathbf{v}) \right| = |\mathbf{v}_j| \left(|z_j| + \sum_{k \neq j} |z_k|^{\alpha(j)a_k^k} \right) (|z_1|^{\mathbf{v}_1} \dots |z_j|^{\mathbf{v}_j-1} \dots |z_n|^{\mathbf{v}_n}).$$

En développant le terme droit de l'égalité, on obtient un premier monôme $|z|^\mathbf{v}$ qui ne pose pas de problème, mais pour les autres monômes de la forme $|z|^\beta$, on obtient que $\langle \beta, e_j \rangle = \mathbf{v}_j - 1 < \mathbf{v}_j$ et donc $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable.

Mais on obtient après l'application des opérateurs que les puissances des monômes de $\rho_j |\partial z^\alpha / \partial z_j|$ restent dans σ^\vee , car ce dernier est stable. \square

On peut maintenant donner la preuve du théorème 3.3.

PREUVE. Soit $\sigma \in T(\Delta_{\Gamma_-})$ et u_i une variable torique associée à un générateur a_i du semi-groupe S_σ , c'est-à-dire que l'on a $u_i = z^{a_i}$. Par différentiation et par l'équation (8), on obtient :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}} \right| = \left| \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \frac{\partial z_j}{\partial \mathbf{V}} \right| \leq \sum_j \left| \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right| \rho_j = \sum_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^{a_i}) \right| \rho_j.$$

On choisit $\mathbf{v} = a_i$ et on applique le lemme 3.5. On a alors les deux cas suivant :

1) Si u_i appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ alors $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ est stable et en particulier :

$$\frac{1}{|u_i|} \left| \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}} \right| \quad \text{pour} \quad i = k+1, \dots, n$$

est borné. Et donc :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}} \right| \lesssim |u_i| \quad \text{pour} \quad i = k+1, \dots, n.$$

2) Dans l'autre cas, si la coordonnée torique $u_i = z^{a_i}$ n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$ alors toujours d'après le lemme 3.5, $\sigma^\vee + \mathbf{v}$ n'est pas stable mais les monômes obtenus dans l'expression :

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \right| \rho_j = \sum_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^{a_i}) \right| \rho_j,$$

sont des puissances rationnelles des coordonnées toriques u_i . On obtient donc que $\partial u_i / \partial \mathbf{V}$ est bornée. \square

Donnons un corollaire du lemme 3.5.

COROLLAIRE 3.6. Γ_- est stable.

PREUVE. D'après le 1) de la preuve du lemme 3.5, il suffit de vérifier que pour tout α tel que :

$$\langle \alpha, e_i \rangle \geq 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n,$$

alors $\rho_j |\partial z^\alpha / \partial z_j|$ soit constitué de monôme $|z|^\beta$ tel que :

$$(13) \quad \langle \beta, e_i \rangle \geq 0, \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_j \left| \frac{\partial}{\partial z_j} (z^\alpha) \right| &= |\alpha_j| |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_j|^{\alpha_j-1} \dots |z_n|^{\alpha_n} \left(|z_j| + \sum_{k \neq j} |z_k|^{\alpha(j)a_k^k} \right) \\ &= |\alpha_j| |z|^\alpha + |\alpha_j| \sum_{k \neq j} |z_1|^{\alpha_1} \dots |z_j|^{\alpha_j-1} \dots |z_k|^{\alpha(j)a_k^k + \alpha_k} \dots |z_n|^{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que les monômes de cette somme vérifient bien les inégalités (13) ci-dessus. On note $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j - 1, \dots, \alpha(j)a_k^k, \dots, \alpha_n)$ le vecteur puissance. On a bien que $\langle \beta, e_i \rangle = \alpha_i \geq 0$ si $i \neq j$ et $i \neq k$. De plus, $\langle \beta, e_k \rangle = \alpha(j)a_k^k \geq 0$ par définition et $\langle \beta, e_j \rangle = \alpha_j - 1 \geq 0$ car $\alpha_j \geq 1$ sinon $\partial z^\alpha / \partial z_j$ serait nulle. \square

3.3.3. La condition non-caractéristique. Dans cette partie, on reprend les notations de la section 3.1 pour X, Y et g . A l'aide du lemme des petits chemins, on peut donner une condition de contrôle plus forte que celle du théorème 3.3. En effet, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 3.7. *S'il existe un champ de vecteurs \mathbf{V} analytique réel tangent à $X \setminus Y$ qui vérifie les propriétés du théorème 3.3 au voisinage d'un point p du diviseur, défini par $g(p) = 0$ et $\bar{t}(p) = t_0$, alors il existe un champ de vecteurs analytique réel \mathbf{W} tangent à $X \setminus Y$ qui vérifie dans un voisinage de p :*

- i) $|\partial g / \partial \mathbf{W}| = 0$.
- ii) $|\partial u_i / \partial \mathbf{W}| \lesssim 1$ pour toutes les autres coordonnées toriques qui ne font pas partie de l'espace vectoriel engendré par $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Notons I_σ cet ensemble fini.
- iii) $\partial t / \partial \mathbf{W} \sim 1$.

