ROCKY MOUNTAIN
JOURNAL OF MATHEMATICS
Volume 26, Number 3, Summer 1996

NOUVEAUX LEMMES DE ZÉROS DANS LES GROUPES ALGÉBRIQUES COMMUTATIFS

PATRICE PHILIPPON

ABSTRACT. The aim of this paper is to generalize and improve the results in [**10**] (and [**11**]), mainly with respect to derivations. We allow vanishing conditions along analytic germs not necessarily uniform on the points, and we use Samuel's multiplicity to count the number of conditions. This leads to an estimate which is sharper than the previous ones by a factor equal to the factorial of the dimension of the analytic germ.

1. Introduction. Le but de ce texte est de généraliser et raffiner les résultats de [**10**] et [**11**], principalement en ce qui concerne les dérivations. Ainsi, nous considérons des conditions d'annulation le long de germes analytiques un peu plus généraux que dans [**10**] (*voir* aussi [**11**]) et pas nécessairement uniformes en tous les points.

Le raffinement intervient dans le décompte des conditions d'annulation. De ce point de vue le défaut de [**10**] réside dans la proposition 4.7 où l'on utilise la notion de longueur comme multiplicité d'un idéal primaire. Nous remplaçons ici cette notion par celle de multiplicité de Samuel (*cf.* §4) qui permet de gagner essentiellement une factorielle de la dimension du sous-groupe analytique par rapport à l'estimation de [**10**]. Il faut noter que ce raffinement a été aussi remarqué par M. Laurent. En revanche nous ne sommes pas parvenu à incorporer dans notre présent contexte (plus précisément lorsque la caractéristique est $\neq 0$) le raffinement de [**4**], à savoir supprimer le degré des formules d'addition dans l'estimation finale (ce qui laisse dans la pratique un facteur 2^g, où g est la dimension du groupe algébrique, indésirable).

Nous donnons au paragraphe suivant les notations et résultats généraux. Les paragraphes 3 à 5 reprennent en partie [**10**] (et [**11**]) pour tout ce qui concerne les dérivations et le paragraphe 6 contient les

Received by the editors on February 18, 1995 and in revised form on November 11, 1995.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J81, 14L10. Secondary 13C15.

démonstrations des résultats du paragraphe 2. Les paragraphes 7 et 8 explicitent les résultats généraux dans le cas des groupes produits et des extensions où il est possible de séparer les degrés en différents groupes de fonctions. Enfin, au paragraphe 9 nous donnons une application aux problèmes d'interpolation qui laisse penser que notre estimation peut être encore bien améliorée. Signalons que M. Nakamaye a donné dans [**9**] une présentation plus géométrique du lemme de zéros de [**10**] où le groupe algébrique considéré agit sur une variété algébrique.

Je remercie D. Bertrand et L. Denis pour leurs remarques sur une première version de ce texte.

2. Notations et résultats. Soient K un corps commutatif algébriquement clos et G un groupe algébrique commutatif de dimension g défini et plongé sur K dans un espace projectif $\mathbf{P}_n$. On note $\mathfrak{g}$ l'idéal premier, homogène, de définition de l'adhérence de Zariski $\overline{G}$ de G dans $K[X_0, \dots, X_n]$ et $A = K[X_0, \dots, X_n]/\mathfrak{g}$. Soient $\gamma \in G$ défini sur K et $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de γ dans A, on pose $A_\mathfrak{m}$ le localisé homogène de A en $\mathfrak{m}$ et $\hat{A}_\mathfrak{m}$ le complété de $A_\mathfrak{m}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Comme G est lisse (et K est parfait), l'anneau local, noethérien, complet $\hat{A}_\mathfrak{m}$ est régulier. Et, étant de même caractéristique que son corps résiduel K il résulte de [**2**, Chapitre 8, §5] (ou [**15**, Chapitre 8, §12, p. 307]), que $\hat{A}_\mathfrak{m}$ est isomorphe à $B = K[[T_1, \dots, T_g]]$. Pour tout $\gamma \in G$ on suppose fixé un tel isomorphisme Φ_γ, ce qui revient à choisir pour tout $\mathfrak{m}$ un système de paramètres régulier de $\hat{A}_\mathfrak{m}$.

On peut, par exemple, fixer l'isomorphisme Φ_0 et pour $\gamma \in G$ transporter Φ_0 en Φ_γ par l'addition $s : G \times G \to G$

$$(\mathrm{Id} \otimes \pi) \circ s^* : \hat{A}_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} \hat{A}_{\mathfrak{m}_0} \otimes_K (\hat{A}_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\hat{A}_\mathfrak{m}) \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}_0}$$

où $\pi : \hat{A}_\mathfrak{m} \to \hat{A}_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}\hat{A}_\mathfrak{m} \simeq K$ est la surjection canonique et $s^* : \hat{A}_m \to (A\widehat{\otimes_K}A)_{\mathfrak{m}\otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{m}}$ l'homomorphisme de K-algébres déduit de s. On pose $\tau_\gamma^* = (\mathrm{Id} \otimes \pi) \circ s^*$ et on notera que l'homomorphisme

$$(\mathrm{Id} \otimes \pi') \circ s^* : \hat{A}_{\mathfrak{m}_0} \xrightarrow{\sim} \hat{A}_\mathfrak{m} \otimes_K (\hat{A}_{\mathfrak{m}'}/\mathfrak{m}'\hat{A}_{\mathfrak{m}'}) \simeq \hat{A}_\mathfrak{m}$$

où $\mathfrak{m}'$ désigne l'idéal de définition du point $-\gamma \in G$ est inverse de τ_γ^*, qui est donc un isomorphisme. En caractéristique zéro, on peut encore fixer Φ_0 en choisissant une base de l'espace tangent TG en l'origine de G et en identifiant $\hat{A}_{\mathfrak{m}_0}$ et B via l'application exponentielle (i.e. $P \in A \to P \circ \exp_G \in B$). Dans cette situation un *sous-groupe à t paramètres* est donné comme un K-sous-espace $\mathcal{W}$ de dimension t de TG, et on choisira la base de TG en complétant une base de $\mathcal{W}$. Plus généralement, on retrouve la notion de germe formel le long de $\mathcal{W}$ utilisée dans [**11**].

Le dual $\mathrm{Hom}_K(\hat{A}_{\mathfrak{m}}, K)$ s'identifie au K-espace des opérateurs de dérivation sur $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$. On le munit de la base, notée $\{\partial^{\beta}_{\Phi_\gamma}; \beta \in \mathbf{N}^g\}$, duale de la base des monômes $\{T^\beta; \beta \in \mathbf{N}^g\}$ de B (lorsque K est de caractéristique zéro, c'est la base des opérateurs $\partial^{\beta}_{\Phi_\gamma} = (1/\beta!)(\partial^{|\beta|}/\partial T^\beta)$ $(\beta \in \mathbf{N}^g)$). De plus, on identifie cette base à $\mathbf{N}^g$ par $\partial^{\beta}_{\Phi_\gamma} \to \beta$ et on notera $\varepsilon_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{N}^g$ (le 1 étant à la position $i \in \{1, \dots, g\}$). En particulier, $\partial^{\varepsilon_i}_{\Phi_\gamma}$ s'identifie à un élément de $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K)$, l'espace tangent à G en γ.

Supposons $X_0 \notin \mathfrak{m}$, si $P \in A$ est de degré δ on note P_γ l'image dans $\hat{A}_{\mathfrak{m}}$ de P/X_0^δ et alors $\partial^{\beta}_{\Phi_\gamma} P_\gamma \in K$ est la dérivée de P en γ d'ordre β le long de Φ_γ, dans la carte $\{X_0 \neq 0\}$.

