

FLOTS RIEMANNIENS SUR LES 4-VARIÉTÉS COMPACTES

RUI ALMEIDA* ET PIERRE MOLINO

(Received June 6, 1985)

Introduction. La différentiabilité est entendue au sens C^∞ .

Un *flot riemannien* est un triple (V, \mathcal{F}, g_T) , où V est une n -variété, \mathcal{F} un feuilletage orienté de dimension 1, et g_T une métrique transverse, c-à-d. une structure euclidienne sur le fibré normal $Q = TV/T\mathcal{F}$, localement projectable en une structure riemannienne sur une variété transverse.

Un cas important est celui des *flots isométriques*, où V est une variété riemannienne, \mathcal{F} le feuilletage défini par les orbites d'un champ de Killing sans singularités, et g_T la composante de la métrique sur $(T\mathcal{F})^\perp = Q$.

Dans la suite, on supposera toujours V orientée, compacte et connexe. La géométrie globale des flots riemanniens est alors assez bien connue, et généralise de près celle des flots isométriques [2] [10] [11]. Les adhérences des feuilles sont des tores sur lesquels le flot est conjugué d'un flot linéaire. Si (T^{k+1}, \mathcal{F}_v) est une adhérence de dimension maximale, \mathcal{F}_v étant le flot linéaire défini à partir du vecteur v de R^{k+1} , l'*algèbre de Lie structurale* [9] du feuilletage est R^k . Transversalement aux feuilles, on peut regarder les adhérences comme les orbites d'un faisceau de germes de *champs de Killing transverses*, c-à-d. de sections de Q localement projectables suivant des champs de Killing sur une variété riemannienne transverse [8].

Carrière [2] a obtenu une classification des flots riemanniens en dimension $n = 3$. En fait la situation est alors assez simple, les valeurs possibles de k étant 0, 1 ou 2: si $k = 0$, les feuilles sont compactes et définissent une "fibration de Seifert" de V sur une variété au sens de Satake [17]. Si $k = 2$, les feuilles sont denses et (V, \mathcal{F}) est le tore T^3 muni d'un flot linéaire. Si $k = 1$, ou bien les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration de V sur S^1 , ou bien il y a deux feuilles compactes, et la variété s'obtient en recollant des voisinages tubulaires de ces deux feuilles, sur chacun desquels \mathcal{F} est défini par suspension d'une rotation irrationnelle du disque par la méthode de Haefliger [6].

Le but du présent travail est de *classifier de façon analogue les flots riemanniens en dimension 4*. Les valeurs possibles de k sont alors 0, 1, 2

* Le premier auteur a bénéficié d'une bourse de la FAPESP

ou 3. Pour $k = 0, 3$ et 2 , les résultats sont tout à fait analogues à ceux de Carrière [en fait, il en serait de même pour n quelconque et $k = 0, n - 1$ et $n - 2$]. Par contre, pour $k = 1$, la situation est plus compliquée et conduit à une grande variété de modèles.

Pour $k = 0$, les feuilles sont compactes et définissent une fibration de Seifert de V sur une variété de Sataké de dimension 3.

Pour $k = 3$, les feuilles sont denses et (V, \mathcal{F}) est le tore T^4 muni d'un flot linéaire.

Pour $k = 2$, ou bien les adhérences des feuilles sont les fibres d'une fibration $V \rightarrow S^1$ [avec pour fibre-type T^3 muni d'un flot linéaire dense], ou bien il y a deux adhérences qui sont des tores T^2 , et (V, \mathcal{F}) s'obtient en recollant des voisinages tubulaires de ces deux adhérences, sur chacun desquels \mathcal{F} est un flot isométrique modèle.

Pour $k = 1$, l'espace des adhérences des feuilles est une surface de Sataké à bord $(W, \partial W)$. Soit π la projection de V sur W . Pour tout $y \in \partial W$, $\pi^{-1}(y)$ est une feuille compacte. Si y est un point singulier dans l'intérieur $\overset{\circ}{W}$ de W [ces points sont isolés], $\pi^{-1}(y)$ est une adhérence de dimension 2 qui a de l'holonomie en tant que feuille du feuilletage défini par les adhérences sur $\pi^{-1}(\overset{\circ}{W})$. Pour décrire le flot (V, \mathcal{F}) , on commence par enlever à W un voisinage tubulaire du bord, et un disque centré en chacun de ses points singuliers. On obtient ainsi une vraie surface à bord $(W', \partial W')$.

$V' = \pi^{-1}(W')$ est alors un fibré localement trivial de base W' et de fibre-type (T^2, \mathcal{F}_v) . Son groupe structural se réduit à un groupe \tilde{G} de transformations affines de (T^2, \mathcal{F}_v) , ayant pour composante connexe de l'élément neutre le groupe des translations T^2 . Le fibré principal \tilde{V}' de base W' et groupe structural \tilde{G} correspondant est connexe, et admet une trivialisatıon au-dessus du bord $\partial W'$. On peut reconstruire (V', \mathcal{F}) à partir de \tilde{V}' par l'action de \tilde{G} sur la fibre-type (T^2, \mathcal{F}_v) . On achève de reconstituer le feuilletage (V, \mathcal{F}) en recollant sur les composantes connexes de $\partial V'$ [c-à-d. au-dessus des composantes connexes de $\partial W'$] des flots isométriques modèles, fabriqués en étudiant la structure du flot \mathcal{F} sur les composantes connexes de $\pi^{-1}(W - \overset{\circ}{W}')$.

Les constructions précises et les démonstrations sont données au paragraphe II. Au premier paragraphe on a rassemblé [et, sur certains points, complété] les résultats relatifs aux flots riemanniens, et aux feuilletages riemanniens en général, dont nous avons besoin.

Terminons par deux remarques. En premier lieu, si (V, \mathcal{F}, g_T) est isométrique, \mathcal{F} est défini par les orbites d'un groupe à un paramètre H d'isométries globales. L'adhérence de H dans le groupe de toutes les

isométries est un tore T^{k+1} , et l'étude du flot se ramène à l'étude d'une action sans points fixes de T^{k+1} sur V . Ce type de problème a été traité par différents auteurs, en particulier Orlik et Raymond [12] [13].

