PACIFIC JOURNAL OF MATHEMATICS
Vol. 63, No. 1, 1976

CARACTÉRISATION SPECTRALE DES ALGÈBRES DE BANACH COMMUTATIVES

BERNARD AUPETIT

Let A be a complex Banach algebra, using subharmonic functions we extend results of Le Page, Hirschfeld and Żelazko in showing the equivalence of the four properties: $A/\mathrm{Rad}\,A$ is commutative, the spectral radius is uniformly continuous on A, the spectral radius is subadditive on A, the spectral radius is submultiplicative on A.

1. Introduction. Dans la suite A désigne une algèbra de Banach complexe munie de la norme $\|\quad\|$ et, pour $x \in A$, $\rho(x)$ est le rayon spectral, c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$, ou encore $\mathrm{Max}\,|\lambda|$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}\,x$, $\delta(x)$ est le diamètre de $\mathrm{Sp}\,x$, c'est-à-dire $\mathrm{Max}\,|\lambda - \mu|$ pour $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}\,x$.

Un des premiers articles à s'intéresser à la caractérisation des algèbres de Banach commutatives est celui de C. Le Page [6]. Il y démontre, en particulier, les résultats suivants, dans le cas où A est unifère:

—Si $\rho(x) = \|x\|$ quel que soit $x \in A$ alors A est commutative.
—S'il existe $\alpha > 0$ tel que $\|xy\| \leqq \alpha \|yx\|$ quels que soient $x, y \in A$ alors A est commutative.
—Si $\rho(xy - yx) = 0$ quels que soient $x, y \in A$ alors $xy - yx \in \mathrm{Rad}\,A$.

Un peu plus tard, R. A. Hirschfeld et W. Żelazko [5] démontrèrent par une méthode absolument identique à celle de Le Page que, si A est quelconque et si $\alpha\|x\| \leqq \rho(x)$ pour tout $x \in A$, alors A est commutative et même, c'est une algèbre de fonctions, c'est-à-dire une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(X)$, pour un certain X localement compact, avec la norme équivalente $\rho(x)$. Dans cet article ils énoncèrent deux conjectures qui, malheureusement, ne sont pas encore résolues.

Conjecture 1. Si $\|\quad\|$ et ρ sont équivalents sur toute sous-algèbre commutative de A, alors A est commutative.

Conjecture 2. Si ρ est continu sur A et $\rho(x) = 0$ impliques $x = 0$ alors A est commutative.

Depuis, on a donné des exemples d'algèbres non commutatives où $\rho(x) = 0$ implique $x = 0$ (voir par exemple J. Duncan et A. W. Tullo [2] ou l'exemple sans diviseurs de zéro donné par R. A. Hirschfeld et S. Rolewicz [4]). Gh. Mocanu [7] a très légèrement étendu un des résultats de Le Page en prouvant que s'il existe $\alpha > 0$ et une norme $\| \ \|_1$ telle que, sur A unifère, on ait $\|xy\|_1 \leqq \alpha \|yx\|$, alors A est commutative.

Tous ces résultats qui précèdent vont être généralisés par les théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Soit A une algèbre de Banach complexe, avec unité. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

—1° $A/\mathrm{Rad}\, A$ *est commutative.*
—2° ρ *est uniformément continu sur* A.
—3° *il existe un voisinage* V *de l'unité et* $k > 0$ *tels que* $|\rho(x) - \rho(y)| \leqq k\|x - y\|$, *pour* $x, y \in V$.
—4° *il existe un voisinage* V *de l'unité tel que* $\rho(x + y) \leqq \rho(x) + \rho(y)$, *pour* $x, y \in V$.
—5° *il existe un voisinage* V *de l'unité tel que* $\rho(xy) \leqq \rho(x)\rho(y)$, *pour* $x, y \in V$.
—6° *il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho(x + y) \leqq k(\rho(x) + \rho(y))$, *pour*

$$\rho(1 - x) < 1 \quad et \quad \rho(1 - y) < 1 .$$

—7° *il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho(xy) \leqq k\rho(x)\rho(y)$, *pour* $x, y \in A$.
—8° δ *est uniformément continu sur* A.
—9° *il existe un voisinage* V *de l'unité et* $k > 0$ *tel que* $|\delta(x) - \delta(y)| \leqq k\|x - y\|$, *pour* $x, y \in V$.
—10° *il existe un voisinage* V *de l'unité et* $k > 0$ *tel que pour* $x, y \in V$ *on ait* $\delta(x + y) \leqq k(\delta(x) + \delta(y))$.

THÉORÈME 2. *Soit A une algèbre de Banach complexe, sans unité. Les propritétés suivantes sont équivalentes*:

—1° $A/\mathrm{Rad}\, A$ *est commutative.*
—2° ρ *est uniformément continu sur* A.
—3° *il existe* $k > 0$ *tel que* $|\rho(x) - \rho(y)| \leqq k\|x - y\|$, *pour* $x, y \in A$.
—4° *il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho(x + y) \leqq k(\rho(x) + \rho(y))$, *pour* $x, y \in A$.
—5° *il existe* $k > 0$ *tel que* $\rho(xy) \leqq k\rho(x)\rho(y)$, *pour* $x, y \in A$.
—6° δ *est uniformément continu sur* A.
—7° *il existe* $k > 0$ *tel que* $|\delta(x) - \delta(y)| \leqq k\|x - y\|$, *pour* $x, y \in A$.
—8° *il existe* $k > 0$ *tel que* $\delta(x + y) \leqq k(\delta(x) + \delta(y))$, *pour* $x, y \in A$.

