18. *Sur la représentation paramétrique régulière des ensembles.*

Par Motokiti KONDÔ.
L'Institute Mathématique, l'Université Impériale de Hokkaido, Sapporo.
(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., March 12, 1937.)

Pour un ensemble linéaire E, nous appelons régulière sur l'ensemble E toute fonction $\varphi(t)$ définie dans l'ensemble E qui ne prend jamais des valeurs égales, c'est-à-dire, on a toujours $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ pour deux points distincts t_1 et t_2 contenus dans E. Nous dirons maintenant qu'un ensemble linéaire M quelconque admet une représentation paramétrique régulière par rapports à E si M est l'ensemble des valeurs d'une fonction $x=\varphi(t)$ définie dans E, continue et régulière dans cet ensemble. Dans ses note,[1] M. M. W. Sierpiński et E. Szpilrajn ont démontré le théorème: quel que soit la suite Σ des ensembles linéaires ayant le même puissance, il existe un ensemble linéaire E tel que tout ensemble de la famille Σ admet une représentation paramétrique régulière par rapports à E. Or, nous pouvons démontrer un théorème sur la représentation paramétrique régulière des ensembles d'une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires. Pour cela, posons d'abord la définition suivante. Soit E un ensemble lineaire condensé en soi. Nous dirons que E contient partout des ensembles parfaits lorsqu'il existe un sous-ensemble parfait de E dans tous les voisinages des chaque point de E. Nous avons alors le

Théorème 1. Soit F une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires qui contiennent partout des ensembles parfaits. Il existe un ensemble linéaire N tel que tout ensemble de la famille F admet une représentation paramétrique régulière par rapports à N. Et, quand on peut donner un ensemble universel U des ensembles de la famille F, nous pouvons définir effectivement un des ensembles de cette nature.

Démonstration. Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer la deuxième partie du théorème. Sans perdre la généralité, on peut supposer que tout ensemble de F soit contenu dans le domaine fondamental R, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les nombres irrationnels. Quand un ensemble universel U des ensembles de F est donné, on peut définir effectivement dans le plan $R(x, y)=R\times R$ un couple doublement universel U_1 et U_2, tel que, quels que soient l'ensemble E_1 de la famille F et la sous-ensemble $G_{\delta\sigma}$ E_2 du domaine fondamental R, il existe un droite parallèle à l'axe OX qui coupe U_1 et U_2 en E_1 et E_2 respectivement. Maintenant, posons $V=U_1-U_2$.

Soit E un ensemble de F. Nous définirons les sous-ensembles non denses F_{ij} $(i, j=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ de E comme il suite: 1°, les ensembles F_{ij} sont disjoints et homéomorphes au domaine fondamental R, 2°, pour

1) W. Sierpiński et E. Szpilrajn: Sur les transformations continues biunivoques. Fund. Math., **27** (1936), 289.

tout nombre naturel k, le diamètre de l'ensemble F_{nk}: $\delta(F_{nk}) < \frac{1}{n}$,
3°, pour tout nombre naturel n, chaque point de E est celui de condensation de l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty} F_{nk}$. Il existe alors une droite $y=y_0$ qui coupe l'ensemble V en $F=E-\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} F_{ij}$.

En suite, prenons les nombres rationnels s_n et t_n $(n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ comme il suit: $s_k < s_{k+1} < y_0 < t_{k+1} < t_k$ $(k=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ et $\lim_{n\to\infty} |t_n - s_n| = 0$. Maintenant, considérons les deux parties du plan contenant entre les deux droites $y=s_k$ et $y=s_{k+1}$, et entre $y=t_k$ et $y=t_{k+1}$ respectivement. En divisant les deux parties en rectangles par les droites $x=\frac{i}{k}$ $(j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$ parallèles à l'axe OY, considérons les parties communes de V et les rectangles ainsi obtenues. Enfin, nous rangeons ces parties communes en une suite infinie $\{V_{kj}\}$ $(j=1, 2, 3, \ldots\ldots)$. Maintenant, nous définissons une transformation $\varphi(x)$ qui transforme V en un sous-ensemble de la droite $y=y_0$. Tout d'abord, posons $\varphi(x)=x$ pour tout point x de F. Pour la projection V_{kj}^* de l'ensemble V_{kj} sur la droite $y=y_0$, désignons par ρ_{kj} la borne inférieure des distances: dis (V_{kj}^*, F_{ki}) $(i=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ et prenons un des ensembles F_{ki} tel qu'on ait dis $(V_{kj}^*, F_{ki}) < \rho_{kj} + \frac{1}{k}$. Nous désignons par F_{kj}^* cet ensemble. Or, selon la supposition sur les ensembles F_{kj}, on peut choisir les ensembles F_{kj}^* qui sont distincte deux à deux. Ici, on peut supposer qu'il existe un nombre infini des ensembles restants par la choix des ensembles F_{kj}^* parmi les ensembles F_{kj} $(k, j=1, 2, 3, \ldots\ldots)$. Nous désignons par G_k $(k=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ ces ensembles restants. Or comme les ensembles F_{kj}^* sont homéomorphes à $R\times R$, on peut définir une transformation topologique $\varphi_{kj}(x)$ qui transforme $R\times R$ en F_{kj}^*. Ceci étant, définirons sur $V-F$ la transformation $\varphi(x)$ comme il suite: quand un point x de $V-F$ appartient à l'ensemble V_{kj}, posons $\varphi(x)=\varphi_{kj}(x)$. Alors, on voit sans peine que la transformation $\varphi(x)$ est continue et biunivoque sur V et qu'on a