PREUVE. On procédera en deux étapes. Dans la première on montrera l'existence d'un tel champ de vecteurs point par point par une démonstration non-constructive. Dans la deuxième étape on construira explicitement ce champ par projection pour obtenir son analyticité. **1^{re} étape** : On va faire la démonstration par l'absurde. Soit p le point du diviseur, $B_\varepsilon(p)$ la boule de centre p de rayon ε et $T(X \setminus Y)$ le fibré tangent à $X \setminus Y$. On définit par S l'ensemble semi-algébrique suivant :

$$S = \{((u, t), \mathbf{W}, K, \varepsilon) \in (\mathbf{C}^{l+1})^2 \times (\mathbf{R}_+^*)^2; (u, t) \in X \setminus Y \cap B_\varepsilon(p),$$

$$\mathbf{W} \in T_{(u,t)}(X \setminus Y), \frac{\partial g}{\partial \mathbf{W}}(u, t) = 0, \left| \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(u, t) \right|^2 \leq K \text{ pour tout } i \in I_\sigma, \frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(u, t) = 1\}.$$

Avec I_σ donné par $I_\sigma = \{k + 1, \dots, n\}$ si le diviseur est défini par la fonction $g(u) = u_{k+1} \times \dots \times u_n$. S est bien un ensemble semi-algébrique car $X \setminus Y$ est défini par des équations et inéquations algébriques ainsi que son fibré tangent $T(X \setminus Y)$. Comme on raisonne par l'absurde, la contraposée de cette conclusion sera : pour tout K , pour tout ε , il existe (u, t) tels que pour tout W ,

$$(14) \quad (u, t) \in B_\varepsilon(p) \text{ et } ((u, t), \mathbf{W}, K, \varepsilon) \in \mathbf{CS}.$$

O  \mathbf{CS} représente le complémentaire de S , donc est aussi un ensemble semi-algébrique. Si on projette le semi-algébrique \mathbf{CS} alors il reste semi-algébrique, notons π cette projection suivant les coordonnées (u, t) et K . Par la propriété (14) et le lemme des petits chemins (version semi-algébrique locale), il existe une courbe analytique

$$c(s) = ((u(s), t(s)), K(s)) :]0, \beta[\rightarrow \pi(\mathbf{CS}),$$

avec $\beta > 0$ et $(u(0), t(0), K(0)) = (p, \infty)$, c'est à dire que $c(0) = (p, \infty) \in \overline{\pi(\mathbf{CS})}$.

Or si on choisit le champ de vecteurs particulier suivant :

$$(15) \quad \mathbf{W}(c(s)) = \mathbf{V}(c(s)) + h(s)\mathbf{U}(c(s))$$

avec \mathbf{U} défini par :

$$(16) \quad \mathbf{U}(c(s)) = sc'(s) \in T_{c(s)}(X \setminus Y)$$

et

$$(17) \quad h(s) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{V}}(c(s))}{\frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}}(c(s))}, \text{ de sorte que : } \frac{\partial g}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) \equiv 0.$$

On a alors :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) = \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{V}}(c(s)) + h(s) \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{U}}(c(s)), \text{ pour tout } i \in I_\sigma$$

et

$$\frac{\partial t}{\partial \mathbf{W}}(c(s)) = \frac{\partial t}{\partial \mathbf{V}}(c(s)) + h(s) \frac{\partial t}{\partial \mathbf{U}}(c(s)).$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}} = \sum_{i=k+1}^n \frac{\partial g}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{U}},$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{U}} = \sum_{i=k+1}^n u_{k+1} \dots u_{i-1} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{U}} u_{i+1} \dots u_n.$$

D'après (16), $\partial u_i / \partial \mathbf{U}(c(s)) \sim u_i(c(s))$ quand $s \rightarrow 0$ et donc $\partial g / \partial \mathbf{U}(c(s)) \sim g(c(s))$. De plus, par le théorème 3.3, on a que :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \mathbf{V}}(c(s)) \right| \lesssim |g(c(s))|,$$

et donc $|h(s)| \lesssim 1$ par (17). On en déduit que : $|\partial u_i / \partial \mathbf{W}(c(s))| \lesssim 1$ car les coordonnées u_i sont bornées au voisinage d'un point du diviseur. De même $\partial t / \partial \mathbf{W}(c(s)) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$ car $\partial t / \partial \mathbf{U}(c(s)) \sim t(c(s))$, si on suppose que $t \rightarrow t_0 = 0$, c'est-à-dire si on suppose que l'étude se fait au voisinage de la fibre au-dessus de $t_0 = 0$. On obtient donc une contradiction avec (14).