En second lieu, on observe que pour $n = 3$ les modèles obtenus par Carrière étaient tous isométriques à l'exception d'un seul [correspondant à $k = 1$, (V, \mathcal{F}) étant un fibré non trivial sur S^1 de fibre-type (T^2, \mathcal{F}_v) , où $v \in \mathbf{R}^2$ a une pente algébrique d'ordre 2]. Ici on trouve, outre l'analogue du flot non isométrique de Carrière [pour $k = 2$], une grande variété de modèles non isométriques pour $k = 1$, avec ou sans feuilles compactes.

Nous terminons ce travail par une récapitulation des modèles non isométriques obtenus.

I. Géométrie des flots riemanniens. (V, \mathcal{F}, g_T) est un flot riemannien sur la n -variété orientée, compacte et connexe V . Nous rassemblons ici des résultats établis dans [2] [4] [8] [9] [10] [11] [15].

I.1. Adhérences des feuilles et faisceau transverse central. Soit $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs feuilletés globaux. Si X est un tel champ, la section correspondante \bar{X} du fibré normal Q est dite champ transverse. Soit $\mathcal{I}(V, \mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs transverses. Une orbite du champ transverse \bar{X} est la réunion des feuilles qui rencontrent une même orbite de X ; on définit de même les orbites d'une sous-algèbre de Lie de $\mathcal{I}(V, \mathcal{F})$. On peut également parler de champs transverses locaux, et de germes de champs transverses.

Si (S, g_S) est une variété transverse locale munie de la métrique riemannienne définie par g_T , la projection locale de V sur S suivant les feuilles fait correspondre au champ transverse \bar{X} un champ de vecteurs \bar{X}_S sur S . En particulier, \bar{X} sera un *champ de Killing transverse* [8] si, pour toute variété transverse locale (S, g_S) , le champ de vecteurs correspondant \bar{X}_S est un champ de Killing.

Ceci étant, la propriété fondamentale des feuilletages riemanniens est l'existence du *faisceau transverse central* [8] $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$. C'est un faisceau localement constant d'algèbres de Lie de germes de champs de Killing transverses ayant les propriétés suivantes:

- (i) Les orbites de $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$ sont les adhérences des feuilles.
- (ii) Les sections locales de ce faisceau commutent avec tous les champs transverses globaux.
- (iii) $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$ ne dépend pas de la métrique transverse g_T .

Dans le cas des flots, il résulte de [1] que la fibre-type de $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$ est une algèbre de Lie abélienne \mathbf{R}^k . Localement, sur une variété transverse (S, g_S) simplement connexe, $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$ définit une algèbre de Lie

abélienne \mathcal{A}_S de champs de Killing dont les orbites sont les composantes connexes des traces sur S des adhérences des feuilles. Comme \mathcal{A}_S est abélienne, ses orbites sont de dimension maximale égale à la dimension de \mathcal{A}_S , c.à.d. à k . Donc les *adhérences régulières* des feuilles sont de dimension $k + 1$. D'après [1], ce sont des tores T^{k+1} sur lesquels le flot est conjugué du flot linéaire \mathcal{F}_v défini par un vecteur v de \mathbf{R}^{k+1} . En restriction à une adhérence régulière, le faisceau $\mathcal{C}(V, \mathcal{F})$ est constant et s'identifie aux germes des champs transverses globaux de (T^{k+1}, \mathcal{F}_v) qui forment une algèbre de Lie $\mathfrak{L}(T^{k+1}, \mathcal{F}_v)$ isomorphe à \mathbf{R}^k .

I.2. Stratification de l'espace des adhérences et orbites de $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$. Notons W l'espace des adhérences des feuilles, muni de la topologie quotient, et $\pi: V \rightarrow W$ la projection canonique. On peut décrire de la façon suivante [15] la stratification naturelle de W :

Pour $0 \leq r \leq k$, la réunion Σ_r des adhérences de feuilles de dimension $r + 1$ forme une sous-variété propre de V . Sur Σ_r les adhérences des feuilles définissent un feuilletage riemannien $\bar{\mathcal{F}}_r$ à feuilles compactes. Donc l'espace des feuilles de ce feuilletage $W_r = \pi(\Sigma_r)$ est une variété de Sataké. De plus les feuilles de $\bar{\mathcal{F}}_r$ ont une holonomie finie. La réunion Σ_r^j des feuilles de $\bar{\mathcal{F}}_r$ dont l'holonomie a pour cardinal j est une sous-variété propre de Σ_r , donc de V , et le feuilletage induit par $\bar{\mathcal{F}}_r$ sur Σ_r^j est sans holonomie. Par suite $W_r^j = \pi(\Sigma_r^j)$ est une variété différentiable ordinaire. En fait $\cup_{j>1} W_r^j$ est l'ensemble des points singuliers de W_r [7].

Il est clair que chaque Σ_r^j est réunion d'orbites de $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$.

Pierrot [15] a observé qu'en tout point x de la strate Σ_r^j l'orbite de $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$ est transverse dans la strate à l'adhérence \bar{F}_x de la feuille passant par ce point. En termes de champs de vecteurs sur l'espace stratifié W , ce résultat peut s'exprimer de la façon suivante: l'espace tangent en un point y de W étant défini comme l'espace tangent à la strate W_r^j contenant y , et les champs de vecteurs sur W étant les projetés des champs feuilletés globaux de (V, \mathcal{F}) , on voit que *l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur W est transitive sur chaque strate*, ses orbites sont les composantes connexes des strates.

I.3. Flots riemanniens et flots isométriques. Les flots isométriques peuvent être caractérisés de la manière suivante [11]: *le flot riemannien (V, \mathcal{F}, g_T) est isométrique si, et seulement si, le faisceau transverse central $\mathcal{C}(V, \mathcal{F})$ admet une trivialisatıon globale [c.à.d. est globalement constant]*.