Soit $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq g$, on appellera *$d$-face de $\mathbf{N}^g$ d'indice* $(i_1, \dots, i_d)$ le sous-ensemble $\mathbf{N}.\varepsilon_{i_1} + \cdots + \mathbf{N}.\varepsilon_{i_d}$ de $\mathbf{N}^g$ formé des éléments dont les composantes d'indices distincts de $i_1, \dots, i_d$ sont nulles.

On dira qu'un ensemble $E \subset \mathbf{N}^g$ est un *escalier* si pour tout $\beta \in E$ on a $\beta + \mathbf{N}^g \subset E$. Et on dira qu'un sous-ensemble de $\mathbf{N}^g$ est un *dessous d'escalier* s'il est le complémentaire d'un escalier. Si W est le dessous d'un escalier E de $\mathbf{N}^g$ et $1 \leq i_1 < \ldots < i_d \leq g$, on notera $\mathcal{C}_{i_1, \dots, i_d}(W)$ l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^d_+$ de la trace de E sur la d-face de $\mathbf{N}^g$ d'indice $(i_1, \dots, i_d)$. On notera aussi I_W l'idéal de B engendré par les monômes T^β lorsque $\beta \in \mathbf{N}^g \backslash W$.

On appellera *ensemble pondéré* un sous-ensemble Σ de $\mathbf{N}^g \times G$ tel que pour tout $\gamma \in G$ l'ensemble $W_{\gamma,\Sigma} := (\mathbf{N}^g \times \{\gamma\}) \cap \Sigma$ soit un dessous d'escalier de $\mathbf{N}^g$ (on identifie $\mathbf{N}^g \times \{\gamma\}$ et $\mathbf{N}^g$ de la façon évidente). On appellera *support* de l'ensemble pondéré Σ, et on notera $\mathrm{Supp}\,(\Sigma)$, sa projection sur G.

Si Σ et Σ' sont deux ensembles pondérés on note $\Sigma + \Sigma'$ l'ensemble pondéré formé des couples $(\beta + \beta', \gamma + \gamma')$ où $(\beta, \gamma) \in \Sigma$, $(\beta', \gamma') \in \Sigma'$, et on a $E + \varnothing = \varnothing$. Si E est un sous-ensemble de G on l'identifie à l'ensemble pondéré $\{0\} \times E$ et on notera $-E$ l'ensemble pondéré $\{(\beta, -\gamma); (\beta, \gamma) \in E\}$.

On dira que Σ et Σ' sont *compatibles* (*relativement à* Φ) si on a

$$(\Phi_\gamma \otimes \Phi_{\gamma'}) \circ s^* \circ \Phi^{-1}_{\gamma+\gamma'}(I_{W_{\gamma,\Sigma}+W'_{\gamma',\Sigma'}}) \subset I_{W_{\gamma,\Sigma}} \otimes 1 + 1 \otimes I_{W'_{\gamma',\Sigma'}}$$

pour tout $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma)$ et $\gamma' \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma')$. En particulier si on a fixé les isomorphismes Φ_γ par l'addition et l'exponentielle de G en caractéristique zéro, ou plus généralement pour un germe formel de [**11**], la condition de compatibilité ci-dessus est satisfaite pour tout couple d'ensembles pondérés. En fait, Φ est un *germe formel sur* G précisément lorsque la condition de compatibilité ci-dessus est satisfaite par tout couple $\gamma, \gamma' \in G$. Un *germe formel à* t*-paramètres* est alors la restriction de Φ à un K-sous-espace $\mathcal{W}$ de dimension t de TG (*voir* [**11**, §2]).

Soit $P \in A$ et Σ un ensemble pondéré, on dira que P *s'annule sur* Σ si et seulement si pour tout $(\beta, \gamma) \in \Sigma$ on a $\partial^\beta_{\Phi_\gamma} P_\gamma = 0$ sur toute carte de G contenant γ. On remarquera que les conditions d'annulation le long d'un sous-groupe à t paramètres en caractéristique zéro, ou plus généralement le long d'un germe formel de dimension t, sont données par des dessous d'escaliers dans une t-face de $\mathbf{N}^g$.

Soit V une sous-variété de G de dimension $g - d$, définie par un idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, on pose

$$m_W(V) := d! \max_{\substack{\gamma \in V \\ 1 \le i_1 < \cdots < i_d \le g}} \{\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}^d_+ \backslash \mathcal{C}_{i_1,\ldots,i_d}(W))\}$$

où le maximum porte sur $\gamma \in V$ et les d-faces de $\mathbf{N}^g$ telles que $\partial^{\varepsilon_{i_1}}_{\Phi_0} \circ \tau^*_\gamma, \ldots, \partial^{\varepsilon_{i_d}}_{\Phi_0} \circ \tau^*_\gamma$ se projettent en une base du K-espace $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2), K)$, quotient de l'espace tangent en γ à G par celui à V.

On remarquera que, si V est un sous groupe algébrique de G, il suffit de considérer $\gamma = 0$ l'origine de G dans la définition de $m_W(V)$.

Si W est de la forme $\{\beta \in \mathbf{N}^g; \beta_1/b_1 + \cdots + \beta_g/b_g < 1\}$ on calcule $m_W(V) = b_{i_1} \cdots b_{i_d}$ où $(i_1, \ldots, i_d)$ est un indice réalisant le maximum ci-dessus. En effet, on a $\mathbf{R}^d_+ \backslash \mathcal{C}_{i_1,\ldots,i_d}(W) = \{t \in \mathbf{R}^d_+; t_1/b_{i_1} + \cdots + t_d/b_{i_d} < 1\}$ et, après le changement de variable $u_\alpha = t_\alpha/b_{i_\alpha}$ on écrit

$$m_W(V) = d!.b_{i_1} \cdots b_{i_d}.\mathrm{vol}\,(\{u_1 + \cdots + u_d < 1\}) = b_{i_1} \cdots b_{i_d}.$$

Enfin, soit $c \in \mathbf{N}^*$ tel qu'il existe un atlas et des polynômes bihomogènes de degré (c, c'); $c' \in \mathbf{N}^*$ représentant l'addition $s : G \times G \to G$. On sait d'après [**7**] qu'on peut prendre $c = 2$ lorsque l'adhérence de Zariski $\overline{G}$ de G dans $\mathbf{P}_n$ est projectivement normale et équivariante (i.e. les morphismes de translations sur G se prolongent à $\overline{G}$).

Avec les notations introduites on peut énoncer:

Théorème 1. *Soit E une sous-variété algébrique de G, $\Sigma_0, \dots,$ $\Sigma_{g-\dim E}$ des ensembles pondérés finis deux à deux compatibles, dont les supports contiennent chacun l'origine de G, et $P \in A$ une forme non nulle de degré δ. On suppose que P s'annule sur $E+\Sigma_0+\cdots+\Sigma_{g-\dim E}$, alors il existe $1 \leq r \leq g - \dim E$ et un sous-groupe algébrique G' de dimension $g' \leq g - r$, incomplètement défini dans G par des équations de degré $\leq c\delta$ et satisfaisant*

$$\sum_{\bar{\gamma} \in (\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(G').\deg G' \leq c^g.\deg G.\delta^{g-g'},$$

où $m_{\bar{\gamma}}(G') = \max\{m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(G'); \gamma + G' = \bar{\gamma}\}$.

De plus, P s'annule sur $\gamma + E + G' + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$ pour un certain $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_{r+1} + \cdots + \Sigma_{g-\dim E})$.

