89. *Sur l'ensemble des courbes intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, III.*

Par Masuo FUKUHARA.

Mathematical Institute, Hokkaido Imperial University.

(Rec. Sept. 10, 1931. Comm. by T. YOSIE, M.I.A., Oct. 12, 1931.)

Les résultats que Mlle. Charpentier a récemment obtenus sur l'équation différentielle[1)]

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

peuvent être généralisés au cas d'un système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \cdots\cdots, y_n) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n),$$

ce que nous allons montrer brièvement. Nous emploierons les notations utilisées dans mon précédent mémoire[2)] écrit sous le même titre. Nous supposerons toujours, pour simplifier les considérations, les fonctions f_i continues et bornées dans le domaine

$$(\mathrm{D})\qquad 0\leqq x\leqq 1, \qquad |y_i|<\infty \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n).$$

Donnons d'abord quelques définitions. Un point P de D est semi-singulier à droite (gauche) si la partie $R_d(P, (1))$ $(R_g(P, (1)))$ de $R(P, (1))$ située à droite (gauche) de P ne se réduit pas à une courbe. Soit ξ l'abscisse du point P. Il peut arriver que quelque petit que soit le nombre positif (négatif) ε, la partie de $R(P, (1))$ située entre deux plans $x=\xi$ et $x=\xi+\varepsilon$ ne se réduit pas à une courbe. P est alors appelé point localement semi-singulier à droite (gauche). Point (localement) singulier est un point (localement) semi-singulier à droite et à gauche. Pour le cas de n quelconque, les résultats de Mlle. Charpentier ne se géneralisent plus sans aucune restriction pour l'ensemble des points singuliers. Nous devons donc introduire la notion des singularités plus restrictives. Nous sommes ainsi conduits à considérer les points semi-singuliers P tels que la mesure de la partie $R(P, (1))$ située à droite (gauche) de P est positive. Un tel point est appelé point semi-singulier à droite (gauche) de mesure positive.

---

1) Comptes Rendus **192** (1931), 401.

2) Proc. **7** (1931), 37.

Supposons maintenant que l'unicité de la solution de (1) est assurée d'un seul côté droit. Dans ce cas nous dirons que l'ensemble des courbes intégrales est semi-régulier à droite. Si P et P' sont deux points d'un plan $x=\xi$, les régions $R_g(P, (1))$ et $R_g(P', (1))$ n'ont aucum point commun. Donc

THÉORÈME 1. *Si l'ensemble des courbes intégrales est semi-régulier, l'ensemble des points semi-singuliers de mesure positive situés dans un plan $x=\xi$ est au plus dénombrable.*

Considérons d'une manière générale deux points P et P' dans D. Si l'ensemble des courbes intégrales est semi-réguliers à droite, deux cas seuls peuvent se présenter: 1° les régions $R_g(P, (1))$ et $R_g(P', (1))$ n'ont aucun point commun; 2° l'une d'elle contient l'autre. Soit E un ensemble fermé et désignons par $R_g(E, (1))$ l'ensemble des points appartenant à l'une au moins des $R_g(P, (1))$, où $P \epsilon E$. On peut alors extraire de E un ensemble partiel E_o de manière que

$$R_g(E_o, (1))=R_g(E, (1))$$

$$R_g(P, (1))R_g(P', (1))=0 \quad \text{pour} \quad P \neq P',\ P\epsilon E_o,\ P'\epsilon E_o.$$

L'ensemble des points semi-singuliers de mesure positive contenus dans E_o est évidemment au plus dénombrable. Si E est un plan perpendiculaire à l'axe des x E_o coincide avec E et on retrouve le théorème 1. Un autre cas particulier intéressant est celui où E est un continu ne contenant que des points semi-singuliers de mesure positive sauf un nombre dénombrable de points. $R_g(E, (1))$ est alors un continu et ne peut être la somme d'un nombre dénombrable d'ensemble fermés disjoints. Il existe donc un point P de E tel que $R_g(P, (1))=R_g(E, (1))$. De ces considérations résultent immédiatement les théorèmes suivants.

THÉORÈME 2. *Si l'ensemble des courbes intégrales est semi-régulier, toute courbe, lieu des points semi-singuliers de mesure positive, est une courbe intégrale.*

Cette courbe intégrale sera appelée ligne de singularité de mesure positive.

THÉORÈME 3. *Si l'ensemble des courbes intégrales est semi-régulier, une ligne de singularité de mesure positive rencontre au plus un nombre dénombrable de lignes de singularité de mesure positive.*

Dans le cas de $n=1$, tout point semi-singulier est de mesure positive et l'hypothèse sur la mesure est inutile. On retrouve ainsi les théorèmes de Mlle. Charpentier. Remarquons enfin que les théorèmes sont indépendants de la propriété de Kneser.