D'où l'intérêt du *revêtement central* introduit en [10]: On peut regarder $\mathcal{C}(V, \mathcal{F})$ comme le faisceau des germes de sections d'un fibré

vectoriel \mathbb{C} de rang k sur V , qui sont invariantes par transport parallèle à l'aide d'une connexion plate ∇ . Si $\hat{\mathbb{C}}$ est le $GL(k, \mathbf{R})$ -fibré principal des repères de \mathbb{C} , ∇ définit une connexion principale sans courbure $\hat{\omega}$ sur $\hat{\mathbb{C}}$. Soit \tilde{V} une nappe d'holonomie de $\hat{\omega}$, de sorte que la projection $p: \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement galoisien. On relève \mathcal{F} et g_T respectivement en $\tilde{\mathcal{F}}$ et \tilde{g}_T sur \tilde{V} . Le flot riemannien $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ est dit revêtement central de (V, \mathcal{F}, g_T) .

Si (V, \mathcal{F}, g_T) était isométrique, $p: \tilde{V} \rightarrow V$ est un difféomorphisme. Dans le cas général, \tilde{V} n'est pas nécessairement compacte; toutefois $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ reste un *flot riemannien* [transversalement] *complet*, ce qui permet d'utiliser encore l'étude géométrique précédente. Comme $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$ est constant au-dessus de chaque adhérence régulière, les adhérences correspondantes des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ se projettent suivant les adhérences des feuilles de \mathcal{F} . Ceci entraîne que l'algèbre de Lie structurale de $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ est la même que celle de (V, \mathcal{F}, g_T) , à savoir \mathbf{R}^k . De même, le faisceau transverse central $\mathcal{E}(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}})$ est la préimage par p de $\mathcal{E}(V, \mathcal{F})$, donc il est constant, d'où il résulte que $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ est *isométrique*.

I.4. Définition du groupe \tilde{G} . (V, \mathcal{F}, g_T) est dit *régulier* si $W = W_k$, c.à.d. si toutes les adhérences de feuilles sont régulières; le flot est dit *complètement régulier* si en outre ces adhérences sont sans holonomie, c.à.d. si $W = W_k^1$.

Supposons un instant le flot complètement régulier. Alors l'algèbre de Lie $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$ des champs feuilletés est transitive sur V [10]. La fibration $\pi: V \rightarrow W$ admet pour groupe structural le groupe des automorphismes de la fibre-type $(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v)$. Ce groupe $\text{Aut}(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v)$ se rétracte par déformation, d'après [4] [14] sur le groupe $\text{Aff}(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v)$ des transformations affines du tore qui respectent le flot. $\text{Aff}(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v)$ est le produit semi-direct $\mathbf{T}^{k+1} \times \hat{G}_v$ des translations du tore par le groupe \hat{G}_v des transformations de \mathbf{T}^{k+1} provenant des automorphismes linéaires de \mathbf{R}^{k+1} dont la matrice A appartient à $SL(k+1, \mathbf{Z})$ et admet v pour vecteur propre [avec une valeur propre $\lambda_A > 0$]. Remarquons en passant que $A \rightarrow \lambda_A$ définit un isomorphisme de \hat{G}_v sur un groupe multiplicatif de nombres réels positifs, d'où il résulte que *tout sous-groupe de \hat{G}_v non réduit à l'élément neutre est infini*.

Le groupe structural de la fibration $\pi: V \rightarrow W$ peut être réduit à $\text{Aff}(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v) = \mathbf{T}^{k+1} \times \hat{G}_v$, ce qui permet de définir un fibré principal associé $\hat{V}(W, \hat{\pi}, \text{Aff}(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v))$, ou "fibré des repères" du précédent. On voit que V s'identifie à \hat{V}/\hat{G}_v , et que \hat{V} est donc un revêtement, éventuellement non connexe, de V . Soit \tilde{V} une composante connexe de ce revêtement,

$p: \tilde{V} \rightarrow V$ sa projection sur V . Par construction, \tilde{V} est un \tilde{G} -fibré principal de base W , où \tilde{G} est un sous-groupe de $\mathbf{T}^{k+1} \times \hat{G}_v$ contenant \mathbf{T}^{k+1} . On aura $\tilde{G} = \mathbf{T}^{k+1} \times G_v$, où G_v est un sous-groupe de \hat{G}_v . Le flot (V, \mathcal{F}, g_T) est isométrique si, et seulement si, $\tilde{G} = \mathbf{T}^{k+1}$, c.à.d. $G_v = \{e\}$.

$p: \tilde{V} \rightarrow V$ est un revêtement galoisien de groupe structural G_v . Soient $\tilde{\mathcal{F}}$ et \tilde{g}_T les préimages respectives de \mathcal{F} et g_T par p . Le flot $\tilde{\mathcal{F}}$ est l'orbite du champ fondamental du \tilde{G} -fibré principal \tilde{V} associé à l'élément v de l'algèbre de Lie \mathbf{R}^{k+1} de \tilde{G} . D'où il résulte que $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ est isométrique. Si l'on observe de plus que les éléments de G_v sont entièrement déterminés par leur action sur le parallélisme transverse de $(\mathbf{T}^{k+1}, \mathcal{F}_v)$, on en déduit facilement que $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ s'identifie à un revêtement central de (V, \mathcal{F}, g_T) au sens défini en I.3, ce qui justifie les notations.

Revenons maintenant au cas général. La strate Σ_k^1 est un ouvert dense de V , appelé *ouvert complètement régulier*, et $\mathcal{L}(V, \mathcal{F})$ est transitive sur cet ouvert [10]. Appliquant les résultats précédents à $(\Sigma_k^1, \mathcal{F}, g_T)$, on pourra définir le groupe structural \tilde{G} , et un \tilde{G} -fibré principal connexe $\tilde{\Sigma}_k^1$ de base W_k^1 , de manière que $\Sigma_k^1 = \tilde{\Sigma}_k^1/G_v$ et que $(\tilde{\Sigma}_k^1, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ s'identifie à un revêtement central de $(\Sigma_k^1, \mathcal{F}, g_T)$.