A l'origine, les démonstrations de ces deux théorèmes étaient élémentaires, mais très calculatoires. C'est ce travail, annoncé dans les *Notices of the American Mathematical Society* 18, p. 191 (1971), sous le titre "Almost commutative Banach algebras", qu'a utilisé D. Z. Spicer [9] pour donner une généralisation assez triviale de ces résultats. Depuis, l'utilisation des fonctions sous-harmoniques, dont le coup d'envoi a été donné par Vesentini [10], nous a permis de grandement simplifier ce travail et même, de l'améliorer fortement.

2. **Quelques lemmes préliminaires.** Soit D un domaine de $\boldsymbol{C}$, $\phi\colon D \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ est dite sous-harmonique si:

(a) ϕ est semi-continue supérieurement sur D, ce qui équivaut à dire que

$$\varlimsup_{\substack{\lambda\to\lambda_0\\ \lambda\neq\lambda_0\\ \lambda\in D}} \phi(\lambda) \leqq \phi(\lambda_0) ,$$

quel que soit $\lambda_0 \in D$.

(b) ϕ possède la propriété de moyenne, c'est-à-dire que:

$$\phi(\lambda_0) \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(\lambda_0 + re^{i\theta})d\theta ,$$

pour tout $\lambda_0 \in D$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}(\lambda_0, r) \subset D$.

Rappelons quelques propriétés classiques de ces fonctions:

—1° Toute somme finie de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique.

—2° Si f est convexe et croissante et ϕ sous-harmonique alors $f\circ\phi$ est sous-harmonique.

—3° Si $\phi_1 \geqq \phi_2 \geqq \cdots \geqq \phi_n \geqq \cdots$ est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques alors $\phi(\lambda) = \lim \phi_n(\lambda)$ est sous-harmonique.

—4° Si ϕ est sous-harmonique, $\phi \geqq 0$, telle que $|e^{\alpha\lambda}|\phi(\lambda)$ est sous-harmonique pour tout $\alpha \in \boldsymbol{C}$ alors $\operatorname{Log}\phi$ est sous-harmonique.

—5° Si $\phi(\lambda, t)$ est une famille de fonctions sous-harmoniques en λ, intégrables par rapport à t pour une mesure μ positive et finie, alors $\psi(\lambda) = \int \phi(\lambda, t)d\mu(t)$ est sous-harmonique.

—6° Si on désigne $M(r, \phi) = \operatorname{Max}\phi(\lambda)$, pour $|\lambda| = r$, et si

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r, \phi)}{\operatorname{Log} r} = 0$$

alors ϕ est constante (analogue du théorème de Liouville).

—7° Théorème d'Oka-Rothstein: si ϕ est sous-harmonique sur un domaine D contenant 0 et si Γ est un arc de Jordan contenu dans D, d'extrémité 0 alors:

$$\phi(0) = \varlimsup_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\Gamma\\ \lambda\neq 0}} \phi(\lambda) .$$

On pourra trouver les démonstration de ces résultats dans

Vladimirov [12].

LEMME 1. *Si* $a \in A$ *et si* U *est un ouvert contenant* $\mathrm{Sp}\, a$ *alors il existe* $r > 0$ *tel que* $\| b - a \| < r$ *implique* $\mathrm{Sp}\, b \subset U$.

DÉMONSTRATION. Voir Rickart [8], Théorème 1.6.16, p. 35-36.

COROLLAIRE. *La fonction* $x \to \delta(x)$ *est semi-continue supérieurement sur* A.

LEMME 2 (Vesentini [10] et [11]). *Si* $\lambda \to f(\lambda)$ *est une fonction analytique d'un domaine* D *de* $\boldsymbol{C}$ *dans* A *alors* $\lambda \to \rho(f(\lambda))$ *et* $\lambda \to \mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda))$ *sont sous-harmoniques.*

DÉMONSTRATION. (a) Montrons d'abord que $\lambda \to \mathrm{Log}\, \| f(\lambda) \|$ est sous-harmonique. C'est évident qu'elle est continue. D'après la formule de Cauchy pour les fonctions analytiques on a:

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

donc:

$$\| f(\lambda_0) \| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| f(\lambda_0 + re^{i\theta}) \| \, d\theta$$

D'après la propriété 4° il suffit de prouver que $\lambda \to | e^{\alpha\lambda} | \, \| f(\lambda) \|$ est sous harmonique, mais c'est évident car $| e^{\alpha\lambda} | \, \| f(\lambda) \| = \| e^{\alpha\lambda} f(\lambda) \|$ et $\lambda \to e^{\alpha\lambda} f(\lambda)$ est analytique.

(b) Pour $x \in A$ on sait que la suite $\| x^{2^n} \|^{1/2^n}$ est décroissante et tend vers $\rho(x)$, donc d'après la propriété 3°, $\lambda \to \mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique, puisque $\mathrm{Log}\, \rho(f(\lambda)) = \lim_{n \to \infty} 1/2^n \, \mathrm{Log}\, \| f(\lambda)^{2^n} \|$, où $\lambda \to f(\lambda)^{2^n}$ est analytique.

(c) La fonction $t \to e^t$ est convexe et croissante, donc, d'après la propriété 2°, $\lambda \to \rho(f(\lambda))$ est sous-harmonique.

LEMME 3. *Pour* $x \in A$, *soit* $\gamma(x) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{Log}\, \rho\, (\exp\, (e^{i\theta} x)) d\theta$. *Elle possède les propriétés suivantes*:

—1° $0 \leqq \gamma(x) \leqq \rho(x)$, *quel que soit* $x \in A$.
—2° $\gamma(x) = 0$ *implique que le spectre de* x *a un seul point.*
—3° *Si* $\lambda \to f(\lambda)$ *est une fonction analytique d'un domaine* D *dans* A, *alors* $\lambda \to \gamma(f(\lambda))$ *est sous-harmonique.*

DÉMONSTRATION.

