55. Ein Satz über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper.

Von Tadasi NAKAMURA.
Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Tokyo.

(Comm. by T. TAKAGI, M.I.A., April 12, 1934.)

Es sei $\mathfrak{S}$ ein $\mathfrak{p}$-adischer Schiefkörper[1] vom endlichen Rang über seinem Zentrum K, $\mathfrak{R}$ ein Unterschiefkörper von $\mathfrak{S}$, der K enthält. Die Gesamtheit der mit $\mathfrak{R}$ elementweise vertauschbaren Elemente von $\mathfrak{S}$ bildet einen Unterschiefkörper, den wir mit $\mathfrak{T}$ bezeichnen.[2] L sei das gemeinsame Zentrum von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$.

Wir beweisen:

Sind $\mathfrak{R} < \mathfrak{R}'$ zwei Unterschiefkörper von $\mathfrak{S}$, so ist die Verzweigungsordnung bzw. der Restklassengrad zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gleich dem Restklassengrad bzw. der Verzweigungsordnung zwischen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$.

Damit ist der Zerlegungsgesetz von Idealen von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}'$ auf den Zerlegungsgesetz von Idealen von $\mathfrak{T}'$ in $\mathfrak{T}$ reduziert und umgekehrt.

Zum Beweis des Satzes bezeichnen wir die Verzweigungsordnungen bzw. die Restklassengrade von L, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$ in bezug auf K mit e_L, $e_{\mathfrak{R}}$, $e_{\mathfrak{T}}$, e bzw. f_L, $f_{\mathfrak{R}}$, $f_{\mathfrak{T}}$, f. Dann gelten ersichtlich

$$f_{\mathfrak{R}} = f_L \sqrt{(\mathfrak{R}:L)}, \qquad e_{\mathfrak{R}} = e_L \sqrt{(\mathfrak{R}:L)},$$

$$f_{\mathfrak{T}} = f_L \sqrt{(\mathfrak{T}:L)}, \qquad e_{\mathfrak{T}} = e_L \sqrt{(\mathfrak{T}:L)},$$

wo z.B. $(\mathfrak{R}:L)$ den Rang von $\mathfrak{R}$ über L bedeutet.[1] Also ist

$$f_{\mathfrak{R}} e_{\mathfrak{T}} = e_{\mathfrak{R}} f_{\mathfrak{T}} .$$

Anderseits ist

$$f_{\mathfrak{R}} e_{\mathfrak{R}} = (\mathfrak{R}:K) . \qquad f_{\mathfrak{T}} e_{\mathfrak{T}} = (\mathfrak{T}:K) , \qquad fe = f^2 = e^2 = (\mathfrak{S}:K) .$$

Nach R. Brauer ist aber

$$(\mathfrak{R}:K)(\mathfrak{T}:K) = (\mathfrak{S}:K) .$$

Also erhält man

$$(f_{\mathfrak{R}} e_{\mathfrak{T}})^2 = (e_{\mathfrak{R}} f_{\mathfrak{T}})^2 = f_{\mathfrak{R}} e_{\mathfrak{R}} f_{\mathfrak{T}} e_{\mathfrak{T}} = (\mathfrak{R}:K)(\mathfrak{T}:K) = (\mathfrak{S}:K) = f^2 = e^2 .$$

---

1) H. Hasse: Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlensysteme, Math. Ann. **104** (1931), 495–534.

2) Siehe R. Brauer: Über die algebraische Struktur von Schiefkörpern, Journal für Math. **166** (1932), 241–252. E. Noether: Nichtkommutative Algebra, Math. Zeitschr. **37** (1933), 514–541. K. Shoda: Über die Galoissche Theorie der halbeinfachen hyperkomplexen Systeme, Math. Ann. **107** (1932), 252–257. — Die hier gebrauchten Sätze sind in der Anmerkung 2) der vorangehenden Arbeit von K. Shoda formuliert.

Hieraus folgt unsere Behauptungen:

$$\frac{f}{f_{\mathfrak{R}}}=e_{\mathfrak{T}}, \qquad \frac{f}{f_{\mathfrak{T}}}=e_{\mathfrak{R}}, \qquad \frac{e}{e_{\mathfrak{R}}}=f_{\mathfrak{T}}, \qquad \frac{e}{e_{\mathfrak{T}}}=f_{\mathfrak{R}}.$$

Ist $\mathfrak{T}$ kommutativ, so ist die Arithmetik zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ nach unserem Satz auf den kommutativen Fall reduziert. Es sei z.B. $\mathfrak{T}$ galoissch über $\mathfrak{T}'$. Ist $\mathfrak{T}_t$ der Trägheitskörper, so ist der entsprechende Schiefkörper $\mathfrak{R}_t$ der minimale Zwischenschiefkörper von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, dessen Primideal in $\mathfrak{R}'$ nicht verzweigt.