Tôhoku Math. Journ.
26 (1974), 173-201.

LA STRUCTURE DES MODULES PAR RAPPORT À UNE TOPOLOGIE ADDITIVE

CONSTANTIN NĂSTĂSESCU

(Received June 15, 1972)

Introduction. Soit A un anneau unitaire et F un système topologisant et idempotent ([10], chap. 5, p. 412) sur A (topologie additive dans notre terminologie). En rapport avec F on définit la notion de A-module F-torsionné et A-module F-sans torsion. On pose la question suivante: étant donné une topologie additive sur A, déterminer la structure des modules F-sans torsion. Pour cela on introduit le treillis $C_F(A)$; c'est-à-dire l'ensemble des idéaux à gauche $\mathfrak{a}$ tels que $A/\mathfrak{a}$ soit F-sans torsion.

Dans ce travail on donne la structure des modules F-sans torsion quand $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Comme on le verra du travail, cette théorie s'applique le plus simplement au cas où A est un anneau noethérien ou lorsque A est un anneau Krull [5].

Le travail a sept paragraphes: dans le premier on donne des conditions nécessaires et suffisantes quand $C_F(A)$ est un treillis noethérien (th. 1.6).

Dans le deuxième papagraphe on étudie le cas où A est un anneau commutatif.

Dans le troisième paragraphe on montre que pour les idéaux de l'anneau A qui sont des éléments de $C_F(A)$ il existe une décomposition primaire de type Lasker-Noether (th. 3.3).

On met en évidence une série de propriétés de la catégorie Mod $A/\mathscr{F}$ où $\mathscr{F}$ est la sous-catégorie localisante associée à F (corollaire 3.11).

Dans le quatrième paragraphe on donne des conditions suffisantes dans le cas où la sous-catégorie $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives (corollaire 4.2, corollaire 4.3).

Dans le cinquième paragraphe on détermine la dimension injective de la catégorie Mod $A/\mathscr{F}$ (th. 5.5) en généralisant la proposition 3.9 du [6].

Dans le sixième paragraphe on met en évidence un théorème de décomposition d'un A-module par rapport à la topologie F (th. 6.7, corollaire 6.8, corollaire 6.10) en généralisant le théorème 5 du ([5] p. 59).

Dans le septième paragraphe on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour lesquelles $C_F(A)$ est un treillis distributif (th. 7.3, corollaire 7.4).

0. Définitions, notations et résultats préliminaires. Tous les anneaux considérés ont un élément identité non nul, tous les modules sont unitaires et à gauche.

Soit A un anneau; on note par Mod A la catégorie des modules à gauche (unitaires) sur A.

Nous appellerons topologie additive à gauche sur A un ensemble F d'idéaux à gauche de A non vide, vérifiant les conditions suivantes:

1) Si $\mathfrak{a} \in F$ et $x \in A$ alors $(\mathfrak{a}: x) \in F$ où $(\mathfrak{a}: x) = \{\lambda \mid \lambda \in A, \lambda x \in \mathfrak{a}\}$

2) Soit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, des idéaux à gauche de A tel que $\mathfrak{b} \in F$; si pour tout $x \in \mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a}: x) \in F$, alors $\mathfrak{a} \in F$.

La notion de topologie additive sur A coincide avec la notion de système topologisant et idempotent d'idéaux à gauche sur A définie par Gabriel ([10], ch. 5, p. 411).

Si F est une topologie additive à gauche sur l'anneau A on note:

$$\mathscr{T} = \{M \mid M \in \text{Mod}\, A, \forall x \in M, x \neq 0 \Rightarrow \text{Ann}\,(x) \in F\}$$

et

$$\mathscr{F} = \{M \mid M \in \text{Mod}\, A, x \in M \text{ et } \text{Ann}\,(x) \in F \Rightarrow x = 0\} .$$

D'après [9] ou [1] le couple $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ est une théorie de torsion héréditaire pour Mod A.

La sous-catégorie $\mathscr{T}$ a les propriétés suivantes:

1) Si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte, alors $M \in \mathscr{T}$ si et seulement si $M', M'' \in \mathscr{T}$

2) Si I est un ensemble et $(X_i)_{i \in I}$ sont des objets de alors $\bigoplus_{i \in I} X_i \in \mathscr{T}$.

D'après ([10], ch. 3) $\mathscr{T}$ est une sons-catégorie localisante et l'application $F \to \mathscr{T}$ est une bijection de l'ensemble des topologies additives à gauche sur l'ensemble de sous-catégories localisantes ([10], ch. 5, p. 412).

Si $M \in \mathscr{T}$ nous dirons que M est F-*torsionné*; si $M \in \mathscr{F}$ nous dirons que M est F-sans-torsion. Il est clair que un A-module M est F-sans torsion si et seulement si le plus grand sous-module FM de M qui appartient au $\mathscr{T}$ est nul.

Un A-module M s'appelle F-fermé ([10], ch. 3, p. 371) si l'application canonique

$$M \cong \text{Hom}\,(A, M) \to \text{Hom}\,(\mathfrak{a}, M)$$

est un isomorphisme pour tout $\mathfrak{a} \in F$.

Remarquons que si M est un A-module F-fermé alors M est F-sans torsion.

Comme $\mathscr{T}$ est une sous-catégorie localisante de Mod A on peut considérer la catégorie quotient Mod $A/\mathscr{T}$([10], ch. 3).

Nous désignons par T_F: Mod $A \to$ Mod $A/\mathscr{F}$ le foncteur canonique et par S_F: Mod $A/\mathscr{F} \to$ Mod A le foncteur adjoint à droite de T_F ([10], ch. 3, p. 369). Il est bien connu que T_F est un foncteur exact et S_F est exact à gauche.

Puisque S_F est un foncteur adjoint à droite de T_F alors il existe les morphismes fonctoriels ϕ: $T_F \circ S_F \to Id$ Mod A et ψ: Id Mod $A \to S_F \circ T_F$ ([10], p. 369) où Id Mod A est le foncteur identique de Mod A.

De plus, le morphisme fonctoriel ϕ est un isomorphisme fonctoriel ([10], p. 371, prop. 3).

D'après le corollaire du ([10], p. 371) un A-module M est F-fermé si et seulement si le morphisme $\psi(M)$: $M \to S_F T_F(M)$ est un isomorphisme.

Nous employons aussi les notations suivantes: Si M est un A-module, $L \subseteq M$ un sous-module de M et $x \in M$, alors

$$(L\colon x) = \{\lambda \mid \lambda \in A,\ \lambda x \in L\}$$
$$L^{\sim} = \{x \mid x \in M,\ (L\colon x) \in F\}\ .$$

PROPOSITION 0.1. *Les affirmations suivantes sont vraies*:

1) *Si L est un sous-module de M, alors $(L^{\sim})^{\sim} = L^{\sim}$.*

2) *Si L et L' sont sous-modules de M et $L \subseteq L'$ alors $L^{\sim} \subseteq L'^{\sim}$.*

3) *Si $(L_i)_{i\in I}$ est une famille finie de sous-modules de M, alors $(\bigcap_{i\in I} L_i)^{\sim} = \bigcap_{i\in I} L_i^{\sim}$.*

DÉMONSTRATION. 1) Il est clair que $L^{\sim} \subseteq (L^{\sim})^{\sim}$. Si $x \in (L^{\sim})^{\sim}$ alors $(L^{\sim}\colon x) \in F$. Soit λ un élément quelconque de $(L^{\sim}\colon x)$. Comme $((L\colon x)\colon \lambda) = (L\colon \lambda x)$ et $(L\colon \lambda x) \in F$ alors $((L\colon x)\colon \lambda) \in F$ pour tout $\lambda \in (L\colon x)$. Par suite l'idéal $(L\colon x) \in F$ et donc $x \in L^{\sim}$.

2) Clair.

3) D'après 1) et 2) il existe l'inclusion $(\bigcap_{i\in I} L_i)^{\sim} \subseteq \bigcap_{i\in I} L_i^{\sim}$. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} L_i^{\sim}$; alors $(L_i\colon x) \in F$ pour tout $i \in I$. L'égalité $(\bigcap_{i\in I} L_i\colon x) = \bigcap_{i\in I} (L_i\colon x)$ implique que $(\bigcap_{i\in I} L_i\colon x) \in F$($F$ est une topologie additive ([10], p. 411).

Il faut remarquer que si M est un A-module et $L \subseteq M$ un sous-modules, alors $L^{\sim}/L$ est le plus grand sous-modules de M/L qui appartient à $\mathscr{F}$. Désignons par $C_F(M)$ l'ensemble:

$$C_F(M) = \{L \subset M \mid L^{\sim} = L\}\ .$$

Il est clair que $L^{\sim} = L$ si et seulement si M/L est F-sans torsion.

Si $(L_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $C_F(M)$ alors $\bigvee_{i\in I} L_i = (\sum_{i\in I} L_i)^{\sim}$ et $\bigwedge_{i\in I} Li = \bigcap_{i\in I} L_i$ sont éléments de $C_F(M)$

PROPOSITION 0.2. *$C_F(M)$ est un treillis modulaire complet* [7] *pour* *les opérations "$\vee$" et "$\wedge$". La relation d'ordre associée est l'inclusion. Pour la démonstration voir* ([22], prop. 11. 1).

Soit L un sous-module de M; rappelons que M est une extension essentielle de L si, X étant un sous-module de M, la relation $L \cap X = 0$ implique $X = 0$. Un A-module M est co-irréductible si $M \neq 0$ et si deux sous-modules non nuls de M ont une intersection non nulle. Un sous-module L de M est irréductible si M/L est coirréductible.

On dit que un A-module M est indécomposable si $M = M' \oplus M''$ implique $M' = 0$ ou $M'' = 0$. Si M est un A-module alors $E(M)$ représente l'enveloppe injective de M.

Un treillis $\mathscr{L}$ est noethérien [7] si $\mathscr{L}$ satisfait la propriété suivante: Si

$$x_1 \subseteqq x_2 \subseteqq \cdots \subseteqq x_n \subseteqq \cdots$$

est une chaîne ascendante d'éléments de $\mathscr{L}$, il existe un nombre naturel "k" tel que $x_k = x_{k+1} = \cdots$.

Si A est un anneau, alors A_s est le A-module à gauche A, et $C_F(A)$ représente le treillis $C_F(A_s)$.

1. Conditions pour lesquelles $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Soit F une topologie additive à gauche sur A et $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ la théorie de torsion associée.

Un A-module à gauche M est F-noethérien (ou $\mathscr{T}$-noethérien [11]) si $T_F(M)$ est un objet noethérien dans la catégorie Mod $A/\mathscr{T}$. Nous dirons que M est F-de type fini s'il y a un sous-module $M' \subseteqq M$, M' A-module de type fini, tel que M/M' est F-torsionné (c'est-à-dire $M/M' \in \mathscr{T}$).

LEMME 1. *Soit M un A-module. $T_F(M)$ est un objet noethérien si et seulement si M vérifie la condition suivante:*

Pour toute chaîne ascendante

$$M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots \subseteqq M_n \subseteqq \cdots$$

de sous-modules de M, il existe un nombre naturel k tel que $M_{i+1}/M_i \in \mathscr{T}$ où $i \geqq k$ (c'est-à-dire M est $\mathscr{T}$-noethérien au sens de [17]).

DÉMONSTRATION. Supposons que $T_F(M)$ est noethérien. Alors il existe un nombre naturel k tel que $T_F(M_k) = T_F(M_{k+1}) = \cdots$.

De la suite exacte

$$0 \to M_i \to M_{i+1} \to M_{i+1}/M_i \to 0 \qquad i \geqq k$$

on obtient que $T_F(M_{i+1}/M_i) = 0$, d'où $M_{i+1}/M_i \in \mathscr{T}$.

Réciproquement: Soit

$$\bar{M}_1 \subseteqq \bar{M}_2 \subseteqq \cdots \subseteqq \bar{M}_n \subset \cdots$$

une chaîne ascendante de sous-objets de $T(M)$. Comme le foncteur S_F est exact à gauche, nous obtenons la chaîne ascendante

$$S_F(\bar{M}_1) \subseteqq S_F(\bar{M}_2) \subseteqq \cdots \subseteqq S_F(\bar{M}_n) \subseteqq \cdots \subseteqq S_F T_F(M) .$$

Par le morphisme fonctoriel $\psi(M)\colon M \to S_F T_F(M)$ on obtient la chaîne ascendante

$$M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots \subseteqq M_n \subseteqq \cdots \subseteqq M$$

où $M_i = \psi(M)^{-1}(S_F(\bar{M}_i))$.