—1° Comme $1 \leqq \rho(\exp\, (e^{i\theta} x)) \rho\, (\exp(e^{i(\theta+\pi)} x))$ il est immédiat que

$\gamma(x) \geqq 0$. l'autre inégalité résulte du fait que $\rho(\exp(e^{i\theta}x)) \leqq \exp(\rho(e^{i\theta}x)) = \exp \rho(x)$.

—2° Soit $\psi(\theta) = \operatorname{Log} \rho(\exp(e^{i\theta}x)) + \operatorname{Log} \rho(\exp(-e^{i\theta}x)) \geqq 0$.
Cette fonction est continue, puisque ρ est continu sur la sous-algèbre commutative engendrée par x et l'on a:

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(\theta)d\theta$$

Donc si $\gamma(x) = 0$ alors $\psi(\theta) \equiv 0$, pour $0 \leqq \theta \leqq \pi$, ce qui implique que $\operatorname{Sp}(\exp(e^{i\theta}x))$ est contenu dans un cercle centré en 0, quel que soit θ, donc pour $\lambda, \mu \in \operatorname{Sp}x$ on a $\operatorname{Re} e^{i\theta}(\lambda - \mu) = 0$ quel soit θ, soit $\lambda = \mu$.

—3° Cela résulte immédiatement du Lemme 2 et de la propriété 5.

LEMME 4. *Si quels que soient $x, y \in A$, $\operatorname{Sp}(xy = yx)$ a un seul point, alors $A/\operatorname{Rad} A$ est commutative.*

DÉMONSTRATION. Soit π une représentation irréductible sur un espace de Banach E. Si $\dim E = 1$, quel que soit π, c'est terminé. Supposons donc $\dim E > 1$. D'après le théorème de transitivité des algèbres irréductibles, pour ξ, η indépendants dans E, il existe $x, y \in A$ tels que:

$$\begin{aligned} \pi(x)\xi &= \eta \qquad & \pi(y)\xi &= 0 \\ \pi(x)\eta &= 0 \qquad & \pi(y)\eta &= \xi \end{aligned}$$

alors

$$\pi(xy - yx)\xi = -\xi \quad \text{et} \quad \pi(xy - yx) = \eta$$

donc $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} \pi(xy - yx) \subset \operatorname{Sp}(xy - yx)$, ce qui est absurde.

LEMME 5. Si $|\ \ |$ *est une semi-norme sur A, telle que $|x| \leqq \rho(x)$, quel que soit $x \in A$, alors $|xy - yx| = 0$, quels que soient $x, y \in A$.*

DÉMONSTRATION. (a) Soit $\lambda \to f(\lambda)$ une fonction holomorphe de D dans A, alors $\lambda \to |f(\lambda)|$ est continue car:

$$\begin{aligned} \big|\, |f(\lambda)| - |f(\mu)| \,\big| &\leqq |f(\lambda) - f(\mu)| \leqq \rho(f(\lambda) - f(\mu)) \\ &\leqq \|f(\lambda) - f(\mu)\| \end{aligned}$$

Elle est sous-harmonique, car évidemment:

$$|f(\lambda_0)| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\lambda_0 + re^{i\theta})|\, d\theta$$

(b) Soient $x, y \in A$ et $f(\lambda) = e^{\lambda x} y e^{-\lambda x}$. C'est une fonction holomorphe de $\boldsymbol{C}$ dans A, même si A n'a pas d'unité, car

$$e^{\lambda x} y e^{-\lambda x} = y + \lambda[x, y] + \frac{\lambda^2}{2!}[x, [x, y]] + \cdots \in A .$$

Aussi

$$\left| y + \lambda[x, y] + \frac{\lambda^2}{2!}[x, [x, y]] + \cdots \right| \leqq \rho(e^{\lambda x} y e^{-\lambda x}) = \rho(y)$$

donc

$$\left| [x, y] + \frac{\lambda}{2}[x, [x, y]] + \cdots \right| \leqq \frac{|y| + \rho(y)}{|\lambda|}$$

Mais $\lambda \to |[x, y] + \lambda/2\,[x, [x, y]] + \cdots|$ est sous-harmonique, d'après ce qui précède, et tend vers 0 quand λ tend vers l'infini, donc cette fonction est identiquement nulle, soit $|[x, y]| = 0$.

Ce lemme est une généralisation du résultat de Hirschfeld et Żelazko. L'énoncé qui suit est un cas particulier de la formule de Trotter.

LEMME 6. *Supposons A avec unité et $x, y \in A$. On a:*

$$e^{x+y} = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} (e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda y})^{1/\lambda}$$

et il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, avec $\lambda_n > 0$, telle que:

$$\rho(e^{x+y}) = \lim_{n \to \infty} \rho(e^{\lambda_n x} \cdot e^{\lambda_n y})^{1/\lambda_n} .$$

DÉMONSTRATION. Il existe $r > 0$ tel que si $|\lambda| \leqq r$ also

$$\| e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda y} - 1 \| < 1 ,$$

donc $\operatorname{Log}(e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda y})$ est alors parfaitement défini. Considérons la fonction définie par:

$$\psi(y) = \exp\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{Log}(e^{\lambda x} \cdot e^{\lambda y})\right) \text{ si } 0 < |\lambda| \leqq r \text{ et } \psi(0) = e^{x+y} .$$