II. Flots riemanniens en dimension 4. Désormais nous supposons $n = 4$. Comme \mathcal{F} est de codimension 3, l'espace des feuilles W a toujours la structure d'une variété de Sataké—avec ou sans bord—la projection $\pi: V \rightarrow W$ étant un morphisme de variétés de Sataké avec pliage autour de la réunion des adhérences singulières [9]. En fait, nous expliciterons dans chaque cas cette situation.

Faisons une remarque préliminaire: par passage éventuel à un revêtement à deux feuillets de V , on peut toujours se ramener au cas où W est orientée.

II.1. Cas où $k = 0$. Les feuilles sont compactes et à holonomie finie, et sont donc les orbites d'une action localement libre de S^1 [3]. L'espace des feuilles W est une 3-variété de Sataké orientée compacte connexe. Les points singuliers de W , qui correspondent aux feuilles ayant de l'holonomie, ne sont pas en général isolés. Bien entendu, un tel flot est isométrique.

On peut construire par suspension des exemples de cette situation: soit ρ la rotation d'angle α rationnel de la sphère unité S^3 de \mathbf{R}^4 autour du sous-espace \mathbf{R}^2 . Par suspension de cette rotation, on obtient un flot riemannien pour lequel $W = S^3/\rho$. Les points singuliers de W correspondent au cercle des points de S^3 invariants par ρ .

II.2. Cas où $k = 3$. Les feuilles sont denses et (V, \mathcal{F}) est le tore

T^4 muni d'un flot linéaire dense \mathcal{F}_v . Là encore, le flot est isométrique.

II.3. Cas où $k = 2$. Nous allons traiter séparément le cas régulier et le cas non régulier.

Cas régulier. L'espace des adhérences des feuilles est une variété de Satake W compacte connexe et orientée. C'est donc S^1 , et il n'y a pas de point singulier. Ainsi le flot est complètement régulier; la projection $\pi: V \rightarrow S^1$ est une fibration localement triviale dont le groupe structural se réduit, d'après I.4, à un sous-groupe $G = T^3 \times G_v$ de transformations affines de la fibre-type (T^3, \mathcal{F}_v) .

On a vu que le revêtement central $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ du flot pouvait être regardé comme un \tilde{G} -fibré principal de base S^1 . En relevant dans \tilde{V} le lacet fondamental de S^1 , on aboutit, à homotopie près, à un élément de G_v . Soit $A \in SL(3, \mathbf{Z})$ la matrice correspondante, qui admet v pour vecteur propre. Si φ_A est la transformation de T^3 définie par A , V est le quotient de $[0, 1] \times T^3$ par la relation $(0, x) \sim (1, \varphi_A(x))$, \mathcal{F} étant le flot obtenu à partir du flot vertical \mathcal{F}_v sur les fibres de $[0, 1] \times T^3 \rightarrow [0, 1]$.

Le flot est isométrique si, et seulement si, A est la matrice identité.

Cas non régulier. L'espace des adhérences des feuilles peut être décrit localement [à l'aide d'une variété riemannienne transverse (S, g_s)] comme l'espace des orbites d'une algèbre de Lie abélienne de dimension 2 de champs de Killing sur une 3-variété riemannienne, ces orbites étant toutes fermées. On voit ainsi que les adhérences singulières sont isolées et que W est défini, au voisinage de l'une de ces adhérences, par "pliage" autour de cette adhérence. Ceci a été décrit en détail dans [9]. Il en résulte que, sur W , l'adhérence singulière définit un "bout". Comme W est compacte et orientée, il y a exactement deux bouts et $W = [0, 1]$, les adhérences singulières étant $\pi^{-1}(0)$ et $\pi^{-1}(1)$.

LEMMA 1. *Si $k = 2$ et si le flot riemannien (V, \mathcal{F}, g_T) n'est pas régulier, il est isométrique.*

DÉMONSTRATION. Soit $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ le revêtement central. On a vu que la dimension de l'adhérence d'une feuille de $\tilde{\mathcal{F}}$ est la même que celle de l'adhérence de la feuille projetée, au moins dans le cas des adhérences régulières. Ceci étant, par le même argument qui vient d'être utilisé pour (V, \mathcal{F}) , on voit que l'espace \tilde{W} des adhérences des feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ a pour "bouts" les adhérences singulières; par connexité, il y a deux bouts au plus. En fait, il y en a au moins deux, c.à.d. autant que d'adhérences singulières pour (V, \mathcal{F}) . Donc, là encore, $\tilde{W} = [0, 1]$. Mais alors, au-dessus de chaque adhérence singulière de (V, \mathcal{F}) il y a une

seule adhérence de $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}})$. Ceci montre que le groupe structural G_v du revêtement $\tilde{V} \rightarrow V$ est fini. Or on a vu que, si G_v n'est pas réduit à l'élément neutre, il est infini. Donc $\tilde{V} \rightarrow V$ est un difféomorphisme et le flot est isométrique. \square

Compte tenu de ce lemme, le flot (V, \mathcal{F}) peut être décrit à partir d'une action de T^3 sur V dont l'espace des orbites est $W = [0, 1]$, les orbites étant régulières sauf $\pi^{-1}(0)$ et $\pi^{-1}(1)$ qui sont de dimension 2. Le flot sera obtenu comme le feuilletage par les orbites d'un sous-groupe à un paramètre H dense de T^3 . L'action considérée de T^3 sera *effective*: c'est l'action d'un groupe global d'isométries.

