

97. Über die notwendige und hinreichende Bedingung für die schlichte Abbildung des Einheitskreises.

Von Shin-ichi TAKAHASHI.

Shiomi-Institut für Phys. und Chem. Forschung, Osaka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., Oct. 12, 1932.)

Die abschliessende Auflösung von Hauptprobleme der Theorie der schlichten Abbildungen, nämlich das Koeffizientenproblem: Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung, welcher die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

genügen müssen, wenn dieselbe eine schlichte Abbildung des Kreises $|z| < 1$ vermitteln soll, war lang nicht gelungen. Neulich haben aber Herren Calugaréano und Abramesco, eine Antwort dafür angegeben.¹⁾ Für die Schlichtheit der Funktion $f(z)$ für $|z| < R$ ist es notwendig und hinreichend, dass die Funktion $(u-v)[f(u)-f(v)]^{-1}$ zweier komplexen Veränderlichen u und v regulär verhält für $|u| < R$, $|v| < R$, $u \neq v$, denn die Beziehung $f(u) \neq f(v)$ für $u \neq v$, $|u| < R$, $|v| < R$ gilt. Wir können also $(u-v)[f(u)-f(v)]^{-1}$ in eine unendliche Reihe entwickeln und zwar in der Form

$$\frac{u-v}{f(u)-f(v)} = 1 + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots \quad \text{für } |u|, |v| < R,$$

wobei

$$a_{pq} = a_{qp}$$

$$a_{pq} = \frac{1}{p!q!} \left[\frac{\partial^{p+q}}{\partial u^p \partial v^q} \frac{u-v}{f(u)-f(v)} \right]_{u=0, v=0} = \varphi_{pq}(1, a_2, a_3, \dots, a_{p+q+1})$$

gesetzt sind.

Herr Abramesco hat gezeigt dass $\frac{1}{R} = \lim_{n,m} \sqrt[n+m]{|a_{n,m}|}$. Wir benützen aber andere Form für R wie folgt.

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass R zugleich der Konvergenz radius von

$$1 + (|a_{10}| + |a_{01}|)r + (|a_{20}| + |a_{11}| + |a_{02}|)r^2 + \dots$$

ist. Daraus folgt ohne weiteres, dass

1) Comptes Rendus, **193** (1931), 1150-1152; **194** (1932), 834.

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_{n,0}| + |a_{n-1,1}| + \dots + |a_{1,n-1}| + |a_{0,n}|}$$

ist. Also ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

einen Kreisbereich $|z| < 1$ auf den schlichten Bereich abbildet, hiermit gegeben, in der folgenden Form:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|\varphi_{n,0}| + |\varphi_{n-1,1}| + \dots + |\varphi_{1,n}| + |\varphi_{0,n}|} \leq 1.$$

Es ist sehr beachtenswert, dass die Relationen

$$(1) \quad \begin{aligned} & \varphi_{n,0} + \varphi_{n-1,1} + \dots + \varphi_{1,n-1} + \varphi_{0,n} \\ & = \begin{vmatrix} 2a_2 & 1 & & & & \\ 3a_3 & 2a_2 & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & \dots & \dots & 1 & \\ (n+1)a_{n+1} & na_n & \dots & \dots & 2a_2 & \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} & (n+1)|a_{n+1}| + n|a_n|R_1 + (n-1)|a_{n-1}|R_2 + \dots + 2|a_2|R_{n-1} \geq R_n, \\ & R_n = |\varphi_{n,0}| + |\varphi_{n-1,1}| + \dots + |\varphi_{1,n-1}| + |\varphi_{0,n}| \end{aligned}$$

stattfinden.

Den wahren Wert von $\overline{\lim} \sqrt[n]{R_n}$ zu finden ist sehr schwierig. Dagegen ist es leicht die Majorante von R_n zu bestimmen.

Es seien

$$\begin{aligned} s_0 = 1, \dots, s_n = & (n+1)|a_{n+1}| + n|a_n|s_1 + (n-1)|a_{n-1}|s_2 + \dots \\ & + 2|a_2|s_{n-1}; \end{aligned}$$

(s_n) ist eine Majorante von (R_n) . Nun ist identisch

$$\begin{aligned} 1 = & (1 - 2|a_2|x - 3|a_3|x^2 - \dots - n|a_n|x^{n-1} + \dots)(s_0 + s_1x + s_2x^2 \\ & + \dots + s_nx^n + \dots). \end{aligned}$$

Daher, wenn ρ_0 die positive Wurzel von

$$1 = 2|a_2|x + 3|a_3|x^2 + \dots + n|a_n|x^{n-1} + \dots$$

bezeichnet, so konvergiert $\sum s_n x^n$ für $|x| < \rho_0$, folglich $\overline{\lim} \sqrt[n]{s_n} = \frac{1}{\rho_0}$.