Remarque. M. Nakamaye [**9**] a remarqué qu'on ne peut affirmer $\gamma = 0$ dans l'énoncé ci-dessus. Si, comme dans [**10**], on prend $\Sigma_1 = \cdots = \Sigma_g = \Sigma$, $\Sigma_0 = \{(0,0)\}$ et $E = \{0\}$ on ne peut assurer, contrairement à ce qui est affirmé dans les addenda de [**10**] (et dans [**11**]), que P s'annule sur $G' + \Sigma$. Mais si on prend $\Sigma_0 = -\Sigma(g)$ (i.e. P s'annule sur $(\Sigma - \Sigma)(g) := (\Sigma - \Sigma) + \cdots + (\Sigma - \Sigma)$ (g fois)), alors la conclusion du théorème précédent entraîne bien que P s'annule sur $G' + \Sigma - \Sigma$.

On a le résultat intermédiaire suivant.

Théorème 2. *On reprend les notations du Théorème* 1*, alors il existe $1 \leq r \leq g - \dim E$ et une sous-variété algébrique V de dimension $d \leq g - r$, contenant $\gamma + E$ pour un certain $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_{r+1} + \cdots +$ $\Sigma_{g-\dim\ E})$, incomplètement définie dans G par des équations de degré*

$\leq c\delta$ *et satisfaisant*

$$\sum_{\bar{\gamma}\in(\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(V).\deg V \leq c^g.\deg G.\delta^{g-d},$$

où $G' = \{\gamma \in G; \gamma + V = V\}$ *et* $m_{\bar{\gamma}}(V) = \max\{m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(V); \gamma + G' = \bar{\gamma}\}$.

De plus, P *s'annule sur* $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$ *et* G' *satisfait la conclusion du Théorème* 1.

Remarques. Si K est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}$, on peut utiliser le Théorème 6 de [**12**] à la place de la Proposition 3.3 de [**10**] à la fin de la preuve du Lemme 5 (*voir* §4 ci-après) pour obtenir que

$$\sum_{\bar{\gamma}\in(\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(V).h(V)$$

est majoré par

$$c^{g+1}.(h(G)\delta^{g-d} + g.(h(P) + c'.\eta.\delta + \log(\deg G + 1))\deg G.\delta^{g-d-1}),$$

où c' est un réel ≥ 0 qui dépend des formules représentant l'addition sur G et η désigne la hauteur de $\Sigma' := \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_{r-1}$. Par exemple, si les multiplicités sont données par des conditions d'annulation le long d'un sous-groupe analytique on a $\eta \leq c''.\max_{(\beta,\gamma)\in\Sigma'}\{h(\gamma) + |\beta|\log(|\beta|+1)\}$ où c'' dépend du sous-groupe analytique.

Si G, P et les éléments de $\mathrm{Supp}\,(\Sigma_i)$ ($i = 1, \ldots, g - \dim E$) sont définis sur un sous-corps k de K sur lequel on peut également représenter l'addition de G, alors la preuve du Théorème 2 (*voir* §6 ci-après) permet d'affirmer que V est une composante irréductible de l'ensemble algébrique des zéros d'un idéal de $k[X_0, \ldots, X_n]$. En particulier, V est définie sur une extension finie de k de degré $\leq c^g.\deg G.\delta^{g-d}/\deg V$ sur k.

3. Opérateurs. Soient $\gamma \in G$ et $(F_0, \ldots, F_n)$ une famille de polynômes bi-homogènes représentant l'addition

$$s : G \times G \to G$$

au voisinage de $(0,\gamma) \in G \times G$. On note

$$\begin{aligned} s^* : A &\longrightarrow A \otimes_K \hat{A}_{\mathfrak{m}} \\ P &\longmapsto P(F_0, \dots, F_n) \end{aligned}$$

l'homomorphisme de K-algèbres déduit de s.

Ainsi, pour $P \in A$ homogène et $\beta \in \mathbf{N}^g$ on pose $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} P$ le coefficient dans A du monôme T^β de $(1 \otimes \Phi_\gamma) \circ s^*(P) \in A \otimes_K B$. On notera que ce polynôme $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} P$ dépend du choix de la famille $(F_0, \dots, F_n)$, mais l'hypersurface de G qu'il définit au voisinage de l'origine ne dépend pas de ce choix. En particulier, $\partial^{\beta}_{\Phi_\gamma} P_\gamma$ et l'image par l'application naturelle $A \to A_{\mathfrak{m}_0}/\mathfrak{m}_0 A_{\mathfrak{m}_0} \simeq K$ de $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} P \in A$, où $\mathfrak{m}_0$ est l'idéal de définition dans A de l'origine de G, s'annulent simultanément. Ainsi P s'annule sur un ensemble pondéré Σ si et seulement si pour tout $(\beta,\gamma) \in \Sigma$ on a $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} P \in \mathfrak{m}_0$.

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma}(P+Q) &= \Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} P + \Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma} Q \\ \Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma}(PQ) &= \sum_{\beta'+\beta''=\beta} \Delta^{\beta'}_{\Phi_\gamma} P . \Delta^{\beta''}_{\Phi_\gamma} Q. \end{aligned}$$

Plus généralement, soit $\mathcal{A}$ un atlas et des familles de formes représentant s sur $G \times G$, pour chaque $\alpha \in \mathcal{A}$ on définit des opérateurs $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma,\alpha}$ comme ci-dessus. Si I est un idéal homogène de A et W un dessous d'escalier fini de $\mathbf{N}^g$ on pose

$$\Delta^{W}_{\Phi_\gamma} I := \bigcup_{l \geq 0} (\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma,\alpha} P; P \in I, \beta \in W, \alpha \in \mathcal{A}) :_A (X_0, \dots, X_n)^l.$$

On vérifie que si $I \subset I'$ alors $\Delta^{W}_{\Phi_\gamma} I \subset \Delta^{W}_{\Phi_\gamma} I'$, et comme W est un dessous d'escalier on a aussi $\Delta^{W}_{\Phi_\gamma}(I + I') = \Delta^{W}_{\Phi_\gamma} I + \Delta^{W}_{\Phi_\gamma} I'$. Si Σ est un ensemble pondéré on pose $\Delta^{\Sigma} I := \sum_{\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma)} \Delta^{W_\gamma}_{\Phi_\gamma} I$ et on dira que I s'annule sur Σ si et seulement si $\Delta^{\Sigma} I \subset \mathfrak{m}_0$ où $\mathfrak{m}_0$ désigne l'idéal de définition de l'origine de G.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 3. *Soient W, W' deux dessous d'escaliers finis de $\mathbf{N}^g$, γ, $\gamma' \in G$ et I un idéal homogène de A. On suppose les ensembles pondérés $W \times \{\gamma\}$ et $W' \times \{\gamma'\}$ compatibles.*

(i) *L'idéal $\Delta^W_{\Phi_\gamma} I$ ne dépend pas du choix de l'atlas et des formes représentant s choisis.*

(ii) *On a $\Delta^W_{\Phi_\gamma}(\Delta^{W'}_{\Phi_{\gamma'}} I) \subset \Delta^{W''}_{\Phi_{\gamma''}} I$ où $\gamma'' = \gamma + \gamma'$, $W'' = W + W'$, avec égalité si $W = \{0\}$ ou $W' = \{0\}$.*

(iii) *On a $\Delta^{\{0\}}_0 I = I$.*

Démonstration. (i) Soient $(F_0, \dots, F_n)$ et $(F'_0, \dots, F'_n)$ deux familles de formes représentant s au voisinage d'un ouvert de Zariski de $G \times \{\gamma\} \subset G \times G$ et $P \in I$ de degré δ. On a alors l'égalité suivante dans $(A \otimes_K A)_{1 \otimes \mathfrak{m}}$

$$\frac{P(F_0, \dots, F_n)}{(F_i)^\delta} = \frac{P(F'_0, \dots, F'_n)}{(F'_i)^\delta}$$

dès que F_i ou $F'_i \notin \mathfrak{g} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{m}$. Mais on remarque que l'image de

$$(\Delta^{\{0\}}_{\Phi_\gamma} X_i^\delta)^{b+1} . (1 \otimes \Phi_\gamma) \left(\frac{F'_i}{F_i} \right)^\delta$$

dans $A \otimes_K (\hat{A}_\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^b \hat{A}_\mathfrak{m})$ est bien définie, et symétriquement en échangeant F_i et F'_i. Comme l'idéal engendré par les formes $\Delta^{\{0\}}_{\Phi_\gamma} X_i^\delta$ lorsque $i = 0, \dots, n$ et que l'on fait varier $\alpha \in \mathcal{A}$ est $(X_0, \dots, X_n)$-primaire et que W est un dessous d'escalier, on en déduit que le coefficient du monôme T^β; $(\beta \in W)$ de $(1 \otimes \Phi_\gamma)(P(F'_0, \dots, F'_n))$ appartient à $\Delta^W_{\Phi_\gamma} I$. La propriété (i) suit en faisant varier $P \in I$ et en raisonnant symétriquement avec F' et F.