Il n'est pas difficile de voir que cette fonction est analytique pour $|\lambda| \leqq r$. D'après le théorème d'Oka-Rothstein, si on prend $\Gamma =]0, r]$, il existe une suite (λ_n), $\lambda_n \in \Gamma$ telle que:

$$\rho(e^{x+y}) = \lim \rho((e^{\lambda_n x} \cdot e^{\lambda_n y})^{1/\lambda_n}) .$$

Mais si $\operatorname{Log} a$ est défini et $\mu > 0$ on a $\rho(a^\mu) = \rho(e^{\mu \operatorname{Log} a}) = \rho(a)^\mu$ car c'est vrai pour μ rationnel et il suffit d'étendre le résultat par continuité, puisque ρ est continu sur la sous-algèbre avec unité engendrée par a.

LEMME 7. *Quel que soit $x \in A$, le diamètre du spectre de x vérifie*

$$\delta(x) = \operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} (\operatorname{Log} \rho(e^{\alpha x}) + \operatorname{Log} \rho(e^{-\alpha x}))$$

Si $\lambda \longrightarrow f(\lambda)$ est une fonction analytique de D dans A alors $\lambda \longrightarrow \operatorname{Log} \delta(f(\lambda))$ est sous-harmonique.

DÉMONSTRATION. (a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \operatorname{Sp} x$, tels que $|\lambda_1 - \lambda_2| = \delta(x)$. Alors $\operatorname{Log} \rho(e^{\alpha x}) + \operatorname{Log} \rho(e^{-\alpha x}) \geqq \operatorname{Log} |e^{\alpha\lambda_1}| + \operatorname{Log} |e^{-\alpha\lambda_2}| = \operatorname{Re}(\alpha(\lambda_1 - \lambda_2))$, donc en prenant $\alpha = e^{-i\theta}$, où $\theta = \operatorname{Arg}(\lambda_1 - \lambda_2)$ on obtient:

$$\delta(x) = |\lambda_1 - \lambda_2| \leqq \operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} (\operatorname{Log} \rho(e^{\alpha x}) + \operatorname{Log} \rho(e^{-\alpha x})) .$$

Dans l'autre sens, la fonction $\alpha \longrightarrow \operatorname{Log} \rho(e^{\alpha x}) + \operatorname{Log} \rho(e^{-\alpha x})$ est semi-continue supérieurement, donc atteint son maximum sur $\{z \mid |z| = 1\}$ en un point α_0. Choisissons λ_1 et λ_2 de façon que $|e^{\alpha_0\lambda_1}| = \rho(e^{\alpha_0 x})$ et $|e^{-\alpha_0\lambda_2}| = \rho(e^{-\alpha_0 x})$. Alors

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} (\operatorname{Log} \rho(e^{\alpha x}) + \operatorname{Log} \rho(e^{-\alpha x})) &= \operatorname{Re}(\alpha_0(\lambda_1 - \lambda_2)) \\ &\leqq |\lambda_1 - \lambda_2| \leqq \delta(x) .\end{aligned}$$

(b) Pour α fixé, $\phi_\alpha(\lambda) = \operatorname{Log} \rho(\exp(\alpha f(\lambda))) + \operatorname{Log} \rho(\exp(-\alpha f(\lambda)))$ est sous-harmonique, d'après le Lemme 2. D'où:

$$\begin{aligned}\operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} \phi_\alpha(\lambda_0) &\leqq \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} \int_0^{2\pi} \phi_\alpha(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname*{Max}_{|\alpha|=1} \phi_\alpha(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta\end{aligned}$$

donc $\lambda \longrightarrow \delta(f(\lambda))$ possède la propriété de moyenne, mais la semi-continuité supérieure résulte du corollaire du Lemme 1.

(c) Si on remarque que $|e^{\alpha\lambda}| \delta(f(\lambda)) = \delta(e^{\alpha\lambda} f(\lambda))$ on conclut que $\lambda \longrightarrow \operatorname{Log} \delta(f(\lambda))$ est sous-harmonique, d'après la propriété 4°.

3. Démonstrations des théorèmes. D'abord, donnons celle du premier théorème.

$1° \Longrightarrow n°$, $2 \leqq n \leqq 10$. Comme $\operatorname{Sp} x = \operatorname{Sp} \mathring{x}$, où $\mathring{x}$ est la classe de x dans $A/\operatorname{Rad} A$ il est clair que

$$\begin{aligned}&\rho(x + y) = \rho(\mathring{x} + \mathring{y}) \leqq \rho(\mathring{x}) + \rho(\mathring{y}) = \rho(x) + \rho(y) \\ &\rho(xy) = \rho(\mathring{x}\mathring{y}) \leqq \rho(\mathring{x})\rho(\mathring{y}) = \rho(x)\rho(y) \\ &|\rho(x) - \rho(y)| \leqq \rho(x - y) \leqq \|x - y\| .\end{aligned}$$

De plus $\delta(x) = \delta(\dot{x}) = \operatorname{Max} |\chi(\dot{x}) - \eta(\dot{x})|$, pour tous les χ, η caractères de $A/\operatorname{Rad} A$ donc:

$$\delta(x + y) \leqq \delta(x) + \delta(y)$$
$$|\delta(x) - \delta(y)| \leqq \delta(x - y) \leqq \rho(x - y) \leqq \|x - y\| .$$

$2° \Rightarrow 3°$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\|x - y\| < \alpha$ implique $|\rho(x) - \rho(y)| < \varepsilon$. Soient $x \neq y$ quelconques, prenons $a = \alpha x/(2\|x - y\|)$ et $b = \alpha y/(2\|x - y\|)$, alors $\|a - b\| < \alpha$, donc

$$|\rho(x) - \rho(y)| < \frac{2\varepsilon}{\alpha}\|x - y\|$$

pour $x, y \in A$.