De plus, comme ker $\psi(M)$ et coker $\psi(M)$ appartient à $\mathscr{F}$, $T_F(M_i) \cong \bar{M}_i$.

Soit k un nombre naturel tel que

$$M_{i+1}/M_i \in \mathscr{F} \quad \text{pour tout} \quad i \geqq k .$$

Alors il est clair que $T_F(M_i) \cong T_F(M_{i+1})$ pour tout $i \geqq k$. Donc $\bar{M}_k = \bar{M}_{k+1} = \cdots$ et par suite $T_F(M)$ est un objet noethérien.

PROPOSITION 1.1. *Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1) *$C_F(M)$ est un treillis noethérien.*
2) *M est F-noethérien.*
3) *Tout sous-module M' de M est F-de type fini.*

DÉMONSTRATION 1) $\Rightarrow$ 2). Soit

$$M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots \subseteqq M_n \subseteqq \cdots$$

une chaîne ascendante de sous-modules de M. On obtient la chaîne:

$$M_1^{\sim} \subseteqq M_2^{\sim} \subseteqq \cdots \subseteqq M_n^{\sim} \subseteqq \cdots \subseteqq M .$$

Comme $C_F(M)$ est un treillis noethérien, il existe un nombre naturel n tel que $M_n^{\sim} = M_{n+1}^{\sim} = \cdots$ d'où il en résulte que $M_{k+1}/M_k \subseteqq M_{k+1}^{\sim}/M_k$ $(k \geqq n)$. Comme $M_k^{\sim}/M_k \in \mathscr{F}$ alors pour tout $k \geqq n$ $M_{k+1}^{\sim}/M_k \in \mathscr{F}$ donc $M_{k+1}/M_k \in \mathscr{F}$ et d'après le lemme 1 $T_F(M)$ est noethérien.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit

$$M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots \subseteqq M_n \subseteqq \cdots$$

une chaîne ascendante d'éléments de $C_F(M)$; il existe un nombre naturel k tel que pour tout $n \geqq k$, $M_{n+1}/M_n \in \mathscr{F}$ (lemme 1) d'où $M_{n+1} \subseteqq M_n^{\sim}$ et par suite $M_n = M_{n+1} = \cdots$

2) $\Rightarrow$ 3) Evidemment que si M' est un sous-module de M, $T_F(M')$ est un objet noethérien. Soit $(M'_\alpha)_{\alpha \in I}$ la famille de sous-modules de M qui sont de type fini. D'après le théorème 6 [17] il existe $\alpha_0 \in I$ tel que M'_{α_0}

vérifie la condition de maximalité au sens de ([17], p. 1464) et en particulier on obtient que M'/M'_{α_0} est F-torsionné.

3) $\Rightarrow$ 2) Soit

$$M_1 \subseteqq M_2 \subseteqq \cdots \subseteqq M_n \subseteqq \cdots \subseteqq M$$

une chaîne ascendante de sous-modules de M. Comme $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ est F-de type fini, alors il existe les éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n \in M$ tel que $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i/(Ax_1+Ax_2+\cdots+Ax_n)$ est F-torsionné. Mais il existe un nombre naturel k tel que $Ax_1+\cdots+Ax_n \subseteqq M_k$ et $M_i/(Ax_1+\cdots+Ax_n)$ est F-torsionné pour tout $i \geqq k$.

De la suite exacte:

$$0 \to M_i/(Ax_1+\cdots+Ax_n) \to M_{i+1}/(Ax_1+\cdots+Ax_n) \to M_{i+1}/M_i \to 0$$

on déduit que $M_{i+1}/M_i \in \mathscr{T}$ pour tout $i \geqq k$ ($\mathscr{T}$ étant une sous-catégorie localisante). D'après le lemme 1, M est F-noethérien.

COROLLAIRE 1.2. *Soit*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte de A-modules. $C_F(M)$ est un treillis noethérien si et seulement si $C_F(M')$ et $C_F(M'')$ sont des treillis noethériens.

La démonstration résulte de la proposition (1.1) et le lemme 1 [17].

COROLLAIRE 1.3. *$C_F(A)$ est un treillis noethérien si et seulement si $C_F(M)$ est un treillis noethérien pour tout A-module de type fini.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Si M est un A-module de type fini alors il existe la suite exacte

$$0 \to P \to A^n \to M \to 0\,, \qquad n \text{ nombre naturel}\,.$$

D'après le corollaire 1.2 il en résulte que $C_F(M)$ est un treillis noethérien.

La réciproque est claire.

COROLLAIRE 1.4. *Si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors F contient une famille cofinale d'idéaux à gauche de type fini.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal à gauche tel que $\mathfrak{a} \in F$. D'après la proposition 1.1, il existe un idéal $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{b}$ est de type fini et $\mathfrak{a}/\mathfrak{b} \in \mathscr{T}$.

De la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{a}/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{b} \to A/\mathfrak{a} \to 0$$

on obtient que $A/\mathfrak{b} \in \mathscr{T}$ ($\mathscr{T}$ est une sous-catégorie localisante) et donc $\mathfrak{b} \in F$.

REMARQUE 1.5. En utilisant la proposition 12.2 [22], on déduit que si $C_F(A)$ est un treillis noethérien, alors le foncteur S_F commute avec les sommes directes quelconques.

THÉORÈME 1.6 [24]. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

1) *Toute somme directe d'injectifs F-sans torsion* (*donc appartient à* $\mathscr{F}$) *est un A-module injectif.*

2) $C_F(A)$ *est un treillis noethérien.*

3) *Tout A-module injectif F-sans torsion est somme directe d'injectifs indécomposables.*

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2). Soit

$$\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subset \cdots$$

une chaîne ascendante stricte d'éléments de $C_F(A)$ et $\mathfrak{a} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}_n$. Comme $A/\mathfrak{a}_i$ est F-sans torsion il en est de même de $E(A/\mathfrak{a}_i)$ et donc $E = \bigoplus_1^\infty E(A/\mathfrak{a}_i)$ est un A-module injectif.

Soient $\varphi_i: A/\mathfrak{a}_i \rightarrow E(A/\mathfrak{a}_i)$ l'injection canonique et $p_i: A \rightarrow A/\mathfrak{a}_i$ le morphisme canonique.

Si $e_i = \varphi_i(p_i(1))$, alors il est clair que $\mathfrak{a}_i = \operatorname{Ann}(e_i)$.

Soit $f: \mathfrak{a} \rightarrow E$ définie par $f(\lambda) = (\lambda e_1, \lambda e_2, \cdots, \lambda e_n, \cdots)$. Comme E est un A-module injectif, alors $f(\lambda) = \lambda x$ pour un $x \in E$, où $x = (x_1, x_2, \cdots x_k, o, o, \cdots)$.

Pour tout $i > k$ on a $\lambda e_i = 0$ quelque soit $\lambda \in \mathfrak{a}$, d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_i$ et par suite $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a}_{i+1} = \cdots$

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $(Q_i)_{i \in I}$ une famille de modules injectifs F-sans torsion. Soit $\mathfrak{a} \subset A$ un idéal à gauche de A et $f: \mathfrak{a} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$ un morphisme. D'après la proposition 1.1 il existe un idéal à gauche $\mathfrak{a}' \subset A$, $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}' \in \mathscr{F}$ et $\mathfrak{a}'$ est de type fini. Il existe un morphisme $h: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$ tel que $h/\mathfrak{a}' = f/\mathfrak{a}'$. Si g est la restriction de h à $\mathfrak{a}$ alors $(f - g)(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}'$. Donc il existe un morphisme $u: \mathfrak{a}/\mathfrak{a}' \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$. Comme $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ est F-sans torsion alors $u = 0$ et par suite $f = g$. Donc $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ est injectif.

2) $\Rightarrow$ 3). Nous donnons les lemmes suivants:

Lemme 1. *Si* $\mathscr{L}$ *est un treillis noethérien alors tout élément de* $\mathscr{L}$ *est une intersection finie d'éléments irréductibles* ($x \in \mathscr{L}$ *on le nomme irréductible s'il a la propriété suivante*: $y \cap z = x \Rightarrow y = x$ *ou* $z = x$).

DÉMONSTRATION. Soit $X = \{x \mid x \in \mathscr{L}, x$ est une intersection fini d'éléments irréductibles$\}$.

Si $\mathscr{L} - X \neq \varnothing$, alors soit x_0 un élément maximal dans $\mathscr{L} - X$; x_0 n'est pas irréductible. Donc il existe $y, z \in \mathscr{L}$, tel que $x_0 = y \cap z$, et $x_0 \neq y$, $x_0 \neq z$. Par suite $y, z \in X$ et donc $y = y_1 \cap y_2 \cap \cdots \cap y_m$ et $z = z_1 \cap z_2 \cap \cdots \cap z_n$ où $y_1, y_2, \cdots, y_m, z_1, z_2, \cdots, z_n$ sont irréductibles. Nous obtenons que $x_0 = y_1 \cap y_2 \cap \cdots \cap y_m \cap z_1 \cap \cdots \cap z_n$ qui est une contradiction. Donc $\mathscr{L} = X$.

LEMME 2. *Si $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ est un élément irréductible, alors $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche irréductible dans A.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ où $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont idéaux à gauche de A. Alors $\mathfrak{a}^{\sim} = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c})^{\sim} = \mathfrak{b}^{\sim} \cap \mathfrak{c}^{\sim}$ (proposition 0.1) d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{\sim} \cap \mathfrak{c}^{\sim}$. Comme $\mathfrak{b}^{\sim}, \mathfrak{c}^{\sim} \in C_F(A)$ se trouve que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{\sim}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}^{\sim}$, d'où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$, donc $\mathfrak{a}$ est un idéal irréductible dans A.

LEMME 3. *Soit $(P_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ un ensemble fini des A-modules co-irréductibles et $M \subset \bigoplus_{i=1}^n P_i$, $M \neq 0$. Alors M contient un sous-module co-irréductible non nul.*

DÉMONSTRATION. Procédant par récurrence, il suffit de vérifier pour $n = 2$.

Si $M \cap P_1 \neq 0$ alors $P_1 \cap M \subset M$ et $P_1 \subset M$ est co-irréductible.

Si $P_1 \cap M = 0$, alors il y a une injection $\varphi\colon M \to P_2$ et dans ce cas M est co-irréductible.

Soit M un A-module F-sans torsion non nul ($M \in \mathscr{F}$) et $x \in M$, $x \neq 0$. Il est clair que $\operatorname{Ann}(x) \neq A$ et $\operatorname{Ann}(x) \in C_F(A)$. D'après les lemmes 1 et 2, $\operatorname{Ann}(x) = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$ où $\mathfrak{a}_i \in C_F(A)$ et sont des idéaux irréductibles dans A. Comme $A/\operatorname{Ann}(x) \subsetneqq A/\mathfrak{a}_1 \oplus A/\mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus A/\mathfrak{a}_n$, alors d'après le lemme 3, Ax contient un sous-module co-irréductible non nul. De la même manière que dans la proposition 1 [18] ou théorème 3 [12], il en résulte que M est une extension essentielle d'une somme directe de modules co-irréductibles.

Si Q est un A-module injectif F-sans torsion, alors Q est une extension essentielle d'une somme directe $\bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$, où Q_α sont injectifs indécomposables. Comme $Q_\alpha (\alpha \in I)$ sont A-modules F-sans torsion, alors d'après 1) $\bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$ est un injectif, donc $Q = \bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

3) $\Rightarrow$ 1) Soit $(Q_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille d'injectifs F-sans torsion. On peut supposer que $Q_\alpha (\alpha \in I)$ sont des A-modules injectifs indécomposables. Nous avons d'après 3) que $E(\bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha) = \bigoplus_{\beta \in J} Q'_\beta$ où Q'_β sont modules injectifs indécomposables. D'après le théorème 6 [12] ou le théorème 5.9 [16] il existe une bijection $\varphi\colon I \to J$ tel que $Q_\alpha = Q'_{\varphi(\alpha)}$. Il résulte que $\bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha = \bigoplus_{\beta \in J} Q'_\beta$, donc $\bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$ est un A-module injectif.