(ii) Soient $(F_0, \dots, F_n)$, $(F'_0, \dots, F'_n)$, $(F''_0, \dots, F''_n)$ et $(F'''_0, \dots, F'''_n)$ quatre familles de formes représentant s au voisinage dans $G \times G$, d'ouverts de Zariski de $G \times \{\gamma\}$, $G \times \{\gamma'\}$, $G \times \{\gamma''\}$ et de (γ, γ') respectivement. On a alors l'égalité suivante dans $(A \otimes_K A \otimes_K A)_{1 \otimes \mathfrak{m} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \mathfrak{m}}$ pour $P \in I$ de degré δ

$$\frac{P(F''_0(\mathbf{X}, \mathbf{F}'''), \dots, F''_n(\mathbf{X}, \mathbf{F}'''))}{(F''_i(\mathbf{X}, \mathbf{F}'''))^\delta} = \frac{P(F_0(\mathbf{X}, \mathbf{F}'), \dots, F_n(\mathbf{X}, \mathbf{F}'))}{(F_i(\mathbf{X}, \mathbf{F}'))^\delta}$$

dès que $F_i \notin \mathfrak{g} \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{m}$. Notons J l'intersection des composantes primaires relevantes de l'idéal engendré par les coefficients dans A des monômes $T^\beta \otimes T'^{\beta'}$; $(\beta \in W, \beta' \in W')$ de

$$(1 \otimes \Phi_\gamma \otimes \Phi_{\gamma'})(P(F_0''(\mathbf{X}, \mathbf{F}'''), \dots, F_n''(\mathbf{X}, \mathbf{F}'''))).$$

Raisonnant comme en (i) on déduit de l'identité précédente $J = \Delta_{\Phi_\gamma}^W(\Delta_{\Phi_{\gamma'}}^{W'} I)$. Mais on a supposé que s^* satisfait

$$(\Phi_\gamma \otimes \Phi_{\gamma'}) \circ s^* \circ \Phi_{\gamma''}^{-1}(I_{W''}) \subset I_W \otimes 1 + 1 \otimes I_{W'}$$

et donc on vérifie $J \subset \Delta_{\Phi_{\gamma''}}^{W''} I$. Si $W' = \{0\}$ on vérifie que l'image de $P(F_0(\mathbf{X}, \mathbf{F}'), \dots, F_n(\mathbf{X}, \mathbf{F}'))/(F_i(\mathbf{X}, \mathbf{F}'))^\delta$ dans $(A \otimes_K A)_{1\otimes\mathfrak{m}} \otimes_K (\hat{A}_{\mathfrak{m}'}/\mathfrak{m}'\hat{A}_{\mathfrak{m}'}) \simeq (A \otimes_K \hat{A}_{\mathfrak{m}''})_{1\otimes\mathfrak{m}''}$ est égale à celle de $P(F_0'', \dots, F_n'')/(F_i'')^\delta$. On en déduit donc dans ce cas $J = \Delta_{\Phi_\gamma}^W(\Delta_{\Phi_{\gamma'}}^{\{0\}} I) = \Delta_{\Phi_{\gamma''}}^W I$ et symétriquement lorsque $W = \{0\}$.

(iii) Si $\gamma = 0$, on vérifie que $P(F_0, \dots, F_n)/(F_i)^\delta$ et P/X_i^δ ont même image dans le corps des fractions de $A \otimes_K (A_0/\mathfrak{m}_0 A_0) \simeq A$, dès que $X_i \notin \mathfrak{g}$, d'où le résultat. □

On remarquera que l'opérateur $\Delta_{\Phi_\gamma}^{\{0\}}$ ne dépend pas de l'isomorphisme Φ_γ choisi et on le notera aussi τ_γ. D'après la proposition on a $\tau_\gamma \circ \tau_{\gamma'} = \tau_{\gamma+\gamma'}$ et $\tau_0 = \mathrm{Id}$. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A définissant une sous-variété V de G on vérifie encore avec la proposition que $\tau_\gamma \mathfrak{p}$ est l'idéal premier définissant la sous-variété $-\gamma + V$ de G.

4. Multiplicités. Soit R un anneau noethérien et J un idéal de R contenu dans le radical de R. Rappelons qu'on définit la *multiplicité relativement* à J d'un R-module M de type fini, dimension d et tel que M/JM soit de longueur finie, par la formule de Samuel (*voir* [**2**, Chapitre 8, §7.1])

$$e_J(M) = d! \lim_{l\to\infty} \left(\frac{l_R(M/J^l M)}{l^d} \right).$$

En particulier, si R est local et J est primaire pour l'idéal maximal de R alors $e_J(R)$ est la *multiplicité* de J. On a les propriétés suivantes (*voir ibidem*).

Si $J \subset J'$, M/JM est de longueur finie et J' est contenu dans le radical de R alors $e_{J'}(M) \leq e_J(M)$.

Si $\hat{R}$ et $\hat{M}$ sont les complétés de R et M pour leurs topologies J-adiques alors $e_J(M) = e_{J\hat{R}}(\hat{M})$ (*voir ibidem*, Théorème 1).

Si R est un anneau local régulier et J l'idéal maximal de R, alors $e_J(R) = 1$, et plus généralement, $e_{J^l}(R) = l^{\dim R}$. Dans le même ordre d'idées on a le lemme suivant (*voir* aussi [**2**, Chapitre 8, exercices, §7, n°2]).

Lemme 4. *Soit W un sous ensemble fini de $\mathbf{N}^d$ et I_W l'idéal de $R = K[[T_1, \ldots, T_d]]$ engendré par les monômes T^β lorsque $\beta \in \mathbf{N}^d \backslash W$, alors*

$$e_{I_W}(R) = d!\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}_+^d \backslash \mathcal{C})$$

où $\mathcal{C}$ est l'enveloppe convexe de $\mathbf{N}^d \backslash W$ dans $\mathbf{R}_+^d$.

Démonstration. On remarque que I_W est engendré par les monômes d'exposants β dans un escalier E de $\mathbf{N}^d$. Ainsi $l_R(R/I_W) = \dim_K(R/I_W)$ est égal au nombre de points de $\mathbf{N}^d$ sous l'escalier E. Appliquant cette remarque aux puissances I_W^l on obtient que $l_R(R/I_W^l)$ est égale au nombre de points sous l'escalier $l.E$, on a donc (après une homothétie de rapport $1/l$)

$$e_{I_W}(R) = d! \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l^d} .\mathrm{card}\left(\frac{1}{l}\mathbf{N}^d \backslash \frac{1}{l}(l.E)\right).$$

Mais, d'après le principe des tiroirs, $(1/l)(l.E)$ approxime $\mathcal{C}$ à l'ordre $O(1/l)$ d'où le résultat. $\square$

D'après [**2**, Chapitre 8, exercices, §7, n°16 et 17] on sait que la multiplicité $e_J(R)$ peut être supérieure, inférieure, voire égale à $l_R(R/J)$. Le lemme suivant établit un lien entre multiplicités et degrés dans la situation du paragraphe 2: I idéal homogène de $A = K[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{g}$ (*voir* aussi [**5**, exemple 1.7]).