$3° \Rightarrow 1°$. Soient $x, y \in A$ et M tel que $\|x\|, \|y\| \leqq M$. Choisissons $r > 0$ de façon que $e^{\lambda x}, e^{\lambda y} \in V$ et $\rho(e^{\lambda x}), \rho(e^{\lambda x}) \geqq 1/2$ pour $|\lambda| \leqq r$, ce qui est possible car ρ est continu sur la sous-algèbre commutative, avec unité, engendrée par un élément.

Alors

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Log} \rho(e^{\lambda x}) - \operatorname{Log} \rho(e^{\lambda y})| \\ &\quad \leqq 2|\rho(e^{\lambda x}) - \rho(e^{\lambda y})| \leqq 2k\|e^{\lambda x} - e^{\lambda y}\| \end{aligned}$$

donc

$$|\operatorname{Log} \rho(e^{\lambda x}) - \operatorname{Log} \rho(e^{\lambda y})| \leqq 2kr\|x - y\| + 4k\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(Mr)^n}{n!} .$$

Posons $\gamma_r(x) = 1/(2\pi r)\int_0^{2\pi} \operatorname{Log} \rho(\exp(re^{i\theta}x))d\theta$. D'après la définition de γ donnée dans le Lemme 3, il n'est pas difficile de voir que $\gamma(x) = \gamma_r(x)$ donc que:

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| \leqq 2k\|x - y\| + 4kre^M \quad \text{si} \quad 0 < r \leqq 1 .$$

En faisant tendre r vers 0 on obtient $|\gamma(x) - \gamma(y)| \leqq 2k\|x - y\|$ pour $x, y \in A$.

Prenons $x = e^{\lambda a}be^{-\lambda a}$ et $y = \lambda[a, b] + \lambda^2/2!\,[a, [a, b]] + \cdots$, alors d'après ce qui précède $\gamma(y) \leqq \gamma(e^{\lambda a}be^{-\lambda a}) + 2k\|b\| \leqq (2k + 1)\|b\|$ puisque $\gamma(e^{\lambda a}be^{-\lambda a}) \leqq \rho(e^{\lambda a}be^{-\lambda a}) = \rho(b) \leqq \|b\|$. Ainsi

$$\gamma\Big([a, b] + \frac{\lambda}{2!}[a, [a, b]] + \frac{\lambda^2}{3!}[a, [a, [a, b]]] + \cdots\Big) \leqq \frac{(2k + 1)\|b\|}{|\lambda|}$$

En appliquant le Lemme 3 et la propriété 6° on obtient que $\gamma(ab - ba) = 0$ quels que soient $a, b \in A$, donc que $\operatorname{Sp}(ab - ba)$ a un seul point, mais alors d'après le Lemme 4, $A/\operatorname{Rad} A$ est commutative.

$4° \Rightarrow 1°$ Posons $\theta(x) = \overline{\lim}_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0}} (|\rho(1 + \lambda x) - 1|)/|\lambda|$. C'est évident que $0 \leqq \theta(x) \leqq \rho(x)$.

De plus

$$\theta(\alpha x) = \overline{\lim_{\substack{\lambda\alpha\to 0\\ \lambda\alpha\neq 0}}} \frac{|\rho(1+\lambda\alpha x) - 1|}{|\lambda\alpha|} \cdot |\alpha| = |\alpha|\,\theta(x)\ ,$$

pour $\alpha \neq 0$ et $\theta(0) = 0$. Montrons maintenant que $\theta(x+y) \leqq \theta(x) + \theta(y)$. Pour λ assez petit, $1+\lambda x$, $1+\lambda y$ et $1+\lambda(x+y)/2$ sont dans V, donc:

$$\rho(2+\lambda(x+y)) \leqq \rho(1+\lambda x) + \rho(1+\lambda y)\ , \quad \text{soit,}$$

$$\theta\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\,(\theta(x) + \theta(y))\ ,$$

qui avec ce qui précède, donne $\theta(x+y) = 2\theta((x+y)/2) \leqq \theta(x) + \theta(y)$. D'après le Lemme 5, on a donc $\theta(xy - yx) = 0$, quels que soient $x, y \in A$. Supposons que $\theta(a) = 0$ et soit $\alpha + i\beta \in \operatorname{Sp} a$, alors $1 + \lambda\alpha + \lambda i\beta \in \operatorname{Sp}(1+\lambda a)$ donc $\rho(1+\lambda a) \geqq ((1+\lambda\alpha)^2 + \lambda^2\beta^2)^{1/2}$ alors

$$\frac{((1+\lambda\alpha)^2 + \lambda^2\beta^2)^{1/2} - 1}{\lambda} \longrightarrow 0$$

quand $\lambda \longrightarrow 0$, ce qui implique $\alpha = 0$, soit $\operatorname{Sp} a \subset i\boldsymbol{R}$; mais on a également $\theta(ia) = 0$ donc $\operatorname{Sp} a \subset \boldsymbol{R}$, soit $\rho(a) = 0$.

Ainsi, d'après le Lemme 4, puisque $\operatorname{Sp}(xy - yx) = \{0\}$, quels que soient $x, y \in A$, alors $A/\operatorname{Rad} A$ est commutative.