La fibration principale $\pi: \pi^{-1}(]0, 1[) \rightarrow]0, 1[$ est triviale. Par suite, $\pi^{-1}([0, 1/2])$ et $\pi^{-1}([1/2, 1])$ sont des voisinages tubulaires respectivement de $\pi^{-1}(0)$ et $\pi^{-1}(1)$ pour la métrique invariante par T^3 que l'on aura choisie. *Il suffira donc de décrire l'action de T^3 sur ces voisinages tubulaires et de recoller entre eux les modèles ainsi obtenus.* On notera toujours (T^3, \mathcal{F}_v) le flot induit sur une adhérence régulière ["adhérence-type"], c.à.d. que le sous-groupe H est la projection sur T^3 du sous-groupe Rv de R^3 .

Soient $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ les coordonnées angulaires de T^3 .

En un point d'une orbite singulière, l'isotropie est un sous-groupe compact I de T^3 dont la composante connexe de l'élément neutre est un cercle I_0 . On peut toujours considérer T^3 comme le produit $K \times I_0$, où K est un tore de dimension 2. Si I n'était pas connexe, $I \cap K$ ne serait pas réduit à l'élément neutre et on pourrait facilement trouver des éléments de T^3 opérant de manière triviale sur un voisinage de l'orbite; or ceci est impossible, l'action étant effective, d'où $I = I_0$. On en déduit qu'un voisinage tubulaire de l'orbite singulière considérée s'identifie au produit $K \times \overline{D(0, 1)}$ de K par la boule unité fermée de R^2 , paramétré par (θ', ρ, α') , où $\theta' = (\theta'^1, \theta'^2)$ paramètre K , $\rho \in [0, 1]$ et α' paramètre I , l'action de $T^3 = K \times I$ étant définie de manière évidente. Si v avait pour coordonnées v^1, v^2, v^3 , dans les nouvelles coordonnées angulaires $(\theta'^1, \theta'^2, \alpha')$ du tore, le sous-groupe H sera défini par

$$H = \{(\lambda v'^1, \lambda v'^2, \lambda v'^3) \mid \lambda \in R\}$$

où $v'^i = \sum_{j=1}^3 A_j^i v^j$, la matrice $A = (A_j^i)$ appartenant à $SL(3, Z)$.

La feuille du flot passant par un point $(\theta'_0, \rho_0, \alpha'_0)$ du voisinage tubulaire sera donc

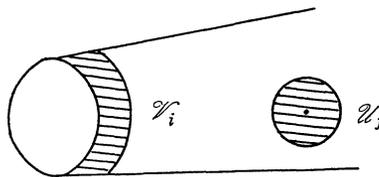
$$\{(\theta_0'^1 + \lambda v'^1, \theta_0'^2 + \lambda v'^2, \rho_0, \alpha'_0 + \lambda v'^3) \mid \lambda \in R\}.$$

On recollera deux des modèles ainsi obtenus à l'aide d'un isomorphisme entre les bords compatible avec l'action de T^3 , donc isotope à l'identité dans les anciennes coordonnées.

II.4. Cas où $k = 1$. C'est le cas difficile. L'espace des adhérences des feuilles peut alors être décrit localement [à l'aide d'une variété riemannienne transverse (S, g_s)] comme l'espace des orbites d'un champ de Killing sur une 3-variété riemannienne, ces orbites étant fermées. Par suite, W a la structure d'une surface de Satake avec bord compacte et connexe [que de plus, comme on l'a vu, on peut supposer orientée]. Les points du bord correspondent aux feuilles compactes, la projection $\pi: V \rightarrow W$ réalisant un *pliage* autour de la réunion Σ_0 des feuilles compactes [9]. Les points singuliers w_1, \dots, w_s dans l'intérieur $\overset{\circ}{W}$ de W correspondent aux adhérences régulières qui ont de l'holonomie. Pour $j = 1, \dots, s$, un voisinage de w_j dans W s'identifie au quotient de \mathbf{R}^2 par une rotation autour de l'origine d'angle $2\pi/n_j$. L'entier $n_j \geq 2$ sera dit *nombre de rotation* du point singulier w_j .

La strate $W_1^1 = \overset{\circ}{W} - \{w_1, \dots, w_s\}$ a pour préimage par π l'ouvert complètement régulier Σ_1^1 . La projection $\pi: \Sigma_1^1 \rightarrow W_1^1$ est une fibration localement triviale dont la fibre-type (T^2, \mathcal{F}_v) sera dite *adhérence-type* du feuilletage. Le groupe $\text{Aff}(T^2, \mathcal{F}_v) = T^2 \times \tilde{G}_v$ est réduit à T^2 si la pente de $v \in \mathbf{R}^2$ n'est pas algébrique d'ordre deux [14]. Comme on l'a vu en I.4, le groupe structural de la fibration $\pi: \Sigma_1^1 \rightarrow W_1^1$ se réduit à un sous-groupe $\tilde{G} = T^2 \times G_v$ de $\text{Aff}(T^2, \mathcal{F}_v)$.

Construction du feuilletage au-dessus de $(W', \partial W')$. On commencera par éliminer les feuilles compactes et les adhérences régulières ayant de l'holonomie de la manière suivante: si on note $\partial W_1, \dots, \partial W_r$ les composantes connexes du bord de W , on considère pour $i = 1, \dots, r$, un voisinage tubulaire ouvert \mathcal{V}_i de ∂W_i . De même, pour $j = 1, \dots, s$, on considère un petit disque ouvert \mathcal{U}_j centré en w_j [modulo la rotation d'angle $2\pi/n_j$]. On choisit les \mathcal{V}_i et les \mathcal{U}_j assez petits pour être disjoints deux à deux, et on pose $W' = W - \bigcup_{i=1}^r \mathcal{V}_i - \bigcup_{j=1}^s \mathcal{U}_j$. On reconstruit alors le feuilletage \mathcal{F} sur la variété à bord $V' = \pi^{-1}(W')$ (voir Figure).



