53. *Projektive Transformation eines Systems der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung.*

Von Hitoshi HOMBU.

Geometrisches Seminar, Kaiserliche Hokkaido Universität, Sapporo.

(Comm. by S. KAKEYA, M.I.A., June 12, 1937.)

In zwei Mannigfaltigkeiten liege je ein Kurvensystem. Wenn bei einer Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf die andere die Kurvensysteme einander überdecken, so wollen wir sagen, dass die Kurvensysteme projektiv verwandt sind.

1. Zunächst möchten wir die notwendige und hinreichende Bedingung finden dafür, dass in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit zwei Systeme der verallgemeinerten "paths"[1] projektiv verwandt seien, welche durch Systeme der gewöhnlichen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{d^3x^i}{dt^3}+\Gamma^i\left(x^j, \frac{dx^j}{dt}, \frac{d^2x^j}{dt^2}\right)=0 \quad \text{oder} \quad x^{(3)i}+\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})=0\,,$$

$$(2) \qquad \frac{d^3x^i}{d\bar{t}^3}+\bar{\Gamma}^i\left(x^j, \frac{dx^j}{d\bar{t}}, \frac{d^2x^j}{d\bar{t}^2}\right)=0 \quad \text{oder} \quad x^{(\bar{3})i}+\bar{\Gamma}^i(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})=0$$

gegeben sind. Durch ein Linienelement zweiter Ordnung $(x, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ läuft eine und nur eine Integralkurve von (1) mit einem beliebigen Anfangswert von t, z. B. t_0. Ist diese auch eine Integralkurve von (2), so soll auf dieser Kurve mindestens eine Parametertransformation $t=t(\bar{t})$ existieren und bestehen

$$x^{(\bar{1})i}=x^{(1)i}\frac{dt}{d\bar{t}}\,, \qquad x^{(\bar{2})i}=x^{(2)i}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2+x^{(1)i}\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\,,$$

$$x^{(\bar{3})i}=x^{(3)i}\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^3+3x^{(2)i}\frac{dt}{d\bar{t}}\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}+x^{(1)i}\frac{d^3t}{d\bar{t}^3}\,,$$

somit ergibt sich nach (1) und (2)

$$(3) \qquad \bar{\Gamma}^i(x_0, \rho x_0^{(1)}, \rho^2x_0^{(2)}+\sigma x_0^{(1)})=\rho^3\Gamma^i(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})-3\rho\sigma x_0^{(2)i}-\omega x_0^{(1)i}$$

$$\left(\rho=\left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)_{t=t_0}, \quad \sigma=\left(\frac{d^2t}{d\bar{t}^2}\right)_{t=t_0}, \quad \omega=\left(\frac{d^3t}{d\bar{t}^3}\right)_{t=t_0}\right);$$

ρ, σ und ω lassen sich durch $(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ bestimmen (nicht notwendig eindeutig). Da (3) für jede Integralkurve, also für jedes Linienelement

1) Über affine und intrinseke Theorien der verallgemeinerten "paths" vgl.: D. D. Kosambi, Path-spaces of higher order, Quart. J. of Math., Oxford Ser., **7** (1936); A. Kawaguchi und H. Hombu, Die Geometrie des Systems der partiellen Differentialgleichungen, Journal of the Faculty of Science, Hokk. Imp. Univ., Ser. I, **6** (1937).

$(x_0, x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ bestehen soll und man im allgemeinen die Differenzierbarkeit der Funktionen $\rho(x, x^{(1)}, x^{(2)})$, $\sigma(x, x^{(1)}, x^{(2)})$ und $\omega(x, x^{(1)}, x^{(2)})$ voraussetzen darf, so folgt die Existenz der Funktion $\rho(x, x^{(1)}, x^{(2)})$, welche nach (3) die Beziehungen erfüllt:

$$(4)\qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}^i(x, \rho x^{(1)}, \rho^2 x^{(2)}+\sigma x^{(1)})=\rho^3\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})-3\rho\sigma x^{(2)i}-\omega x^{(1)i}\,, \\ \sigma=\rho\dfrac{d\rho}{dt}\equiv\rho(\rho_{(0)i}x^{(1)i}+\rho_{(1)i}x^{(2)i}-\rho_{(2)i}\Gamma^i)\,, \qquad \omega=\rho\dfrac{d\sigma}{dt}\,. \end{cases}$$

Und noch müssen $x^{(1)i}$ und $x^{(2)i}$ aus den Gleichungen $x^{(\bar{1})i}=\rho x^{(1)i}$, $x^{(\bar{2})i}=\rho^2 x^{(2)i}+\sigma x^{(1)i}$ gelöst werden, da die umgekehrten Beziehungen von (4) in bezug auf Γ^i und $\bar{\Gamma}^i$ auch bestehen sollen. Sodann sind die Bedingungen (4) hinreichend.