Lemme 5. *Soient I un idéal de A engendré par des formes de degrés*

$\leq \delta$ *et* $d \geq \operatorname{rg} I$*, alors on a*

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I,\ \text{minimal} \\ \operatorname{rg} \mathfrak{p} = d}} e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}).\deg \mathfrak{p} \leq \deg \mathfrak{g}.\delta^d.$$

Démonstration. Soient $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$ de rang d, minimal, $\kappa = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ et M un A-module de type fini tel que $M_\mathfrak{p}/IM_\mathfrak{p}$ soit non nul, de longueur finie. D'après [**2**, Chapitre 8, §7.5, remarque 4], on sait que si $n \in N := IA_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \kappa$ n'appartient pas à un nombre fini de sous-espaces propres de N alors $\lambda^{-1}(n)$, où $\lambda : IA_\mathfrak{p} \to N$ est l'application naturelle, est formé d'éléments superficiels pour M. Le corps résiduel κ de $A_\mathfrak{p}$ contient K et est donc infini, on peut trouver une combinaison linéaire P des eléments de I dont l'image dans $A_\mathfrak{p}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$ minimal, de rang d est superficielle pour $M_\mathfrak{p}$. Comme I est engendré par ses éléments de degrés $\leq \delta$ on peut construire P combinaison linéaire des formes de degrés δ de I, et donc P de degré δ.

Appliquant ce résultat récursivement on obtient des formes $P_1, \ldots , P_d \in I$ telles que P_i soit superficiel sur $A_\mathfrak{p}/(P_1A_\mathfrak{p} + \cdots + P_{i-1}A_\mathfrak{p})$ pour $i = 1, \ldots , d$ et pour tout $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$ minimal, de rang d. On déduit alors de [**2**, Chapitre 8, §7.5, Théorème 1.d]

$$e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = e_{(P_1A_\mathfrak{p}+\ldots+P_dA_\mathfrak{p})}(A_\mathfrak{p}) \leq l_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/(P_1A_\mathfrak{p} + \cdots + P_dA_\mathfrak{p}))$$

car $l(A_\mathfrak{p}/IA_\mathfrak{p}) < \infty$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I,\ \text{minimal} \\ \operatorname{rg} \mathfrak{p} = d}} e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}).\deg \mathfrak{p} \\
&\qquad \leq \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I,\ \text{minimal} \\ \operatorname{rg} \mathfrak{p} = d}} l_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/(P_1A_\mathfrak{p} + \cdots + P_dA_\mathfrak{p})).\deg \mathfrak{p} \\
&\qquad \leq \deg (S^{-1}(P_1, \ldots , P_d) \cap A)
\end{aligned}$$

où S est l'ensemble multiplicatif des éléments de A n'appartenant à aucun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$ minimal, de rang d. Mais $S^{-1}(P_1, \ldots , P_d)$ est pur de rang d et $\mathfrak{g}$ étant un idéal $\mathcal{O}$-parfait pour un ouvert de Zariski de Spec $K[X_0, \ldots , X_n]$ contenant les $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} I$ minimaux, de rang d, on déduit de [**10**, §3, Proposition 3]

$$\deg (S^{-1}(P_1, \ldots , P_d) \cap A) \leq \deg_{\mathcal{O}}(\mathfrak{g}, P_1, \ldots , P_d) \leq \deg \mathfrak{g}.\delta^d. \qquad \square$$

5. Opérateurs et multiplicités. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène de A, d'après [**13**, §6, Théorème 5] l'anneau $A_{\mathfrak{p}}$ est régulier et son complété $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{p}$-adique est un anneau local, noethérien, complet, régulier et de même caractéristique que son corps résiduel $\kappa := \hat{A}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\hat{A}_{\mathfrak{p}}$. On a donc encore d'après [**2**, Chapitre 8, §5] un isomorphisme $\hat{A}_{\mathfrak{p}} \simeq \kappa[[U_1, \dots, U_d]]$ où $d = \dim A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{rg} \mathfrak{p}$.

On fixe cet isomorphisme de la façon suivante. Soit V la variété des zéros de $\mathfrak{p}$ dans G, on choisit des indices $i_1, \dots, i_d$ tels que $\partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_1}} \circ \tau_\gamma^*, \dots, \partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_d}} \circ \tau_\gamma^*$ se projettent en une base de $\operatorname{Hom}_K(\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2), K)$ pour γ parcourant un ouvert de Zariski de V (et $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de γ). Choisissons une carte de $G \times G$ contenant le produit d'un ouvert de Zariski de V par l'origine de G, et une famille de polynômes bi-homogènes représentant l'addition sur cette carte, on considère les opérateurs $\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ définis au paragraphe 3.

On remarque que pour tout $\gamma \in G$, l'opérateur $\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ induit un élément $\pi \circ \Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ de $\operatorname{Hom}_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K)$, l'espace tangent à G en γ, où π est l'application $\pi : A \to A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \simeq K$. En effet, on a $\pi \circ \Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}(\mathfrak{m}^2) \subset \mathfrak{m}$ d'après la Proposition 3(iii). En fait $\pi \circ \Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ est un multiple non nul de $\partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} \circ \tau_\gamma^* \in \operatorname{Hom}_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K)$ et, quitte à multiplier $\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ par un scalaire non nul, on peut supposer $\pi \circ \Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} = \partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} \circ \tau_\gamma^*$.

Lemme 6. *Avec les notations ci-dessus, l'application $(A/\mathfrak{p})$-linéaire*

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &\longrightarrow (A/\mathfrak{p})^d \\ P &\longmapsto (\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} P \bmod \mathfrak{p})_{l=1,\dots,d} \end{aligned}$$

est de rang d. En particulier, elle induit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}^2A_{\mathfrak{p}} \simeq \kappa^d$.

Démonstration. Supposons l'application de rang $< d$, alors il existe $a_1, \dots, a_d \in A$ n'appartenant pas tous à $\mathfrak{p}$ tels que pour tout $Q \in \mathfrak{p}$ on ait

$$\sum_{l=1}^{d} a_l . \Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} Q \in \mathfrak{p}.$$

Soient $\gamma \in V$, $\mathfrak{m}$ l'idéal de définition de γ et $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_d \in A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \simeq K$ les images de $a_1, \dots, a_d$, on déduit de la relation précédente que

$\sum_{l=1}^{d} \overline{a_l}.\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}$ induit l'élément $\sum_{l=1}^{d} \overline{a_l}.\partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} \circ \tau_\gamma^*$ de $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{m}/(\mathfrak{p} + \mathfrak{m}^2), K) \subset \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, K)$, c'est-à-dire l'espace tangent en γ à V. Mais, par hypothèse $\partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_1}} \circ \tau_\gamma^*, \ldots, \partial_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_d}} \circ \tau_\gamma^*$ se projettent en une base de $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{p}/(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2), K)$ pour γ parcourant un ouvert de Zariski de V, ce qui entraîne que $\overline{a_1} = \ldots = \overline{a_d} = 0$ et $a_1, \ldots, a_d$ s'annulent sur cet ouvert de Zariski de V en contradiction avec le fait que ces formes n'appartiennent pas toutes à $\mathfrak{p}$.