FIGURE

D'après I.4, (V', \mathcal{F}) peut être obtenu à partir d'un \tilde{G} -fibré principal connexe \tilde{V}' de base W' , muni du flot $\tilde{\mathcal{F}}'$ engendré par le champ fonda-

mental associé au vecteur v de l'algèbre de Lie R^2 de \tilde{G} . Ceci étant, l'action de \tilde{G} sur (T^2, \mathcal{F}_v) définit un fibré associé de base W' et de fibre-type (T^2, \mathcal{F}_v) qui s'identifie à (V', \mathcal{F}) . Si l'on veut, on peut regarder (V', \mathcal{F}) comme le quotient de $(\tilde{V}', \tilde{\mathcal{F}}')$ par l'action à droite de G_v .

Le point important est que le \tilde{G} -fibré principal connexe \tilde{V}' qui nous a servi à faire cette construction n'est pas quelconque, comme il résulte du lemme suivant:

LEMMA 2. *En restriction à $\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)$ et $\pi^{-1}(\mathcal{V}_i)$, pour $i = 1, \dots, r$, et $j = 1, \dots, s$, le flot \mathcal{F} est isométrique. Par suite, le \tilde{G} -fibré principal \tilde{V}' est trivialisable au-dessus du bord de W' .*

DÉMONSTRATION. *Montrons que \mathcal{F} est isométrique sur $\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)$ pour $j = 1, \dots, s$.* On remarque que $\pi^{-1}(\mathcal{U}_j)$ est un voisinage tubulaire de $\pi^{-1}(w_j)$, qui a une holonomie de cardinal n_j dans le feuilletage par les adhérences. Par passage à un revêtement $(\pi^{-1}(\mathcal{U}_j))^\wedge$ à n_j feuillets, on se remène à un flot $\hat{\mathcal{F}}$ complètement régulier, dont l'espace des adhérences des feuilles est un disque, donc contractile.

D'après I.4, $\hat{\mathcal{F}}$ est isométrique. Par suite, le revêtement central de $(\pi^{-1}(\mathcal{U}_j), \mathcal{F})$ a un nombre fini de feuillets. Or on a noté en I.4 que si le groupe G_v n'est pas réduit à l'élément neutre, il est infini [dans le cas présent, c'est le groupe structural du revêtement central]. Donc $(\pi^{-1}(\mathcal{U}_j), \mathcal{F})$ est isométrique.

Montrons que \mathcal{F} est isométrique sur $\pi^{-1}(\mathcal{V}_i)$ pour $i = 1, \dots, r$. W est munie d'une distance riemannienne, obtenue par passage au quotient à partir de la métrique transverse g_τ . A l'aide de la distance à ∂W_i et de l'orientation de W , on peut identifier \mathcal{V}_i à $S^1 \times [0, 1]$ paramétré par (θ, ρ) . Vérifions alors que le champ $\partial/\partial\theta$ peut être relevé sur $(\pi^{-1}(\mathcal{V}_i), \mathcal{F})$ en un champ feuilleté X [si l'on veut, c'est en fait un cas particulier de la propriété de transitivité des champs de vecteurs sur W rappelée en I.2].

Les projetés des champs feuilletés forment un module $\mathcal{L}(W)$ sur l'anneau $A^\circ(W)$ des fonctions sur W définies par projection des fonctions basiques de (V, \mathcal{F}) [intégrales premières du flot]. Il suffit alors de vérifier (i) que $A^\circ(W)$ contient, en dehors des points singuliers w_1, \dots, w_s , des partitions de l'unité; (ii) que l'on peut relever en un champ feuilleté un champ collinéaire à $\partial/\partial\theta$, de même sens, et à support arbitrairement petit. Ces deux points se déduisent immédiatement du fait que W est localement le quotient d'une variété riemannienne transverse (S, g_s) par pliage autour de la courbe formée par les traces des feuilles compactes.

Notons $T_i = \{0\} \times [0, 1] \subset \mathcal{V}_i$ et $\mathcal{T}_i = \pi^{-1}(T_i)$.

En intégrant le champ feuilleté X , on définit un automorphisme ϕ de $(\mathcal{F}_i, \mathcal{F})$. On peut alors, en composant π avec la projection $S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$, regarder $(\pi^{-1}(\mathcal{V}_i), \mathcal{F})$ comme fibré sur S^1 avec pour fibre-type $(\mathcal{F}_i, \mathcal{F})$, le groupe structural de la fibration étant engendré par ϕ . Remarquons encore que, par construction, ϕ respecte chaque adhérence de feuille de $(\mathcal{F}_i, \mathcal{F})$.

Sur \mathcal{F}_i , qui est fibré en disques sur S^1 , le flot \mathcal{F} est isométrique: si l'on paramètre $\mathcal{F}_i = S^1 \times \overline{D(0, 1)}$ par (α, ρ, β) , le flot est défini par les orbites du groupe à un paramètre d'isométries (φ_t) défini par $\varphi_t(\alpha, \rho, \beta) = (\alpha + t, \rho, \beta + \lambda t)$ où λ est irrationnel.

Montrer que $(\pi^{-1}(\mathcal{V}_i), \mathcal{F})$ est isométrique, c'est montrer que son faisceau transverse central admet une trivialisatation globale. *Il revient au même de montrer que ϕ respecte une section globale de $\mathcal{E}(\mathcal{F}_i, \mathcal{F})$.* Une telle section est définie par le champ transverse $\overline{\partial/\partial\beta}$. Au besoin en composant ϕ avec une rotation $(\alpha, \rho, \beta) \mapsto (\alpha + \alpha_0, \rho, \beta)$, ce qui ne change pas l'image par ϕ_* de $\overline{\partial/\partial\beta}$, on peut supposer que $\phi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Si, au voisinage de ce point fixe, on projette ϕ sur la variété transverse $\{0\} \times D(0, \rho_0)$, où ρ_0 est assez petit pour que l'application projetée $\bar{\phi}$ soit un difféomorphisme, cette application projetée est de la forme $\bar{\phi}(\rho, \beta) = (\rho, \varphi(\rho, \beta))$. Le fait que ϕ opère sur le faisceau transverse central entraîne $\bar{\phi}_*(\partial/\partial\beta) = \mu\partial/\partial\beta$, d'où $\varphi(\rho, \beta) = \mu\beta + g(\rho)$.