Dans le cas quand $F = (0)$ alors on obtient le résultat: ([23], th. 0.1, p. 205)).

COROLLAIRE 1.7. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

1) *A est un anneau noethérien à gauche.*

2) *Toute somme directe d'injectifs est un A-module injectif.*

3) *Tout A-module injectif est somme directe d'injectifs indécomposables.*

REMARQUE 1.8. Si A est un anneau tel que A_s est F-sans torsion et $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors $E(A_s)$ est une somme directe finie d'injectifs indécomposables, c'est-à-dire l'anneau A est de dimension finie à gauche au sens de Goldie. Si $Q^{(I)}$ est un A-module injectif pour tout ensemble I nous dirons que Q est Σ-injectif.

COROLLAIRE 1.9. *Si Q est un A-module Σ-injectif alors Q est une somme directe d'injectifs indécomposables.*

DÉMONSTRATION. Soit $F_Q = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset A, \operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{a}, Q) = 0\}$ qui est une topologie additive à gauche sur A. D'après la proposition 11.8 [22] $C_{F_Q}(A)$ est un treillis noethérien et comme Q est F_Q-sans torsion alors Q est une somme directe d'injectifs indécomposables.

Ce résultat a été obtenu aussi par A. Cailleau dans [8].

2. **Le cas commutatif.** Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe seront supposés commutatifs et unitaires.

Si A est un anneau (commutatif) et M un A-module, un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$ est dit associé à M (au sens de [3], chap. 4) s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$. On note par $\operatorname{Ass}(M)$ l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

LEMME 2.1. *Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de l'anneau A alors $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ si et seulement si $\mathfrak{p} \notin F$.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ il est clair que $\mathfrak{p} \notin F$.

Réciproque: soit $\mathfrak{p} \notin F$ alors $\mathfrak{p}^{\sim}/\mathfrak{p} \in \mathscr{F}$; si $x \in \mathfrak{p}^{\sim}$ et $x \notin \mathfrak{p}$ alors $(\mathfrak{p} : x) \in F$ et comme $\mathfrak{p}$ est premier alors $(\mathfrak{p} : x) = \mathfrak{p}$; contradiction. Par suite $\mathfrak{p}^{\sim} = \mathfrak{p}$ d'où $\mathfrak{p} \in C_F(A)$.

LEMME 2.2. *Supposons que $C_F(A)$ soit un treillis noethérien. Si M est un A-module non nul F-sans torsion alors il existe $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $\operatorname{Ann}(x)$ est un idéal premier qui appartient à $C_F(A)$. (c'est-à-dire $\operatorname{Ass}(M) \neq \phi$ et $\operatorname{Ass}(M) \subseteqq C_F(A)$).*

DÉMONSTRATION. Si l'on pose $X = \{\operatorname{Ann}(x) \mid x \in M, x \neq 0\}$, alors $X \subseteqq C_F(A)$. Soit $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x_0)$ un élément maximal de X. Si $\lambda\mu \in \mathfrak{p}$ et $\mu \notin \mathfrak{p}$ on a $\lambda\mu x_0 = 0$ et $\mu x_0 \neq 0$. Comme $\operatorname{Ann}(x_0) \subseteqq \operatorname{Ann}(\mu x_0)$ il en résulte que $\operatorname{Ann}(x_0) = \operatorname{Ann}(\mu x_0)$ et par suite $\lambda \in \mathfrak{p}$.

Du théorème 1.6 et du lemme 2.2 on obtient

THÉORÈME 2.3. *Supposons que $C_F(A)$ soit un treillis noethérien. Si*

M est un A-module F-sans torsion alors M est une extension essentielle d'une somme directe $\bigoplus_{i \in I} A/\mathfrak{p}_i$, où $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de $C_F(A)$.

Si Q est un A-module injectif F-sans torsion, alors $Q = \bigoplus_{i \in I} E(A/\mathfrak{p}_i)$, $\mathfrak{p}_i$ étant idéaux premiers de $C_F(A)$.

Soit A un anneau commutatif quelconque, nous notons par Spec A (le spectre de A) l'ensemble des idéaux premiers de A.

Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ on note par $\varphi_\mathfrak{p}\colon A \to A_\mathfrak{p}$ le morphisme canonique. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on note par $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$ l'ensemble: $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} = \varphi_\mathfrak{p}^{-1}(\varphi_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})A_\mathfrak{p})$. Il est bien connu que $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} = \{x \mid x \in A, \exists s \in A - \mathfrak{p}, sx \in \mathfrak{a}\}$

On notera par $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ l'idéal $\varphi_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})A_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$ et par $F_\mathfrak{p}$

$$F_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \subset A, \mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset\} .$$

Il est clair que $F_\mathfrak{p}$ est une topologie additive sur A et $\mathfrak{a} \in F_\mathfrak{p} \Leftrightarrow (A/\mathfrak{a})_\mathfrak{p} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} = A$ (voir aussi [20], p. 45).

Soit $\mathscr{T}_\mathfrak{p}$ la sous-catégorie localisante de Mod A associée à $F_\mathfrak{p}$. Il résulte immédiatement que $M \in \mathscr{T}_\mathfrak{p}$ si et seulement si $M_\mathfrak{p} = 0$.

PROPOSITION 2.4. *Si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors*

$$F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_\mathfrak{p} .$$

Si l'on note par max $C_F(A)$ *les éléments maximaux de l'ensemble $C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, alors*

$$F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p}$$

qui est en outre une intersection réduite.

DÉMONSTRATION. Si $\mathfrak{a} \in F$ et $\mathfrak{a} \notin \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_\mathfrak{p}$, alors il existe $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$ tel que $\mathfrak{a} \notin F_\mathfrak{p}$, donc $\mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) = \emptyset$ d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ et par suite $\mathfrak{p} \in F$; contradiction.

Soit $\mathfrak{a} \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_\mathfrak{p}$; si $\mathfrak{a} \notin F$ alors $\tilde{\mathfrak{a}} \neq A$ et d'aprés le lemme 2.2 il existe $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$ tel que $\mathfrak{p} = (\tilde{\mathfrak{a}} : x)$, $x \notin \tilde{\mathfrak{a}}$.

Comme $\mathfrak{a} \subset \tilde{\mathfrak{a}} \subset (\mathfrak{a} : x)$, alors $\mathfrak{p} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset$; contradiction. Par suite $\tilde{\mathfrak{a}} = A$ et donc $\mathfrak{a} \in F$. Il est clair que si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ tel que $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}$ alors $F_\mathfrak{q} \subseteqq F_\mathfrak{p}$.

Soit $\mathfrak{q} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$; il existe $\mathfrak{p} \in \max C_F(A)$ tel que $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$; d'où $F_\mathfrak{p} \subseteqq F_\mathfrak{q}$. Par conséquent $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p} \subseteqq F_\mathfrak{q}$, d'où $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p} \subseteqq \bigcap_{\mathfrak{q} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_\mathfrak{q} = F$.

Comme il est clair que $F \subseteqq \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p}$, alors $F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p}$.

Supposons que $\bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} F_\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A) - \{\mathfrak{p}_0\}} F_\mathfrak{p}$; où $\mathfrak{p}_0 \in \max C_F(A)$.

Si $\mathfrak{p}_0 \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset$ pour tout $\mathfrak{p} \in \max C_F(A) - \{\mathfrak{p}_0\}$, alors $\mathfrak{p}_0 \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A) - \{\mathfrak{p}_0\}} F_\mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p}_0 \in F$; contradiction.

Par suite, il existe $\mathfrak{p} \in \max C_F(A) - \{\mathfrak{p}_0\}$ tel que $\mathfrak{p}_0 \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$ d'où $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}$; contradiction.

Soit A un anneau commutatif quelconque. Hacque dans [14] dit qu'une topologie additive F est stable si $F = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{p} \notin F}} F_{\mathfrak{p}}$.

Par suite si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors F est une topologie stable.

PROPOSITION 2.5. *Si F est une topologie additive stable sur A et $\mathfrak{a}$ un idéal de A, alors:*

1) $\mathfrak{a}^{\sim} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$
2) $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ *si et seulement si* $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$
3) $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} \in C_F(A)$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$.

DÉMONSTRATION. 1) Soit $x \in \mathfrak{a}^{\sim}$, alors $(\mathfrak{a}: x) \in F$. Comme $F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_{\mathfrak{p}}$ (F est stable), il en résulte que $(\mathfrak{a}: x) \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \varnothing$ pour tout $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$. Donc $x \in \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$ pour tout $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, d'où $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$.

Si $x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$, alors $(\mathfrak{a}: x) \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \varnothing$ pour tout $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, d'où il résulte que $(\mathfrak{a}: x) \in F_{\mathfrak{p}}$ et donc $(\mathfrak{a}: x) \in F$. Donc $x \in \mathfrak{a}^{\sim}$.

2) $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ si et seulement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^{\sim}$ et on conclut compte tenu de 1).

3) On observe que $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} = (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})})_{(\mathfrak{p})}$, donc $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})})_{(\mathfrak{q})}$ et d'après 2) $\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} \in C_F(A)$.

Si M est un A-module et $N \subset M$ un sous-module alors nous notons par $N_{(\mathfrak{p})} = \{x \mid x \in M, \exists s \in A - \mathfrak{p}, sx \in N\}$. Avec ces notations on obtient de la même manière qu'avec la proposition 2.5 le résultat suivant

PROPOSITION 2.6. *Si F est une topologie additive stable sur A et $N \subseteqq M$ un sous-module de M, alors:*

1) $N^{\sim} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} N_{(\mathfrak{p})}$.
2) $N \in C_F(M)$ *si et seulement si* $N = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} N_{(\mathfrak{p})}$.
3) $N_{(\mathfrak{p})} \in C_F(M)$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$.

COROLLAIRE 2.7. *Si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors pour tout $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{a}_1^* \subset \mathfrak{a}_2^* \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n^* \subset \cdots$ une chaîne ascendante d'idéaux de $A_{\mathfrak{p}}$. Si on note $\mathfrak{a}_n = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{a}_n^*)$ alors on obtient la chaîne ascendante $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_n \subset \cdots$

D'autre part comme $(\mathfrak{a}_n)_{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{a}_n$, alors $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n, \cdots$ sont des éléments de $C_F(A)$ (proposition 2.5). Par suite il existe un nombre naturel k tel que $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k+1} = \cdots$. Comme $\mathfrak{a}_n^* = (\mathfrak{a}_n)_{\mathfrak{p}}$ alors $\mathfrak{a}_k^* = \mathfrak{a}_{k+1}^* = \cdots$.

COROLLAIRE 2.8. *Si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors $M \in \mathscr{F}$ si et seulement si $M_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$.*

DÉMONSTRATION. Elle résulte immédiatement de la proposition 2.4.

EXEMPLE 2.9. Soit A un anneau commutatif et unitaire. Soit $\mathscr{P} \subset \operatorname{Spec} A$ un ensemble saturé dans le sens suivant: si $\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{p}$; $\mathfrak{q}, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ et $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$ alors $\mathfrak{q} \in \mathscr{P}$.

Supposons que $\mathscr{P}$ vérifie la propriété suivante:

$(*)$ Pour tout $x \in A$, $x \neq 0$, x n'appartient qu'à un nombre fini d'idéaux premiers de $\mathscr{P}$.

Il est clair que l'ensemble d'idéaux

$$F_{\mathscr{P}} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \varnothing \ , \quad \text{pour tout} \quad \mathfrak{p} \in \mathscr{P}\}$$

est une topologie additive sur A ([20], p. 45)

PROPOSITION 2.10. *Si pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$, $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien, alors $C_F(A)$ est un treillis noethérien.*

DÉMONSTRATION. Si $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ alors $\mathfrak{p} \notin F_{\mathscr{P}}$ (lemme 2.1), donc il existe $\mathfrak{q} \in \mathscr{P}$ tel que $\mathfrak{p} \cap (A - \mathfrak{q}) = \varnothing$ d'où $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}$ et par suite $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$. Comme $\mathfrak{p} \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$ alors $\mathfrak{p} \notin F$ et donc $\mathfrak{p} \in C_F(A)$.