$$\varphi(V)=F+\sum_{k,j=1}^{\infty}\varphi(V_{kj})$$

ou

$$E=\varphi(V)+\sum_{k=1}^{\infty}G_k+\sum_{k,j=1}^{\infty}(F_{kj}^*-\varphi(V_{kj})).$$

Or, on peut voir que l'ensemble $\sum_{k=1}^{\infty}G_k+\sum_{k,j=1}^{\infty}\left(F_{kj}^*-\varphi(V_{kj})\right)$ estd écomposé en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints dont chacun est homéomorphe à V ou $R\times R-V$. Maintenant, dans chaque intervalle de Baire $(2n)$ d'ordre 1 prenons un ensemble M_n homéomorphe à l'ensemble V et dans chaque intervalle de Baire $(2n+1)$ d'ordre 1 un ensemble C_n homéomorphe à $R\times R-V$. Alors, on voit sans peine que la somme $M=\sum_{n=1}^{\infty}(M_n+C_n)$ satisfait à la condition du théorèm, c'est-à-dire, tout ensemble de F admet une représentation paramétrique régulière par rapports à l'ensemble M. C. Q. F. D.

Pour un ensemble linéaire non vide E, le produit $E \times R$ de E et le domaine fondamental R contient partout des ensembles parfaits. Par suite, quelle que soit la famille F de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires non vides, il existe un ensemble linéaire N tel que tout produit $E \times R$ d'un ensemble E de F et le domaine fondamental R admet une représentation paramétrique régulière par rapports à l'ensemble N. Or, puisque E est une image continue du produit $E \times R$, nous avons donc le

Théorème 2. Soit F une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires non vides. Il existe un ensemble linéaire N tel que tout ensemble de la famille F est une image continue de l'ensemble N.[1]

Comme on sait, tout ensemble analytique, linéaire et condense en soi, contient partout des ensembles parfaits. Donc, d'après le théorème 1, on voit qu'il exists un ensemble linéaire N, défini comme la somme d'ensemble analytique et complémentaire analytique, tel que chaque ensemble analytique, linéaire et non dénombrable, admet une représentation prametrique régulière par rapports à l'ensemble N. Or, selon le théorème[2] M. S. Mazurkiewicz, on peut remplacer cet ensemble N par un complémentarie analytique, ce qui donne une solution du problème proposé par M. W. Sierpiński dans Fundamenta Mathematicae, t. 26, p. 334. Or, on peut donner plus précisément une solution de ce problème. Pour cela commençons par la définition. Dans le plan $R(x, y)$ prenons le crible binaire[3] C de M. H. Lebesgue et parmi les points x de l'axe OX dont ses developpement

$$x = \frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{\theta_n}{2^n} + \cdots\cdots \qquad (\theta_n = 0 \text{ ou } 1)$$

est toujours infini, prenons tous les points x tels que l'ensemble linéaire C_x[4] est bien ordonné le long de la diréction positive de l'axe OY. Nous appellerons l'ensemble de ces point celui de M. H. Lebesgue. Alors, on voit que l'ensemble de M. H. Lebesgue est un complémentaire analytique. Cette définition étant posée, nous pouvons démontrer le théorème suivant:

Théorème 3. Tout ensemble linéaire non dénombrable analytique admet une représentation paramétrique régulière par rapports à l'ensemble de M. H. Lebesgue, quand on néglige une infinité dénombrable de point de cet ensemble.

Nous publierons prochainement les details de ces résultats dans un autre travail.

---

1) W. Sierpiński, Sur les images continues des ensembles de points, Fund. Math., **14** (1929), 234.

2) Voir, p. ex., N. Lusin, Lecons sur les ensembles analytiques, 1930, Paris, p. 284.

3) N. Lusin, loc. cit., p. 197.

4) Nous désignons par C_{x_0} l'ensemble de tous les points du crible C situé sur la droite $x = x_0$ parallèle à l'axe OY.