Le fait que $\bar{\phi}: D(0, \rho_0) \rightarrow D(0, \rho_0)$ soit un difféomorphisme implique $\mu = \pm 1$. En fait, comme ϕ respecte l'orientation du flot et aussi celle de l'espace des adhérences des feuilles, on aura $\mu = +1$, d'où $\phi_*(\overline{\partial/\partial\beta}) = \overline{\partial/\partial\beta}$, ce qu'il fallait démontrer.

Le fait que \tilde{V}' soit trivialisable au-dessus de $\partial W'$ résulte des points précédents. En effet, le flot induit par \mathcal{F} sur $\partial V' = \pi^{-1}(\partial W')$ est isométrique. Donc son revêtement central est trivial d'après I.3, d'où le résultat. □

Il nous reste maintenant à reconstituer (V, \mathcal{F}) en recollant sur les composantes connexes de $\partial V'$ des flots isométriques.

Pour cela on doit considérer deux cas différents: nous noterons $\partial W'_1, \dots, \partial W'_r$ les composantes connexes de $\partial W'$ qui proviennent par rétraction respectivement de $\partial W_1, \dots, \partial W_r$; et nous noterons $\delta W'_1, \dots, \delta W'_s$ les composantes connexes de $\partial W'$ provenant des "trous" respectivement autour de w_1, \dots, w_s .

On observera que $\pi^{-1}(\partial W'_i)$, comme $\pi^{-1}(\delta W'_j)$, est difféomorphe au tore T^2 , la fibration sur le bord correspondant de W' étant la première projection $T^3 = S^1 \times T^2 \rightarrow S^1$, et le flot \mathcal{F} étant défini par l'action sur le

second facteur du sous-groupe H de T^2 déterminé par $v \in R^2$.

(a) Pour $j = 1, \dots, s$, $(\pi^{-1}(\mathcal{U}_j), \mathcal{F})$ est un voisinage tubulaire d'une orbite régulière de T^2 dont l'holonomie a pour cardinal n_j . Un tel voisinage peut être obtenu de la façon suivante:

Sur $T^2 \times \overline{D(0, 1)}$, paramétré par (θ, ρ, α) , où $\theta = (\theta^1, \theta^2)$, on définit la relation d'équivalence

$$(\theta, \rho, \alpha) \sim (\theta + \gamma_j^m, \rho, \alpha + 2\pi m/n_j), \quad m \in \mathbf{Z},$$

où γ_j est le générateur d'un sous-groupe cyclique Γ_j de T^2 de cardinal n_j .

Soit M_{Γ_j} la variété à bord quotient. L'action de T^2 sur $T^2 \times \overline{D(0, 1)}$ passe au quotient en une action naturelle de T^2 sur M_{Γ_j} . On considère le flot $\mathcal{F}_{\Gamma_j^H}$ défini sur M_{Γ_j} par l'action du sous-groupe H . L'espace des adhérences des feuilles de ce flot isométrique s'identifie à \mathcal{U}_j , et le flot induit sur le bord est isomorphe à celui induit par \mathcal{F} sur $\pi^{-1}(\partial W'_j)$.

On pourra donc recoller $(M_{\Gamma_j}, \mathcal{F}_{\Gamma_j^H})$ et (V, \mathcal{F}) par l'identification de $(\partial M_{\Gamma_j}, \mathcal{F}_{\Gamma_j^H})$ avec $(\pi^{-1}(\partial W'_j), \mathcal{F})$.

(b) Pour $i = 1, \dots, r$, $(\pi^{-1}(\mathcal{V}_i), \mathcal{F})$ peut être obtenu à l'aide de l'étude faite dans la démonstration du lemme 2, dont nous reprenons les notations. Sachant que ce flot est isométrique, on le reconstitue de la manière suivante:

Soit $\mathcal{S} = S^1 \times \overline{D(0, 1)}$, paramétré par (α, ρ, β) , et muni de l'action naturelle de T^2 définie par

$$(\theta^1, \theta^2) \cdot (\alpha, \rho, \beta) = (\alpha + \theta^1, \rho, \beta + \theta^2).$$

On considère un automorphisme ϕ de \mathcal{S} commutant avec l'action de T^2 et respectant ρ , et un fibré $M' \rightarrow S^1$ de fibre-type \mathcal{S} , dont le groupe structural est engendré par ϕ . L'action de T^2 sur la fibre-type définit une action de T^2 sur M' verticale pour la fibration. Les orbites du sous-groupe H de T^2 définiront sur ce fibré un flot vertical \mathcal{F}^H .

En fait, comme ϕ respecte ρ et commute avec T^2 , on doit avoir

$$\phi(\alpha, \rho, \beta) = (\alpha + f(\rho), \rho, \beta + g(\rho)).$$

L'ensemble des automorphismes ayant cette forme est connexe par arcs. On peut donc se limiter au modèle trivial correspondant à $\phi = \text{id}$, c.à.d. que $M' = S^1 \times \mathcal{S}$, le flot \mathcal{F}^H étant défini par l'action de H sur le second facteur.

II.5. Récapitulation des modèles non isométriques. Pour $k = 1$, il est clair que si (V, \mathcal{F}) est isométrique il en est de même de $(\Sigma_1^1, \mathcal{F})$ et par suite le groupe G_v est réduit à l'élément neutre. La réciproque

nécessite une démonstration.

LEMMA 3. Si $k = 1$ et si $G_v \subset \text{Aff}(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_v)$ est réduit à l'élément neutre, alors le flot (V, \mathcal{F}) est isométrique.