Comme $\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}}\mathfrak{p}^2 \subset \mathfrak{p}$ $(l = 1, \ldots, d)$, on a donc une surjection de $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2A_\mathfrak{p}$ sur κ^d qui est nécessairement un isomorphisme car $\dim_\kappa(\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2A_\mathfrak{p}) = d$. □

On choisit, grâce au lemme précédent, des polynômes $Q_1, \ldots, Q_d \in \mathfrak{p}$ satisfaisant $\Delta_{\Phi_0}^{\varepsilon_{i_l}} Q_i \notin \mathfrak{p}$ si et seulement si $i = l$ et on fixe l'isomorphisme entre $\hat{A}_\mathfrak{p}$ et $\kappa[[U_1, \ldots, U_d]]$ en envoyant Q_l sur U_l pour $l = 1, \ldots, d$. On identifie alors $\mathbf{N}^d$ à la d-face de $\mathbf{N}^g$ d'indice $(i_1, \ldots, i_d)$.

Si $P \in I$ et $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, I$ minimal, on écrit $P = \sum_\beta c_\beta.Q_1^{\beta_1} \ldots Q_d^{\beta_d}$ dans $\hat{A}_\mathfrak{p}$ avec $c_\beta \in \kappa = \hat{A}_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\hat{A}_\mathfrak{p}$. Et si W est un dessous d'escalier fini de la face d'indice $(i_1, \ldots, i_d)$ de $\mathbf{N}^g$ on vérifie grâce au Lemme 6 $\Delta_{\Phi_0}^W(P) \subset \mathfrak{p}$ si et seulement si $c_\beta = 0$ pour tout $\beta \in W$. En particulier, si $\Delta_{\Phi_0}^W I \subset \mathfrak{p}$ alors I est contenu dans l'idéal J de $\hat{A}_\mathfrak{p}$ engendré par les monômes Q^β; $(\beta \notin W)$ et comme $l(A_\mathfrak{p}/IA_\mathfrak{p}) < \infty$ on a, d'après le Lemme 4,

$$e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) = e_{I\hat{A}_\mathfrak{p}}(\hat{A}_\mathfrak{p}) \geq e_J(\hat{A}_\mathfrak{p}) = d!\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}_+^d \backslash \mathcal{C})$$

où $\mathcal{C}$ est l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}_+^d$ du complémentaire de W dans $\mathbf{N}^d$.

Plus généralement, si W est un dessous d'escalier fini de $\mathbf{N}^g$ satisfaisant $\Delta_{\Phi_0}^W I \subset \mathfrak{p}$ on applique ce qui précède à $W \cap \mathbf{N}^d$ et on obtient

Lemme 7. *Soit I un idéal homogène de A, $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, I$ minimal, définissant une sous-variété V de G et W un dessous d'escalier fini de $\mathbf{N}^g$. Alors, si $\Delta_{\Phi_0}^W I \subset \mathfrak{p}$ on a*

$$e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \geq d! \max\{\mathrm{vol}\,(\mathbf{R}_+^d \backslash \mathcal{C}_{i_1, \ldots, i_d}(W))\} = m_W(V).$$

6. Démonstration des théorèmes. Plaçons nous dans les hypothèses du Théorème 2. On considère la suite d'idéaux homogènes de A

$$\Delta^{\Sigma_0}(P) = I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_{g-\dim E+1} \subset I(E)$$

définie par

$$I_i = \Delta^{\Sigma_0+\cdots+\Sigma_{i-1}}(P)$$

(ces idéaux sont emboités car les supports de $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_g$ contiennent l'origine de G). L'idéal I_i s'annule sur $\Sigma_i + \cdots + \Sigma_{g-\dim E} + E$ par hypothèse et avec la Proposition 3(ii).

Appelons d_i le maximum des dimensions des premiers associés à I_i s'annulant sur $\gamma+E$ pour un $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_i+\cdots+\Sigma_{g-\dim E})$. Comme $g > d_1 \geq \cdots \geq d_{g-\dim E+1} \geq \dim E$ il existe un plus petit indice r tel que $d_r = d_{r+1} = d \leq g-r$. Les idéaux I_r et I_{r+1} définissent incomplètement tous les deux une même sous-variété V de G de dimension d, contenant $\gamma+E$ pour un certain $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_{r+1}+\cdots+\Sigma_{g-\dim E})$. D'après le choix de r les variétés $\gamma+V$ pour $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)$ sont toutes des composantes irréductibles de l'ensemble algébrique des zéros de I_r. Ainsi, P s'annule sur $V + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$ et aussi sur $\gamma + E + G' + \Sigma_0 + \cdots + \Sigma_r$ où $G' = \cap_{x \in V}(-x+V) = \{\gamma \in G; \gamma + V = V\}$ désigne le *stabilisateur* de V dans G. On a $\gamma + E + G' \subset V$ car $\gamma + E \subset V$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, I_r \cap \mathrm{Ass}\, I_{r+1}$ le premier définissant V dans A, alors $\Delta^{\Sigma_r} I_r \subset I_{r+1} \subset \mathfrak{p}$ d'après la Proposition 3(ii). Pour chaque $\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)$ on a $\Delta^{W_\gamma}_{\Phi_\gamma} I_r \subset \mathfrak{p}$ et donc $\Delta^{W_\gamma}_{\Phi_0} I_r \subset \tau_{-\gamma}\mathfrak{p}$ ce qui entraîne, d'après le Lemme 7, $e_{I_r A_{\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}}}(A_{\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}}) \geq m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(V)$. Lorsque γ parcourt $\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)$ modulo G' les variétés $\gamma + V$ sont distinctes et les idéaux premiers $\tau_{-\gamma}\mathfrak{p}$ sont des premiers minimaux associés à I_r, deux à deux distincts, de même dimension $d \leq g - r$ et de degrés $\geq c^{-d}.\deg V$ d'après le Lemme 4.5 de [**10**], d'où

$$\sum_{\bar{\gamma} \in (\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} \max_{\gamma \in \mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)\cap(\bar{\gamma}+G')} \{m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(V)\}.c^{-d}.\deg V \leq \deg G.(c\delta)^{g-d}$$

d'après les Lemmes 5 et 7, car I_r est engendré par des formes de degrés $\leq c\delta$. Ceci démontre le Théorème 2.

Considérons maintenant l'idéal $J = \sum_{x \in V} \tau_x I_r$, il satisfait d'après la Proposition 3(ii) $\Delta^{\Sigma_r} J \subset \mathfrak{p}'$ où $\mathfrak{p}'$ est l'idéal définition de G' dans A.

De plus $\mathfrak{p}'$ est un premier minimal associé à J et en raisonnant comme précédemment on en conclut

$$\sum_{\bar{\gamma}\in(\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} \max_{\gamma\in\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)\cap(\bar{\gamma}+G')} \{m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(G')\}.\deg G' \leq c^g.\deg G.\delta^{g-g'}$$

car J est aussi engendré par des formes de degrés $\leq c\delta$. Ceci démontre le Théorème 1.

7. Le cas des groupes produits. On considère le cas où le groupe algébrique G est donné comme produit $G_1\times\cdots\times G_p$ de groupes algébriques commutatifs de dimensions $g_1,\ldots,g_p$. On suppose que pour $i=1,\ldots,p$ le groupe algébrique G_i est plongé comme sous-variété quasi-projective d'un espace projectif $\mathbf{P}_n$, et que G est plongé dans l'espace produit $\mathbf{P}=\mathbf{P}_{n_1}\times\cdots\times\mathbf{P}_{n_p}$.