2^e étape : On a obtenu seulement l'existence d'un champ de vecteurs point par point. On va à présent construire ce champ pour prouver son analyticité. Soit $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ le champ de vecteurs projet  du champ \mathbf{V} sur les espaces tangents :

$$T(X \cap \{(u, t) \in \mathbf{C}^{l+1}; g(u) = cte \neq 0\}).$$

Cette projection donnera bien un champ de vecteurs analytique. Il reste alors à démontrer que ce champ projet  $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ vérifie bien les propriétés de la conclusion de la proposition 3.7. Il suffira, d'après le lemme des petits chemins (version semi-analytique), de le démontrer le long de toute courbe analytique $c(s)$. Par construction de la projection sur les niveaux de la fonction g , on a bien que pour toute courbe :

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{P}(\mathbf{V})}(c(s)) = 0.$$

De plus d'après la construction de \mathbf{U} et \mathbf{W} dans la première étape ainsi que les propriétés d'une projection, on obtient :

$$\|\mathbf{W}(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\| \geq \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\|,$$

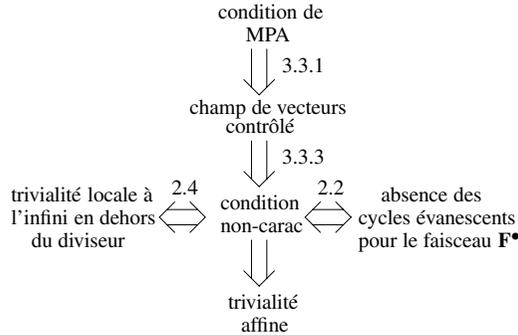
car $\mathbf{P}(\mathbf{V})$ est une projection et $\mathbf{W} \in T(X \cap \{(u, t) \in \mathbf{C}^{l+1} | g(u) = cte \neq 0\})$. Donc par (15), on a :

$$\|h(s)\mathbf{U}(c(s))\| \geq \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s)) - \mathbf{V}(c(s))\| \geq \|\mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s))\| - \|\mathbf{V}(c(s))\|.$$

Or, on vient de démontrer dans la première étape que $\|h(s)\mathbf{U}(c(s))\|$ est bornée. Par hypothèse $\partial u_i / \partial \mathbf{V}$ est bornée pour tout $i \in I_\sigma$ donc $\partial u_i / \partial \mathbf{P}(\mathbf{V})$ est bornée pour tout $i \in I_\sigma$. De même, comme $\partial t / \partial \mathbf{V}(c(s)) = 1$ et $\partial t / \partial \mathbf{U}(c(s)) \rightarrow 0$ alors $\partial t / \partial \mathbf{P}(\mathbf{V})(c(s)) \rightarrow 1$ quand $s \rightarrow 0$. \square

La condition de contrôle de la proposition 3.7 est équivalente à la condition non-caractéristique que nous avons définie en 2.4 section 2.2 à l'aide de limites d'espaces cotangents.

Finalement, on obtient le diagramme suivant sur l'ensemble des résultats dans le cas torique.



Donnons maintenant quelques remarques sur le schéma ci-dessus.

- 1) Dans le diagramme ci-dessus la condition MPA de Malgrange-Paunescu-Abderrahmane et la trivialité affine sont des conditions globales. Les autres conditions sont locales.
- 2) Le résultat principal obtenu dans cet article est celui qui donne à partir de l'hypothèse de Malgrange-Paunescu-Abderrahmane, la condition non-caractéristique.
- 3) Pour trouver une démonstration de l'implication ayant pour hypothèse la condition non-caractéristique et pour conclusion la trivialité affine, on pourra se référer aux travaux suivants : A. Parusiński dans [26] ou bien H. A. Hamm dans [15].