DÉMONSTRATION. Soit $(\tilde{V}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{g}_T)$ le revêtement central de (V, \mathcal{F}, g_T) . Si \tilde{W} est l'espace des adhérences des feuilles de ce revêtement, on a un diagramme commutatif de projections

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \longrightarrow & \tilde{W} \\ p \downarrow & & \downarrow p_w \\ V & \longrightarrow & W \end{array}$$

Le lemme 2 entraîne que p_w est un revêtement trivialisable au-dessus de $W - \overset{\circ}{W}'$. Le fait que G_v soit réduit à l'élément neutre signifie que p_w est un revêtement trivialisable au-dessus de W' . Comme tout chemin de $W - \overset{\circ}{W}'$ se déforme en un chemin de $\partial W'$, il en résulte que p_w est un revêtement globalement trivialisable. Comme \tilde{W} est connexe, p_w est bijectif et il en est de même de p , d'où le résultat. \square

Compte tenu de ce résultat, les seuls modèles de flots riemanniens non isométriques en dimension 4 [éventuellement après passage à un revêtement d'ordre 2 de la variété] sur une variété compacte connexe orientée sont les suivants:

Pour $k = 2$, on se donne l'adhérence-type $(\mathbf{T}^3, \mathcal{F}_v)$, v étant choisi dans \mathbf{R}^3 de façon qu'il existe $A \in \text{SL}(3, \mathbf{Z})$ différente de l'identité, admettant v pour vecteur propre. Si φ_A est l'automorphisme affine de $(\mathbf{T}^3, \mathcal{F}_v)$ défini par A , V est le quotient de $\mathbf{R} \times \mathbf{T}^3$ par la relation

$$(t, y) \sim (t + 1, \varphi_A(y)).$$

C'est un fibré de base S^1 et fibre-type $(\mathbf{T}^3, \mathcal{F}_v)$; \mathcal{F} est alors le flot vertical sur les fibres.

Pour $k = 1$, on se donne

- (i) une adhérence-type $(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_v)$, où la pente de $v \in \mathbf{R}^2$ est algébrique d'ordre 2,
- (ii) un sous-groupe $\tilde{G} = \mathbf{T}^2 \times G_v$ non connexe de $\text{Aff}(\mathbf{T}^2, \mathcal{F}_v)$,
- (iii) une surface orientée à bord $(W', \partial W')$ dont les composantes connexes du bord seront séparées en deux familles $\{\partial W'_1, \dots, \partial W'_r\}$ et $\{\partial W''_1, \dots, \partial W''_s\}$,
- (iv) un \tilde{G} -fibré principal connexe \tilde{V}' de base W' , trivialisable au-dessus du bord $\partial W'$,
- (v) pour $j = 1, \dots, s$, un sous-groupe fini cyclique Γ_j de \mathbf{T}^2 .

Ceci étant, on considère sur \tilde{V}' le flot $\tilde{\mathcal{F}}'$ engendré par le champ fondamental associé à l'élément v de l'algèbre de Lie \mathbf{R}^2 de \tilde{G} . Par passage au quotient sur $V' = \tilde{V}'/G_v$, on obtient un flot \mathcal{F} riemannien au-dessus de $\partial W'$. Si $\pi: V' \rightarrow W'$ est la projection, on recolle pour $j = 1, \dots, s$, le modèle $(M_{r_j}, \mathcal{F}_{r_j}^H)$ à (V', \mathcal{F}) par identification de son bord avec $(\pi^{-1}(\partial W'_j), \mathcal{F})$, et pour $i = 1, \dots, r$, le modèle (M', \mathcal{F}^H) à (V', \mathcal{F}) par identification de son bord avec $(\pi^{-1}(\partial W'_i), \mathcal{F})$.

On voit qu'on obtient ainsi une grande variété de modèles-réguliers ou non.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. CARON ET Y. CARRIÈRE, Flots transversalement de Lie \mathbf{R}^n ; flots transversalement de Lie minimaux, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A 291 (1980), 477-478.
- [2] Y. CARRIÈRE, Flots riemanniens, in "Structure transverses aux feuilletages", Astérisque 116 (1984), 31-52.
- [3] D. B. EPSTEIN, Foliations with all leaves compact, in "Dynamical systems", Lecture Notes in Math. 468, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
- [4] D. B. EPSTEIN, Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations, in "Structures transverses aux feuilletages", Astérisque 116 (1984), 53-69.
- [5] E. GHYS, Feuilletages riemanniens sur les variétés simplement connexes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 34, 4 (1984), 203-223.
- [6] A. HAEFLIGER, Variété feuilletées, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, 16 (1964), 367-397.
- [7] A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, in "Structures transverses aux feuilletages", Astérisque 116 (1984), 70-97.
- [8] P. MOLINO, Feuilletages riemanniens sur les variétés compactes; champs de Killing transverses, C.R.Ac. Sci. Paris Ser. A 289 (1979), 421-423.
- [9] P. MOLINO, Géométrie globale des feuilletages riemanniens, Proc. Kon. Ned. Akad., A 85(1) (1982), 45-76.
- [10] P. MOLINO, Flots riemanniens et flots isométriques, in "Séminaire de Géométrie Différentielle 1982-83", polycopié, Montpellier.
- [11] P. MOLINO ET V. SERGIESCU, Deux remarques sur les flots riemanniens, Manuscripta Math. 51 (1985), 145-161.
- [12] P. ORLIK, Seifert manifolds, Lecture Notes in Math. 291, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.
- [13] P. ORLIK ET RAYMOND, Actions of the torus on 4-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970), 531-559.
- [14] M. PIERROT, Groupe des automorphismes d'un flot linéaire sur le tore, in "Séminaire de Géométrie Différentielle 1983-84", polycopié, Montpellier.
- [15] M. PIERROT, Orbites des champs feuilletés pour un feuilletage riemannien sur une variété compacte, préprint (1985).
- [16] B. REINHART, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math. 69 (1959), 119-132.
- [17] I. SATAKÉ, The Gauss-Bonnet formula for V -manifolds, J. Math. Soc. of Japan 9 (1957), 464-492.

INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO-PAULO
SÃO-PAULO
BRASIL

MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET
TECHNIQUES DU LANGUEDOC
PLACE E. BATAILLON
34060 MONTPELLIER
FRANCE