Soient $\delta_1,\ldots,\delta_p\geq 1$, on plonge $\mathbf{P}$ dans un espace projectif $\mathbf{P}_N$ par le plongement de Segre-Veronese

$$\varphi:\ \underset{(\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_p)}{\mathbf{P}} \ \underset{\longmapsto}{\hookrightarrow}\ \underset{(\ldots,\mathbf{X}_1^{\alpha_1}\cdots\mathbf{X}_p^{\alpha_p},\ldots)_{|\alpha_i|=\delta_i}}{\mathbf{P}_N}$$

Ainsi une forme linéaire sur $\mathbf{P}_N$ représente une forme multihomogène de degré $(\delta_1,\ldots,\delta_p)$ sur $\mathbf{P}$. Et si V est une sous-variété algébrique de $\mathbf{P}$ alors $\varphi(V)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbf{P}_N$ de même dimension que V et dont le degré dans $\mathbf{P}_N$ est égal à $H(V;\delta_1,\ldots,\delta_p)$, où $H(V;\cdot)$ est le polynôme multidegré de V défini dans [**10**, §3].

Appliquant le Théorème 1 au groupe $\varphi(G)$ dans $\mathbf{P}_N$ on obtient

Théorème 8. *Soient $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_g$ des ensembles pondérés finis deux à deux compatibles, dont les supports contiennent chacun l'origine de G et Σ leur somme. Soit $P\in A$ une forme non nulle de degré $(\delta_1,\ldots,\delta_p)$ sur G. On suppose que P s'annule sur $\Sigma-\Sigma$, alors il existe $1\leq r\leq g$ et un sous-groupe algébrique G' de dimension $g'\leq g-r$, incomplètement défini dans G par des équations de degré $\leq(c.\delta_1,\ldots,c.\delta_p)$ et satisfaisant*

$$\sum_{\bar{\gamma}\in(\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(G').H(G';\delta_1\cdots,\delta_p)\leq H(G;c.\delta_1,\ldots,c.\delta_p),$$

où $m_{\bar{\gamma}}(G') = \max\{m_{W_{\gamma,\Sigma_r}}(G'); \gamma + G' = \bar{\gamma}\}$.

De plus, P s'annule sur $G' + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_r - \Sigma_1 - \cdots - \Sigma_r$.

Remarque. En reprenant la construction des opérateurs $\Delta^{\beta}_{\Phi_\gamma}$ dans ce cas on notera qu'on peut raffiner le théorème ci-dessus en y substituant $(c_1\delta_1, \ldots, c_p\delta_p)$ à la place de $(c\delta_1, \ldots, c\delta_p)$ où c_i est le plus petit entier tel qu'il existe un atlas et des formes bi-homogènes de degré (c_i, c_i') $(c_i' \in \mathbf{N}^*)$ représentant l'addition de $G_i \subset \mathbf{P}_{n_i}$. On améliore ainsi le résultat principal de [**10**].

8. Le cas des extensions. On suppose maintenant le groupe algébrique G donné comme extension d'une variété abélienne A par un groupe linéaire L, on a

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0,$$

où $L \simeq \prod_{\varrho=1}^{r} \mathbf{G}_m \times \prod_{\sigma=1}^{s} \mathbf{G}_a$, de sorte que $\overline{L} = \mathbf{P}_1^{r+s}$ est une compactification de L. On a une action de L sur $\overline{L}$ permettant de former le produit fibré $\overline{G} = G \times_L \overline{L}$ qui donne une compactification de G associée à $\overline{L}$. On note $G_\infty = \overline{G} \backslash G$, et encore

$$\pi : \overline{G} \longrightarrow A$$

le prolongement de π à $\overline{G}$. Soit D un diviseur ample sur A, on sait alors (cf. [**14**]) que le diviseur $D_{a,b} = aG_\infty + 3b\pi^* D$ est très ample sur $\overline{G}$ pour tout couple (a, b) tel que $a, b \geq 1$. On sait même d'après [**6**, Théorème 3.5], que le diviseur G_∞ sur $\overline{L}$ étant normalement engendré il en est de même pour tous les diviseurs $D_{a,b}$ $(a, b \geq 1)$. Notons $\varphi_{a,b}$ (resp. ψ) le plongement projectif de $\overline{G}$ et donc de $\overline{L}$ (resp. A) associé à $D_{a,b}$ (resp. $3D$).

Pour G' sous-groupe algébrique de G nous écrivons $L' = L \cap G'$ et $A' = \pi(G')$. Le théorème principal de [**8**] nous assure alors que

$$\deg_{\varphi_{a,b}} \overline{G}' = \binom{\dim G'}{\dim L'} . \deg_{\varphi_{a,b}} \overline{L}' . \deg_{[b]\circ\psi} A'.$$

Mais $\varphi_{a,b}|_{L'}$ est le plongement associé à aL_∞, c'est-à-dire $[a] \circ \varphi|_{L'}$ où $\varphi = \varphi_{1,1}$, ainsi

$$\begin{aligned} \deg_{\varphi_{a,b}} \overline{G}' &= \binom{\dim G'}{\dim L'} . \deg_{\varphi} \overline{L}' . \deg_{\psi} A' . a^{\dim L'} . b^{\dim A'} \\ &= \deg_{\varphi} \overline{G}' . a^{\dim L'} . b^{\dim A'}. \end{aligned} \tag{1}$$

Le plongement ci-dessus identifie le groupe G à une sous-variété quasi-projective d'un espace projectif $\mathbf{P}_n$, soit R l'anneau des coordonnées de $\mathbf{P}_n$, et $\mathfrak{g}$ l'idéal de définition de $\overline{G}$ dans R. Soit encore $f_0, \dots, f_m$ une base de $H^0(A, 3D)$ et $\pi^* f_0, \dots, \pi^* f_m, g_{m+1}, \dots, g_n$ une base de $H^0(\overline{G}, D_{1,1})$. Supposons $b \geq a$, on vérifie alors aisément que tous les monômes

$$(\pi^* f_0)^{\alpha_0} \cdots (\pi^* f_m)^{\alpha_m} . g_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \cdots g_n^{\alpha_n}$$

lorsque $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbf{N}$ satisfont $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n = b$ et $\alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_n = a$, appartiennent à $H^0(\overline{G}, D_{a,b})$. Nous dirons qu'un polynôme $P \in R$ est de bidegré (δ, Δ) (resp. $\leq (\delta, \Delta)$) sur G si sa restriction à G coïncide avec une combinaison linéaire des monômes ci-dessus où $(a, b) = (\delta, \Delta)$ (resp. $\leq (\delta, \Delta)$). De même nous dirons qu'une sous-variété V de G est incomplètement définie dans G par des équations de bidegré $\leq (\delta, \Delta)$ si elle est composante de l'ensemble des zéros dans G d'une famille de polynômes de R de bidegrés $\leq (\delta, \Delta)$.

On peut alors énoncer

Théorème 9. *Soient $\Sigma_1, \dots, \Sigma_g$ des ensembles pondérés finis deux à deux compatibles, dont les supports contiennent chacun l'origine de G et Σ leur somme. Soit $P \in A$ une forme non nulle de bidegré (δ, Δ) sur G avec $1 \leq \delta \leq \Delta$. On suppose que P s'annule sur $\Sigma - \Sigma$, alors il existe $1 \leq r \leq g$ et un sous-groupe algébrique G' de dimension $g' \leq g - r$, incomplètement défini dans G par des équations de degré $\leq (2\delta, 2\Delta)$ et satisfaisant*

$$\sum_{\bar{\gamma} \in (\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r) + G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(G') . \deg{}_{\varphi} \overline{G}' \leq 2^g . \deg{}_{\varphi} \overline{G} . \delta^{\dim L/L'} . \Delta^{\dim A/A'},$$

où $m_{\bar{\gamma}}(G') = \max\{m_{W_{\gamma, \Sigma_r}}(G'); \gamma + G' = \bar{\gamma}\}$.

De plus, P s'annule sur $G' + \Sigma_1 + \cdots + \Sigma_r - \Sigma_1 - \cdots - \Sigma_r$.