En conclusion $\mathfrak{p} \in C_F(A) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in \mathscr{P}$

Soit $\mathfrak{a} \in C_{F_{\mathscr{P}}}(A)$. Comme $F_{\mathscr{P}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} F_{\mathfrak{p}}$ (donc stable) alors $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$ (proposition 2.5).

Notons par $X_{\mathfrak{a}} = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \mathscr{P}, \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})} \neq A\}$ qui est finie puisque $\mathscr{P}$ vérifie la propriété $(*)$.

Enfin si $\mathfrak{a} \subseteqq \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in C_{F_{\mathscr{P}}}(A)$ alors $X_{\mathfrak{b}} \subseteqq X_{\mathfrak{a}}$.

Soit

$$\mathfrak{a}_1 \subseteqq \mathfrak{a}_2 \subseteqq \mathfrak{a}_3 \subseteqq \cdots \subseteqq \mathfrak{a}_n \subseteqq \cdots$$

une chaîne ascendante d'éléments de $C_F(A)$. On obtient la chaîne descendante d'ensembles finis:

$$X_{\mathfrak{a}_1} \supseteqq X_{\mathfrak{a}_2} \supseteqq \cdots \supseteqq X_{\mathfrak{a}_n} \supseteqq \cdots .$$

Il existe $k \in N$ tel que $X_{\mathfrak{a}_k} = X_{\mathfrak{a}_{k+1}} = \cdots$. Pour $\mathfrak{p} \in X_{\mathfrak{a}_k}$, on obtient la chaîne ascendante

$$(\mathfrak{a}_k)_{(\mathfrak{p})} \subseteqq (\mathfrak{a}_{k+1})_{(\mathfrak{p})} \subseteqq \cdots .$$

Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau noethérien pour tout $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$, alors il existe $m \geqq k$ tel que

$$(\mathfrak{a}_m)_{(\mathfrak{p})} = (\mathfrak{a}_{m+1})_{(\mathfrak{p})} = \cdots$$

pour tout $\mathfrak{p} \in X_{\mathfrak{a}_m}$.

D'après la proposition 2.5 on obtient que

$$\mathfrak{a}_m = \mathfrak{a}_{m+1} = \cdots$$

autrement dit $C_F(A)$ est un treillis noethérien.

EXEMPLE 2.11. Si A est un anneau Krull [5] et $Ht_1(A)$ l'ensemble d'idéaux premiers de hauteur $\leqq 1$ alors $Ht_1(A)$ vérifie la propriété $(*)$.

Comme $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète [4], alors $C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ est un treillis noethérien. De plus $\mathfrak{a} \in C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ si et seulement si $\mathfrak{a}$ est un idéal divisoriel entier.

REMARQUE 2.12. Le théorème 2.3 étend la proposition 2.6 de [6].

3. Un théorème de décomposition pour les éléments de $C_F(A)$. Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe seront supposés commutatifs et unitaires. Les notations sont celles du § 1 et § 2.

LEMME 3.1. *Supposons que F est une topologie additive stable sur A. Si $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ et $x \in A$ alors $(\mathfrak{a}: x) \in C_F(A)$.*

DÉMONSTRATION. D'après les propositions 2.5 $\mathfrak{a} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$.

Si $\lambda \in (\mathfrak{a}: x)_{(\mathfrak{p})}$ alors il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $s\lambda \in (\mathfrak{a}: x)$; d'où $s\lambda x \in \mathfrak{a}$. Par suite $\lambda x \in \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$ et donc $\lambda \in (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x)$. Donc $(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x)_{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x$.

Maintenant soit $x \in (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x)$. Il en résulte que $\lambda x \in \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$ et donc il existe $s \notin \mathfrak{p}$ tel que $s\lambda x \in \mathfrak{a}$, d'où $s\lambda \in (\mathfrak{a}: x)$ et par suite $\lambda \in (\mathfrak{a}: x)_{(\mathfrak{p})}$. Donc l'égalité $(\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x) = (\mathfrak{a}: x)_{(\mathfrak{p})}$

Comme

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\mathfrak{a}: x)_{(\mathfrak{p})} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}: x) = \Big(\bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}\Big): x$$

on obtient l'égalité:

$$(\mathfrak{a}: x) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\mathfrak{a}: x)_{(\mathfrak{p})}$$

et donc $(\mathfrak{a}: x) \in C_F(A)$.

PROPOSITION 3.2. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Si $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ est un élément irréductible alors $\mathfrak{a}$ est un idéal primaire dans A.*

DÉMONSTRATION. Soit $xy \in \mathfrak{a}$ et $y \notin \mathfrak{a}$. Nous obtenons la chaîne ascendante

$$(\mathfrak{a}: x) \subseteqq (\mathfrak{a}: x^2) \subseteqq \cdots \subseteqq (\mathfrak{a}: x^n) \subseteqq \cdots$$

des éléments de $C_F(A)$ (lemme 3.1). Comme $C_F(A)$ est un treillis noethérien, alors il existe un nombre naturel k tel que:

$$(\mathfrak{a}: x^k) = (\mathfrak{a}: x^{k+1}) = \cdots .$$

Soit $\lambda \in (\mathfrak{a} + Ax^k) \cap (\mathfrak{a} + Ay)$. Donc $\lambda \in \mathfrak{a} + Ay$ d'où $\lambda = z + \mu y$ où

$z \in \mathfrak{a}$. Comme $xy \in \mathfrak{a}$, alors $\lambda x \in \mathfrak{a}$. D'autre part, comme $\lambda \in \mathfrak{a} + Ax^k$, alors $\lambda = z_1 + \mu_1 x^k$ où $z_1 \in \mathfrak{a}$. Donc $\lambda x = z_1 x + \mu_1 x^{k+1}$ d'où on obtient $\mu_1 x^{k+1} \in \mathfrak{a}$. Par suite $\mu_1 \in (\mathfrak{a}: x^{k+1})$ et donc $\mu_1 \in (\mathfrak{a}: x^k)$, c'est-à-dire $\mu_1 x^k \in \mathfrak{a}$. En conclusion on obtient que $\lambda \in \mathfrak{a}$, d'où l'égalité

$$\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} + Ax^k) \cap (\mathfrak{a} + Ay) .$$

Parce que $\mathfrak{a}$ est un idéal irréductible dans A (lemme 2, théorème 1.4) et $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a} + Ay$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + Ax^k$, d'où $x^k \in \mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{a}$ est un idéal primaire dans A.

THÉORÈME 3.3. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Alors tout élément $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ est une intersection réduite et unique d'idéaux primaires dans A (unique au sens classique; ([3], chap. 4)).*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 3 du théorème 1.4, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$ où $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_n \in C_F(A)$ et sont des éléments irréductibles. D'après la proposition 3.2, $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots \mathfrak{a}_n$ sont des idéaux primaires dans A, donc $\mathfrak{a}$ est une intersection d'idéaux primaires. D'après un procédé classique ([3], chap. 4) on peut faire de cette décomposition une décomposition réduite et unique.

LEMME 3.4. *Supposons que F est une topologie additive stable sur A. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal-$\mathfrak{p}$-primaire. Alors*

$$\mathfrak{q} \in C_F(A) \Leftrightarrow \mathfrak{p} \in C_F(A) .$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathfrak{q} \in C_F(A)$ et $\mathfrak{p} \notin C_F(A)$. Donc $\mathfrak{p} \in F$ (lemme 2.1). Comme $\mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{q}_{(\mathfrak{p}')}$ (proposition 2.5) alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}' \in C_F(A)$ tel que $\mathfrak{q}_{(\mathfrak{p}')} \neq A$. Donc $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}'$, d'où $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ et par suite $\mathfrak{p}' \in F$: contradiction.

Réciproquement: Soit $\mathfrak{p} \in C_F(A)$. Comme $\mathfrak{q}_{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{q}$ alors il est clair que $\mathfrak{q} = \bigcap_{\mathfrak{p}' \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} \mathfrak{q}_{(\mathfrak{p}')}$, d'où $\mathfrak{q} \in C_F(A)$ (proposition 2.5).

COROLLAIRE 3.5. *Soit A un anneau Krull et $\mathfrak{a}$ un idéal divisoriel entier de A. Alors*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{(n_1)} \cap \mathfrak{p}_2^{(n_2)} \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_k^{(n_k)}$$

où $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_k \in Ht_1(A)$ et $\mathfrak{p}_i^{(n_i)} = \varphi_{\mathfrak{p}_1}^{-1}(\mathfrak{p}_i^{n_i} A_{\mathfrak{p}_i})$ $(1 \leqq i \leqq k)$.

DÉMONSTRATION. Comme $\mathfrak{a} \in C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ (voir l'exemple 2.11) d'après le théorème 3.3, $\mathfrak{a} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_k$ où $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \cdots, \mathfrak{q}_k \in C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ et sont primaires dans A. Si $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqq i \leqq k)$ alors $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_k \in C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ (lemme 3.4). L'anneau $A_{\mathfrak{p}_i}$ étant de valuation discrète, alors $\mathfrak{q}_i = (\mathfrak{q}_i)_{(\mathfrak{p}_i)} = \varphi_{\mathfrak{p}_i}^{-1}(\mathfrak{p}_i^{n_i} A_{\mathfrak{p}_i})$ pour un entier n_i; d'où le résultat.

LEMME 3.6. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Si $\mathfrak{q}$ est* *un idéal $\mathfrak{p}$-primaire avec $\mathfrak{q} \in C_F(A)$ alors il existe un nombre naturel n tel que $\mathfrak{p}^n \subseteqq \mathfrak{p}^{(n)} \subseteqq \mathfrak{q}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ (lemme 3.4) alors l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est noethérien (corollaire 2.7).

D'autre part $\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ étant $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primaire, il existe un nombre naturel n, tel que $\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ d'où il en résulte que $\mathfrak{p}^{(n)} \subseteqq \mathfrak{q}_{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{q}$.

LEMME 3.7. *Soit A un anneau commutatif et unitaire quelconque et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A.*

Alors l'enveloppe injective $E(A/\mathfrak{p})$ de $A/\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module et $E(A/\mathfrak{p})$ est l'enveloppe injective de $A_\mathfrak{p}$-module $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION. Soit s un élément tel que $s \in A - \mathfrak{p}$. Nous considérons le morphisme

$$\varphi_s\colon E(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow E(A/\mathfrak{p})$$

définit par l'égalité $\varphi_s(y) = sy$.

Si ker $\varphi_s \neq 0$ alors il existe un élément $y \in E(A/\mathfrak{p})$ tel que $sy = 0$, donc $s \in \operatorname{Ann}(y)$. Comme $E(A/\mathfrak{p})$ est une extension essentielle de $A/\mathfrak{p}$, alors il existe un élément $\lambda \in A$ tel que $\lambda y \in A/\mathfrak{p}$ et $\lambda y \neq 0$. Il est évident que $\operatorname{Ann}(y) \subseteqq \operatorname{Ann}(\lambda y)$ et $\operatorname{Ann}(\lambda y) = \mathfrak{p}$. Par suite $s \in \mathfrak{p}$: contradiction. Donc ker $\varphi_s = 0$. Comme $E(A/\mathfrak{p})$ est un A-module injectif indécomposable, alors φ_s est un automorphisme.

Soit a/s un élément de $A_\mathfrak{p}$ et $x \in E(A/\mathfrak{p})$. Il existe un élément $y \in E(A/\mathfrak{p})$ tel que $x = sy$. Si on pose $(a/s)x = ay$, alors il est très facile de montrer que $E(A/\mathfrak{p})$ est un $A_\mathfrak{p}$-module.

Si M est un $A_\mathfrak{p}$-module contenant $E(A/\mathfrak{p})$, alors $E(A/\mathfrak{p})$est A-facteur direct dans M. Il est clair que $E(A/\mathfrak{p})$ est $A_\mathfrak{p}$-facteur direct dans M. Par suite $E(A/\mathfrak{p})$ est $A_\mathfrak{p}$-module injectif. Parce que $E(A/\mathfrak{p})$ est un A-module indécomposable, il est indécomposable comme $A_\mathfrak{p}$-module.