$5° \Rightarrow 1°$. Posons $\nu(x) = \operatorname{Log} \rho(e^x)$, montrons que

$$\nu(x+y) \leqq \nu(x) + \nu(y)\ .$$

D'après le Lemme 6, il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, avec $\lambda_n > 0$, telle que $\rho(e^{x+y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(e^{\lambda_n x} \cdot e^{\lambda_n y})^{1/\lambda_n}$. Mais pour λ_n assez petit $e^{\lambda_n x}$ et $e^{\lambda_n y}$ sont dans V, donc on a:

$$\rho(e^{x+y}) \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, [\rho(e^{\lambda_n x}) \cdot \rho(e^{\lambda_n y})]^{1/\lambda_n} = \rho(e^x) \cdot \rho(e^y)\ ,$$

d'où le résultat.

D'une façon identique on obtient $\nu(-(x+y)) \leqq \nu(-x) + \nu(-y)$, d'où puisque $\delta(x) = \operatorname{Max}_{|\alpha|=1} (\nu(\alpha x) + \nu(-\alpha x))$, on a:

$$\delta(x+y) \leqq \delta(x) + \delta(y)\ .$$

Comme il est évident que $0 \leqq \delta(x) \leqq \rho(x)$ et que $\delta(\alpha x) = |\alpha|\,\delta(x)$ pour $\alpha \in \boldsymbol{C}$ et $x \in A$, d'après les Lemmes 4 et 5, $A/\operatorname{Rad} A$ est commutative.

$6° \Rightarrow 1°$. Supposons que $\rho(b-1) < 1$ et que $a \in A$. Alors

$$\rho(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} - 1) = \rho(e^{\lambda a}(b-1)e^{-\lambda a}) = \rho(b-1) < 1,$$

donc $\quad \rho(\lambda[a, b] + \lambda^2/2!\,[a, [a, b]] + \cdots) \leqq k(\rho(b-1) + \rho(e^{\lambda a} b e^{-\lambda a} - 1))$

soit

$$\rho\left([a, b] + \frac{\lambda}{2!}[a, [a, b]] + \cdots\right) \leqq \frac{2k\rho(b-1)}{|\lambda|}$$

D'après la propriété 6°, on obtient $\rho(ab - ba) = 0$. Maintenant si b est quelconque, pour λ assez petit $\rho((1 + \lambda b) - 1) < 1$, d'où d'après ce qui précède $\rho((1 + \lambda b)a - a(1 + \lambda b)) = |\lambda|\, \rho(ab - ba) = 0$, ainsi, d'après le Lemme 4, $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.

7° $\Rightarrow$ 3°. Montrons d'abord que $d(\lambda, \mathrm{Sp}\, y) \leqq k\, \|x - y\|$, si $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$, où $d(\lambda, \mathrm{Sp}\, y) = \mathrm{Inf}\, |\lambda - \mu|$, pour $\mu \in \mathrm{Sp}\, y$. Supposons que pour un $\lambda \in \mathrm{Sp}\, x$ on ait $d(\lambda, \mathrm{Sp}\, y) > k\, \|x - y\|$, alors $\lambda - y$ est inversible et $\lambda - x = (\lambda - y)[1 + (\lambda - y)^{-1}(y - x)]$, mais:

$$\begin{aligned}\rho((\lambda - y)^{-1}(y - x)) &\leqq k\rho((\lambda - y)^{-1})\rho(y - x) \\ &= \frac{k\rho(y - x)}{d(\lambda, \mathrm{Sp}\, y)} < \frac{\rho(y - x)}{\|y - x\|} < 1\end{aligned}$$

donc, $\lambda - x$ est inversible, ce qui est absurde. D'une façon identique, on prouve que $d(\mu, \mathrm{Sp}\, x) \leqq k\, \|x - y\|$, pour $\mu \in \mathrm{Sp}\, y$, donc:

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqq k\, \|x - y\| .$$

8° $\Rightarrow$ 9°. Démonstration identique à 2° $\Rightarrow$ 3°.

9° $\Rightarrow$ 1°. Comme $\mathrm{Sp}\,(1 + x) = 1 + \mathrm{Sp}\, x$, on a $\delta(1 + \lambda x) = |\lambda|\, \delta(x)$ quels que soient $\lambda \in C$ et $x \in A$. Si $x, y \in A$, pour λ assez petit, on a $1 + \lambda x \in V$ et $1 + \lambda y \in V$ donc.

$$|\lambda|\, |\delta(x) - \delta(y)| = |\delta(1 + \lambda x) - \delta(1 + \lambda y)| \leqq k\, |\lambda|\, \|x - y\| ,$$

soit $|\delta(x) - \delta(y)| \leqq k\, \|x - y\|$, quels que soient $x, y \in A$.

En reprenant, avec δ, la fin de la démonstration de 3° $\Rightarrow$ 1°, on obtient que $\delta(ab - ba) = 0$, quels que soient $a, b \in A$ donc que $\mathrm{Sp}\,(ab - ba)$ a un seul point, mais alors d'après le Lemme 4, $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.

10° $\Rightarrow$ 1°. Soient $x, y \in A$, pour λ assez petit, $1 + \lambda x$, $1 + \lambda y$ sont dans V, donc $\delta(2 + \lambda(x + y)) = |\lambda|\, \delta(x + y) \leqq k\, |\lambda|\, (\delta(x) + \delta(y))$, d'où $\delta(x + y) \leqq k(\delta(x) + \delta(y))$ quels que soient $x, y \in A$. On obtient comme plus haut que:

$$\delta\left([a, b] + \frac{\lambda}{2!}[a, [a, b]] + \cdots\right) \leqq \frac{2\delta(b)}{|\lambda|}$$

donc, d'après les Lemmes 4 et 5 que $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.