REFERENCES

- [1] O. M. ABDERRAHMANE, Polyèdre de Newton et trivialité en famille, *Mathematical Society of Japan, J. Math. Soc. Japan* 54 (2002), 513–550.
- [2] D. ALESSANDRINI, Les singularités des polynômes à l'infini et les compactifications toriques, Thèse de doctorat de l'université d'Angers.
- [3] D. ALESSANDRINI, Les singularités à l'infini des polynômes et les compactifications toriques, Prépublication no.178 de l'université d'Angers, 2003.
- [4] A. A. BEILINSON, J. BERNSTEIN AND P. DELIGNE, Faisceaux pervers, *Analyse et topologie sur les espaces singuliers I*, (Luminy,1981), 5–171, *Astérisque* 100, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- [5] K. BEKKA, C-regularité et trivialité topologique, *Singularity Theory and its Applications*, eds. D. Mond, J. Montaldi, Warwick 1989 ; *Lecture Notes in Math.* 1462 (1991), 42–62.
- [6] J. BRIANÇON, P. MAISONOBE AND M. MERLE, Localisation de systèmes différentiels, stratification de Whitney et condition de Thom, *Invent. Math.* 117 (1994), 531–550.
- [7] S. A. BROUGHTON, On the topology of polynomial hypersurfaces, *Proc. Sympos. Pure Math.* 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [8] S. A. BROUGHTON, Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces, *Invent. Math.* 92 (1988), 217–241.
- [9] P. DELIGNE AND N. KATZ, Groupes de monodromie en Géométrie Algébrique, S.G.A 7, *Lecture Notes in Math.* 340, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1973.
- [10] A. DIMCA, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Universitext, Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [11] M. V. FEDORYUK, The asymptotics of the Fourier transform of the exponential function of a polynomial, *Dokl. Akad. Nauk.* 227 (1976), 580–583 (Russian) ; English transl. in *Soviet Math. Dokl.* (2) 17 (1976),

- 486–490.
- [12] W. FULTON, Introduction to toric variety, Ann. of Math. Stud. 131, The William H. Roever Lectures in Geometry, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
 - [13] H. V. HÀ, On the irregularity at infinity of algebraic plane curves, University of Hanoi preprint 91/4, 1991.
 - [14] H. V. HÀ AND D. T. LÊ, Sur la topologie des polynômes complexes, Acta Math. Vietnam. 9 (1984), 21–32.
 - [15] H. A. HAMM, On the cohomology of fibers of polynomial maps, Trends in Singularities, pp. 99–113, Trends Math., Birkhäuser Verlag, Basel 2002.
 - [16] H. HIRONAKA, Stratification and flatness, Nordic Summer School/NAVF Symposium in Mathematics Oslo, August 5–25, 1976.
 - [17] M. KASHIWARA AND P. SCHAPIRA, Sheaves on manifolds, Grundlehren Math. Wiss. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
 - [18] T.-C. KUO, On C^0 -sufficiency of jets of potential functions, Topology 8 (1969), 167–171.
 - [19] T.-C. KUO AND A. PARUSIŃSKI, Newton polygon relative to an arc, Real and complex singularities (São Carlos, 1998), 76–93, Chapman and Hall/CRC Res. Notes Math., 412, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
 - [20] D. T. LÊ AND Z. MEBKHOUT, Variétés caractéristiques et variétés polaires, Géométrie Analytique, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 296 (1983), 129–132.
 - [21] D. MASSEY, Lê cycles and hypersurfaces singularities, Lecture Notes in Math. 1615, Springer-Verlag, 1995.
 - [22] D. MASSEY, Numerical control over complex analytic singularities, book, 268 pages, Mem. Amer. Math. Soc. 163 (2003), 268 pp.
 - [23] D. MASSEY, Critical points of functions on singular spaces, Topology Appl. 103 (2000), 55–93.
 - [24] A. NÉMETHI AND A. ZAHARIA, Milnor fibration at infinity, Indag. Math. (N.S.) 3 (1992), 323–335.
 - [25] A. PARUSIŃSKI, On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity, Compositio Math. 97 (1995), 369–384.
 - [26] A. PARUSIŃSKI, A note on singularities at infinity of complex polynomials, Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Banach Center Publications, Volume 39, Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1997.
 - [27] L. PAUNESCU, A weighted version of the Kuiper-Kuo-Bochnak-Łojasiewicz theorem, J. Algebraic Geom. 2 (1993), 69–79.
 - [28] F. PHAM, Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method. Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 319–333, Proc. Sympos. Pure Math. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
 - [29] F. PHAM, La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss-Manin, Systèmes différentiels et singularités, (Luminy, 1983), Astérisque 130 (1985), 11–47.
 - [30] C. SABBABH, Quelques remarques sur la géométrie des espaces conormaux, Astérisque 130 (1985), 161–192.
 - [31] D. SIERSMA AND M. TIBAR, Singularities at infinity and their vanishing cycles, Duke Math. J. 80 (1995), 771–783.
 - [32] B. TEISSIER, A bouquet of bouquets for a birthday, Topological Methods in Modern Mathematics (Stony Brook, NY, 1991), 93–122, Publish or Perish, Houston, TX, 1993.
 - [33] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 75 (1969), 240–284.
 - [34] M. TIBAR, Topology at infinity of polynomial mappings and Thom regularity condition, Compositio Math. 111 (1998), 89–109.

LABORATOIRE TRAITEMENT DU SIGNAL ET DE L' IMAGE
 UNIVERSITÉ DE RENNES 1
 CAMPUS DE BEAULIEU, BÂTIMENT 22
 35042 RENNES CEDEX
 FRANCE

E-mail address: alessandrini.david@gmail.com