D'autre part comme $E(A/\mathfrak{p}) \otimes_A A_\mathfrak{p} \cong E(A/\mathfrak{p})$ alors de l'inclusion

$$A/\mathfrak{p} \subset E(A/\mathfrak{p})$$

on obtient que

$$(A/\mathfrak{p}) \otimes_A A_\mathfrak{p} \subset E(A/\mathfrak{p})$$

d'où il résulte que $E(A/\mathfrak{p})$ est l'enveloppe injective de $A_\mathfrak{p}$-module $A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

LEMME 3.8. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Soit $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ et $E(A/\mathfrak{p})$ l'enveloppe injective de $A/\mathfrak{p}$. Si $x \in E(A/\mathfrak{p})$, $x \neq 0$, alors* $\operatorname{Ann}(x)$ *est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(x)$. Comme $E(A/\mathfrak{p})$ est un A-module co-irréductible, alors $\mathfrak{a}$ est un élément irréductible de $C_F(A)$, donc $\mathfrak{a}$ est un idéal $\mathfrak{p}'$-primaire où $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier qui appartient à $C_F(A)$ (proposition 3.2). Il est évident que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p}' \subseteqq \mathfrak{p}$.

Comme $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_{A_\mathfrak{p}}(x)$, d'après le lemme 3.7, le corollaire 2.7 et le lemme 3.2 [15] on déduit que $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$-primaire. D'autre part $\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{p}'A_\mathfrak{p}$-primaire et par suite $\mathfrak{p}'A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$.

THÉORÈME 3.9. *Supposons que* $C_F(A)$ *est un treillis noethérien. Soit* $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ *un idéal premier et* $E(A/\mathfrak{p})$ *l'enveloppe injective de* $A/\mathfrak{p}$.

Nous notons par

$$A_i = \{x \mid x \in E(A/\mathfrak{p}),\ \mathfrak{p}^i x = 0\} .$$

Alors les affirmations suivantes sont vraies:

1) $A_i \subseteqq A_{i+1}$.

2) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E(A/\mathfrak{p})$.

3) *Si* K *est le corps de fractions de* $A/\mathfrak{p}$ *alors* $A_1 \cong K$ *et* A_{i+1}/A_i *est un éspace vectoriel sur* K.

4) $A_{i+1}/A_i = \{x \mid x \in E(A/\mathfrak{p})/A_i$ *et* $\mathfrak{p}x = 0\}$.

5) $\mathfrak{p}^{(i)} = \bigcap_{x \in A_i} \mathrm{Ann}\,(x)$ *oú* $\mathfrak{p}^{(i)} = (\mathfrak{p}^i)_{(\mathfrak{p})}$.

DÉMONSTRATION. 1) Clair.

2) Il en résulte 3.6 et 3.8.

Pour 3), 4) et 5) voir la démonstration du théorème 3.4 [15]

COROLLAIRE 3.10. *Supposons que* $C_F(A)$ *est un treillis noethérien. Soit* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier,* $\mathfrak{p} \in C_F(A)$.

Alors l'anneau des endomorphismes $\mathrm{Hom}_A(E(A/\mathfrak{p}), E(A/\mathfrak{p}))$ *de* $E(A/\mathfrak{p})$ *est isomorphe avec le complété de l'anneau* $A_\mathfrak{p}$ *par rapport à* $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION. $A_\mathfrak{p}$ est un anneau noethérien (corollaire 2.7). Alors d'après le lemme 3.7 et le théorème 3.7 [15] on obtient l'affirmation.

Si $\mathscr{C}$ est une catégorie Grothendieck (c'est-à-dire une catégorie avec les limites inductives exactes et avec générateurs) et $\mathscr{A}$ une sous-catégorie localisante de $\mathscr{C}$ on dit que $\mathscr{A}$ est stable par enveloppes injectives si pour tout objet $M \in \mathscr{A}$, $E(M) \in \mathscr{A}$.

Rappelons que la catégorie $\mathrm{Mod}\, A/\mathscr{F}$ est une catégorie Grothendieck ([10] proposition 9, p. 378).

COROLLAIRE 3.11. *Supposons que* $C_F(A)$ *est un treillis noethérien. Alors toute sous-catégorie localisante de* $\mathrm{Mod}\, A/\mathscr{F}$ *est stable par les enveloppes injectives.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathscr{A}$ une sous-catégorie localisante de $\mathrm{Mod}\, A/\mathscr{F}$. Nous notons par

$$\mathscr{C} = \{M \mid M \in \operatorname{Mod} A,\ T_F(M) \in \mathscr{A}\}\ .$$

Comme T_F est un foncteur exact alors $\mathscr{C}$ est une sous-catégorie localisante de Mod A et $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{C}$.

Soit X un objet de $\mathscr{A}$ et $E(X)$ son enveloppe injective. D'après la proposition 6 ([10], p. 374) $S_F(E(X))$ est l'enveloppe injective de $S_F(X)$.

D'après le théorème 2.3, $S_F(E(X)) = \bigoplus_{i \in I} E(A/\mathfrak{p}_i)$ où $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers et $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Ass}(S(X))$ pour tout $i \in I$.

Par suite $E(X) \cong T_F S_F(E(X)) = \bigoplus_{i \in I} T_F(E(A/\mathfrak{p}_i))$.

Il est suffisant de montrer que $T_F(E(A/\mathfrak{p})) \in \mathscr{A}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(S_F(X))$.

Comme $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(S_F(X))$ alors il existe un morphisme injectif $\varphi: A/\mathfrak{p} \longrightarrow S(X)$. Parce que $S(X) \in \mathscr{C}$ alors $A/\mathfrak{p} \in \mathscr{C}$. Procédant par récurrence on déduit immédiatement que $A/\mathfrak{p}^k \in \mathscr{C}$ pour tout nombre naturel k.

Mais $E(A/\mathfrak{p}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ où $A_i = \{x \mid x \in E(A/\mathfrak{p}),\ \mathfrak{p}^i x = 0\}$ (théorème 3.9). Comme A_i est $A/\mathfrak{p}^i$-module, alors $A_i \in \mathscr{C}$ et par suite $E(A/\mathfrak{p}) \in \mathscr{C}$, et donc $T_F(E(A/\mathfrak{p})) \in \mathscr{A}$

REMARQUE 3.12. Si $C_F(A)$ est un treillis noethérien alors la catégorie Mod $A/\mathscr{F}$ est localement noethérienne.

En effet $T_F(A)$ est un générateur noethérien dans Mod $A/\mathscr{F}$.

4. Conditions pour lesquelles $\mathscr{F}$ est stable par enveloppe injective. Les notations sont celles du § 3.

Soit A un anneau commutatif et unitaire et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si on pose

$$\mathscr{F}_{\mathfrak{p}} = \{M \mid M \in \operatorname{Mod} A,\ M_{\mathfrak{p}} = 0\}\ .$$

$\mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$ est une sous-catégorie localisante de Mod A associée à la topologie additive $F_{\mathfrak{p}}$.

PROPOSITION 4.1. *Soit A un anneau commutatif quelconque et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Si l'une des deux conditions suivantes est remplie, alors $\mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$ est stable par les enveloppes injectives.*

1) *Tout idéal premier $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, est de type fini*

2) *A est un anneau intègre de krull et $A_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète* ([4], *chap.* 6).*)

DÉMONSTRATION. 1) Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un idéal de A; l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ étant noethérien alors comme $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}} \neq 0$, $\operatorname{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}A_{\mathfrak{p}}) \neq \emptyset$. Donc il existe

*) *Soient K un corps, v une valuation de K et $\Gamma = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (de l'ordre lexicographique) le groupe des ordres de v soient A l'anneau de la valuation v sur K et $0 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ des idéaux premiers de A. Il est clair que $A_{\mathfrak{p}}$ et $A/\mathfrak{p}$ sont de valuation discrète. On vérifie que $A/\mathfrak{m} \in \mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$ et $E(A/\mathfrak{m}) \notin \mathscr{F}_{\mathfrak{p}}$.*

une injection $\beta\colon A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p}/\mathfrak{a}A_\mathfrak{p}$ pour un idéal premier $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$. Comme $A/\mathfrak{q}$ est un A-module de présentation finie alors il existe un morphisme $\alpha\colon A/\mathfrak{q} \to A/\mathfrak{a}$ tel que $\beta = \alpha_\mathfrak{p}$. Le morphisme canonnique $A/\mathfrak{q} \to (A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p}$ étant une injection (parce que $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$) il en résulte que α est une injection.

Soit $M \in \mathscr{F}_\mathfrak{p}$ et supposons que $(E(M))_\mathfrak{p} \neq 0$. Il existe alors $x \in E(M)$ tel que $\mathrm{Ann}\,(x) \cap (A - \mathfrak{p}) = \varnothing$, donc $\mathrm{Ann}\,(x) \subset \mathfrak{p}$.

Par suite il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q} \subsetneqq \mathfrak{p}$ et une injection $\alpha\colon A/\mathfrak{q} \to A/\mathrm{Ann}\,(x) \subset E(M)$.

On en déduit qu'il existe $y \in E(M)$ tel que $\mathrm{Ann}\,(y) = \mathfrak{q}$. Comme $y \neq 0$, il existe $\lambda \in A$ avec la propriété: $\lambda y \in M$ et $\lambda y \neq 0$. Donc $\lambda \notin \mathfrak{q}$ et $\mathrm{Ann}\,(\lambda y) = \mathfrak{q}$, d'où il résulte l'existence d'une injection

$$\gamma\colon A/\mathfrak{q} \to M$$

$M_\mathfrak{p} = 0$ implique $(A/\mathfrak{q})_\mathfrak{p} = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \varnothing$; contradiction.

Donc $(E(M))_\mathfrak{p} = 0$ et par suite $E(M) \in \mathscr{F}_\mathfrak{p}$.

2) Soit K le corps de fractions de A; il y a une valuation $v\colon K \to \boldsymbol{Z}$ dont l'anneau de valuation est $A_\mathfrak{p}$. Soit x un élément de K tel que $v(x) = -1$. Il est clair que $v\,(\mathfrak{p}\cdot x) \subsetneqq \boldsymbol{Z}_+$, donc $\mathfrak{p}\cdot x \subsetneqq A$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A tel que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Comme dans la démonstration de la proposition 3.2 [6] il en résulte qu'il existe un morphisme injectif $\varphi\colon A/\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{a}$.

Considérons maintenant un A-module M, $M \in F_\mathfrak{p}$ et supposons que $(E(M))_\mathfrak{p} \neq 0$. Il existe $x \in E(M)$, $(Ax)_\mathfrak{p} \neq 0$. Si $Ax \cong A/\mathfrak{a}$ alors $\mathfrak{a} \subsetneqq \mathfrak{p}$. Comme dans 1) on déduit qu'il existe une injection $\psi\colon A/\mathfrak{p} \to M$ ce qui est absurde. De la proposition 2.4 et de la proposition 4.1 on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.2. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien.*

1) *Si tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $C_F(A)$ est de type fini alors $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives.*

2) *Si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $C_F(A)$, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète et A de krull alors $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives.*

Corollaire 4.3. *Si A est un anneau commutatif noethérien alors toute sous-catégorie localisante de* Mod A *est stable par les enveloppes injectives.*

5. Dimension injective de Mod $A/\mathscr{F}$.

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

Lemme 5.1. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Soit $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p}$ deux idéaux premiers qui appartiennent à $C_F(A)$. Si $\mathfrak{p}' \not\subset \mathfrak{p}$ alors $(E(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p} = 0$. Si $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$ alors $E(A/\mathfrak{p}')$ est un A-module $\mathscr{F}_\mathfrak{p}$-fermé et*

$(A(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module injectif. De plus $(E(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p}$ est une enveloppe injective de $A_\mathfrak{p}$-module $(A/\mathfrak{p}')_\mathfrak{p}$.

DÉMONSTRATION. Supposons que $\mathfrak{p}' \not\subset \mathfrak{p}$. Puisque $\mathfrak{p}' \in C_F(A)$ alors $E(A/\mathfrak{p}') = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ où $B_i = \{x \mid x \in E(A/\mathfrak{p}'),\ \mathfrak{p}'^i x = 0\}$ (théorème 3.9). Alors $(B_i)_\mathfrak{p} = 0$ et par suite $(E(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p} = 0$.