Démonstration. On applique le Théorème 1 au groupe G plongé dans un espace projectif $\mathbf{P}$ à l'aide du plongement $\varphi_{\delta,\Delta}$. Dans cette situation le polynôme $P \in R$ devient une forme linéaire de l'anneau des coordonnées de $\mathbf{P}$, et le plongement $\varphi_{\delta,\Delta}$ étant projectivement normal il résulte de [**7**] que les familles de translations sur G peuvent être complètement décrites par des formes quadratiques. Le Théorème 1 fournit un sous-groupe algébrique G' de G incomplètement défini dans G par des formes quadratiques et satisfaisant

$$\sum_{\bar{\gamma}\in(\mathrm{Supp}\,(\Sigma_r)+G')/G'} m_{\bar{\gamma}}(G').\deg_{\varphi_{\delta,\Delta}}\overline{G}' \leq 2^g.\deg_{\varphi_{\delta,\Delta}}\overline{G}.$$

On utilise alors la formule (1) pour G' et G respectivement, avec $(a,b)=(\delta,\Delta)$, pour conclure. □

Question. Sous quelles hypothèses naturelles sur D les monômes introduits précédemment engendrent-ils $H^0(\overline{G},D_{a,b})$? Autrement-dit, l'application

$$\pi^*(H^0(A,3D))^{\otimes(b-a)}\otimes H^0(\overline{G},D_{1,1})^{\otimes a}\longrightarrow H^0(\overline{G},D_{a,b})$$

est-elle surjective?

9. Application à l'interpolation. Pour Σ un ensemble pondéré de G, notons $\omega(\Sigma)$ le plus petit degré d'une hypersurface de G s'annulant sur Σ. On remarque que pour $\gamma\in G$ on a $\omega(\gamma+\Sigma)\leq c.\omega(\Sigma)$.

Soit Γ un sous-groupe de type fini de G et F la face d'indice $(i_1,\dots,i_d)$ de $\mathbf{N}^g$, qu'on identifie au sous-espace $K\varepsilon_{i_1}+\cdots+K_{\varepsilon_{i_d}}$ de TG. Pour $S,T\in\mathbf{N}$ on pose

$$\begin{aligned}\Gamma(S)&=\{s_1\gamma_1+\cdots+s_l\gamma_l;0\leq s_i\leq S\},\\ F(T)&=\{t_1\varepsilon_{i_1}+\cdots+t_d\varepsilon_{i_d};t_1+\cdots+t_d\leq T\},\end{aligned}$$

et on note $\Sigma(S,T)$ l'ensemble pondéré $F(T)\times\Gamma(S)$.

On définit

$$\begin{aligned}\mu(\Gamma)&=\min_{G'}\{\mathrm{rg}_{\mathbf{Z}}(\Gamma/\Gamma\cap G')/(\dim G-\dim G')\}\\ \sigma(F)&=\min_{V}\max_{\gamma\in V}\{\dim\,(F/F\cap T_\gamma G)/(\dim G-\dim V)\}\end{aligned}$$

où les minimums sont pris sur l'ensemble des sous-groupes algébriques propres G' de G et les sous-variétés algébriques propres V de G respectivement.

Théorème 10. *Soit E un sous-ensemble algébrique irréductible et réduit de G, alors on a avec les notations ci-dessus*

$$\omega(E+\Sigma(gS,gT)) \geq \frac{\omega(E).S^{\mu(\Gamma)}.T^{\sigma(F)}}{g!.c^{g+1}.\deg G}.$$

Démonstration. Prenons $\delta=\omega(E+\Sigma(gS,gT))$ dans le Théorème 2, les hypothèses en sont alors satisfaites et il existe donc une sous-variété propre V contenant $\gamma+E$ ($\gamma\in\Gamma((g-1)S)$), et satisfaisant

$$\deg V \leq c^g.\deg G.\left(\frac{\delta}{S^{\mu(\Gamma)}.T^{\sigma(F)}}\right)^{g-\dim V}.$$

Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal de définition de V dans A, d'après le théorème de [**3**] on a

$$\dim_K(A/\mathfrak{p})_{\delta'} \leq \deg V.(\delta'+1)^{\dim V}.$$

D'un autre côté, le degré de transcendance de A étant égal à $\dim G=g$ on a

$$\dim_K(A/\mathfrak{g})_{\delta'} \geq (\delta'+1)^g/g!.$$

On en conclut que si $\delta'+1>(g!.\deg V)^{1/g-\dim V}$ il existe une forme non nulle dans A de degré δ' s'annulant sur V. Comme $\gamma+E\subset V$ on a donc

$$\frac{1}{c}.\omega(E)\leq\omega(\gamma+E)\leq(g!.\deg V)^{1/g-\dim V},$$

ce qui, combiné à la majoration de $\deg V$ ci-dessus, fournit l'inégalité du théorème. □

Remarque. Le coefficient $\omega(\Sigma)$ considéré dans ce paragraphe a été introduit très tôt dans les travaux sur les lemmes de zéros. Lorsque $G=\mathbf{G}_a^g$, $\dim E=0$ (E n'étant plus supposé irréductible, mais néanmoins réduit), $\Gamma=\{0\}$ et $F=\mathbf{N}^g$, un résultat remarquable, dû à M. Waldschmidt par une méthode analytique, s'énonce $\omega(E+\Sigma(T))/T\geq\omega(E)/g$. Le facteur $1/g!c^{g+1}$ dans le Théorème 10 ci-dessus semble être le lot des méthodes purement algébriques. On consultera le texte de D. Bertrand [**1**] pour un aperçu des travaux et résultats connus sur les coefficients $\omega(\Sigma)$. Là encore, la possible nouveauté de notre Théorème 10 réside dans les conditions d'annulation.

REFERENCES

1. D. Bertrand, *Lemmes de zéros et nombres transcendants*, in *Séminaire Bourbaki 1985-86*, exposé **652**, Astérisque 145–146, Soc. Math. France, 1987, 21–44.

2. N. Bourbaki, *Algébre commutative*, Masson, Paris, 1983.

3. M. Chardin, *Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique*, Bull. Soc. Math. France **117** (1989), 305–318.

4. L. Denis, *Lemmes de multiplicités et intersections*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 235–247.

5. L.J. van Gastel, *Excess intersections and a correspondence principle*, Invent. Math. **103** (1991), 197–221.

6. F. Knopf et H. Lange, *Commutative algebraic groups and intersections of quadrics*, Math. Ann. **267** (1984), 555–571.

7. H. Lange, *Families of translations of commutative algebraic groups*, J. Algebra **109** (1987), 260–265.

8. ———, *A remark on the degrees of commutative algebraic groups*, Illinois J. Math. **33** (1989), 409–415.

9. M. Nakamaye, *Multiplicity estimates and the product theorem*, Bull. Soc. Math. France **123** (1995), 155–188.

10. P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 355–383; Errata et addenda, *ibidem*, **115** (1987), 397–398.

11. ———, *Lemmes de zéros en caractéristique quelconque*, in *Problèmes Diophantiens 1986-87*, D. Bertrand et M. Waldschmidt éds, Publ. Math. Univ. Paris VI, 84.

12. ———, *Sur des hauteurs alternatives* III, J. Math. Pures Appl. **74** (1995), 345–365.

13. J-P. Serre, *Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens*, in Proc. Internat. Sympos. Tokyo-Nikko (1965), 175–189.

14. ———, *Quelques propriétés des groupes algébriques commutatifs*, appendice II de *Nombres transcendants et groupes algébriques* par M. Waldschmidt, Astérisque 69–70, 1978, 191–202.

15. O. Zariski et P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. 2, Springer, New York, 1960.

UMR 9994 du CNRS - Problèmes Diophantiens, Université P. & M. Curie, T.45-46, 5ème ét., case 247, F-75252 PARIS cedex 05.
E-mail address: `pph@mathp6.jussieu.fr`