Pour le deuxième théorème, la démonstration est identique. Il suffit seulement de remarquer que, si $a, b \in A$, alors $e^{\lambda a}$ n'est pas défini dans A, mais, par contre, $e^{\lambda a}be^{-\lambda a} = b + \lambda[a, b] + \lambda^2/2!\,[a, [a, b]] + \cdots$ l'est.

REMARQUE 1. Dans $M_n(C)$, considérons $V = \{x \mid \| x - 1 \| \leqq 1/2\}$. C'est un voisinage compact de 1, de plus la fonction $x \to \rho(x)/\| x \|$ est continue sur V, donc atteint sa borne inférieure $\gamma \geqq 0$. Si $\gamma = 0$, alors il existe $a \in V$, tel que $\rho(a) = 0$, ce qui est absurde car:

$$1 = \rho(1) \leqq \rho(a) + \rho(1 - a) \leqq \| 1 - a \| \leqq \frac{1}{2} .$$

Donc $\rho(x) \geqq \gamma \| x \|$, sur V, ce qui implique que pour $x, y \in V$ on ait $\rho(x + y) \leqq \| x + y \| \leqq \| x \| + \| y \| \leqq 1/\gamma(\rho(x) + \rho(y))$ et

$$\rho(xy) \leqq \| xy \| \leqq \| x \| \| y \| \leqq \frac{1}{\gamma^2} \rho(x)\rho(y) .$$

Cet exemple prouve que, dans les propriétés 4° et 5° du Théorème 1, on ne peut pas avoir $\rho(x + y) \leqq k(\rho(x) + \rho(y))$ ou $\rho(xy) \leqq k\rho(x)\rho(y)$. Nécessairement il faut $k = 1$.

4. Quelques corollaires. Une algèbre avec involution est dite symétrique si, pour tout élément hermitien h (c'est-à-dire vérifiant $h = h^*$), on a $\mathrm{Sp}\, h \subset \boldsymbol{R}$. V. Pták (voir [2]) a prouvé qu'en posant $| x | = \rho(x^*x)^{1/2}$, $| x |$ est une semi-norme sous-multiplicative sur A, telle que $| x | \geqq \rho(x)$ pour $x \in A$ et $| x | = \rho(x)$ pour x normal (c'est-à-dire vérifiant $x^*x = xx^*$).

COROLLAIRE 1. *$A/\mathrm{Rad}\, A$ est une algèbre symétrique commutative si et seulement si $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$, quel que soit $x \in A$.*

DÉMONSTRATION. La condition nécessaire est évidente. Réciproquement supposons que $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$, quel que soit $x \in A$. Si A a une unité, prenons $x = e^{ih}$, pour h hermitien et alors $\rho(e^{ih})^2 = \rho(e^{-ih}e^{ih}) = 1$. De la même façon $\rho(e^{-ih}) = 1$. Ces deux résultats prouvent que $\mathrm{Sp}\, e^{ih}$ est contenu dans $\{z \mid |z| = 1\}$, donc que $\mathrm{Sp}\, h \subset \boldsymbol{R}$, d'où A est symétrique. Si A n'a pas d'unité c'est un peu plus difficile de prouver qu'elle est symétrique. Supposons qu'il existe h hermitien tel que $\mathrm{Sp}\, h \not\subset \boldsymbol{R}$; on peut supposer que $\alpha + i \in \mathrm{Sp}\, h$. Soit B une sous-algèbre, fermée, involutive, commutative, maximale, contenant h; on sait alors que $\mathrm{Sp}_A\, x = \mathrm{Sp}_B\, x$, quel que soit $x \in B$. Posons $v = (h - \alpha + ni)^m h \in B$. Comme $\alpha + i \in \mathrm{Sp}_A\, h = \mathrm{Sp}_B\, h$, il existe un caractère χ de B tel que $\chi(h) = \alpha + i \neq 0$. Alors $\chi(v) = (n + 1)^m i^m(\alpha + i)$ donc $\rho(v) \geqq (n + 1)^m(1 + \alpha^2)^{1/2}$. Mais $v^*v = ((h - \alpha)^2 + n^2)^m h^2$ donc $\rho(v^*v) \leqq \rho(h)^2[(\rho(h) + | \alpha |)^2 + n^2]^m$ on obtient ainsi $(n + 1)^{2m}(1 + \alpha^2) \leqq \rho(h)^2[(\rho(h) + |\alpha|)^2 + n^2]^m$, d'où:

$$(n+1)^2(1+\alpha^2)^{1/m} \leqq \rho(h)^{2/m}[(\rho(h)+|\alpha|)^2+n^2]$$

soit en faisant tendre m vers l'infini $(n+1)^2 \leqq (\rho(h)+|\alpha|)^2+n^2$, ce qui est absurde pour $2n+1 > (\rho(h)+|\alpha|)^2$. Sachant maintenant qu'elle est symétrique, alors d'après Pták $\rho(x) = |x|$, où $|\ \ |$ est une semi-norme, donc d'après le Théorème 1, $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.

REMARQUE 2. Dans le cas où A a une unité, on est capable de prouver beaucoup mieux: $A/\mathrm{Rad}\, A$ est symétrique et commutative si et seulement si $\rho(x^*x) = \rho(x)^2$ dans un voisinage V de l'unité.