Supposons que $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}' \in C_{F_\mathfrak{p}}(A)$. D'après la proposition 6 ([10], p. 374) on obtient que $(E(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module injectif et $(E(A/\mathfrak{p}'))_\mathfrak{p}$ est l'enveloppe injective de $A_\mathfrak{p}$-module $(A/\mathfrak{p}')_\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 5.2. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien et $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives. Si Q est un A-module injectif alors $Q_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module injectif, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{p} \in C_F(A)$.*

DÉMONSTRATION. Soit Q' le plus grand sous-module de Q qui appartient à $\mathscr{F}$. Comme $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives alors Q' est injectif et donc $Q = Q' \oplus Q''$ où Q'' est F-sans torsion. Par suite si $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, alors $Q_\mathfrak{p} \cong Q''_\mathfrak{p}$. Donc on peut supposer que Q est F-sans torsion.

D'après le théorème 2.3, $Q = \bigoplus_{i \in I} E(A/\mathfrak{p}_i)$ où $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers de $C_F(A)$.

Donc $Q_\mathfrak{p} = \bigoplus_{i \in I} (E(A/\mathfrak{p}_i))_\mathfrak{p} = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}}} (E(A/\mathfrak{p}_i))_\mathfrak{p}$ (lemme 5.1). Comme $A_\mathfrak{p}$ est un anneau noethérien $\bigoplus_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}}} (E(A/\mathfrak{p}_i))_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$-module injectif (lemme 5.1 et corollaire 1.7).

PROPOSITION 5.3. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien et $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier tel que $\mathfrak{p} \in C_F(A)$ et M un A-module. Alors $(E(M))_\mathfrak{p}$ est l'enveloppe injective de $M_\mathfrak{p}$.*

DÉMONSTRATION. Soit M' le plus grand sous-module de M qui appartient à $\mathscr{F}$. Alors $E(M')$ est un A-module injectif tel que $E(M') \in \mathscr{F}$. Donc $E(M) = E(M') \oplus Q$ où Q est un A-module F-sans torsion. De plus Q est l'enveloppe injective de M/M'.

Comme d'autre part, $(E(M))_\mathfrak{p} = Q_\mathfrak{p}$ et $M_\mathfrak{p} = (M/M')_\mathfrak{p}$ alors on peut supposer que M est F-sans torsion.

Dans ce cas M est une extension essentielle de $\bigoplus_{i \in I} A/\mathfrak{p}_i$ où $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux premiers de $C_F(A)$ (théorème 2.3), et $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E(A/\mathfrak{p}_i)$.

$$\text{Donc } M_\mathfrak{p} = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}}} (A/\mathfrak{p}_i)_\mathfrak{p} \quad \text{et} \quad (E(M))_\mathfrak{p} = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}}} (E(A/\mathfrak{p}_i))_\mathfrak{p}$$

(lemme 5.1). De plus $(E(M))_p$ est l'enveloppe injective de M_p ([10], corollaire, p. 363).

COROLLAIRE 5.4. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien et $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives. Si M est un A-module et*

$$0 \to M \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \cdots \to Q_n \to \cdots$$

est une résolution minimale injective de M, alors

$$0 \to M_\mathfrak{p} \to (Q_0)_\mathfrak{p} \to (Q_1)_\mathfrak{p} \to (Q_2)_\mathfrak{p} \to \cdots \to (Q_n)_\mathfrak{p} \to \cdots$$

est une résolution minimale injective de l'$A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in C_F(A)$.

Si $\sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) < \infty$, *alors* $(Q_k)_\mathfrak{p} = 0$ *pour tout* $k > \sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p})$.

La démonstration résulte immédiatement de la proposition 5.3.

THÉORÈME 5.5. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien et $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives.*

Alors

$$\text{inj. dim Mod } A/\mathscr{F} = \sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) .$$

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$. Comme $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_\mathfrak{p}$ et $\mathscr{F}_\mathfrak{p}$ est une sous-catégorie localisante de Mod A, alors $\mathscr{F}_\mathfrak{p}/\mathscr{F}$ est une sous-catégorie localisante de Mod $A/\mathscr{F}$ et Mod $A_\mathfrak{p}$ est la catégorie quotient de Mod $A/\mathscr{F}$ par $\mathscr{F}_\mathfrak{p}/\mathscr{F}$.

Comme $\mathscr{F}_\mathfrak{p}/\mathscr{F}$ est une sous-catégorie localisante stable par les enveloppes injectives (corollaire 3.11) alors d'après le corollaire 5 ([10], p. 376) on obtient

$$\text{gl. dim } A_\mathfrak{p} \leqq \text{inj. dim Mod } A/\mathscr{F} .$$

Par suite

$$\sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) \leqq \text{inj. dim Mod } A/\mathscr{F} .$$

Quand $\sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) = \infty$, alors inj. dim. Mod $A/\mathscr{F} = \infty$. Supponsons que

$$n = \sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) < \infty .$$

Alors, d'après le corollaire 5.4, $Q_k \in \mathscr{F}$, pour tout $k > n$, et par suite $T_F(Q_k) = 0$ $(k > n)$.

Comme $\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives, alors les objets $T_F(Q_0)$, $T_F(Q_1), \cdots, T_F(Q_n)$ sont injectifs dans la catégorie quotient Mod $A/\mathscr{F}$ ([10], corollaire 3, p. 375). D'autre part, comme T_F est un foncteur exact, on obtient la suite exacte:

$$0 \to T_F(M) \to T_F(Q_0) \to T_F(Q_1) \to \cdots \to T_F(Q_n) \to 0 \ .$$

qui est une résolution injective pour l'objet $T_F(M)$.

Donc inj. dim $T_F(M) \leqq n$ et en conclusion inj. dim Mod $A/\mathscr{F} \leqq n$.

COROLLAIRE 5.6. *Soit A un anneau intègre et F une topologie additive sur A, tel que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Si pour tout $p \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète alors*

$$\text{inj. dim Mod } A/\mathscr{F} \leqslant 1 \ .$$

COROLLAIRE 5.7. *Soit A un anneau commutatif noethérien et F une topologie additive sur A. Alors*

$$\text{inj. dim Mod } A/\mathscr{F} = \sup_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} (\text{gl. dim } A_\mathfrak{p}) \ .$$

La démonstration résulte du théorème 5.5 et du corollaire 4.3.

REMARQUE. Le théorème 5.5 étend la proposition 3.9 [6].

6. Théorème de décomposition pour les modules. Tous les anneaux considérés dans ce paragraphe seront supposés commutatifs et unitaires. Les notations sont celles des paragraphes précédents. De plus nous ferons quelques considérations de la théorie des catégories.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie Grothendieck (c'est-à-dire une catégorie abélienne avec des limites inductives exactes et des générateurs). Un objet S de $\mathscr{C}$ est dit simple s'il est non nul et s'il ne contient aucun sous-objet distinct de S ou de 0. Un objet est dit semi-simple s'il est isomorphe à une somme directe d'objets simples. Un objet X est torsionné au sens de Dickson [9], si X/X' contient un sous-objet simple, pour tout $X' \neq X$.

Si X est un objet de $\mathscr{C}$, on note par $S_0(X)$, le socle de X; c'est-à-dire la somme des sous-objets simples de X. Le socle $S_0(X)$ est un objet semi-simple.

Soit $\mathscr{C}$ une catégorie Grothendieck et $\mathscr{S}$ l'ensemble des classes des objets simples. On note par $\mathscr{C}_T$ la sous-catégorie de $\mathscr{C}$, formée de tous les objets torsionnés au sens de Dickson. Cette catégorie est une sous-catégorie localisante de $\mathscr{C}$ (dans la terminologie de ([10], p. 383), $\mathscr{C}_T$ coincide avec $\mathscr{C}_0$).

Si $S \in \mathscr{S}$, un objet X de $\mathscr{C}$ sera appelé S-primaire si toute image homomorphe de X contient un sous-objet simple isomorphe à S. La classe $\mathscr{C}_S$ des objets qui sont S-primaire est tout de même une sous-catégorie localisante. Il est évident que $\mathscr{C}_S \subset \mathscr{C}_T$, pour tout $S \in \mathscr{S}$.

Si X est un objet, il existe le plus grand sous-object S-primaire de X, qu'on dénote par X_S. X_S sera appelé la composante S-primaire de l'objet X. On voit aisément que, si X' est un sous-objet de X, on a

$$X'_S = X' \cap X_S .$$

Un objet X, torsionné au sens de Dickson ($X \in \mathscr{C}_T$) admet une décomposition primaire [9] si

$$X = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} X_S$$

Une catégorie Grothendieck $\mathscr{C}$ est semi-artinienne [19] si $\mathscr{C} = \mathscr{C}_T$, c'est-à-dire, tout objet X de $\mathscr{C}$ est torsionné au sens de Dickson.

Il est clair que $\mathscr{C}$ est une catégorie semi-artinienne si et seulement si, tout objet $X \neq 0$ de $\mathscr{C}$, contient un objet simple.

LEMME 6.1. *Soit $\mathscr{C}$ une catégorie semi-artinienne. Si toute sous-catégorie localisante de $\mathscr{C}$ est stable par les enveloppes injectives, alors tout objet X de $\mathscr{C}$, admet une décomposition primaire.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\sum_{S \in \mathscr{S}} X_s \subset X$ est une somme directe et X est une extension essentielle de $\sum_{s \in \mathscr{S}} X_S$ (voir aussi [21], p. 177). Soit S_0 un objet simple de $\mathscr{C}$; nous notons par $\overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ la classe des objets de $\mathscr{C}$ avec la propriété suivante: $X \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ si et seulement si toute image homomorphe de X contient un objet simple isomorphe avec un objet appartenant à $\mathscr{S} - \{S_0\}$. La sous-catégorie $\overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ est localisante. On note par $\bar{X}_{S_0}$ le plus grand sous-objet de X qui appartient à $\overline{\mathscr{C}}_{S_0}$. Il est évident que $\sum_{S \in \mathscr{S} - \{S_0\}} X_S \subset \bar{X}_{S_0}$ et $X_{S_0} \cap \bar{X}_{S_0} = 0$. Soit $Y \subset X$ un sous-objet de X avec les propriété suivantes: $\bar{X}_{S_0} \subset Y$ et $X_{S_0} \cap Y = 0$. Il est évident que Y est une extension essentielle de $\bar{X}_{S_0}$; donc $Y \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ ($\overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ est stable par les enveloppes injectives). Par suite $\bar{X}_{S_0} = Y$. En conclusion $\bar{X}_{S_0}$ est le plus grand sous-objet de X avec la propriété que $\bar{X}_{S_0} \cap X_{S_0} = 0$. On déduit alors que $X/\bar{X}_{S_0}$ est une extension essentielle de X_{S_0} et donc $X/\bar{X}_{S_0}$ appartient à $\mathscr{C}_{S_0}$. D'une manière analogue on obtient que $X/X_{S_0} \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$. Supposons que $X_{S_0} + \bar{X}_{S_0} \neq X$; alors il existe un objet simple S, et un sous-objet $X' \subset X$ tel que $X'/(X_{S_0} + \bar{X}_{S_0}) \cong S$. ($\bar{X}'_{S_0} \simeq \bar{X}_{S_0}$, $X'_{S_0} = X_{S_0}$).

Distinguons deux cas: $S \cong S_0$ et $S \ncong S_0$. Dans le premier cas de la suite exacte

$$\bar{X}_{S_0} = \bar{X}'_{S_0} \subseteq X'/X_{S_0} \rightarrow X'/(X_{S_0} + \bar{X}_{S_0}) \rightarrow 0$$

On obtient que S_0 est un objet quotient de $X'_{S_0} \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ d'où il en résulte que $S_0 \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$ qui est une contradiction.

Dans le deuxième cas, de la même manière, on obtient que $S \in \mathscr{C}_{S_0}$, ce qui est une contradiction. Par suite $X = X_{S_0} \oplus \bar{X}_{S_0}$.

Supposons que $\sum_{S \in \mathscr{S}} X_S \neq X$. Alors il existe un objet simple S_0 et un sous-objet $X' \subset X$, tel que $X'/\sum_{S \in \mathscr{S}} X_S \cong S_0$. Comme $X_S = X'_S$ (quelque soit $S \in \mathscr{S}$) et $X' = \bar{X}_{S_0} \oplus X_{S_0}$ on obtient que $X'/\sum_{S \in \mathscr{S}} X_S \cong \bar{X}_{S_0}/\sum_{S \in \mathscr{S} - \{S_0\}} X_S \cong S_0$

d'où il en résulte que $S_0 \in \overline{\mathscr{C}}_{S_0}$; contradiction. Donc X admet une décomposition primaire.