Wenn ein System der verallgemeinerten "paths" (1) gegeben ist, so lässt sich die grösste Klasse von Systemen, die mit dem System projektiv verwandt sind, durch (4) angeben, wobei ρ beliebig wandert. Wenn die Funktion ρ nur von x^i oder nur von x^i und $x^{(1)i}$ abhängig ist, so ergeben sich die beschränkten projektiven Klassen, welche offenbar unter Koordinatentransformationen der Mannigfaltigkeit invariant sind.

2. Nun wollen wir insbesondere die Gesamtheit der Systeme der verallgemeinerten "paths" ins Auge fassen; dabei ist der Parameter t auf jeder dem System gehörigen Kurve affin, d. h. die Gleichungen des Systems bleiben unter linearen Parametertransformation von der Gestalt $t^*=at+b$ unverändert. Seien (1) und (2) solche Systeme, so sind

$$(5)\qquad \begin{cases} \Gamma^i(x, kx^{(1)}, k^2x^{(2)})=k^3\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})\,, \\ \bar{\Gamma}^i(x, kx^{(\bar{1})}, k^2x^{(\bar{2})})=k^3\bar{\Gamma}^i(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})\,. \end{cases}$$

Dafür, dass (1) und (2) projektiv verwandt seien, ist es notwendig und hinreichend, dass nach (3) oder (4)

$$(6)\qquad \bar{\Gamma}^i(x, x^{(1)}, x^{(2)}+\beta x^{(1)})=\Gamma^i(x, x^{(1)}, x^{(2)})-3\beta x^{(2)i}-\gamma x^{(1)i}\,,$$

wobei $\beta=\dfrac{\sigma}{\rho^2}$, $\gamma=\dfrac{\omega}{\rho^3}$ die Funktionen von $x, x^{(1)}, x^{(2)}$ sind und γ durch β folgendermassen ausgedrückt wird:

$$(7)\qquad \gamma=\frac{d\beta}{dt}+2\beta^2\equiv\beta_{(0)i}x^{(1)i}+\beta_{(1)i}x^{(2)i}-\beta_{(2)i}\Gamma^i+2\beta^2\,,$$

da längs jeder Kurve des Systems $\rho=\dfrac{dt}{d\bar{t}}$, $\sigma=\dfrac{d^2t}{d\bar{t}^2}$, $\omega=\dfrac{d^3t}{d\bar{t}^3}$ sind. Da (5) mit

$$\Gamma^i_{(1)j}x^{(1)j}+2\Gamma^i_{(2)j}x^{(2)j}=3\Gamma^i \qquad \text{(Gleiches für } \bar{\Gamma}^i)$$

gleichbedeutend ist, so erhält man aus (6)

$$(\bar{\Gamma}^i_{(2)k}x^{(1)k}+3x^{(1)i})\,(\beta_{(1)j}x^{(1)j}+2\beta_{(2)j}x^{(2)j}-\beta)+x^{(1)i}(\gamma_{(1)j}x^{(1)j}+2\gamma_{(2)j}x^{(2)j}-2\gamma)=0\,,$$

also erkennt man, dass

$$
(8) \qquad \begin{cases} \beta(x, kx^{(1)}, k^2x^{(2)}) = k\beta(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \,, \\ \gamma(x, kx^{(1)}, k^2x^{(2)}) = k^2\gamma(x, x^{(1)}, x^{(2)}) \,, \end{cases}
$$

insofern

$$
(\Gamma^i_{(2)k}x^{(1)k} + 3x^{(2)i})\, x^{(1)j} = (\Gamma^j_{(2)k}x^{(1)k} + 3x^{(2)j})\, x^{(1)i}
$$

nicht identisch erfüllt sind. Aber, wenn β und γ in (6) den Beziehungen (8) nicht genügen, so kann man leicht statt β und γ andere Funktionen nehmen, die (8) genügen.

Aus einem System (1) ergibt sich die allgemeinste projektive Klasse, welche das System enthält und deren jedes System den affinen Parameter t trägt, mittels projektiver Transformationen (6). Zwei nacheinander durchgeführte projektive Transformationen, die durch $\beta(x, x^{(1)}, x^{(2)})$ und $\bar{\beta}(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})$ bestimmt werden, sind gleichwertig mit einer projektiven Transformation, die der Funktion $\beta(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \bar{\beta}(x, x^{(1)}, x^{(2)} + \beta x^{(1)})$ entspricht, da

$$
\frac{d^2t}{d\bar{t}^2} \Big/ \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 = \frac{d^2t}{d\bar{t}^2} \Big/ \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 + \frac{d\bar{t}}{dt} \cdot \frac{d^2\bar{t}}{d\bar{t}^2} \Big/ \left(\frac{d\bar{t}}{d\bar{t}}\right)^2
$$

$$
= \beta(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \frac{d\bar{t}}{dt}\, \bar{\beta}(x, x^{(\bar{1})}, x^{(\bar{2})})
$$

$$
= \beta(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \bar{\beta}(x, x^{(1)}, x^{(2)} + \beta x^{(1)})
$$

ist. Somit werden die beschränkteren projektiven Klassen durch die projektiven Transformationen mit den nur von x^i oder nur von x^i, $x^{(1)i}$ abhängigen Funktionen β erzeugt.

