27. *Ein Beweis des Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen.*

Von Shizuo KAKUTANI.

Mathematisches Institut, Kaiserliche Universität zu Osaka.

(Comm. by M. FUJIWARA, M.I.A., April 12, 1937.)

Herr Eidelheit[1)] hat den folgenden Satz bewiesen:

Satz. Sind zwei konvexe Körper ohne gemeinsame innere Punkte in einem linearen normierten Raume gegeben, so gibt es immer eine sie trennende Ebene.

Dabei heisst eine Menge ein Körper, wenn sie konvex ist und innere Punkte besitzt, und eine Ebene ist die Gesamtheit aller Punkte x, die eine Gleichung von der Form $f(x)-c=0$ erfüllen, wo $f(x)$ ein nicht identisch verschwindendes lineares Funktional, c eine reelle Konstante bedeutet. Wenn wir nur die inneren Punkte betrachten, so ist dieser Satz gleichbedeutend mit dem

Satz. Wenn zwei konvexe offene Mengen K_1, K_2 keinen Punkt gemein haben, so gibt es ein lineares Funktional $f(x)$ und eine reelle Konstante c, derart, dass

$$f(x) < c \quad \text{für} \quad x \in K_1$$

und

$$f(x) > c \quad \text{für} \quad x \in K_2$$

ist.

Im Folgenden werde ich einen einfacheren Beweis davon geben.

Es sei zunächst $G_i (i=1, 2)$ die Menge aller Punkte p, für welche es wenigstens ein Punktpaar $a_i \in K_i$, $a_{3-i} \in K_{3-i}$ gibt, derart, dass die Relation (pa_ia_{3-i}) besteht ((pab) bedeutet, dass die drei Punkte p, a, und b auf einer Gerade in dieser Reihenfolge[2)] liegen).

Es ist klar, dass G_i offen ist, K_i enthält und folglich nicht leer ist. Ich behaupte, dass $G_1 \cdot G_2 = 0$ ist; denn gäbe es einen Punkt $p \in G_1 \cdot G_2$, so würde es vier Punkte a_1, a_2, b_1 und b_2 geben, derart, dass

$$a_1,\ b_1 \in K_1, \qquad a_2,\ b_2 \in K_2 \tag{1}$$

und

$$(pa_1a_2), \qquad (pb_2b_1) \tag{2}$$

ist. Es sei q der Schnittpunkt zweier Strecken $\overline{a_1b_1}$ und $\overline{a_2b_2}$ (die Existenz vom Schnittpunkte folgt aus (2)). Dann ist (a_1qb_1) und (a_2pb_2) und daraus folgt aus (1), dass gleichzeitig $q \in K_1$ und $q \in K_2$ ist, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass $K_1 \cdot K_2 = 0$ ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Da die offenen Mengen G_1 und G_2 keinen gemeinsamen Punkt haben, so gibt es einen Punkt $p \bar{\in} G_1 + G_2$.[3)] Es sei K_2' die konvexe Menge, welche in Bezug auf p mit K_2 symmetrisch ist (d. h. die Menge

1) M. Eidelheit, Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math., **6** (1936), 104–111.

2) Es mag $p=a$ oder $a=b$ sein.

3) Wenn $\bar{K_1} \cdot \bar{K_2} \neq 0$ ist, so hat jeder Punkt $p \in \bar{K_1} \cdot \bar{K_2}$ diese Eigenschaft.

aller Punkte $x'=2p-x$ mit $x \in K_2$), und K^* die kleinste konvexe Menge, welche K_1 und K_2' enthält. Ich behaupte, dass $p \bar{\in} K^*$ ist; denn wäre $p \in K^*$, so gäbe es zwei Punkte $a \in K_1$ und $b' \in K_2'$, derart, dass (apb') ist. Es sei $b=2p-b'$. Dann würde $b \in K_2$ und (pab) oder (pba) sein, im Gegensatz zu der Annahme, dass $p \bar{\in} G_1+G_2$ ist.

Jetzt[1] nehmen wir einen inneren Punkt x von K^* und betrachten das Minkowskische Funktional $K^*(x)$ von K^*. Nach einem Satz von S. Mazur,[2] gibt es ein lineares Funktional $f(x)$, derart, dass $f(x) \leqq K^*(x)$ und $f(p)=K^*(p)$ ist. Wenn wir also $c=f(p)$ setzen, so ist es klar, dass die durch diese $f(x)$ und c definierte Ebene das Gewünschte leistet; denn für $x \in K_1 \subset K^*$ ist $f(x) \leqq K^*(x) < K^*(p)=f(p)=c$, und für $x \in K_2$ ist $f(x)=2f(p)-f(2p-x)=2c-f(2p-x)$, woraus folgt, da $2p-x \in K_2' \subset K^*$ und folglich $f(2p-x)<c$ ist, dass $f(x)>c$ ist. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

1) Dieser letzte Teil des Beweises ist mit dem von Herrn Eidelheit identisch.

2) S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, Studia Math., **4** (1933), 73, Satz 1.