LEMME 6.2. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Si X est un objet simple de* $\operatorname{Mod} A/\mathscr{T}$, *alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in C_F(A)$, $\mathfrak{p}$ élément maximal de $C_F(A)$, tel que $X \cong T_F(A/\mathfrak{p})$.*

DÉMONSTRATION. $S_F(X)$ est un objet non nul de $\operatorname{Mod} A$ et $T_F S_F(X) \cong X$.

Si M est un sous-module de $S_F(X)$, $M \neq 0$, alors, comme X est un objet simple, $T_F(M) \cong T_F S_F(X) \cong X$. Donc $S(X)/M \in \mathscr{T}$.

Soit $x \in S(X)$, $x \neq 0$. Parce que $S(X)$ est F-sans torsion, $\operatorname{Ann}(x) \in C_F(A)$. Soit λ, μ éléments de A, avec la propriétés suivantes: $\lambda\mu \in \operatorname{Ann}(x)$ et $\mu \notin \operatorname{Ann}(x)$. Alors $\lambda\mu x = 0$ et $\mu x \neq 0$. Nous notons par $B = A/\operatorname{Ann}(x)$. Soit $\varphi_\mu\colon B \to B$, l'homothétie de rapport $\mu \cdot (\varphi_\mu(y) = \mu y,\ y \in B)$. Si $\ker \varphi_\mu \neq 0$, alors $\operatorname{Im} \varphi_\mu \cong S(X)/\ker \varphi_\mu \in \mathscr{T}$. Mais comme B est F-sans torsion alors $\operatorname{Im} \varphi_\mu = 0$, ce qui est une contradiction ($\mu \notin \operatorname{Ann}(x)$). Par suite $\ker \varphi_\mu = 0$ et donc $\lambda \in \operatorname{Ann}(x)$.

En conclusion $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$ est un idéal premier.

De la démonstration il résulte que si $\mathfrak{a}$ est un idéal tel que $\mathfrak{a} \in C_F(A)$ et $\mathfrak{p} \subsetneqq \mathfrak{a}$, alors $A/\mathfrak{a} \in \mathscr{T}$ et donc $\mathfrak{a} \in F$; contradiction. Donc $\mathfrak{p}$ est un élément maximal de $C_F(A)$.

Il est clair que $T_F(A/\mathfrak{p}) \cong X$.

LEMME 6.3. *Soit A un anneau commutatif et M' un sous-module de M. Si M est une extension essentielle de M', alors* $\operatorname{Ass}(M') = \operatorname{Ass}(M)$.

DÉMONSTRATION. L'inclusion $\operatorname{Ass}(M') \subseteqq \operatorname{Ass}(M)$ est claire. Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)$ alors il existe un élément $x \in M$, $x \neq 0$ tel que $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$. D'autre part, comme M est une extension essentielle de M', il existe $\lambda \in A$, tel que $\lambda x \in M'$ et $\lambda x \neq 0$. Comme $\lambda \notin p$, on déduit que $\operatorname{Ann}(\lambda x) = \mathfrak{p}$ et donc $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M')$.

LEMME 6.4. *Soit A un anneau commutatif quelconque et $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$. Alors*

$$\operatorname{Ass}(M) = \dot{\bigcup_{i \in I}} \operatorname{Ass}(M_i)\ .$$

DÉMONSTRATION. Elle est évidente.

LEMME 6.5. *Soit A un anneau quelconque et $\mathscr{P} \subset$* $\operatorname{Spec} A$ *un ensemble non vide. Si M est un A-module non nul avec la propriété suivante:* $\operatorname{Ass}(M') \neq \varnothing$ *et* $\operatorname{Ass}(M') \subset \mathscr{P}$, *pour tout sous-module non nul M' de M; alors M est une extension essentielle d'une somme directe $\bigoplus_{i \in I} A/\mathfrak{p}_i$,* où $\mathfrak{p}_i \in \mathscr{P}$ $(i \in I)$.

Pour prouver l'assertion, voir la démonstration du théorème 3 [12].

PROPOSITION 6.6. *Supposons que* $C_F(A)$ *est un treillis noethérien. Si* X *est un objet de* $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$ *alors les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1) X *est torsionné au sens de Dickson.*
2) $\operatorname{Ass}(S_F(X)) \subseteqq \max C_F(A)$.

DÉMONSTRATION. 1) $\Rightarrow$ 2) Soit $S_0(X)$ le socle de X; alors X est une extension essentielle de $S_0(X)$.

Si $S_0(X) = \bigoplus_{i\in I} Y_i$, où Y_i sont des objets simples, alors comme S_F commute avec les sommes directes (remarque 1.5) on obtient $S_F(S_0(X)) \cong \bigoplus_{i\in I} S_F(Y_i)$. De là, il découle que $\operatorname{Ass}(S_F(X)) = \operatorname{Ass} S_F(S_0(X)) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Ass} S_F(Y_i)$ (lemme 6.2. et lemme 6.3). Donc $\operatorname{Ass}(S_F(X)) \subseteqq \max C_F(A)$ (lemme 6.1).

2) $\Rightarrow$ 1). $S_F(X)$ est un A-module F-sans torsion. D'après le lemme 6.4 et le lemme 2.1, on obtient que $S_F(X)$ est une extension essentielle de $\bigoplus_{i\in I} A/\mathfrak{p}_i$ où $\mathfrak{p}_i \in \max C_F(A)$. $T_F(E(S_F(X))$ est l'enveloppe injective de X ([10], proposition 6, p. 374).

D'autre part, comme $T_F(E(A/\mathfrak{p}_i)) \cong E(T_F(A/\mathfrak{p}_i))$ ([10], proposition 6, p. 374) et $T_F(A/\mathfrak{p}_i)$ est un objet simple de $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$ (lemme 6.1), alors d'après le corollaire 3. 11 il résulte que $T_F(E(A/\mathfrak{p}_i))$ est torsionné au sens de Dickson. Par suite $E(S_F(X))$ est un objet torsionné au sens de Dickson, donc X est torsionné au sens de Dickson.

THÉORÈME 6.7. *Supposons que* $C_F(A)$ *est un treillis noethérien. Soit* M *un* A*-module* F*-sans torsion tel que* $\operatorname{Ass}(M) \subseteqq \max C_F(A)$.
Alors

$$S_F T_F(M) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}\in \max C_F(A)} M_{\mathfrak{p}} .$$

DÉMONSTRATION. Soit $(\operatorname{Mod} A/\mathscr{F})_T$ la sous-catégorie de $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$ formée de tous les objets torsionnés au sens de Dickson de $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$ et $\mathscr{S}$ l'ensemble des classes des objets simples de $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$.

Comme $S_F T_F(M)$ est une extension essentielle de M (M étant F-sans torsion) alors d'après le lemme 6.3 $\operatorname{Ass}(M) = \operatorname{Ass}(S_F T_F(M))$. D'après la proposition 6.2, $T_F(M)$ est torsionné au sens de Dickson. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi(M)} S_F T_F(M) \longrightarrow \operatorname{coker} \psi(M) \longrightarrow 0$$

où $\operatorname{cocker} \psi(M) \in \mathscr{F}$, on obtient que $(\operatorname{cocker} \psi(M))_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in \max C_F(A)$.

Donc $M_{\mathfrak{p}} \simeq (S_F T_F(M))_{\mathfrak{p}}$, pour tout $\mathfrak{p} \in \max C_F(A)$. Parce que, toute sous-catégorie localisante de $\operatorname{Mod} A/\mathscr{F}$ est stable par les enveloppes injectives (corollaire 3.11) alors tout objet de $(\mathrm{Mod}\, A/\mathscr{F})_T$ admet une décomposition primaire. Si on note $X = T_F(M)$, alors $X = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} X_S$, où X_S est la composante S-primaire de X. Comme S_F commute avec les sommes directes (remarque 1.5) il en résulte que $S_F T_F(M) \cong \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} S_F(X_S)$.

Donc $M_{\mathfrak{p}} \cong (S_F T_F(M))_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} (S_F(X_S))$ pour tout $\mathfrak{p} \in \max C_F(A)$

Soit $T(A/\mathfrak{p}) \cong S_0$ (lemme 6.2). Si S est un objet simple tel que $S \not\cong S_0$ alors $E(S_F(X_S)) \cong S_F(E(X_S)) \cong \bigoplus_{T(A/\mathfrak{q}) \cong S} E(A/\mathfrak{q})$.

Comme $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \max C_F(A)$ et $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, alors $(E(S_F(X_S))_{\mathfrak{p}} = 0$ (lemme 5.1).

Par suite $M_{\mathfrak{p}} = (S_F(X_{S_0}))_{\mathfrak{p}}$, d'où il résulte que $S_F(X_{S_0}) = S_F(X_{S_0})_{\mathfrak{p}}$ et donc

$$S_F T_F(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} M_{\mathfrak{p}}$$

COROLLAIRE 6.8. *Supposons que $C_F(A)$ est un treillis noethérien. Soit M un A-module tel que* $\mathrm{Ass}\,(M/FM) \subseteqq \max C_F(A)$, *où FM est le plus grand sous-module de M qui appartient à $\mathscr{F}$.*

Alors il existe un morphisme

$$f\colon M \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \max C_F(A)} M_{\mathfrak{p}}$$

tel que $\ker f$ *et* $\operatorname{coker} f$ *appartiennent à* $\mathscr{F}$

DÉMONSTRATION. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow FM \longrightarrow M \longrightarrow M/FM \longrightarrow 0$$

on obtient que

$$M_{\mathfrak{p}} \cong (M/FM)_{\mathfrak{p}} \quad \text{pour tout} \quad \mathfrak{p} \in \max C_F(A)\ .$$

D'autre part $S_F T_F(M) \cong S_F T_F(M/FM)$. Ensuite la démonstration est claire.

COROLLAIRE 6.9. *Soit A un anneau noethérien et $Ht_0(A)$ l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A. Alors pour tout A-module M il existe un morphisme*

$$f\colon M \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Ht_0(A)} M_{\mathfrak{p}}$$

tel que $(\ker f)_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{coker} f)_{\mathfrak{p}} = 0$ *pour tout* $\mathfrak{p} \in Ht_0\,(A)$.

DÉMONSTRATION. Soit $F_{Ht_0(A)}$ l'ensemble d'idéaux:

$$F_{Ht_0(A)} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \varnothing,\ \mathfrak{p} \in Ht_0(A)\}$$

$F_{Ht_0(A)}$ est une topologie additive et $\max C_{F_{Ht_0(A)}}(A) = Ht_0(A)$. Le reste de la démonstration est clair.

Nous rappelons que si A est un anneau intègre, un A-module M est torsionné (au sens classique) si pour tout élément $x \in M$, $x \neq 0$, il existe un élément $\lambda \in A$, $\lambda \neq 0$, tel que $\lambda x = 0$.

COROLLAIRE 6.10. *Soit A un anneau intègre et noethérien.*

Nous notons par $Ht_1(A)$ l'ensemble d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$, tel que $ht(\mathfrak{p}) \leqq 1$ ($ht.$ la hauteur).

Alors pour tout A-module M torsionné (au sens classique) il existe un morphisme

$$f\colon M \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} M_{\mathfrak{p}}$$

tel que $(\ker f)_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{coker} f)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in Ht_1(A)$.

DÉMONSTRATION. Nous considérons la topologie additive

$$F_{Ht_1(A)} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset,\ \mathfrak{p} \in Ht_1(A)\}\ .$$

On voit aisément que $\max C_{F_{Ht_1(A)}}(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ ht(p) = 1\}$.

Si $F_{Ht_1(A)}M$ est le plus grand sous-module de M qui appartient à $\mathscr{I}_{Ht_1(A)}$ ($\mathscr{I}_{Ht_1(A)}$ la sous-catégorie localisante associée à $F_{Ht_1(A)}$), alors $M/F_{Ht_1(A)}M$ est un A-module torsionné (au sens classique) et $\operatorname{Ass}(M/F_{Ht_1(A)}M) \subseteqq \max C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$. En appliquant le corollaire 6.8 on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 6.11. *Soit A un anneau Krull et M un A-module torsionné (au sens classique). Alors il existe un morphisme*

$$f\colon M \to \bigoplus_{ht(\mathfrak{p})=1} M_{\mathfrak{p}}$$

tel que $(\ker f)_{\mathfrak{p}} = (\operatorname{coker} f)_{\mathfrak{p}} = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in Ht_1(A)$.