3. Wir möchten die projektive Transformation (6) in andere Gestalt umschreiben, um ihre Gruppeneigenschaft klarzumachen. Setzen wir

$$
(9) \qquad \begin{cases} y^i \quad = x^i \\ y^{(1)i} = x^{(1)i} \\ y^{(2)i} = x^{(2)i} + \beta(x, x^{(1)}, x^{(2)})\, x^{(1)i} \end{cases}
$$

(der Index a von $y^{(a)i}$ bedeutet nicht die Ableitung nacht t), so wird (6) wegen (7) so geschrieben:

$$
\bar{\Gamma}^i(y, y^{(1)}, y^{(2)}) = \frac{\partial y^{(2)i}}{\partial x^{(2)k}}\, \Gamma^k(x, x^{(1)}, x^{(2)}) + \frac{\partial y^{(2)i}}{\partial x^{(1)k}}(-x^{(2)k})
$$

$$
+ \frac{\partial y^{(2)i}}{\partial x^k}(-x^{(1)k}) - 2\beta x^{(2)i} - 2\beta^2 x^{(1)i} \,,
$$

nebenbei

$$
-y^{(2)i} = \frac{\partial y^{(1)i}}{\partial x^{(1)k}}(-x^{(2)k}) - \beta x^{(1)i} \,, \qquad -y^{(1)i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(-x^{(1)k}) \,.
$$

Setzt man also

$$
(10) \qquad \Gamma^{(2)i} = \Gamma^i \,, \qquad \Gamma^{(1)i} = -x^{(2)i} \,, \qquad \Gamma^{(0)i} = -x^{(1)i}
$$

(Gleiches für $\bar{\Gamma}^{(a)i}$), so transformieren sich $\Gamma^{(a)i}(a=0, 1, 2)$ bei (9) folgendermassen:

$$
(11) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\bar{\Gamma}^{(2)i} = \frac{\partial y^{(2)i}}{\partial x^{(a)k}} \Gamma^{(a)k} - 2\beta^2 x^{(1)i} - 2\beta x^{(2)i}, \\
&\bar{\Gamma}^{(1)i} = \frac{\partial y^{(1)i}}{\partial x^{(a)k}} \Gamma^{(a)k} - \beta x^{(1)i}, \qquad \bar{\Gamma}^{(0)i} = \frac{\partial y^{i}}{\partial x^{(a)k}} \Gamma^{(a)k}.
\end{aligned}
\right.
$$

Neben (9) ziehen wir ferner die Transformation von zwei Hilfsvariablen $(z^{\alpha}) \to (w^{\alpha})$ $(\alpha = \dot{1}, \dot{2})$

$$
(12) \qquad w^{\dot{1}} = z^{\dot{1}}, \qquad w^{\dot{2}} = z^{\dot{2}} + \beta z^{\dot{1}}
$$

in Betracht und setzen

$$
(13) \qquad
\begin{gathered}
\Gamma^{(a)k,\dot{2}} = \Gamma^{(a)k}; \qquad \Gamma^{(0)k,\dot{1}} = 0, \qquad \Gamma^{(1)k,\dot{1}} = -x^{(1)k}, \\
\Gamma^{(2)k,\dot{1}} = -2x^{(2)k},
\end{gathered}
$$

so geht (11) in

$$
(14) \qquad \bar{\Gamma}^{(a)i,\alpha} = \frac{\partial w^{\alpha}}{\partial z^{\beta}} \frac{\partial y^{(a)i}}{\partial x^{(b)k}} \Gamma^{(b)k,\beta}.
$$

Dann sehen wir, dass die projektive Transformation eines Systems der verallgemeinerten "paths" als die Transformation (11) des geometrischen Objekts $\Gamma^{(a)i}$ (10) oder als die Transformation (14) des geometrischen Objekts $\Gamma^{(a)i,\alpha}$ (13) (oder als durch solche dargestellt) angesehen werden kann.

Anschliessend an diese Arbeit möchte ich demnächst die projektive Transformation eines Systems der allgemeinsten "paths" und die projektiven Invarianten einer speziellen Klasse behandeln.