Daraus ersieht man $\overline{\lim} \sqrt[n]{R_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{s_n} = \frac{1}{\rho_0}$. Also bildet die Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

den Kreisbereich $|z| < \rho_0$ auf den schlichten Bereich ab, wo ρ_0 der Gleichung

$$1 = 2|a_2|\rho + 3|a_3|\rho^2 + \dots + n|a_n|\rho^{n-1} + \dots$$

genügt, was schon bekannt ist. Überdies wissen wir schon, dass die Potenzreihe

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$$

und ihre sämtliche Abschnitte den Kreisbereich $|z| < \rho_0$ nicht nur auf den schlichten Bereich, sondern auf den in bezug auf den Nullpunkt sternförmigen Bereich abbildet.

Zum Schluss möchte ich eine Bemerkung über die Abschätzung der Sternschränke hinzufügen. Bieberbach hat den folgenden Satz bewiesen:¹⁾

Wenn $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ den $|z| < 1$ schlicht abbildet, so gibt es eine Zahl ρ derart, dass jede Potenzreihe

$$g(z) = z + b_2 z^2 + \dots \quad \text{mit} \quad |b_n| \leq |a_n|, \quad n = 2, 3, \dots$$

den $|z| < \rho$ schlicht abbildet. ρ ist von den a_2, a_3, \dots unabhängig. Es ist $\rho_1 < \rho \leq \rho_2$, wo ρ_1 die kleinste positive Wurzel von

$$(25e - 40)\rho^7 - (59e - 96)\rho^6 + (36e - 57)\rho^5 - 9\rho^4 + 10\rho^3 - 6\rho^2 + 7\rho - 1 = 0,$$

und ρ_2 die reelle Wurzel von

$$2x^3 - 6x^2 + 7x - 1 = 0$$

ist. Es ist $\rho_1 = 0,159\dots$, $\rho_2 = 0,164\dots$. Zu jedem Kreis $|z| < \rho$ mit $\rho > \rho_2$ gehören Funktionen $g(z)$, die ihn nicht schlicht abbilden.

Zum Beweise hat er die Zahl ρ so bestimmt, unter Benutzung von den Abschätzungen

$$|a_2| \leq 2, \quad |a_3| \leq 3, \quad |a_4| < 6, \quad |a_5| < 8, \quad |a_n| < en,$$

dass die Ungleichung

$$1 \geq 2|a_2|\rho + 3|a_3|\rho^2 + \dots$$

gilt. Aus dem oben Gesagte kann man hiermit den Satz von Bieberbach wie folgt modifizieren:

Wenn $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ den $|z| < 1$ schlicht abbildet, so gibt es eine Zahl ρ derart, dass jede Abschnitte

$$s_n(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

den $|z| < \rho$ auf den in bezug auf den Nullpunkt sternförmigen Bereiche abbildet. Es ist

$$0,159\dots < \rho \leq 0,164\dots$$

Zusammen mit einem Satz von Szegö,²⁾ welcher besagt: die sämtliche Abschnitte einer den $|z| < 1$ in bezug auf den Nullpunkt sternig

1) Commemoration Volume of the Calcutta Math. Soc., (1930), 17-20.

2) Math. Ann., **100** (1928), 188-211.

abbildenden Potenzreihe $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ den Kreis $|z| < 4^{-1}$ in bezug auf den Nullpunkt sternig abbilden, und hierbei die Zahl 4^{-1} ist eine wahre Konstante, erhält man hieraus die Ungleichung

$$R_s > 4 \times 0,159\dots = 0,636\dots,$$

wobei R_s die Sternschränke bedeutet. Falls die Vermutung zutrifft, dass $|a_n| \leq n$ ist, was ja in der Tat gilt, wenn die sämtliche a_n reell sind,¹⁾ so ist $\rho = \rho_2 = 0,164\dots$ ²⁾ und somit hat man die Abschätzung

$$(A) \quad R_s > 4 \times 0,164\dots = 0,656\dots$$

Durch eine scharfsinnige Betrachtung hat kürzlich Herr Marx die Abschätzung

$$(B) \quad 0,6479\dots < R_s \leq 4\sqrt{2} - 5 = 0,6568\dots$$

gefunden.³⁾ Aus (A) und (B) gewinnt man also

$$0,656\dots < R_s \leq 0,6568\dots$$

für eine Potenzreihe $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ mit durchweg reellen Koeffizienten.

1) Dieudonné, Comptes Rendus, **192** (1931), 79–81; Rogosinski, Math. Zeits., **35** (1932), 93–121; Szász, Jahresbericht d. D. M. V., **42** (1932), 73–75.

2) Bieberbach, loc. cit.

3) Math. Ann., **107** (1932), 40–67.