DÉMONSTRATION. Nous considérons la topologie additive $F_{Ht_1(A)} = \{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \cap (A - \mathfrak{p}) \neq \emptyset,\ \mathfrak{p} \in Ht_1(A)\}$.

Le treillis $C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$ est noethérien (exemple 2.11) et $\max C_{F_{Ht_1(A)}}(A) = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A,\ ht(\mathfrak{p}) = 1\}$.

Si $F_{Ht_1(A)}M$ est le plus grand sous-module de M qui appartient à $\mathscr{I}_{Ht_1(A)}$, alors $M/F_{Ht_1(A)}M$ est torsionné au sens classique et $\operatorname{Ass}(M/F_{Ht_1}M) \subseteqq \max C_{F_{Ht_1(A)}}(A)$. Ensuite on applique le corollaire 6.8.

REMARQUE 6.12. Ce résultat est plus fort que le théorème 5 ([5], p. 59).

7. Conditions pour lesquelles $C_F(A)$ est un treillis distributif. Dans ce paragraphe A est un anneau commutatif quelconque et F représente une topologie additive stable, c'est-à-dire $F = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A} F_{\mathfrak{p}}$.

Le treillis $C_F(A)$ est distributif si l'une des deux conditions équivalentes est remplie:

1) $\mathfrak{a} \vee (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) \wedge (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) \qquad \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in C_F(A)$.

2) $\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \vee (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c})$.

LEMME 7.1. *Si F est une topologie additive stable sur A et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux* *idéaux tel que* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *est* F*-torsionné, alors* $\mathfrak{a}^{\sim} = \mathfrak{b}^{\sim}$.

DÉMONSTRATION. Il est clair que $\mathfrak{a}^{\sim} \subset \mathfrak{b}^{\sim}$. Soit $x \in \mathfrak{b}^{\sim}$, alors $(\mathfrak{b}:x) \in F$. Soit $\lambda \in (\mathfrak{b}: x)$ un élément quelconque. Comme $\lambda x \in \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ est F-torsionné, alors $(\mathfrak{a}: \lambda x) \in F$. D'autre part, comme $((\mathfrak{a}: x): \lambda) = (\mathfrak{a}: \lambda x)$ on obtient que $((\mathfrak{a}: x): \lambda) \in F$, d'où $(\mathfrak{a}: x) \in F$ et donc $x \in \mathfrak{a}^{\sim}$.

LEMME 7.2. *Soit* F *une topologie additive stable sur* A *et* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *deux idéaux de* A. *Alors les affirmations suivantes sont vraies*:

1) $\mathfrak{a}^{\sim} \vee \mathfrak{b}^{\sim} = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\sim}$.

2) $\mathfrak{a}^{\sim} \wedge \mathfrak{b}^{\sim} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{\sim}$.

DÉMONSTRATION. 1) On sait que $\mathfrak{a}^{\sim} \vee \mathfrak{b}^{\sim} = (\mathfrak{a}^{\sim} + \mathfrak{b}^{\sim})^{\sim}$. Soit $z \in \mathfrak{a}^{\sim} + \mathfrak{b}^{\sim}$, alors $z = x + y$ avec $x \in \mathfrak{a}^{\sim}$ et $y \in \mathfrak{b}^{\sim}$. Mais

$$((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}): (x + y)) \supseteq (\mathfrak{a}: x) \cap (\mathfrak{b}: y) .$$

Comme $(\mathfrak{a}: x) \in F$ et $(\mathfrak{b}: y) \in F$ alors $((\mathfrak{a} + \mathfrak{b}): (x + y)) \in F$ et donc $z \in (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\sim}$. Par suite $\mathfrak{a}^{\sim} + \mathfrak{b}^{\sim}/\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est F-torsionné et donc $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^{\sim} = (\mathfrak{a}^{\sim} + \mathfrak{b}^{\sim})^{\sim}$ (lemme 7.1).

2) Soit $x \in \mathfrak{a}^{\sim} \cap \mathfrak{b}^{\sim}$; alors $(\mathfrak{a}: x) \in F$ et $(\mathfrak{b}: x) \in F$.

Comme $((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}): x) \supseteq (\mathfrak{a}: x) \cap (\mathfrak{b}: x)$ alors $((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}): x) \in F$ et donc $\mathfrak{a}^{\sim} \cap \mathfrak{b}^{\sim}/\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est F-torsionné.

D'après le lemme 7.1 on déduit que $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^{\sim} = (\mathfrak{a}^{\sim} \cap \mathfrak{b}^{\sim})$.

Nous rappelons qu'un anneau A, commutatif est nommé arithmétique [13] si le treillis des idéaux de A est distributif.

Un anneau local A est arithmétique si et seulement si le treillis des idéaux de A est totalement ordonné [13].

THÉORÈME 7.3. *Soit* F *une topologie additive stable sur* A. *Les affirmations suivantes sont équivalentes*:

1) $C_F(A)$ *est un treillis distributif.*

2) *Si* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *sont des idéaux de* A, *alors* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})/(\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}))$ *est* F*-torsionné.*

3) *Si* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ *sont des idéaux de* A, *alors* $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})/((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}))$ *est* F*-torsionné.*

4) *Pour tout* $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$, $A_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau arithmétique.*

DÉMONSTRATION. Les assertions $1) \Leftrightarrow 2)$ et $1) \Leftrightarrow 3)$ résultent du lemme 7.2.

$2) \Rightarrow 4)$. Soit $\mathfrak{p} \in C_F(A) \cap \operatorname{Spec} A$ et $\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \mathfrak{c}^*$ des idéaux de $A_{\mathfrak{p}}$.

Désignons par: $\mathfrak{a} = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{a}^*)$, $\mathfrak{b} = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{b}^*)$, $\mathfrak{c} = \varphi_{\mathfrak{p}}^{-1}(\mathfrak{c}^*)$.

Il est clair que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{(\mathfrak{p})}$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_{(\mathfrak{p})}$; donc $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in C_F(A)$ (proposition 2.5).

D'après 2) $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})/(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}))$ est F-torsionné, donc $[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})]_\mathfrak{p}=[\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})]_\mathfrak{p}$; d'où $(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+\mathfrak{b}_\mathfrak{p})\cap(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+\mathfrak{c}_\mathfrak{p})=\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{c}_\mathfrak{p})$.

Comme $\mathfrak{a}^*=\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{b}^*=\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{c}^*=\mathfrak{c}_\mathfrak{p}$ il en résulte que $A_\mathfrak{p}$ est un anneau arithmétique.

4) $\Rightarrow$ 2) Soit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des idéaux de A. Comme

$(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+\mathfrak{b}_\mathfrak{p})\cap(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+\mathfrak{c}_\mathfrak{p})=\mathfrak{a}_\mathfrak{p}+(\mathfrak{b}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{c}_\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p}\in C_F(A)\cap\operatorname{Spec}A$ il en résulte que

$$[(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})/(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}))]_\mathfrak{p}=0$$

et par suite $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})/(\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}))$ est F-torsionné.

Quand A est un anneau intègre on obtient:

COROLLAIRE 7.4. *Soit A un anneau intègre et F une topologie additive stable sur A. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

1) *$C_F(A)$ est un treillis distributif.*

2) *Pour tout $\mathfrak{p}\in C_F(A)\cap\operatorname{Spec}A$, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation* ([4], *chap.* 6).

COROLLAIRE 7.5. *Soit A un anneau quelconque et F une topologie additive stable sur A. Alors, si $C_F(A)$ est un treillis distributif, tout élément $\mathfrak{q}\in C_F(A)$ qui est un idéal $\mathfrak{p}$-primaire dans A, est un élément irréductible dans $C_F(A)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ où $\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in C_F(A)$.

D'après le lemme 3.4 $\mathfrak{p}\in C_F(A)$. Comme $\mathfrak{q}_\mathfrak{p}=\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{b}_\mathfrak{p}$ et $A_\mathfrak{p}$ est un anneau arithmétique, alors $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$ ou $\mathfrak{b}_\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$. Supposons que $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}=\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$. Alors $\varphi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})=\varphi_\mathfrak{p}^{-1}(\mathfrak{q}_\mathfrak{p})$ d'où $\mathfrak{q}_{(\mathfrak{p})}=\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$. Comme $\mathfrak{q}=\mathfrak{q}_{(\mathfrak{p})}$ il en résulte que $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}_{(\mathfrak{p})}$, d'où $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$.

COROLLAIRE 7.6. *Soit A un anneau intègre et K son corps de fractions. Soit B un anneau, tel que $A\subset B\subset K$ et F une topologie additive stable sur A.*

Nous considérons la topologie suivante additive stable sur B:

$F'=\{\mathfrak{b}\mid\mathfrak{b}\subset B,\ \mathfrak{b}\cap(B-\mathfrak{P})\neq\emptyset$ pour tout $\mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}B$ avec $\mathfrak{P}\cap A\in C_F(A)\}$.

Si $C_F(A)$ est un treillis distributif, alors $C_{F'}(B)$ est un treillis distributif.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{P}\in C_{F'}(B)\cap\operatorname{Spec}B$; donc $\mathfrak{P}\cap A\notin F$.

Si nous notons $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\cap A$, alors $A_\mathfrak{p}\subset B_\mathfrak{p}$. Comme $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation pour K, $B_\mathfrak{P}$ est un anneau de valuation pour K ([4], chap. 6, proposition 1, p. 110).

Donc d'après le théorème 7.3, $C_{F'}(B)$ est un treillis distributif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. S. ALIN, Structure of torsion modules. Ph. D. Thesis. U. of Nebraska, 1967.
[2] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, ch. 1 et 2.
[3] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, ch. 3 et 4.
[4] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, ch. 5 et 6.
[5] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, ch 7.
[6] J. BECK, Injective Modules over a Krull domain. J. Algebra, 17 (1971), 116-131.
[7] P. M. COHN, Universal algebra, Harper and Row, 1965.
[8] A. CAILLEAU, Une caractérisation des modules injectifs, C. R. Acad. Sci. Paris, 69, Série A, (1969), p. 997.
[9] S. E. DICKSON, A torsion theory for abelian categories. Trans. Amer. Math. Soc. 121, (1966), 223-235.
[10] P. GABRIEL, Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 323-448
[11] L. CLABORN AND L. FOSSUM, Class group of n-Noetherian rings, J. Algebra 10 (1968), 263-285.
[12] J. FORT, Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module, Math. Z. 103 (1968), 369-388.
[13] C. JENSEN, Arithmetical rings. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 17 (1966), 115-123.
[14] M. HACQUE, Localizations commutatives stables, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 270 (1970), 995-998.
[15] E. MATLIS, Injective modules over noetherian rings, Pacific J. Math., vol. 8, No. 3 (1958), 511-528.
[16] MIYASHITA, Quasi projective modules, Perfect modules and a theorem for modular lattices, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.—Math. 19 (1966), 86-110.
[17] C. NĂSTĂSESCU AND C. NIŢĂ, Objets noethériens par rapport à une sous-catégorie épaisse d'une catégorie abélienne, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. nr. 9 (1965), 1459-1468.
[18] C. NĂSTĂSESCU AND N. POPESCU, Sur la structure des objets de certaines catégories abéliennes, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 262 (1966), 1295-1297.
[19] C. NĂSTĂSESCU AND N. POPESCU, Anneaux semi-artiniens. Bull. Soc. Math. France, 96 (1968), 357-368.
[20] C. NĂSTĂSESCU AND N. POPESCU, On the localization ring of a ring, J. Algebra, 15 (1970), 41-56.
[21] C. NĂSTĂSESCU, Décomposition primaire dans les anneaux semiartiniens, J. Algebra, vol. 14, No. 2 (1970), 170-181.
[22] BO. STENSTRÖM, Rings and Modules of Quotients, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag, vol. 237, (1971).
[23] CARL FAITH AND ELBERT WALKER, Direct-sum Representations of Injectives Modules, J. Algebra, 5 (1967), 203-221.
[24] M. TEPLY, Torsion free injective modules,Pacific J. Math. 28, (1969), 441-453.

UNIVERSITÉ DE BUCAREST
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUE-MÉCANIQUE
14, RUE ACADEMIEI
BUCAREST, ROUMANIE