La démonstration de la symétrie se fait de la même façon, sauf qu'on remplace h par λh avec $\lambda \in \boldsymbol{R}$, assez petit pour que $e^{i\lambda h} \in V$. Ainsi, d'après Pták, on a $|x| \geqq \rho(x)$ quel que soit x et $|x| = \rho(x)$ pour $x \in V$. Raisonnons dans $A' = A/\mathrm{Rad}\, A$, où $|x| = 0$ implique $x = 0$. Soit $x \in A'$ alors $e^{x/2^n} \in V$, pour n assez grand donc:

$$|e^x| \leqq |e^{x/2}|^2 \leqq \cdots \leqq |e^{x/2^n}|^{2^n} = \rho(e^{x/2^n})^{2^n} = \rho(e^x) \leqq |e^x|$$

soit $|e^x| = \rho(e^x)$, que que soit x.

Posons $k = \mathrm{Inf}_{x\neq 0}\, \rho(x)/|x| \leqq 1$ et choisissons une suite (x_n) telle que $\rho(x_n) \leqq (k+1/n)|x_n|$, quitte à multiplier les x_n par une constante on peut aussi supposer que $|x_n| = 1/(k+2/n)$. Alors

$$\rho(x_n) \leqq \frac{k+1/n}{k+2/n} < 1$$

donc, il existe u_n tel que $1 + x_n = e^{u_n}$, mais alors d'après ce qui précède $\rho(1+x_n) = |1+x_n|$ et de plus, si on suppose $k < 1/3$, alors $|x_n| > 1$, à partir d'un certain rang, donc:

$$|x_n| - 1 = \frac{1}{k+2/n} - 1 < |1+x_n| = \rho(1+x_n) \leqq 1 + \frac{k+1/n}{k+2/n},$$

soit $k \geqq 1/3$, d'où absurdité. Ainsi $\rho(x) \geqq 1/3\,|x|$ quel que soit $x \in A'$, d'où, d'après le Théorème, 1, $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.

Dans [1], nous avons démontré que si ρ est sous-multiplicatif sur l'ensemble des éléments normaux de A involutive alors le spectre est uniformément continu sur cet ensemble. C'est la méthode de démonstration que nous exploiterons pour prouver le:

COROLLAIRE 2. *Supposons que A est une algèbre involutive vérifiant:*

1° *quel que soit $x \in A$ on a $\rho((x+x^*)/2) \leqq \rho(x)$.*

2° *il existe $\alpha > 0$ tel que $\rho(xy) \leqq \alpha\rho(x)\rho(y)$, pour x, y normaux. Alors $A/\mathrm{Rad}\, A$ est commutative.*

DÉMONSTRATION. Nous donnerons les grandes idées, dans le cas avec unité, en priant le lecteur de se reporter à [1] pour la démonstration des propriétés que nous énoncerons.

Posons $|x| = \alpha \operatorname{Inf} \sum |\lambda_i| \rho(u_i)$, pour toutes les décompositions finies $x = \sum \lambda_i \cdot u_i + v$, où $\lambda_i \in \boldsymbol{C}$, u_i unitaire et $v \in \operatorname{Rad} A$. On vérifie que c'est une semi-norme sur A telles que $|h| \leqq \alpha(1+\sqrt{2})\rho(h)$ si h est hermitien, donc pour $x \in A$ on a, d'après l'hypothèse 1°:

$$|x| \leqq \left|\frac{x+x^*}{2}\right| + \left|\frac{x-x^*}{2}\right| \leqq \alpha(1+\sqrt{2})\left(\rho\left(\frac{x+x^*}{2}\right) + \rho\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)\right)$$
$$\leqq 2\alpha(1+\sqrt{2})\rho(x) .$$

En appliquant le Lemme 5, on conclut que $|ab - ba| = 0$, quels que soient $a, b \in A$. Mais, dans [1], après quelques calculs on peut obtenir que $|x| \geqq \rho(x)$, quel que soit $x \in A$, ainsi $\rho(ab - ba) = 0$, soit en appliquant le Lemme 4, $A/\operatorname{Rad} A$ est commutative.

Additif sur épreuves (30/4/76). Depuis, nous avons résolu négativement la seconde conjecture de Hirschfeld et Żelazko.

REFERENCES

1. B. Aupetit, *Uniforme continuité du spectre dans les algèbres de Banach avec involution*, à paraître.
2. A. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, New-York, Springer-Verlag, 1973.
3. J. Duncan and A. W. Tullo, *Finite dimensionality, nilpotents and quasinilpotents in Banach algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **19** (1974), 45-48.
4. R. A. Hirschfeld, and S. Rolewicz, *A class of non-commutative Banach algebras without divisors of zero*, Bull. Acad. Polon. Sci., **17** (1969), 751-753.
5. R. A. Hirschfeld and W. Żelazko, *On spectral norm Banach algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., **16** (1968), 195-199.
6. C. Le Page, *Sur quelques conditions entraînant la commutativité dans les algèbres de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris, **265** (1967), 235-237.
7. Gh. Mocanu, *Sur quelques critères de commutativité dans les algèbres de Banach*, Ann. Univ. București Mat.-Mec., **20** (1971), 127-129.
8. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Princeton, Van Nostrand, 1960.
9. D. Z. Spicer, *A commutativity theorem for Banach algebras*, Colloquium Math., **27** (1973), 107-108.
10. E. Vesentini, *On the subharmonicity of the spectral radius*, Boll. Un. Mat. Ital., **4** (1968), 427-429.
11. E. Vesentini, *Maximum theorems for spectra. Essays on topology and related topics dedicated to Georges de Rham*, New-York, Springer-Verlag, 1970.
12. V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, Cambridge, Mass. M.I.T. Press, 1966.

Received November 4, 1975.

UNIVERSITÉ LAVAL QUÉBEC, CANADA